مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال 1404، دوره 15، شماره 1، ص 140–149

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.48284.2328

آنجا که گودارل گره‌گشا نیست

احسان ممتحن [(۱)] [۱] ، افشین امینی [(۲)] و بابک امینی [(۳)]

[(۱)] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران
[(۲,۳)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

دبیر مسئول: امیدعلی شهنی کرمزاده

تاریخ دریافت: 1403/08/13 تاریخ پذیرش: 1404/06/13

چکیده: ک.گودارل دسته‌ای مثال از حلقه های یکّه منظم ارائه کرده است که روی آن‌ها مدولی نوتری و غیر آرتینی وجود دارد. در این مقاله نشان می‌دهیم که بعضی از این مثال‌ها ویلامایر نیستند و به این جهت در یافتن حلقه‌های منظم و ویلامایر که دارای مدولی نوتری اما غیر آرتینی باشند وافی به مقصود نیستند. نیز نشان خواهیم داد که مثال گودارل، به ازای اولین اوردینال نامتناهی، هم از چپ و هم از راست اولیه است.

واژه‌های کلیدی: حلقه منظم فون نویمان، حلقه ویلامایر، حلقه نیم–آرتینی ، مدول نوتری.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

۱ تعاریف و مقدمات

در نوشته‌ی حاضر منظور از حلقه، حلقه‌ی شرکت پذیر و واحددار، و منظور از مدول، مدول‌های راست یا چپ یکانی است. حلقه‌ی R منظم (یکّه منظم) یا منظمِ فون نویمان – به افتخار جان فون نویمان– (یکّه منظم فون نویمان) گفته می شود، هرگاه برای هر عضو a در R، عضوی چون b در R (عضو یکّه‌ای چون u در R)وجود داشته باشد که $aba = a$ $(aua = a)$. حلقه‌ی R ویلامایر چپ یا از چپ ویلامایر گفته می‌شود هرگاه هر مدول ساده‌ی چپ R تزریقی باشد. از آنجا که حلقه‌ی R ویلامایر چپ است اگر و تنها اگر اشتراک زیرمدول‌های ماکسیمال هر R–مدول چپ (یا رادیکال آن مدول) صفر باشد، معلوم می‌شود که روی حلقه‌های ویلامایر هر مدول دارای زیرمدول ماکسیمال است. حلقه‌هائی که هر مدول چپ روی آنها دارای زیرمدول ماکسیمال باشد را بیشین چپ می گویند. حلقه را اولیه‌ی چپ گوئیم هرگاه دارای یک مدول ساده‌ی چپ وفادار باشد. گرچه در حلقه های تعویض پذیر، منظم بودن و ویلامایر بودن مفاهیمی معادل‌اند، در حالت تعویض ناپذیر این دو مفهوم راه خود می‌روند و مفاهیمی مستقل به حساب می‌آیند. با این حال هم حلقه‌های منظم و هم حلقه‌های ویلامایر در یک خاصیت مهم اشتراک دارند و آن این است که ایدآل‌های این حلقه‌ها خودتوان‌اند. به حلقه‌ای که ایدآلهای چپ (راست)آن خودتوان باشد، حلقه تماماً خودتوان چپ (راست) گویند. حلقه‌های منظمی موجوداند که ویلامایر نیستند و حلقه‌های ویلامایری موجود است که منظم نیستند. گیریم

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(A. Amini) bamini@susc.ac.ir, (A. Amini) aamini@susc.ac.ir, (E.Momtahan) e-momtahan@yu.ac.ir

$_{\mathbb{F}}V$ فضای برداری چپ روی میدانِ $\mathbb{F}$ باشد و نیز $L = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$. کارل فیت نشان داده است که مدول ساده‌ی V_L تزریقی است اگر و تنها اگر $_{\mathbb{F}}V$ بُعد متناهی داشته باشد. بنابراین L– در صورتی که فضایِ برداری، بعد نامتناهی داشته باشد – ویلامایر راست نیست. از آنجا که L منظم است، این مثال نشان می‌دهد حلقه‌های منظم لزوماً ویلامایر نیستند. به نظر می‌رسد به اینکه آیا L –در حالتی که V بعد نامتناهی دارد – ویلامایر چپ هست یا خیر کاملاً پاسخ داده نشده است. هنوز پس از تقریباً هفتاد سال، برجسته ترین کار در این زمینه قضیه‌های بارابارا اوسوفسکی است (مقاله‌ی [۹] را بنگرید). او هم از فرض پیوستار تعمیم یافته‌ی کانتور استفاده می‌کند و هم فرض می‌گیرد که عدد اصلیِ $\mathbb{F}$ کمتر از $۲^{\aleph_۰}$ باشد تا ثابت کند L از چپ نیز ویلامایر نیست. اگر چه L از چپ ویلامایر نیست، اما زیرحلقه‌ی جالبی از آن وجود دارد که از چپ ویلامایر است. گیریم

