مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۳، شماره ۱۵، ص ۱–۱۵

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.44730.2198

یک روش ترکیبی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری زمانی در یک دامنه مکانی بی‌کران

محمد حسین حیدری [(۱)] [۱]، سیده الهام حسینی [۱] حدیث آزین [۲]

[(۱)] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران
[(۲)] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

دبیر مسئول: مرتضی فتوحی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۰۳

چکیده: در این مقاله، دو مدل از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری زمانی یعنی معادلات سوبولوف و کاتانئو با مشتق کاپوتو در یک دامنه بی‌کران مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای حل این نوع معادلات، از تغییرمتغیر مناسب در چندجمله‌ای‌های ژاکوبی برای ساختن توابع پایه‌ای متعامد به نام توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی در یک دامنه بی‌کران استفاده می‌شود. چندجمله‌ای‌های متعامد ژاکوبی انتقال‌یافته و توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی برای گسسته‌سازی و تقریب متغیرهای زمان و مکان، به ترتیب به کار گرفته می‌شوند. هم‌چنین، فرمول‌هایی صریح نیز برای محاسبه مشتقات کلاسیک و کسری کاپوتو در حل عددی این معادلات محاسبه می‌شوند. روش پیشنهاد شده، حل مسائل مطرح شده را به حل دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌کند که با محاسبه مجهولات این دستگاه جبری، جواب عددی مسائل مطرح شده، به دست می‌آیند. در نهایت دقت و کارایی روش ارائه شده با حل چند مثال عددی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته، معادله سوبولوف، معادله کاتانئو، دامنه بی‌کران، مشتق کسری کاپوتو.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

۱ مقدمه

معادلات دیفرانسیل کسری در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. مطالعه حسابان کسری و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل دارای پیشینه تاریخی غنی است. معادلات دیفرانسیل کسری به دلیل توانایی آنها در توصیف پدیده‌های پیچیده با اثرات حافظه و تعاملات دوربرد، کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف علمی پیدا کرده‌اند [۷–۹، ۱۲]. حل معادلات دیفرانسیل کسری به دلیل ماهیت

[۱] محمدحسین حیدری
رایانامه: h. (S. E. Hosseini), seyedeelhamhosseini97@gmail.com (M. H. Heydari) heydari@sutech.ac.ir (H. Azin) azin1370@gmail.com

غیرمحلی آنها یک کار چالش برانگیز است. ثابت شده است که روش‌های عددی ابزار قدرتمندی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری هستند. تکنیک‌های عددی مختلفی برای تقریب حل معادلات دیفرانسیل کسری توسعه داده شده است. به‌عنوان مثال می‌توان منابع [۳، ۵، ۶] را نگریست.

گاهی حل معادلات دیفرانسیل مربوط به مسائل فیزیکی به نوع شرایط مرزی بستگی دارد. در بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، جواب معادله دیفرانسیل مربوطه دارای دامنه بسیار بزرگی است که در بی‌نهایت به‌صورت هموار به صفر میل می‌کند. حل عددی چنین معادلاتی بسیار پیچیده است و ارائه یک راه‌حل مناسب و دقیق برای آنها یک چالش اساسی در زمینه آنالیز عددی است.

در این مقاله، روشی عددی برای حل معادلات کسری زمانی از نوع مشتق کاپوتو سوبولوف و کاتانئو در یک دامنه بی‌کران ارائه می‌شود. معادله سوبولوف، حالت شبه ایستاده اجسام[۲] در نیمه‌رسانا، انتقال گرما با رسانا یا دمای ترمودینامیک و گردش سیالات با استفاده از شکافتن سنگ‌ها را توصیف می‌کند. در واقع این معادله، مدل ریاضی آب‌های زیرزمینی غیر ساکن را که جریان با اثر دینامیک فشار مویرگی[۳] در یک محیط متخلخل ایجاد می‌کند، مدل‌بندی می‌کند. یکی از ویژگی‌های جالب این نوع مدل، قابلیت حفظ کمیت‌هایی مانند جرم، گرما و تکانه است [۱].

معادله‌ی کاتانئو[۴] استاندارد معمولاً با استفاده از فرم تعمیم‌یافته قانون فیک[۵] به دست می‌آید که فرایند انتشار با شتاب انتشار متناهی را شرح می‌دهد. به‌طور کلی معادله کاتانئو در بسیاری از حوزه‌های علمی و مهندسی به‌عنوان یک مدل دقیق برای توصیف انتقال حرارت در مواد با حرکت سریع موج‌ها، تغییر شدید دما، فیزیک پلاسما، مهندسی شیمی و مواد مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲، ۱۱، ۱۴].

ساختار و چارچوب کلی این مقاله به این شرح است: در بخش ۲ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته و خواص اصلی آنها مرور می‌شود. بخش ۳ به بررسی توابع تانژانت هایپربولیک-ژاکوبی و ویژگی آنها اختصاص دارد. همگرایی بسط توابع تانژانت هایپربولیک-ژاکوبی در بخش ۴ بررسی شده است. روش عددی مورد نظر برای حل معادلات کسری زمانی سوبولوف و کاتانئو در یک دامنه مکانی بی‌کران در بخش ۵ ارائه می‌شود. دقت و کارایی روش پیشنهادی با ارائه چند مثال عددی در بخش ۶ بررسی می‌شود. در نهایت مقاله با نتیجه‌گیری در بخش ۷ به پایان می‌رسد.

۲ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که نقش بسزایی در آنالیز ریاضی به‌ویژه در زمینه توابع خاص دارند. در این بخش، تعریف و ویژگی مهم چندجمله‌ای‌های ژاکوبی $J_i^{\eta,\sigma}(x)$ و ژاکوبی انتقال‌یافته $\mathcal{J}_i^{\eta,\sigma}(t)$ در بازه دلخواه و متناهی $[0, T]$ بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲. [۱۳] برای هر $i \in \mathbb{Z}^+$ چندجمله‌ای ژاکوبی مرتبه i به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$J_i^{\eta,\sigma}(x) = \frac{\Gamma(i+\eta+1)}{i!\Gamma(i+\eta+\sigma+1)} \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} \frac{\Gamma(i+r+\eta+\sigma+1)}{\Gamma(r+\eta+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^r, \tag{۱.۲}$$

که در آن $\eta, \sigma > -1$ و $t \in I = (-1, 1)$.

تابع وزن این چندجمله‌ای‌ها برابر است با $\chi^{\eta,\sigma}(x) = (1-x)^\eta (1+x)^\sigma$. بنابراین، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی یک دستگاه متعامد به‌صورت زیر تشکیل می‌دهند

$$(J_n^{\eta,\sigma}, J_m^{\eta,\sigma})_{\chi^{\eta,\sigma}} = \int_{-1}^{1} J_n^{\eta,\sigma}(x) J_m^{\eta,\sigma}(x) \chi^{\eta,\sigma}(x) dx = \varrho_n^{\eta,\sigma} \delta_{nm}, \tag{۲.۲}$$

که در آن δ_{nm} تابع دلتا کرونکر است و

$$\varrho_n^{\eta,\sigma} = \frac{2^{\eta+\sigma+1}\Gamma(n+\eta+1)\Gamma(n+\sigma+1)}{(2n+\eta+\sigma+1)n!\Gamma(n+\eta+\sigma+1)}. \tag{۳.۲}$$

هم‌چنین، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی در رابطه بازگشتی زیر نیز صدق می‌کنند

$$J_{i+1}^{\eta,\sigma}(x) = (a_i^{\eta,\sigma} x - b_i^{\eta,\sigma}) J_i^{\eta,\sigma}(x) - c_i^{\eta,\sigma} J_{i-1}^{\eta,\sigma}(x), \quad i \geq 1, \tag{۴.۲}$$

[2] Quasistationary phenomena
[3] Dynamic capillary-pressure
[4] Cattaneo equation
[5] Fick's law

با

$$J_{۰}^{\eta,\sigma}(x) = ۱, \quad J_{۱}^{\eta,\sigma}(x) = \frac{۱}{۲}(\eta+\sigma+۲)x + \frac{۱}{۲}(\eta-\sigma), \tag{۵.۲}$$

که در آن

$$a_i^{\eta,\sigma} = \frac{(۲i+\eta+\sigma+۱)(۲i+\eta+\sigma+۲)}{۲(i+۱)(i+\eta+\sigma+۱)}, \tag{۶.۲}$$

$$b_i^{\eta,\sigma} = \frac{(\sigma^۲-\eta^۲)(۲i+\eta+\sigma+۱)}{۲(i+۱)(i+\eta+\sigma+۱)(۲i\eta+\sigma)}, \tag{۷.۲}$$

و

$$c_i^{\eta,\sigma} = \frac{(i+\eta)(i+\sigma)(۲i+\eta+\sigma+۲)}{(i+۱)(i+\eta+\sigma+۱)(۲i+\eta+\sigma)}. \tag{۸.۲}$$

معادلاتی که در این تحقیق بررسی می‌شوند، متغیر زمان آن در دامنه کراندار و دلخواه $[۰,T]$ است. بنابراین، با استفاده از تغییر متغیر $x = \frac{۲}{T}t - ۱$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به بازه مورد نظر انتقال داده می‌شوند.