$$(۱)\ K = \{x \in L \mid \dim(xV) < \infty\}$$

این ایدآلی است دوطرفه از L که در حقیقت ساکل (مجموع همه ایدآل‌های مینیمال چپ یا راست) است. وقتی بعد V شمارا باشد، این تنها ایدآل دوطرفه‌ی حلقه L است. مثال فیت عبارت است از

$$(۲)\ \ R = K + \mathbb{F}$$

واضح است که R زیر حلقه L است. با اندکی تلاش می‌توان نشان داد که R یک حلقه ویلامایر راست است. منظم بودن R به مراتب ساده‌تر است، کافی است توجه کنیم که هم $R/K \cong \mathbb{F}$ و هم K هر دو منظم‌اند و بنابراین R هم منظم است. چون K، ساکل R هم هست بعد لِووی R دقیقاً ۲ است. بنابراین R مثالی است از حلقه‌ای منظم و ویلامایر چپ که نیم–آرتینی نیز است. احیاناً همین مثال انگیزه‌ی جوزپه بَجلا در [۱] بود تا نشان دهد که حلقه‌های نیم –آرتینی و ویلامایر، منظم‌اند. بعدها نگارنده‌ی اول در [۸] قضیه‌ی بجلا را بصورت «اگر و تنها اگر» و به نحو زیر تعمیم داده است. توجه کنید که حلقه را بطور متناهی ویلامایر چپ گوئیم هرگاه هر مدول ساده چپ آن بطور متناهی تزریقی باشد (یعنی همریختی از ایدآلهای متناهی مولد چپ حلقه را بتوان گسترش داد).

گزاره ۱.۱. گیریم حلقه‌ی R نیم–آرتینی چپ باشد. در آن صورت R حلقه‌ای بطور متناهی ویلامایر چپ است اگر و تنها اگر R منظم است.

اثبات. نتیجه ی ۱۱.۲ در [۸] را بنگرید. □

اگر بعد فضای برداری $\aleph$ باشد، هر ایدآل دوطرفه L به شکل $I_\beta = \{x \in L \mid \dim(xV) < \beta\}$ که β عدد اصلی‌ای است کوچکتر از $\aleph$. در حقیقت ایدآل‌های دوطرفه‌یِ L تشکیل زنجیری صعودی می‌دهند که طول آن به بُعد V بستگی تام دارد. می‌توان حلقه‌ی L را همچون مدولی روی $L \otimes_{\mathbb{F}} L^{op}$ در نظر گرفت، که در این صورت زیر مدولهایش دقیقاً ایدآل‌های دوطرفه L هستند. لذا روی حلقه منظمِ $L \otimes_{\mathbb{F}} L^{op}$ مدولی تک رشته‌ای داریم که طول رشته آن برابر با بُعد V است. این سلاحی است که گودارل در مثال خود بارها از آن استفاده می‌کند و ارزش آموزشی بسیاری دارد و خوب است به آن اشاره‌ای رسمی‌تر کرد.

لم ۲.۱. گیریم R یک حلقه باشد، در آن صورت مشبّکه ایدآل‌های دوطرفه R با مشبّکه زیر مدول‌های R به عنوان مدول روی حلقه‌ی $R \otimes R^{op}$، یکریخت است.

اثبات. کافی است توجه کنیم که ضرب اسکالر $R \otimes R^{op}$ روی R به صورت زیر عمل می کند. البته کافی است کنش یک عنصر پایه‌ای را مورد توجه قرار دهیم: اگر $r \otimes s \in R \otimes R^{op}$ و t عنصری از R باشد، آنگاه:

$$(r \otimes s).t = rts$$

می‌توان دید که با این عمل R به یک مدول روی حلقه‌ی $R \otimes R^{op}$ بدل می‌گردد و زیرمدول‌ها دقیقاً ایدآل‌های دوطرفه R هستند. □

نتیجه ۳.۱. هنگامی که بُعد V شمارا است، حلقه‌ی خارج قسمتی $S = L/K$ حلقه‌ای ساده (هیچ ایدآل دوطرفه‌ی غیر بدیهی ندارد) و منظم است و به عنوان مدول روی حلقه‌ی $S \otimes_{\mathbb{F}} S^{op}$ ساده است.

۲ مثال گودارل روی میز تشریح

در این بخش نحوه‌ی ساختمان مثال گودارل و اسکلت بندی آن را به دقّت از نظر می‌گذرانیم. خواننده خود را به این نکته توجه می‌دهیم که در [۴] گودارل دو دسته مثال ارائه می‌کند. مثال‌هائی از حلقه‌های یکّه منظم با مدول‌هائی آرتینی که نوتری نیستند و نیز حلقه‌هائی یکّه منظم با مدول‌هائی نوتری که آرتینی نیستند. مقاله‌ی او، [۴] ، شامل سه بخش است. در بخش نخست به کمک نتایجی که توسط جورج الیوت (که البته ارتباطی با بانوی شاعر و رمان نویس عصر ویکتوریا ندارد) در [۲] و البته تنها در حالت شمارا ارائه شده مثال‌هائی به دست می‌دهد. و در

بخشهای دو و سه مثال‌هائی برای هر اوردینال می‌سازد. از آنجا که روی هر حلقه‌ی ویلامایر–در حقیقت روی هر حلقه بیشین – هر مدول آرتینی نوتری است، عملاً امکان استفاده از بخش دوم مقاله‌ی گودارل منتفی است. لذا می‌ماند بخش سوم مقاله، آنجا که گودارل، برای هر اوردینال α حلقه‌ی یکّه منظم و اولی می یابد با مدولی وفادار و دوری که مشبّکه‌ی زیرمدولهایش با بازه‌ی اوردینالی $[۱, \alpha]$ ، پاد – یکریخت است. واضح است که بازه فوق آرتینی است اما نوتری نیست، بنابراین مشبّکه‌ی زیر مدول‌های مدول مذکور، نوتری است اما آرتینی نیست و طول تنها رشته از زیر مدولهایش α است. کار ما، بطور ویژه با این بخش سوم از مقاله‌ی گودارل است.

باز گردیم به بخش سوم مقاله‌ی گودارل و مثالی که ساخته است. به تعدادی تعریف نیاز داریم.

توجه کنیم که در تعریف زیر منظور از حلقه‌ی ماتریس‌ها روی میدان $\mathbb{F}$، حلقه‌ای است به شکل $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$، یعنی حلقه‌ی ماتریس‌های مربعی n در n با درایه‌هائی که اعضای میدان $\mathbb{F}$ هستند.

تعریف ۱.۲. یک جبر ماتریسی روی میدانی مانند $\mathbb{F}$ ، جبری است که با حاصل ضرب تعداد متناهی از حلقه‌های ماتریسها روی میدان $\mathbb{F}$ یکریخت باشد. یک ابرجبر ماتریسی، حد مستقیمِ دنباله‌ای از جبرهای ماتریسی است. منظور از یک $\mathbb{F}$–جبر موضعی ماتریسی، جبری است که هر زیر مجموعه‌ی متناهی آن در یک زیر جبر ماتریسی‌اش قرار گیرد.

در [۴] گودارل نشان می‌دهد که هم ابرجبرهای ماتریسی و هم جبرهای موضعی ماتریسی یکّه منظم‌اند. برای ساختن مثال خود، گودارل، فرآیندی استقرائی را در پیش می‌گیرد که در زیر به توضیح آن می‌پردازیم. گیریم α اوردینالی دلخواه (ونه لزوماً متناهی) باشد. هدف از ساختمان زیر پدید آوردن حلقه‌ای یکّه منظم است به همراه مدولی روی آن که مشبّکه‌ی زیر مدول‌هایش با $[۱, \alpha]$ پاد–یکریخت است. گیریم $R_۱ = \mathbb{F}$ یک میدان باشد، و سپس روی $\mathbb{F}$ فضایی برداری با بعد نامتناهی مانند W در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $Q_۱ = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(W)$. مجموعه‌ی $K_۱ = \{x \in Q_۱ | \dim(xW) < \infty\}$ که در حقیقت ایدآل دوطرفه‌ی $Q_۱$ است را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $R_۲ = K_۱ + \mathbb{F}$. واضح است که $R_۲$ زیر حلقه (و زیرجبری) از $Q_۱$ است. از آنجا که در مسیر ساختمان‌سازی نیاز به حد مستقیم پیدا می‌کنیم همریختی‌هایمان را از همین الان تعریف می‌کنیم: $f_{۲۱} : R_۱ \longrightarrow R_۲$ همان نگاشت شمول در نظر می‌گیریم. حال از آنجا که $R_۲$ را می‌توان به چشم فضائی برداری روی $\mathbb{F}$ نگریست، قرار می‌دهیم $Q_۲ = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(R_۲)$. و دوباره قرار می‌دهیم