تعریف **۲.۲**. چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته، $\mathcal{J}_i^{\eta,\sigma}(t)$ در بازه $[۰,T]$ برای $\eta,\ \sigma > -۱$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathcal{J}_i^{\eta,\sigma}(t) = \frac{\Gamma(i+\eta+۱)}{i!\Gamma(i+\eta+\sigma+۱)} \sum_{r=۰}^{i} \binom{i}{r} \frac{\Gamma(i+r+\eta+\sigma+۱)}{۲^r\Gamma(r+\eta+۱)} \left(\frac{۲}{T}t - ۲\right)^r. \tag{۹.۲}$$

به‌علاوه، این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان با فرمول صریح زیر بازنویسی کرد

$$\mathcal{J}_i^{\eta,\sigma}(t) = \begin{cases} ۱, & i = ۰, \\ \displaystyle\sum_{r=۰}^{i} (-۱)^{r+i} \frac{\Gamma(i+\sigma+۱)\Gamma(i+r+\eta+\sigma+۱)}{T^r r!(i-r)!\Gamma(r+\sigma+۱)\Gamma(i+\eta+\sigma+۱)} t^r, & i \geq ۱. \end{cases} \tag{۱۰.۲}$$

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته در شرط تعامد زیر صدق می‌کنند

$$(\mathcal{J}_n^{\eta,\sigma}, \mathcal{J}_m^{\eta,\sigma})_{\mathcal{W}^{\eta,\sigma}} = \int_{۰}^{T} \mathcal{J}_n^{\eta,\sigma}(t)\mathcal{J}_m^{\eta,\sigma}(t)\mathcal{W}^{\eta,\sigma}(t)dt = \frac{T}{۲}\varrho_n^{\eta,\sigma}\delta_{nm}, \tag{۱۱.۲}$$

که در آن $\mathcal{W}^{\eta,\sigma}(t) = \chi^{\eta,\sigma}\left(\frac{۲}{T}t - ۱\right)$ و $\varrho_n^{\eta,\sigma}$ در رابطه (۳.۲) معرفی شده است. از این‌رو، هر تابع مربع انتگرال‌پذیر $f(t)$ نسبت به تابع وزن $\mathcal{W}^{\eta,\sigma}(t)$ را می‌توان با چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته در بازه $[۰,T]$ به‌صورت زیر تقریب زد

$$f(t) \simeq \sum_{i=۰}^{\mathbf{N}} f_i\mathcal{J}_i^{\eta,\sigma}(t) \triangleq \mathbf{F}_{\mathbf{N}}^T\Psi_{\mathbf{N}}^{\eta,\sigma}(t), \tag{۱۲.۲}$$

که در آن $\mathbf{F}_{\mathbf{N}}$ بردار ستونی $(\mathbf{N}+۱)$ بعدی و $\Psi_{\mathbf{N}}^{\eta,\sigma}(t)$ ماتریس مربعی $(\mathbf{N}+۱)$ بعدی به‌صورت

$$\mathbf{F}_{\mathbf{N}} = [f_۰ \quad f_۱ \quad \cdots \quad f_{\mathbf{N}}]^T, \tag{۱۳.۲}$$

$$\Psi_{\mathbf{N}}^{\eta,\sigma}(t) = [\mathcal{J}_۰^{\eta,\sigma}(t) \quad \mathcal{J}_۱^{\eta,\sigma}(t) \quad \cdots \quad \mathcal{J}_{\mathbf{N}}^{\eta,\sigma}(t)]^T, \tag{۱۴.۲}$$

با

$$f_i = \frac{۲}{T\varrho_i^{\eta,\sigma}} \int_{۰}^{T} f(t)\mathcal{J}_i^{\eta,\sigma}(t)\mathcal{W}^{\eta,\sigma}(t)dt, \qquad i = ۰,۱,\ldots,\mathbf{N}, \tag{۱۵.۲}$$

است.

۳ توابع تانژانت هایپربولیک-ژاکوبی

در این بخش، با استفاده از تغییر متغیر $\tanh(Lx)$ برای ثابت دلخواه و مثبت L، توابع تانژانت هایپربولیک- ژاکوبی را در دامنه بی‌کران معرفی می‌کنیم. خواص و ویژگی‌های اساسی این توابع را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف **۱.۳**. [۱۰] تابع تانژانت هایپربولیک - ژاکوبی مرتبه n برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\eta, \sigma > -1$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_n^{\eta,\sigma}(x) = J_n^{\eta,\sigma}\Big(\tanh(Lx)\Big), \quad \forall x \in \Omega = (-\infty, +\infty), \tag{۱.۳}$$

که در آن L ثابتی دلخواه و مثبت است.

فرمول صریحی برای این توابع با استفاده از رابطه (۱.۲) به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} T_n^{\eta,\sigma}(x) = & \frac{\Gamma(n+\eta+1)}{n!\Gamma(n+\eta+\sigma+1)} \\ & \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+k+\eta+\sigma+1)}{\Gamma(k+\eta+1)} \left(\frac{\tanh(Lx)-1}{2}\right)^k. \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

هم چنین، باتوجه به روابط بیان‌شده برای توابع ژاکوبی، توابع تانژانت هایپربولیک-ژاکوبی در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$T_{n+1}^{\eta,\sigma}(x) = \Big(a_n^{\eta,\sigma}\tanh(Lx) - b_n^{\eta,\sigma}\Big)T_n^{\eta,\sigma}(x) - c_n^{\eta,\sigma}T_{n-1}^{\eta,\sigma}(x), \; n \geq 1, \tag{۳.۳}$$

$$(n+\eta+\sigma)T_n^{\eta,\sigma}(x) = (n+\sigma)T_n^{\eta,\sigma-1}(x) + (n+\eta)T_n^{\eta-1,\sigma}(x), \tag{۴.۳}$$

با

$$T_0^{\eta,\sigma}(x) = 1, \quad T_1^{\eta,\sigma}(x) = \frac{1}{2}(\eta+\sigma+2)\tanh(Lx) + \frac{1}{2}(\eta-\sigma). \tag{۵.۳}$$

تابع وزن $\chi^{\eta,\sigma,L}(x)$ و فضای $P_n^{(L)}(\Omega)$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$\chi^{\eta,\sigma,L}(x) := \Big(1-\tanh(Lx)\Big)^{\eta}\Big(1+\tanh(Lx)\Big)^{\sigma} Lsech^2(Lx), \tag{۶.۳}$$

$$P_n^L(\Omega) := span\{T_0^{\eta,\sigma},\, T_1^{\eta,\sigma},\, \ldots,\, T_n^{\eta,\sigma}\}. \tag{۷.۳}$$

لم **۲.۳**. [۱۰] توابع تانژانت هایپربولیک- ژاکوبی $\{T_n^{\eta,\sigma}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد روی دامنه بی‌کران نسبت به تابع وزن $\chi^{\eta,\sigma,L}(x)$ برای $\eta, \sigma > -1$ تشکیل می‌دهند. به این معنی که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi^{\eta,\sigma,L}(x)T_n^{\eta,\sigma}(x)T_m^{\eta,\sigma}(x)dx = \varrho_n^{\eta,\sigma}\delta_{mn}, \tag{۸.۳}$$

که در آن $\varrho_n^{\eta,\sigma}$ در رابطه (۳.۲) تعریف شده است.

از تعامد توابع تانژانت هایپربولیک-ژاکوبی نتیجه می‌شود که هر تابع $g \in \mathbf{L}^2_{\chi^{\eta,\sigma,L}}(\mathbb{R})$ با

$$\mathbf{L}^2_{\chi^{\eta,\sigma,L}}(\mathbb{R}) = \left\{ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \chi^{\eta,\sigma,L}(x)dx < \infty \right\}$$

را می‌توان به‌صورت زیر با تعداد متناهی از توابع تانژانت هایپربولیک-ژاکوبی تقریب زد

$$g(x) \simeq \sum_{i=0}^{\mathbf{M}} g_i T_i^{\eta,\sigma}(x) \triangleq \mathbf{G}_{\mathbf{M}}^T \Phi_{\mathbf{M}}^{\eta,\sigma}(x), \tag{۹.۳}$$

که ضرایب بسط با رابطه زیر قابل محاسبه است

$$g_i = \frac{1}{\varrho_n^{\eta,\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) T_i^{\eta,\sigma}(x) \chi^{\eta,\sigma,L}(x) dx. \tag{۱۰.۳}$$

و

$$\mathbf{G_M} = [g_0 \quad g_1 \quad \cdots \quad g_{\mathbf{M}}]^T, \tag{۱۱.۳}$$
$$\Phi_{\mathbf{M}}^{\eta,\sigma}(x) = [T_0^{\eta,\sigma}(x) \quad T_1^{\eta,\sigma}(x) \quad \cdots \quad T_{\mathbf{M}}^{\eta,\sigma}(x)]^T, \tag{۱۲.۳}$$

ملاحظه **۳.۳**. برای سادگی محاسبات در به دست آوردن ضرایب بسط در رابطه (۱۰.۳)، می‌توان انتگرال موجود را به‌صورت زیر به روش انتگرال‌گیری گاوس لژاندر $\mathbf{K}$ نقطه‌ای تقریب زد

$$g_i \simeq \sum_{j=1}^{\mathbf{K}} g\left(\frac{1}{L}\arctan(z_j)\right) J_i^{\eta,\sigma}(z_j) \chi^{\eta,\sigma}(z_j) \varpi_j, \tag{۱۳.۳}$$

که در آن z_j و ϖ_j به ترتیب گره‌ها و وزن‌های انتگرال‌گیری گاوس لژاندر است.

۴ آنالیز همگرایی

در این قسمت، آنالیز همگرایی توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدین منظور، ابتدا فضای سوبولوف وزن‌دار توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی با عملگر دیفرانسیل $\mathfrak{D}_L^1 = \frac{1}{L\,\mathrm{sech}^2(Lx)}\frac{1}{dx}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathfrak{S}_{k,L}^{\eta,\sigma} = \left\{ h : \ \mathfrak{D}_L^m h \in \mathbf{L}^2_{\chi^{\eta,\sigma,L}}(\mathbb{R}), \ 0 \le m \le k \right\}. \tag{۱.۴}$$

ضرب داخلی، نرم و شبه‌نرم مرتبط با این فضا به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(f,h)_{\mathfrak{S}_{k,L}^{\eta,\sigma}} = \sum_{m=0}^{k} (\mathfrak{D}_L^m f, \mathfrak{D}_L^m h)_{\chi^{\eta,\sigma,L}}, \tag{۲.۴}$$
$$\|h\|_{\mathfrak{S}_{k,L}^{\eta,\sigma}} = \sqrt{(h,h)_{\mathfrak{S}_{k,L}^{\eta,\sigma}}}, \tag{۳.۴}$$

و

$$|h|_{\mathfrak{S}_{k,L}^{\eta,\sigma}} = \|\mathfrak{D}_L^k h\|_{\mathfrak{S}_{k,L}^{\eta,\sigma}}. \tag{۴.۴}$$

قضیه **۱.۴**. [۴] فرض کنید $\overline{g}_{\mathbf{M}+1}(x) \in \mathfrak{S}_{k,L}^{\eta,\sigma}$ تقریبی از تابع $g(x)$ با $(\mathbf{M}+1)$ تابع از توابع پایه تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی باشد. آنگاه، کران خطای این تقریب با فرمول زیر قابل محاسبه است

$$\|g - \overline{g}_{\mathbf{M}+1}\|_{\chi^{\eta,\sigma,L}} \le \mathfrak{C}\mathbf{M}^{-k} \left\| \frac{d^k}{dx^k} g\left(\frac{1}{L}\tanh^{-1}(x)\right) \right\|_{\chi^{\eta+k,\sigma+k}}, \tag{۵.۴}$$

که در آن $\mathfrak{C} \approx 1$.

۵ روش پیشنهادی

در این قسمت، یک روش عددی برای حل معادلات سوبولوف و کاتانئو کسری در یک دامنه مکانی بی‌کران را با استفاده از توابع پایه‌ای تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی و چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته ارائه می‌دهیم.

۱.۵ روش عددی برای حل معادله سوبولوف کسری زمان در دامنه بی‌کران

معادله سوبولوف کسری در دامنه بی‌کران به‌صورت زیر معرفی می‌شود

$$ {}_{\circ}^{c}D_{t}^{\xi}u(x,t)-\lambda\frac{\partial}{\partial t}u_{xx}(x,t)=\mu\,u_{xx}(x,t)+g(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[\circ,T], \tag{۱.۵}$$

که در آن $u(x,t)$ تابع مجهول، $g(x,t)$ تابع معلوم، λ و μ ثابت‌های مثبت و $\circ<\xi\leq ۱$ است. شرط اولیه و شرایط مرزی مسأله نیز به‌صورت زیر داده شده است

$$u(x,\circ)=u_{\circ}(x), \tag{۲.۵}$$
$$u(-\infty,t)=u(+\infty,t)=\circ. \tag{۳.۵}$$

هم‌چنین، ${}_{\circ}^{c}D_{t}^{\xi}u(x,t)$ مشتق کسری کاپوتو از مرتبه ξ نسبت به متغیر t است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$ {}_{\circ}^{c}D_{t}^{\xi}u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{۱}{\Gamma(۱-\xi)}\displaystyle\int_{\circ}^{t}(t-s)^{-\xi}\frac{\partial u(x,s)}{\partial s}ds, & \circ<\xi<۱,\\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & \xi=۱.\end{cases} \tag{۴.۵}$$

در ابتدا، تابع مجهول در مسأله (۱.۵) به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود

$$u(x,t)\simeq u_{N,M}(x,t)=\sum_{i=\circ}^{M}\sum_{j=\circ}^{N}c_{ij}T_{i}^{\eta,\sigma}(x)\mathcal{J}_{j}^{\alpha,\beta}(t)\triangleq\left(\Phi_{M}^{\eta,\sigma}\right)^{T}(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_{N}^{\alpha,\beta}(t), \tag{۵.۵}$$

که در آن $\mathbf{C}_{MN}$ ماتریس $(M+۱)\times(N+۱)$ بعدی ضرایب مجهول به‌صورت

$$\mathbf{C}_{MN}=\begin{pmatrix}c_{\circ\circ} & c_{\circ۱} & c_{\circ۲} & \cdots & c_{\circ N}\\ c_{۱\circ} & c_{۱۲} & c_{۱۳} & \cdots & c_{۱N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ c_{M\circ} & c_{M۱} & c_{M۲} & \cdots & c_{MN}\end{pmatrix} \tag{۶.۵}$$

است و

$$\Phi_{M}^{\eta,\sigma}(x)=[T_{\circ}^{\eta,\sigma}(x)\quad T_{۱}^{\eta,\sigma}(x)\quad\cdots\quad T_{M}^{\eta,\sigma}(x)]^{T}, \tag{۷.۵}$$
$$\Psi_{N}^{\alpha,\beta}(t)=[\mathcal{J}_{\circ}^{\alpha,\beta}(t)\quad\mathcal{J}_{۱}^{\alpha,\beta}(t)\quad\cdots\quad\mathcal{J}_{N}^{\alpha,\beta}(t)]^{T}, \tag{۸.۵}$$

که در آن $\mathcal{J}_{j}^{\alpha,\beta}(t)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته و $T_{i}^{\eta,\sigma}(x)$ توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی معرفی شده‌اند. برای جایگزینی تابع تقریب در مسئله اصلی (۱.۵) باید مشتقات موجود در مسئله نیز محاسبه شود. بدین منظور، داریم

$$ {}_{\circ}^{c}D_{t}^{\xi}\mathcal{J}_{\circ}^{\alpha,\beta}(t)=\frac{d\mathcal{J}_{\circ}^{\alpha,\beta}(t)}{dt}=\circ$$

و برای $j\geq ۱$ داریم

$$\frac{d\mathcal{J}_{j}^{\alpha,\beta}(t)}{dt}=\sum_{r=۱}^{j}(-۱)^{r+j}\frac{\Gamma(j+\beta+۱)\Gamma(j+r+\alpha+\beta+۱)}{T^{r}(r-۱)!(j-r)!\Gamma(r+\beta+۱)\Gamma(j+\alpha+\beta+۱)}t^{r-۱}, \tag{۹.۵}$$

$$ {}_{\circ}^{c}D_{t}^{\xi}\mathcal{J}_{j}^{\alpha,\beta}(t)=\sum_{r=۱}^{j}(-۱)^{r+j}\frac{\Gamma(j+\beta+۱)\Gamma(j+r+\alpha+\beta+۱)}{T^{r}r!(j-r)!\Gamma(r+\beta+۱)\Gamma(j+\alpha+\beta+۱)}\times\frac{\Gamma(r+۱)}{\Gamma(r-\xi+۱)}t^{r-\xi}, \tag{۱۰.۵}$$