$$K_۲ = \{x \in Q_۲ | \dim(xR_۲) < \infty\}$$

و توجه کنیم که $R_۲$ را می‌توان به مثابه‌ی زیر جبری از $Q_۲$ در نظر گرفت، در حقیقت $R_۲$ را می‌توان تبدیلاتی از $Q_۲$ در نظر گرفت که به وسیله‌ی ضرب از چپ (اگر فضا را از راست در نظر گرفته باشیم و از راست اگر فضا را از چپ نگریسته باشیم) عنصری از $R_۲$ تعریف می‌شوند. حال قرار می‌دهیم $R_۳ = K_۲ + R_۲$. نیز تعریف می‌کنیم $f_{۳۲} : R_۲ \longrightarrow R_۳$. همان نگاشت شمول. بطور کلی گیریم $\mathbf{۳} < \alpha$ یک اوردینال باشد و برای همه اوردینالهای β ی کوچکتر از آن همه حلقه‌های R_β ساخته شده باشند. اگر α اوردینالی حدی باشد، R_α را حد مستقیم دستگاه

$$\{(R_\beta, f_{\lambda\beta}) | \lambda \leq \beta < \alpha\}$$

تعریف می‌کنیم. و اگر $\alpha = \beta + ۱$ در آن صورت قرار می‌دهیم $Q_\beta = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(R_\beta)$ و R_β زیر جبری از Q_β در نظر می‌گیریم که مشتمل بر تمامی تبدیلاتی است که توسط ضرب عنصری از R_β تعریف می‌شود. برای فهم بهتر آنچه واقعاً در حال اتفاق افتادن است بگذارید خودمان را به بازه‌ی $[۱, \omega]$ محدود کنیم. معلوم است که اولین جائی که در ساختن این حلقه‌ها به حد مستقیم نیاز می‌شود در ساختن خودِ R_ω است. نخست گزاره مفیدی را به اثبات می‌رسانیم. پیش از بیان گزاره، به دو لم نیاز داریم.

لم ۲.۲. گیریم R حلقه‌ای تماماً خودتوانِ چپ باشد، در آن صورت اگر I ایدآلی از R باشد و N به عنوان R/I– مدول تزریقی، N به عنوان R–مدول نیز تزریقی است.

اثبات. به تمرینات ۹.۲۳ کتاب [۱۰] مراجعه کنید. □

لم ۳.۲. گیریم $\phi : T \longrightarrow L$ یک همریختی حلقه‌ای باشد و N مدولی راست و تزریقی روی L باشد. اگر ${}_TL$ تخت باشد، در آن صورت N به عنوان T–مدول نیز تزریقی است.

اثبات. به لم ۱۷.۶ در مرجع [۳] مراجعه کنید. □

گزاره‌ی زیر در حقیقت تعمیم ساختمانی است که فیت ایجاد کرد و ما در فرمول (۲) متذکر آن شدیم. نیز به ازای تمامی اعداد طبیعی n، حلقه‌های R_n که گودارل می‌سازد، کم وبیش الگوهای ساختی مشابه با الگوئی دارند که در این گزاره آن را به صراحت بیان می‌کنیم. در گزاره زیر گیریم $V_{\mathbb{F}}$ یک فضای برداری نامتناهی بعد روی میدان $\mathbb{F}$ ، $L = \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$، حلقه‌ی همه‌ی عملگرهای خطی روی این فضای برداری باشد.

گزاره ۴.۲. فرض کنیم N ایدآل دوطرفه‌ی سره و غیر صفری از L و R حلقه‌ای از راست ویلامایر باشد که $N \cap R = (۰)$. اکنون حلقه‌ی $T = N \oplus R$ را در نظر گرفته و فرض کنیم از T به L همریختی‌ای حلقه‌ای موجود و ${}_TL$ تخت باشد (به عنوان مثال T منظم باشد)، در آن صورت T از راست حلقه‌ای ویلامایر است.