و

$$\frac{d^{۲}T_i^{\eta,\sigma}(x)}{dx^{۲}} = \frac{\Gamma(i+\eta+۱)}{i!\Gamma(i+\eta+\sigma+۱)}\sum_{k=۲}^{i}\binom{i}{k}\frac{kL\Gamma(i+k+\eta+\sigma+۱)}{۲^k\Gamma(k+\eta+۱)}$$
$$\times\Big[(k-۱)L\,sech^{۴}(Lx)(\tanh(Lx)-۱)^{k-۲} \tag{۱۱.۵}$$
$$+\,۲L\,sech^{۲}(Lx)\tanh(Lx)(\tanh(Lx)-۱)^{k-۱}\Big].$$

اکنون مشتقات موجود در معادله (۱.۵) برای تابع مجهول $u(x,t)$ به شکل زیر اعمال می‌شوند

$${}_{۰}^{c}D_t^{\xi}u(x,t) \simeq \left(\Phi_M^{\sigma,\eta}\right)^T(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\xi}(t), \tag{۱۲.۵}$$
$$u_{xx}(x,t) = \left(\Phi_M^{۲}(x)\right)^T\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\alpha,\beta}(t), \tag{۱۳.۵}$$

و

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{xx}(t) = \left(\Phi_M^{۲}(x)\right)^T\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{۱}(t), \tag{۱۴.۵}$$

که در آن

$$\Phi_M^{۲}(x) = \left[\frac{d^{۲}T_{۰}^{\eta,\sigma}(x)}{dx^{۲}} \quad \frac{d^{۲}T_{۱}^{\eta,\sigma}(x)}{dx^{۲}} \quad \cdots \quad \frac{d^{۲}T_M^{\eta,\sigma}(x)}{dx^{۲}}\right]^T, \tag{۱۵.۵}$$
$$\Psi_N^{۱}(t) = \left[\frac{d\mathcal{J}_{۰}^{\alpha,\beta}(t)}{dt} \quad \frac{d\mathcal{J}_{۱}^{\alpha,\beta}(t)}{dt} \quad \cdots \quad \frac{d\mathcal{J}_N^{\alpha,\beta}(t)}{dt}\right]^T, \tag{۱۶.۵}$$

و

$$\Psi_N^{\xi}(t) = \left[{}_{۰}^{c}D_t^{\xi}\mathcal{J}_{۰}^{\alpha,\beta}(t) \quad {}_{۰}^{c}D_t^{\xi}\mathcal{J}_{۱}^{\alpha,\beta}(t) \quad \cdots \quad {}_{۰}^{c}D_t^{\xi}\mathcal{J}_N^{\alpha,\beta}(t)\right]^T. \tag{۱۷.۵}$$

با قرار دادن روابط (۱۲.۵) تا (۱۴.۵) در روابط (۱.۵) تا (۳.۵) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{R}(x,t) \triangleq \left(\Phi_M^{\sigma,\eta}\right)^T(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\xi}(t) - \lambda\left(\Phi_M^{۲}(x)\right)^T\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{۱}(t)$$
$$-\,\mu\left(\Phi_M^{۲}(x)\right)^T\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\alpha,\beta}(t) - g(x,t) \simeq ۰, \tag{۱۸.۵}$$

و

$$\Upsilon_{۰}(x) \triangleq \Phi_M^T(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N(۰) - u_{۰}(x), \tag{۱۹.۵}$$
$$\Upsilon_{۱}(t) \triangleq \Phi_M^T(-\infty)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N(t), \tag{۲۰.۵}$$
$$\Upsilon_{۲}(t) \triangleq \Phi_M^T(+\infty)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N(t). \tag{۲۱.۵}$$

در نهایت با جایگذاری نقاط هم‌محلی چبیشف انتقال‌یافته $x_i = \tanh^{-۱}\left(-\cos\left(\frac{(۲i-۱)\pi}{۲(M+۱)}\right)\right)$ و $t_j = \frac{T}{۲}\left(۱ - \cos\left(\frac{(۲j-۱)\pi}{۲(N+۱)}\right)\right)$ برای $i = ۱,۲,\ldots,M+۱$ و $j = ۱,۲,\ldots,N+۱$ در روابط (۱۸.۵) تا (۲۱.۵)، دستگاه معادلات جبری زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases}\mathbf{R}(x_i,t_j) = ۰, & i = ۲,۳,\ldots,M,\ j = ۲,۳,\ldots,N+۱,\\ \Upsilon_{۰}(x_i) = ۰, & i = ۲,۳,\ldots,M,\\ \Upsilon_l(t_j) = ۰, & j = ۱,۲,\ldots,N+۱,\ l = ۱,۲.\end{cases} \tag{۲۲.۵}$$

با حل دستگاه (۲۲.۵)، ضرایب مجهول c_{ij} محاسبه می‌شود. جایگذاری این ضرایب در رابطه (۵.۵) منجر به به‌دست آوردن جواب عددی $u_{N,M}(x,t)$ می‌شود.

۲.۵ روش عددی برای حل معادله کاتانئو کسری زمان در دامنه بی‌کران

معادله‌ی کاتانئو کسری زمانی در دامنه بی‌کران به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + {}_{\circ}^{c}D_t^{\gamma}u(x,t) = \frac{\partial^{۲}u(x,t)}{\partial x^{۲}} + f(x,t), \tag{۲۳.۵}$$

که در آن $(x,t) \in \mathbb{R} \times [\circ, T]$، ${}_{\circ}^{c}D_t^{\gamma}u(x,t)$، مشتق کسری کاپوتو از مرتبه γ با $۱ < \gamma \leq ۲$ و $f(x,t)$ تابعی پیوسته است. همچنین، شرایط اولیه و شرایط مرزی همگن مسئله به‌صورت زیر داده شده است

$$u(x,\circ) = \psi_{\circ}(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \psi_{۱}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{۲۴.۵}$$

$$u(-\infty,t) = u(+\infty,t) = \circ, \quad \circ \leq t \leq T. \tag{۲۵.۵}$$

روش عددی ارائه شده برای معادله سوبولوف کسری را برای معادله کاتانئو کسری پیاده‌سازی می‌کنیم. بدین منظور، کافی است مشتق کسری کاپوتوی چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته از مرتبه γ برای $۱ < \gamma \leq ۲$ محاسبه شود. بنابراین، داریم

$${}_{\circ}^{c}D_t^{\gamma}\mathcal{J}_j^{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \circ, & j = \circ, ۱, \\ \displaystyle\sum_{r=۲}^{j}(-۱)^{r+j}\frac{\Gamma(j+\beta+۱)\Gamma(j+r+\alpha+\beta+۱)}{T^{r}r!(j-r)!\Gamma(r+\beta+۱)\Gamma(j+\alpha+\beta+۱)} & j \geq ۲. \\ \quad \times \dfrac{\Gamma(r+۱)}{\Gamma(r-\gamma+۱)}t^{r-\gamma}, & \end{cases} \tag{۲۶.۵}$$

از تقریب تابع مجهول $u(x,t)$ با توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی $T_i^{\eta,\sigma}(x)$ و چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته $\mathcal{J}_j^{\alpha,\beta}(t)$، نتیجه می‌شود

$$u(x,t) \simeq \left(\Phi_M^{\sigma,\eta}\right)^{T}(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\alpha,\beta}(t), \tag{۲۷.۵}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \simeq \left(\Phi_M^{\sigma,\eta}\right)^{T}(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{۱}(t), \tag{۲۸.۵}$$

$$\frac{\partial^{۲}u(x,t)}{\partial x^{۲}} \simeq \left(\Phi_M^{۲}(x)\right)^{T}\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\alpha,\beta}(t), \tag{۲۹.۵}$$

و

$${}_{\circ}^{c}D_t^{\gamma}u(x,t) \simeq \left(\Phi_M^{\sigma,\eta}\right)^{T}(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\gamma}(t), \tag{۳۰.۵}$$

که در آن بردارهای $\Psi_N^{۱}(t)$، $\Psi_N^{\alpha,\beta}(t)$، $\Phi_M^{\sigma,\eta}(x)$ و $\Phi_M^{۲}(x)$ به ترتیب در روابط (۷.۵)، (۸.۵)، (۱۵.۵) و (۱۶.۵) معرفی شده‌اند. همچنین بردار $\Psi_N^{\gamma}(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Psi_N^{\gamma}(t) = \left[{}_{\circ}^{c}D_t^{\gamma}\mathcal{J}_{\circ}^{\alpha,\beta}(t) \quad {}_{\circ}^{c}D_t^{\gamma}\mathcal{J}_{۱}^{\alpha,\beta}(t) \quad \cdots \quad {}_{\circ}^{c}D_t^{\gamma}\mathcal{J}_N^{\alpha,\beta}(t)\right]^{T}. \tag{۳۱.۵}$$

نتایج زیر از جایگذاری روابط (۲۷.۵) تا (۳۰.۵) در روابط (۲۳.۵) تا (۲۵.۵) حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(x,t) = &\left(\Phi_M^{\sigma,\eta}\right)^{T}(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{۱}(t) + \left(\Phi_M^{\sigma,\eta}\right)^{T}(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{\gamma}(t) \\ &- \left(\Phi_M^{۲}(x)\right)^{T}\mathbf{C}_{MN}\Psi_N(t) - f(x,t),\end{aligned} \tag{۳۲.۵}$$