اثبات. گیریم S یک T–مدول راست ساده باشد. اگر $SN = (\circ)$، در آن صورت S یک T/N –مدول راست ساده است. از آنجا که $T/N \cong R$ و R یک حلقه ویلامایر راست است پس S به عنوان T/S –مدول تزریقی است لذا بنا به لم ۲.۲، به عنوان T –مدول هم تزریقی است. اگر $SN \neq (\circ)$، چون S ساده است لذا $SN = S$. در این حالت S را می توان یک ایدآل مینیمال راستِ T در نظر گرفت. چون $SL = SNL = SN = S$ لذا S ایدآل مینیمال راست L نیز هست. چون L منظم و از راست خودتزریقی است پس S یک L–مدول راست تزریقی است، پس بنا به لم ۳.۲، یک T–مدول راست تزریقی نیز هست. □

توجه کنیم که در گزاره فوق R لزوماً زیرحلقه‌ی L نیست. پس بر اساس این گزاره، اگر در (۲)، به جای $\mathbb{F}$، بر سبیل مثال، میدان $\mathbb{F}(x)$ را بگذاریم بازهم حلقه‌ای ویلامایر خواهیم داشت. از آنجا که L حاوی نسخه‌ای از $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ است، با گذاشتن $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ یا هر حاصلضرب متناهی آنها به جای $\mathbb{F}$ در (۲)، می توان به دسته‌ی پرشماری از زیر حلقه‌های منظم و ویلامایر راست از L دست یافت. ناگفته نماند که تمامی این حلقه‌ها از چپ ویلامایر نیستند.

نکته‌ی دیگر که اشاره بدان لازم به نظر می‌رسد رفتار حلقه‌های ویلامایر در قبال دو عمل حد مستقیم و حد معکوس است. هرچند حد مستقیم حلقه‌های منظم، حلقه‌ای است منظم، اما نه حد مستقیم و نه حد معکوس حلقه‌های ویلامایر، لزوماً حلقه‌ای ویلامایر نیست.

گزاره ۵.۲. گیریم $\{R_n | n \in \mathbb{N}\}$ دستگاه مستقیم یا معکوسی از حلقه‌های ویلامایر باشد در آن صورت:

۱. حد مستقیم R_n ها، $\varinjlim R_n$، لزوماً ویلامایر نیست.

۲. حد معکوس R_n ها $\varprojlim R_n$ لزوماً حلقه‌ای ویلامایر نیست.

۳. حد معکوسِ حلقه‌های منظم نیز لزوماً منظم نیست.

اثبات. (۱) برای ساختن مثال نقض، به زیر حلقه‌های L توجه می کنیم. دقّت کنیم که همانطور که $\mathbb{F}$ زیر جبری از L است به ازای هر عدد طبیعی n، حلقه‌ی L، شامل نسخه ای از حلقه‌ی ماتریسی $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ است. حال دنباله زیر از زیرحلقه‌های ماتریسی L را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbb{F} < \mathrm{M}_۲(\mathbb{F}) < \mathrm{M}_۴(\mathbb{F}) < \cdots < \mathrm{M}_{۲^n}(\mathbb{F}) < \cdots$$

و نشان می‌دهیم حلقه‌ی

$$T = \bigcup_{n=۱}^{\infty} \mathrm{M}_{۲^n}(\mathbb{F})$$

از راست ویلامایر نیست. برای این کار نشان می‌دهیم V یک مدول ساده روی T است و سپس نشان می‌دهیم که تزریقی نیست. برای اینکه نشان دهیم V به عنوان T–مدول ساده است، توجه می‌کنیم که به ازای هر دو بردار $x, y \in V$ ماتریس A در T موجود است به نحوی که $Ax = y$. می‌دانیم که می‌توان این دو بردار را بصورت منحصر به فردی به صورت ترکیب خطی از عناصر پایه V نوشت:

$$x = \lambda_۱ e_۱ + \cdots + \lambda_n e_n$$

و

$$y = \beta_۱ e_۱ + \cdots + \beta_n e_n$$

. در آن صورت واضح است که $x, y \in \mathbb{F}^n$ پس ماتریس A در $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ وجود دارد که $Ax = y$. کافی است m را چنان اختیار کنیم که $n < ۲^m$. در آن صورت می‌توان A را به عنوان عضوی از $\mathrm{M}_{۲^m}(\mathbb{F})$ نیز در نظر گرفت و لذا $A \in T$. پس $Ax = y$ لذا V به عنوان T مدول ساده است. اینکه V تزریقی نیست اثباتی کم و بیش مشابه با تزریقی نبودن V به عنوان L مدول دارد، بنابراین از ارائه‌ی برهان آن صرف نظر می‌کنیم.