و

$$\Xi_{۰}(x) = \Phi_M^T(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N(۰) - \psi_{۰}(x), \tag{۳۳.۵}$$
$$\Xi_{۱}(x) = \Phi_M^T(x)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N^{۱}(۰) - \psi_{۰}(x), \tag{۳۴.۵}$$
$$\Xi_{۲}(t) = \Phi_M^T(-\infty)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N(t), \tag{۳۵.۵}$$
$$\Xi_{۳}(t) = \Phi_M^T(+\infty)\mathbf{C}_{MN}\Psi_N(t). \tag{۳۶.۵}$$

نقاط هم‌محلی چبیشف انتقال‌یافته معرفی شده x_i و t_j در روابط (۳۲.۵) تا (۳۶.۵) جایگذاری و دستگاه معادلات جبری زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x_i,t_j) = ۰, & i = ۲,۳,\ldots,M,\ j = ۲,۳,\ldots,N, \\ \Xi_{۰}(x_i) = ۰, & i = ۱,۲,\ldots,M, \\ \Xi_{۱}(x_i) = ۰, & i = ۱,۲,\ldots,M, \\ \Xi_{l}(t_j) = ۰, & j = ۱,۲,\ldots,N,\ l = ۲,۳. \end{cases} \tag{۳۷.۵}$$

در نهایت با حل این دستگاه معادلات جبری، ضرایب مجهول c_{ij} محاسبه و جواب عددی مسئله (۲۳.۵) به دست می‌آید.

۶ مثال‌های عددی

در این بخش، با ارائه چند مثال عددی، کارایی و دقت روش ارائه شده در بخش قبل را نشان می‌دهیم. به‌منظور نشان دادن دقت این روش، خطای مطلق برای همه مثال‌ها در دامنه متناهی و بزرگ $[-۱۰,۱۰]$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\ell_\infty = \max_{-۱۰\le x\le ۱۰} |u(x,T) - U(x,T)|, \tag{۱.۶}$$

که در آن $u(x,T)$ و $U(x,T)$ به ترتیب جواب‌های دقیق و عددی مسئله در انتهای بازه زمانی $t = T$ است.
هم‌چنین، برای محاسبه مرتبه همگرایی متغیر مکان از رابطه زیر استفاده می‌شود

$$\mathcal{O}_x = \log_{\frac{M_۲}{M_۱}}\left(\frac{\ell_\infty^{۱}}{\ell_\infty^{۲}}\right), \tag{۲.۶}$$

که در آن $\ell_\infty^{۱}$ و $\ell_\infty^{۲}$ به ترتیب خطای مطلق با تعداد $M_۱$ و $M_۲$ تابع تانژانت هایپربولیک-ژاکوبی است.
توجه داشته باشید که انتخاب پارامتر L در هر مثال وابسته به جواب دقیق است که به روش آزمون و خطا، بهترین مقدار استفاده شده است.

مثال **۱.۶**. معادله سوبولوف (۱.۵) را با $\lambda = \mu = ۱$، $u_{۰}(x) = ۰$ و تابع معلوم

$$g(x,t) = \frac{۳!}{\Gamma(۴-\xi)}t^{۳-\xi}\,\mathrm{sech}(x) - \left(۳t^{۲} + t^{۳}\right)\mathrm{sech}(x)(۲\tanh^{۲}(x) - ۱),$$

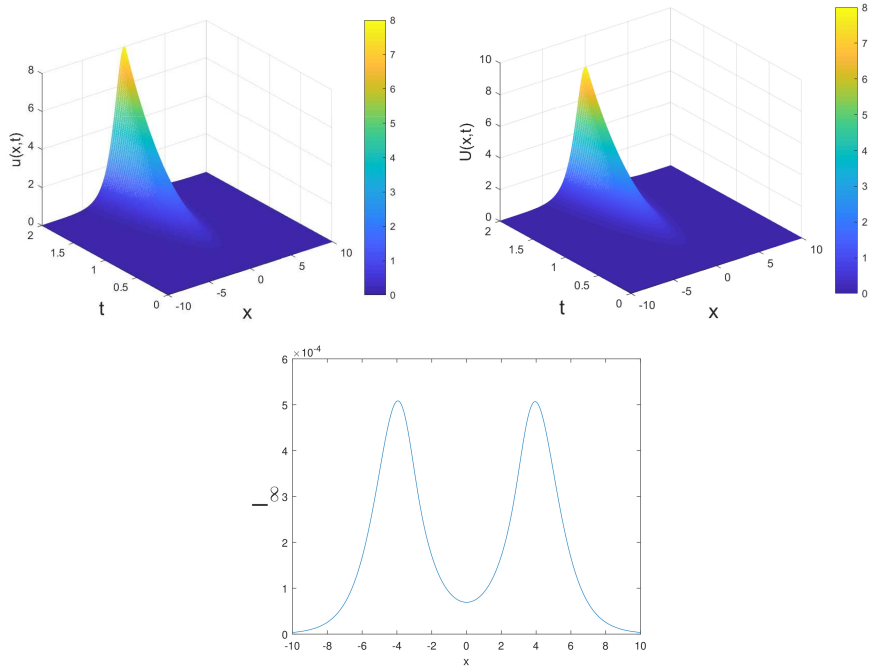
در نظر بگیرید. جواب دقیق این معادله $u(x,t) = t^{۳}\,\mathrm{sech}(x)$ است. این معادله با روش پیشنهاد شده با $L = ۰/۵$ حل شده است. ماکسیمم قدر مطلق خطای حاصل از این روش در بازه‌های زمانی $[۰,۱]$ و $[۰,۲]$ برای چندین مقدار ξ و M با $\eta = \sigma = \alpha = \beta = ۰$ و $N = ۳$ در جدول ۱ گزارش شده است. برای نشان دادن دقت روش برای ثابت‌های دلخواه تعریف شده در توابع پایه‌ای، خطای مطلق برای مقادیر مختلف α,β,η و σ در جدول ۲ آورده شده است. این جدول به خوبی نشان می‌دهد که دقت روش به مقادیر ثابت‌های α,β,η و σ وابسته نیست. هم‌چنین، نمودارهای جواب عددی، جواب دقیق و خطای حاصل از روش پیشنهادی برای $\xi = ۰/۸۵$ و $(N,M) = (۳,۳۰)$ در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. از نتایج ارائه‌شده آشکارا می‌توان نتیجه گرفت که دقت روش پیشنهادی برای این مسأله خوب است.

جدول ۱: خطای ℓ_∞ و مرتبه همگرایی $\mathcal{O}_x$ با مقادیر مختلف (M,ξ) و $N=۳$ برای مثال ۱.۶.

T	M	$\xi=۰/۵$	$\mathcal{O}_x$	$\xi=۰/۷$	$\mathcal{O}_x$	$\xi=۰/۹$	$\mathcal{O}_x$	$\xi=۱$	$\mathcal{O}_x$
۱	۱۰	$۴/۲۷۴۲\times۱۰^{-۲}$	–	$۳/۹۳۶۷\times۱۰^{-۲}$	–	$۳/۶۲۶۱\times۱۰^{-۲}$	–	$۳/۴۸۲۴\times۱۰^{-۲}$	–
	۱۵	$۸/۳۳۵۶\times۱۰^{-۳}$	۴/۰۳۱۵	$۷/۷۰۳۹\times۱۰^{-۳}$	۴/۰۲۳۰	$۷/۱۱۶۷\times۱۰^{-۳}$	۴/۰۱۵۸	$۶/۸۴۲۵\times۱۰^{-۳}$	۴/۰۱۳۰
	۲۰	$۱/۸۰۷۷\times۱۰^{-۳}$	۵/۳۱۳۰	$۱/۶۷۱۹\times۱۰^{-۳}$	۵/۳۱۰۶	$۱/۵۴۴۷\times۱۰^{-۳}$	۵/۳۱۰۰	$۱/۴۸۴۹\times۱۰^{-۳}$	۵/۳۱۰۷
	۲۵	$۳/۴۲۳۳\times۱۰^{-۴}$	۷/۴۵۷۲	$۳/۱۶۹۴\times۱۰^{-۴}$	۷/۴۵۲۶	$۲/۹۳۰۴\times۱۰^{-۴}$	۷/۴۴۹۳	$۲/۸۱۷۶\times۱۰^{-۴}$	۷/۴۴۸۳
	۳۰	$۶/۹۹۳۲\times۱۰^{-۵}$	۸/۷۱۱۲	$۶/۴۷۹۶\times۱۰^{-۵}$	۸/۷۰۶۹	$۵/۹۸۵۷\times۱۰^{-۵}$	۸/۷۱۱۸	$۵/۷۴۹۶\times۱۰^{-۵}$	۸/۷۱۷۲
۲	۱۰	$۳/۲۵۰۳\times۱۰^{-۱}$	–	$۳/۱۳۳۷\times۱۰^{-۱}$	–	$۳/۰۲۳۰\times۱۰^{-۱}$	–	$۲/۹۷۱۹\times۱۰^{-۱}$	–
	۱۵	$۶/۳۵۲۷\times۱۰^{-۲}$	۴/۰۲۶۱	$۶/۱۳۳۶\times۱۰^{-۲}$	۴/۰۲۲۵	$۵/۹۲۴۹\times۱۰^{-۲}$	۴/۰۱۹۲	$۵/۸۲۸۴\times۱۰^{-۲}$	۴/۰۱۷۷
	۲۰	$۱/۳۷۸۳\times۱۰^{-۲}$	۵/۳۱۱۵	$۱/۳۳۱۱\times۱۰^{-۲}$	۵/۳۱۰۶	$۱/۲۸۶۰\times۱۰^{-۲}$	۵/۳۱۰۱	$۱/۲۶۵۱\times۱۰^{-۲}$	۵/۳۰۹۹
	۲۵	$۲/۶۱۲۰\times۱۰^{-۳}$	۷/۴۵۴۰	$۲/۵۲۳۵\times۱۰^{-۳}$	۷/۴۵۲۳	$۲/۴۳۸۹\times۱۰^{-۳}$	۷/۴۵۰۶	$۲/۳۹۹۵\times۱۰^{-۳}$	۷/۴۵۰۲
	۳۰	$۵/۳۳۳۴\times۱۰^{-۴}$	۸/۷۱۳۷	$۵/۱۵۳۴\times۱۰^{-۴}$	۸/۷۱۳۰	$۴/۹۹۰۲\times۱۰^{-۴}$	۸/۷۰۲۵	$۴/۹۰۱۳\times۱۰^{-۴}$	۸/۷۱۱۷

جدول ۲: خطای ℓ_∞ با مقادیر مختلف $(\alpha,\beta,\eta,\sigma)$ و $(M,N,\xi)=(۳۰,۳,۰/۷۵)$ در بازه زمانی $[۰,۲]$ برای مثال ۱.۶.

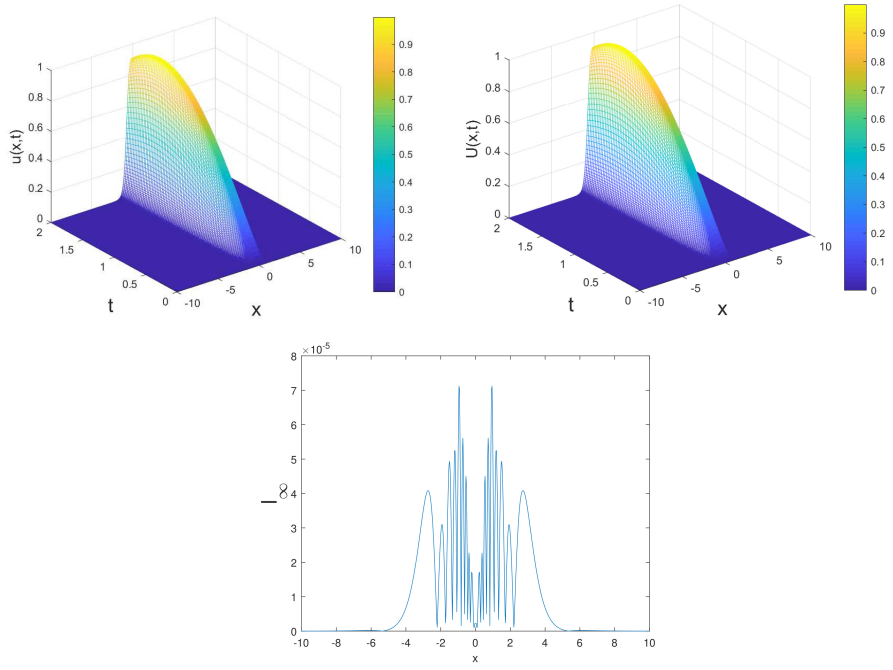
		$\eta=-۰/۵$			$\eta=۰/۵$		
α	β	$\sigma=-۰/۵$	$\sigma=۰/۵$	$\sigma=۱$	$\sigma=-۰/۵$	$\sigma=۰/۵$	$\sigma=۱$
$-۰/۵$	$-۰/۵$	$۵/۱۱۹۳\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۳۵\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۲۶۰\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۱۰۱\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۱۳۳\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۸۹\times۱۰^{-۴}$
	۰/۵	$۵/۱۱۸۱\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۱۴\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۲۵۱\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۴۲۸\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۸۹\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۷۱\times۱۰^{-۴}$
	۱	$۵/۱۱۹۸\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۱۶\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۲۶۵\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۳۷۹\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۱۲۲\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۹۸\times۱۰^{-۴}$
۰/۵	$-۰/۵$	$۵/۱۱۸۴\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۳۷\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۲۱۰\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۴۴۱\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۲۵۳\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۱۱۸\times۱۰^{-۴}$
	۰/۵	$۵/۱۲۰۱\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۴۰\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۲۸۸\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۴۷۰\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۹۶\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۱۰۴\times۱۰^{-۴}$
	۱	$۵/۱۲۱۵\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۰۳۹\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۲۲۲\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۴۳۰\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۱۲۴\times۱۰^{-۴}$	$۵/۱۱۲۸\times۱۰^{-۴}$



شکل ۱: جواب دقیق $u(x,t)$، جواب عددی $U(x,t)$ و خطای مطلق با ℓ_∞ با $(\alpha,\beta)=(۰/۵,۱)$ و $(\eta,\sigma)=(۱,-۰/۵)$ برای مثال ۱.۶ در بازه زمانی $[۰,۲]$.

جدول ۳: خطای ℓ_∞ با مقادیر مختلف (M,N) و ξ برای مثال ۲.۶.

	$T=۱$				$T=۲$			
(M,N)	$\xi=۰/۵$	$\xi=۰/۷$	$\xi=۰/۹$	$\xi=۱$	$\xi=۰/۵$	$\xi=۰/۷$	$\xi=۰/۹$	$\xi=۱$
$(۵,۱۰)$	$۷/۹۹۵۶\times۱۰^{-۳}$	$۸/۰۵۲۰\times۱۰^{-۳}$	$۸/۰۹۷۱\times۱۰^{-۳}$	$۸/۱۱۵۱\times۱۰^{-۳}$	$۲/۰۸۰۳\times۱۰^{-۲}$	$۲/۱۵۰۶\times۱۰^{-۲}$	$۲/۲۲۷۳\times۱۰^{-۲}$	$۲/۲۶۹۴\times۱۰^{-۲}$
$(۷,۱۶)$	$۶/۱۳۹۰\times۱۰^{-۴}$	$۶/۱۲۳۵\times۱۰^{-۴}$	$۶/۱۰۸۳\times۱۰^{-۴}$	$۶/۱۰۰۷\times۱۰^{-۴}$	$۶/۶۱۵۶\times۱۰^{-۴}$	$۶/۶۸۷۰\times۱۰^{-۴}$	$۶/۷۶۱۰\times۱۰^{-۴}$	$۶/۸۰۰۴\times۱۰^{-۴}$
$(۹,۲۲)$	$۲/۲۹۹۵\times۱۰^{-۵}$	$۲/۲۸۷۹\times۱۰^{-۵}$	$۲/۲۷۷۱\times۱۰^{-۵}$	$۲/۲۷۱۹\times۱۰^{-۵}$	$۲/۴۷۰۹\times۱۰^{-۵}$	$۲/۵۲۲۳\times۱۰^{-۵}$	$۲/۵۷۵۰\times۱۰^{-۵}$	$۲/۶۰۲۰\times۱۰^{-۵}$



شکل ۲: جواب دقیق $u(x,t)$، جواب عددی $U(x,t)$ و خطای مطلق با ℓ_∞ و $(\alpha,\beta)=(۰/۵,۱)$ و $(\eta,\sigma)=(۱,-۰/۵)$ برای مثال ۲.۶ در بازه زمانی $[۰,۲]$.