(۲) کافی است قضیه‌ای جالب از گورسا–ژِرِمی در [۵]، را یادآور شویم که حلقه‌ی

$$\prod_{n=۱}^{\infty} \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_n)$$

نه از چپ و نه از راست ویلامایر نیست. از آنجا که ضرب مستقیم حالت خاصی است از حد معکوس، پس ادعای دوم گزاره فوق نیز به اثبات می‌رسد.

(۳) این مطلبی است که آن را در [۳، Example ۱.۱۰] می‌توان یافت. □

پیش از این هم به دلیل اهمیت بحث گفتیم که به ازای هر عدد طبیعی n، حلقه‌ی R_n از الگوئی مشابه و در توافق با گزاره ۴.۲ ساخته شده است و دقت کنیم که این نوع ساختمانِ حلقه‌های منظم و ویلامایر خود تعمیمی است از نحوه ساختمانی که به نظر می‌رسد فیت برای نخستین بار به آن اشاره کرد و ما در فرمول (۲)، آن را آوردیم. فیت به جای زیر حلقه ویلامایر، خودِ میدانِ $\mathbb{F}$ را به خدمت می‌گیرد. اکنون به حلقه‌های گودارل بر می‌گردیم و قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۶.۲. گیریم نمادها تماماً همان نمادهای ساختمان مثال گودارل باشد. در آن صورت:

۱. به ازای هر اوردینال متناهی α، حلقه‌ی R_α منظم و ویلامایر راست و نیم–آرتینی راست است و طول رشته لووی آن α است.

۲. به ازای هر اوردینال α حلقه R_α ماتریسی موضعی است.

۳. گیریم $\alpha > 1$ یک اوردینال باشد و $0 \neq x \in R_\alpha$. در آن صورت $\dim_{\mathbb{F}}(xR_\alpha) = \infty$.

اثبات. (۱) گیریم $\alpha = \beta + 1$ اوردینالی غیر حدی باشد. اگر توجه کنیم که الگوئی که R_α ساخته می‌شود الگوئی است مطابق با آنچه در گزاره ۴.۲ نشان دادیم همان گزاره اثبات می‌کند که R_α ویلامایر و منظم اند. نیز توجه کنیم که

$$\mathrm{soc}_\alpha(R_n) \cong \mathrm{soc}(R_i)$$

برای $1 \leq i \leq n$.
(۳)،(۴) اثبات این موارد به ترتیب در [۴] لم های ۳.۲ و ۳.۳ آمده است. □

نتیجه ۷.۲. به ازای هر n، روی حلقه R_n ، هر مدول نوتری، آرتینی است.

اثبات. اگر حلقه ای نیم–آرتینی باشد، مدول‌های روی آن نیز نیم–آرتینی هستند. و هر مدول نوتری نیم آرتینی، لاجرم آرتینی است. □

شکل ایدآل‌های دوطرفه‌ی حلقه‌های گودارل به گونه‌ای خاص است. در گزاره زیر نخست شکل ایدآل‌های دو طرفه R_α ها مشخص می‌شود. سپس ما آنچه گفته شده را در مورد R_ω به آزمون می‌گذاریم. نخست به تعریفی نیاز داریم.

تعریف ۸.۲. گیریم $\beta < \alpha$ دو اوردینال باشند. در آن صورت $H_{\alpha\beta} := R_\alpha f_{\alpha\beta+1}(K_\beta)R_\alpha$ ایدآلی دوطرفه از حلقه‌ی R_α است. نیز خواهیم دید که هر ایدآل دوطرفه‌ی این حلقه نیز به همین شکل است.

گزاره ۹.۲. ویژگی‌های زیر در مورد ایدآل‌های تعریف شده در بالا برقرار است.

۱. اگر $\beta < \alpha$، $f_{\alpha\beta}(R_\beta) \cap H_{\alpha\beta} = (0)$ و $f_{\alpha\beta}(R_\beta) + H_{\alpha\beta} = R_\alpha$.

۲. اگر $\gamma < \beta < \alpha$، آنگاه $H_{\alpha\gamma} < H_{\alpha\beta}$.

۳. برای هر ایدآل دو طرفه I از حلقه R_α اوردینال $\beta < \alpha$ وجود دارد که $I = H_{\alpha\beta}$.

۴. مشبّکه ایدآل‌های دو طرفه‌ی R_α با بازه‌ی $[0, \alpha]$ پاد یکریخت است.

اثبات. موارد فوق در [۴] به ترتیب در لم های ۴.۳، ۵.۳، ۶.۳ و ۷.۳ به اثبات رسیده‌اند. □

نتیجه ۱۰.۲. مشبّکه‌ی ایدآلهای R_ω با بازه‌ی $[0, \omega]$ پاد یکریخت است. در حقیقت ایدآل‌های دو طرفه‌ی R_ω به شکل

$$R_\omega > H_1 > H_2 > \cdots > H_\omega = (0)$$

هستند.

۳ نتایج اصلی‌تر

نشان می‌دهیم که دسته‌ی بزرگی از مثال های گودارل (که در بخش ۲ به توصیف دقیق آن‌ها پرداختیم) هرگز نه از راست و نه از چپ ویلامایر نیستند.

قضیه ۱.۳. به ازای هر اوردینال $\alpha \geq \omega$، حلقه‌ی $R_\alpha \otimes_{R_\alpha} R_\alpha^{op}$ ، نه از چپ و نه از راست ویلامایر نیست.

اثبات. گیریم α یک اوردینال باشد. حلقه R_α، را در نظر می‌گیریم و آن را به عنوان $R_\alpha \otimes_{R_\alpha} R_\alpha^{op}$ –مدول راست مد نظر قرار می‌دهیم. می‌دانیم که مشبکّه‌ی زیر مدول‌های R_α، با مشبکّه‌ی ایدآل‌های دوطرفه‌ی حلقه‌ی R_α، دقیقا یکی است. به عبارت دیگر $R_\alpha \otimes_{R_\alpha} R_\alpha^{op}$ –مدول R_α ، یک مدول تک رشته‌ای است با رشته‌ی زیرمدول‌های زیر:

$$R_\alpha > H_1 > H_2 > \cdots > H_\alpha = 0$$

حال $\frac{R_\alpha}{H_2}$، به عنوان $R_\alpha \otimes_{R_\alpha} R_\alpha^{op}$ –مدول، طولی برابر با ۲ دارد و در عین حال نیم ساده نیست (زیرا H_1 جمعوند نیست). این مطلب نشان می‌دهد که $R_\alpha \otimes_{R_\alpha} R_\alpha^{op}$ یک حلقه ویلامایر راست نیست، زیرا روی یک حلقه ویلامایر راست هر مدول راست با طول متناهی نیم ساده است. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $R_\alpha \otimes_{R_\alpha} R_\alpha^{op}$ ، حلقه ویلامایر چپ نیست. □

در زیر می‌خواهیم نشان دهیم که ساکل حلقه R_ω صفر است. برای این کار به یک لم نیازمندیم که به خودی خود نیز جالب توجه است.

لم ۲.۳. گیریم R حلقه‌ای نیم–اول باشد و $\operatorname{soc}(R) = \oplus S_i$ که هر S_i بخش زیرمدول‌های نیم ساده همگن است. در آن صورت هر S_i یک ایدآل دوطرفه‌ی مینیمال است.

اثبات. گیریم U_R و V_R دو ایدآل مینیمال راست حلقه R باشند و نیز داشته باشیم $U_R \cong V_R$. یعنی این دو ایدآل مینیمال راست در یکی از S_i ها قرار دارند. چون R نیم–اول است، پس عناصر خودتوان e, f وجود دارند به نحوی که $U = eR$ و $V = fR$. به نمودار زیر توجه کنیم:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & U & \longrightarrow & R \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ & & V & & \end{array}$$

که ϕ یکریختی میان U و V است. حال می‌توان ϕ را از R به V توسیع داد. یعنی $\bar{\phi} : R \longrightarrow V$ که $\bar{\phi} \in \operatorname{End}(R)$. عنصر $r \in R$ وجود دارد که برای هر $x \in R$ داریم $\bar{\phi}(x) = rx$. لذا می توان نوشت $\bar{\phi}(U) = \phi(U) = V$، پس $V = rU$. این نشان می‌دهد که V مضربی است از U. پس $RU = S_i$ و براین اساس S_i ایدآل مینیمال حلقه R است.

□

گزاره ۳.۳. ساکل حلقه R_ω صفر است.

اثبات. تا کنون ساختار ایدآل‌های دو طرفه‌ی R_ω را در نتیجه‌ی ۱۰.۲ مشاهده کردیم. لذا می‌دانیم که R_ω ایدآل مینیمال دو طرفه ندارد، پس بنا به لم ۲.۳ می‌بینیم که $\operatorname{soc}(R_\omega) = (0)$. □

نتیجه ۴.۳. حد مستقیم حلقه‌های منظمِ ویلامایر و نیم آرتینی لزوماً نیم–آرتینی نیست.