مثال ۲.۶. معادله سوبولوف (۱.۵) را با $\lambda=\mu=۲$ و $u_۰(x)=۰$ در نظر بگیرید. جواب دقیق این معادله $u(x,t)=\dfrac{\sin(t)}{(۱+x^۴)^۲}$ و

$$g(x,t)=\frac{t^{۱-\xi}\mathbf{ML}_{۲,۲-\xi}(-t^۲)}{(۱+x^۴)^۲}+\frac{-۴۸x^۲\Big(۳\cos(t)x^۴+۳\sin(t)x^۴-\cos(t)-\sin(t)\Big)}{(۱+x^۴)^۴},$$

است که در آن $\mathbf{ML}$ تابع میتاگ-لفلر تعمیم‌یافته است. این معادله با روش پیشنهاد شده برای مقادیر مختلف (M,N) و ξ با $L=۱$ برای $T=۱,۲$ حل شده و خطای ℓ_∞ حاصل از این روش با $\eta=-۰/۵$، $\sigma=۰/۵$، $\alpha=۱$ و $\beta=۰$ در جدول ۳ نشان داده شده است. نمودارهای جواب‌های عددی و دقیق و خطای حاصل از روش پیشنهادی برای $\xi=۰/۶۵$ و $(N,M)=(۹,۲۰)$ در شکل ۲ نمایش داده شده است. نتایج جدول ۳ و شکل ۲ دقت و کارایی خوب روش پیشنهادی را در محاسبه جواب تقریبی این مثال نشان می‌دهند.

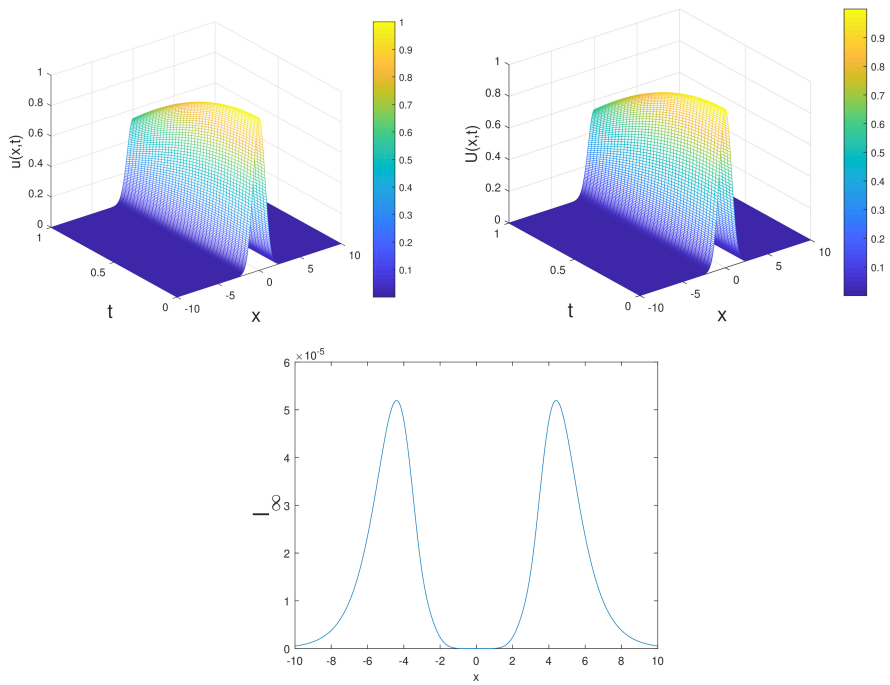
مثال ۳.۶. معادله کاتانئو (۲۳.۵) را با شرایط اولیه $\psi_۱(x)=۰$ و $\psi_۰(x)=\exp(-x^۲)$ و تابع معلوم

$$f(x,t)=-\exp(-x^۲)\Big(t^{۲-\gamma}\mathbf{ML}_{۲,۳-\gamma}(-t^۲)+۴\cos(t)x^۲+\sin(t)-۲\cos(t)\Big),$$

در نظر بگیرید. جواب دقیق این معادله $u(x,t)=\cos(t)\exp(-x^۲)$ است. این معادله را با روش پیشنهاد شده برای مقادیر مختلف M و N با $L=۰/۵$ حل کردیم. خطاهای به دست آمده از این روش در $T=۱$ برای چندین مقدار γ و (M,N) با $\eta=۱$، $\sigma=-۰/۵$، $\alpha=۰$ و $\beta=۱$ در جدول ۴ گزارش شده‌اند. هم‌چنین نمودارهای جواب‌های عددی و دقیق و خطای مطلق حاصل از روش پیشنهادی برای $\gamma=۱/۶۵$ و $(N,M)=(۱۰,۲۵)$ در شکل ۳ نشان داده شده است. نتایج ارائه‌شده، نتیجه می‌دهد که دقت و کارایی روش پیشنهادی برای این مسأله قابل قبول است.

جدول ۴: خطای ℓ_∞ با مقادیر مختلف (M, N) و γ برای مثال ۳.۶.

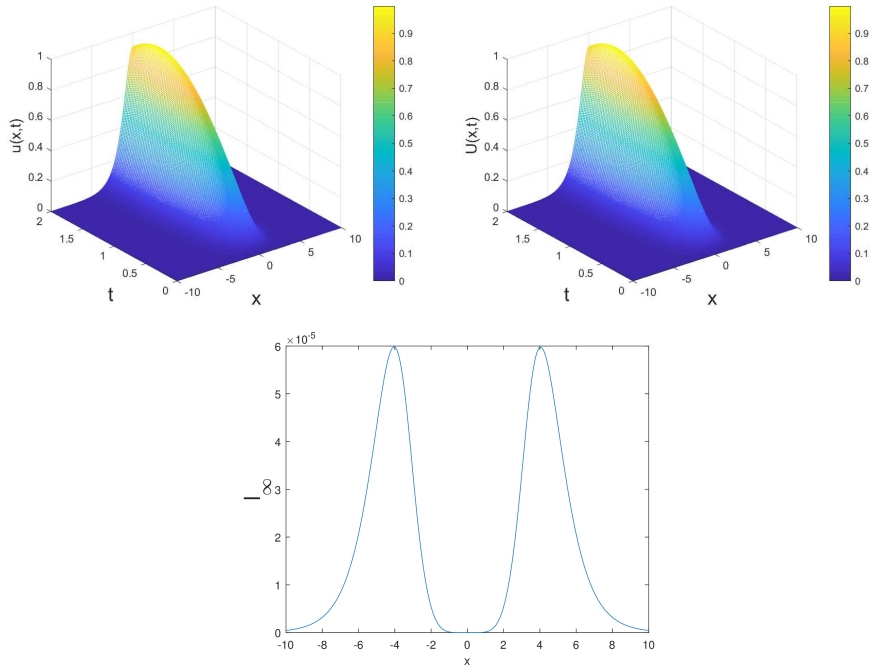
(N, M)	$\gamma = ۱/۲۵$	$\gamma = ۱/۵۰$	$\gamma = ۱/۷۵$	$\gamma = ۱/۹۵$	$\gamma = ۲$
$(۴, ۱۰)$	$۲/۷۵۰۴ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۴۹۴۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۴۱۴۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۴۴۲۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۴۵۴۴ \times ۱۰^{-۲}$
$(۶, ۱۵)$	$۳/۹۵۰۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۶۳۴۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۶۲۰۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۷۴۴۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۷۹۰۹ \times ۱۰^{-۳}$
$(۸, ۲۰)$	$۱/۲۴۷۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰۷۷۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰۵۶۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰۸۷۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰۹۱۰ \times ۱۰^{-۳}$
$(۱۰, ۲۵)$	$۴/۴۴۹۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۰۱۶۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۲۵۷۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۳۲۰۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۳۳۶۸ \times ۱۰^{-۵}$



شکل ۳: جواب دقیق $u(x,t)$، جواب عددی $U(x,t)$ و خطای مطلق ℓ_∞ با $(\alpha, \beta) = (۰/۵, ۱)$ و $(\eta, \sigma) = (۱, -۰/۵)$ برای مثال ۳.۶.

جدول ۵: خطای ℓ_∞ با مقادیر مختلف (M, N) و γ برای مثال ۴.۶.