اثبات. در گزاره ۳.۳ دیدیم که حد مستقیم R_n ها یعنی R_ω دارای ساکل صفر است، با آنکه تمامی R_n ها نیم–آرتینی اند. □

به عنوان حسن ختام مقاله نشان می‌دهیم که R_ω حلقه‌ای اولیه(یعنی صاحب مدول ساده وفادار) است. ولی پیش از اثبات مطلب نیاز به قضیه زیر از [۶] داریم. پیش از ارائه قضیه یادآور می‌شویم که در یک مجموعه جزئا مرتب P زیرمجموعه C را هم پایان نامیم هرگاه برای هر عضو $p \in P$ عنصر $c \in C$ موجود باشد که $p \leq c$.

قضیه ۵.۳. گیریم R حلقه‌ای اول باشد که در آن هر ایدآل راست ناصفر شامل یک خودتوان ناصفر باشد و نیز اگر R مجموعه‌ای هم پایان و شمارا از ایدآل‌های دوطرفه داشته باشد، آنگاه R هم از چپ و هم از راست اولیه است.

اثبات. به اثبات قضیه ۱.۱ از منبع [۶]مراجعه کنید. □

گزاره ۶.۳. حلقه R_ω هم از چپ و هم از راست اولیه است.

اثبات. چون R_ω منظم است و نیز بنا به نتیجه ۱۰.۲ مجموعه ایدآل‌های دو طرفه‌اش شمارا و هم پایان است، پس بنا به قضیه‌ی فوق گزاره اثبات می‌شود. □

مسأله ۷.۳. اینکه آیا برای هر اوردینال نامتناهی α حلقه‌ی R_α اولیه است یا نه هنوز روشن نیست.

فهرست منابع

[1] Baccella, G.,1995. *semi-artinian V-rings and semi-artinian von Neumann regular rings, J. Algebra 173,* pp 587-612.

[2] Elliott, G A., 1976. *On the Classification of Inductive Limits of Sequences of Semisimple Finite-Dimensional Algebras* J. Algebra, 38, pp 29-44.

[3] K.R.Goodearl, 1979. *Von Neumann Regular Rings*, Pitman, London.

[4] Gooderl, K.R., 1980. Artinian and Noetherian modules over regular rings. *Comm. Algebra, 8(5)*, pp. 477-504. doi:10.1080/00927878008822470.

[5] Goursaud, J.M. and Jeremy. L. 1977. *Une notion de rang dans les facteurs reguliers autoinjectifs a droite*, Comm. Alg. 5 , pp 829–839.

[6] Fisher, JW. and Snider, R., 1974. Prime von Neumann regular rings and primitive group rings. *Proc.Amer.Math.Soc, 44*, (2) doi:10.2307/2040414

[7] Herbera, D., 2009. *Simple modules over small rings,* Modules and representations, Contemp. Math.,480, Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp 189-205.

[8] Momtahan, E., 2011. On Semi-Artinian weakly co-emisimple modules, Bultein of IMS,(37), 3, pp 149-157.

[9] Osofsky, B., 1966, cyclic injective modules of full linear rings, Proc. Amer. Math. Soc., 17, pp 247-252.

[10] Wisbuer, R., 1991. Foundations of Rings and Module Theory, Gordon and Breach.

Where Goodearl falls short

E. Momtahan[(1)2], A.Amini[(2)] and B.Amini[(3)]

[(1)] Department of Mathematics, Yasouj University, Yasouj, Iran
[(2,3)] Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Shiraz University, Shiraz, Iran
Communicated by: O.A.S. Karamzadeh

Received: 11 March 2024 Accepted: 9 May 2025

Abstract: K. Goodearl has provided a class of examples of unit-regular rings over which there exist Noetherian but non-Artinian modules. In this paper, we show that some of these examples are not Villamayor rings, and therefore they do not suffice for finding regular Villamayor rings that admit Noetherian but non-Artinian modules. We also show that Goodearl's example, for the first infinite ordinal, is primitive both on the left and on the right.

Keywords: Von Neumann Regular rings, Villamayor rings, semi-Artinian ring, Noetherian Modules.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (E. Momtahan) e-momtahan@yu.ac.ir, (A. Amini) [(2)]aamini@susc.ac.ir and (B.Amini)[(3)]bamini@susc.ac.ir