	$T=۱$					$T=۲$				
(N,M)	$\gamma=۱٫۲۵$	$\gamma=۱٫۵۰$	$\gamma=۱٫۷۵$	$\gamma=۱٫۹۵$	$\gamma=۲$	$\gamma=۱٫۲۵$	$\gamma=۱٫۵۰$	$\gamma=۱٫۷۵$	$\gamma=۱٫۹۵$	$\gamma=۲$
$(۳,۱۰)$	$۱٫۷۱۶۰\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۷۱۸۳\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۶۹۹۸\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۶۵۲۴\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۶۳۷۷\times۱۰^{-۳}$	$۴٫۲۶۱۲\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۵۶۸۳\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۱۱۷۰\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۴۲۱۰\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۶۸۹۴\times۱۰^{-۳}$
$(۵,۱۵)$	$۳٫۵۱۵۵\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۴۶۳۶\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۳۷۳۸\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۲۷۵۵\times۱۰^{-۳}$	$۳٫۲۴۸۱\times۱۰^{-۳}$	$۶٫۱۵۲۱\times۱۰^{-۳}$	$۶٫۵۰۰۹\times۱۰^{-۳}$	$۶٫۸۴۶۲\times۱۰^{-۳}$	$۷٫۱۵۰۷\times۱۰^{-۳}$	$۷٫۲۳۷۹\times۱۰^{-۳}$
$(۷,۲۰)$	$۷٫۵۶۰۵\times۱۰^{-۴}$	$۷٫۴۲۷۴\times۱۰^{-۴}$	$۷٫۲۲۰۳\times۱۰^{-۴}$	$۷٫۰۰۸۶\times۱۰^{-۴}$	$۶٫۹۴۹۶\times۱۰^{-۴}$	$۱٫۳۴۶۵\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۴۲۰۲\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۴۹۲۱\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۵۵۰۱\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۵۶۴۱\times۱۰^{-۳}$
$(۹,۲۵)$	$۱٫۴۴۰۸\times۱۰^{-۴}$	$۱٫۴۱۰۷\times۱۰^{-۴}$	$۱٫۳۶۸۷\times۱۰^{-۴}$	$۱٫۳۲۵۳\times۱۰^{-۴}$	$۱٫۳۱۴۱\times۱۰^{-۴}$	$۲٫۵۹۰۹\times۱۰^{-۴}$	$۲٫۷۲۳۶\times۱۰^{-۴}$	$۲٫۸۵۵۶\times۱۰^{-۴}$	$۲٫۹۵۰۳\times۱۰^{-۴}$	$۲٫۹۸۴۴\times۱۰^{-۴}$
$(۱۱,۳۰)$	$۲٫۹۲۷۵\times۱۰^{-۵}$	$۲٫۸۶۵۳\times۱۰^{-۵}$	$۲٫۷۷۴۳\times۱۰^{-۵}$	$۲٫۶۸۸۵\times۱۰^{-۵}$	$۲٫۶۶۵۴\times۱۰^{-۵}$	$۵٫۳۰۸۲\times۱۰^{-۵}$	$۵٫۵۷۴۸\times۱۰^{-۵}$	$۵٫۸۶۶۳\times۱۰^{-۵}$	$۶٫۰۳۷۴\times۱۰^{-۵}$	$۶٫۰۹۷۷\times۱۰^{-۵}$



شکل ۴: جواب دقیق $u(x,t)$، جواب عددی $U(x,t)$ و خطای مطلق با ℓ_∞ و $(\alpha,\beta)=(۰٫۵,۱)$ و $(\eta,\sigma)=(۱,-۰٫۵)$ برای مثال ۴.۶.

مثال ۴.۶. معادله کاتانئو (۲۳.۵) را با شرایط اولیه $\psi_۱(x)=\operatorname{sech}(x)$ و $\psi_۰(x)=۰$ و تابع معلوم

$$f(x,t)=\operatorname{sech}(x)\Big(-t^{۳-\gamma}\mathbf{ML}_{۲,۴-\gamma}(-t^{۲})+\cos(t)-\sin(t)\tanh^{۲}(x)+\sin(t)\operatorname{sech}(x)\Big),$$

در نظر بگیرید. جواب دقیق این معادله $u(x,t)=\sin(t)sech(x)$ است. این مسأله را با روش پیشنهاد شده برای مقادیر مختلف M و N با $L=۰٫۵$ حل کردیم. خطای ℓ_∞ حاصل از این روش در $T=۱,۲$ برای چندین مقدار γ و (M,N) با $\eta=۰$ و $\sigma=۱$، $\alpha=۰٫۵$ و $\beta=-۰٫۵$ در جدول ۵ گزارش شده است. نمودارهای جواب‌های عددی و دقیق و خطای مطلق حاصل از روش پیشنهادی برای $\gamma=۱٫۸۵$ و $(N,M)=(۱۰,۳۰)$ در شکل ۴ نشان داده شده است. این جدول و شکل‌ها دقت بالای روش پیشنهادی برای این مسأله را تایید می‌کنند.

۷ نتیجه‌گیری

در این مطالعه تحقیقاتی، دو نوع از توابع ژاکوبی یعنی چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال‌یافته و توابع تانژانت هایپربولیک–ژاکوبی برای حل معادلات کسری زمان در دامنه بی‌کران مورد استفاده قرار گرفت. در روش پیشنهادی، بسط تابع مجهول مسئله با این توابع پایه همراه با اعمال فرمولی صریح برای مشتقات کلاسیک و کسری کاپوتو برای تقریب جواب عددی معادله بیان شده، مورد استفاده قرار گرفت. استفاده از نقاط هم‌محلی چبیشف انتقال‌یافته در تابع باقیمانده به دست آمده، حل این معادلات کسری را به حل دستگاه معادلات جبری تبدیل کرد. برای بررسی دقت و کارایی روش ارائه‌شده، چند مثال عددی مورد ارزیابی قرار گرفت. همان گونه که دیده شد روش پیشنهادی برای حل این نوع مسائل، روش موثر و کارآمدی است.

فهرست منابع

[1] Avazzadeh Z., Nikan O., Tenreiro M. J., and Rasoulizadeh M. N., 2022. Numerical analysis of time-fractional Sobolev equation for fluid-driven processes in impermeable rocks. *Advances in Continuous and Discrete Models, 2022*(1), pp.48. doi:10.1186/s13662-022-03720-w

[2] Bird, R. B., 2002. Transport phenomena. *Appl. Mech. Rev., 55*(1), pp.R1-R4. doi:10.1115/1.1424298

[3] Ford N. J., Xiao J. and Yan Y., 2011. A finite element method for time fractional partial differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis, 14*, pp.454-474. doi:10.2478/s13540-011-0028-2

[4] Heydari M. H., Azin H. and Hosseini. S. E., 2024. An operational matrix strategy for time fractional fokker-planck equation in an unbounded space domain. *Physica Scripta, 99*(6), pp.065250. doi:10.1088/1402-4896/ad4a9f

[5] Li C., and Chen A., 2018. Numerical methods for fractional partial differential equations. *International Journal of Computer Mathematics, 95*(6-7), pp.1048-1099. doi:10.1080/00207160.2017.1343941

[6] Li C., and Zeng F., 2012. Finite difference methods for fractional differential equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos, 22*(04), pp.1230014. doi:10.1142/S0218127412300145

[7] Mainardi F., Luchko Y., and Pagnini G., 2007. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation. *arXiv preprint cond-mat/0702419, 4*(2), pp.153-192. doi:10.48550/arXiv.cond-mat/0702419

[8] Metzler R., and Klafter J., 2000. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics reports, 339*(1), pp.1-77. doi:10.1016/S0370-1573(00)00070-3

[9] Monje C. A., Chen Y. Q., Vinagre B. M., Xue D., and Feliu-Batlle V., 2010. Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications.*Springer Science & Business Media*, doi:10.1007/978-1-84996-335-0

[10] Mostafa D., Zaky M. A., Hafez R. M., Hend, Ahmed S., Abdelkawy M. A. and Aldraiweesh A. A., 2023. Tanh Jacobi spectral collocation method for the numerical simulation of nonlinear Schrödinger equations on unbounded domain. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 46*(1), pp.656-674. doi:10.1002/mma.8538

[11] Poedts S., 1999. Plasma Physics: an introduction to the theory of astrophysical, geophysical and laboratory plasmas. *Space science reviews*, doi:10.1017/CBO9781139170598

[12] Scalas E., Gorenflo R. and Mainardi F., 2000. Fractional calculus and continuous-time finance. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 284*(1-4), pp.376-384. doi:10.1016/S0378-4371(00)00255-7

[13] Shen J., Tang T., and Wang L. L., 2011. Spectral methods: algorithms, analysis and applications. *Springer Science & Business Media, 41*, doi:10.1007/978-3-540-71041-7

[14] Wang M., Yang N. and Guo Z. Y., 2011. Non-Fourier heat conductions in nanomaterials. *Journal of Applied Physics,110*(6), doi:10.1063/1.3634078

A hybrid method for solving time-fractional partial differential equations in an unbounded space domain

Mohammad Hossein Heydari[1, 6], **Seyede Elham Hosseini**[1], **Hadis Azin**[2]

(1) Department of Mathematics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran.
(2) Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Sciences, Hakim Sabzevari University, Iran.

Communicated by: Morteza Fotouhi

Received: 16 March 2024 Accepted: 25 September 2025

Abstract: In this article, two models of time-fractional partial differential equations, i.e. Sobolov and Cattaneo from the Caputo derivative type are considered in an unbounded domain. To solve these type of equations, the appropriate variable change in Jacobi polynomials is used to construct orthogonal basis functions called Tanh-Jacobi functions in an unbounded domain. The shifted orthogonal Jacobi polynomials and Tanh-Jacobi functions are applied for discretization and approximation of time and space variables, respectively. Also, explicit formulas are calculated to compute classical and Caputo fractional derivatives in the numerical solution of these equations. The proposed method turns the solution of the proposed problems into the solution of a system of algebraic equations, which are obtained by calculating the unknowns of this algebraic system, the numerical solution of the problems. Finally, the accuracy and efficiency of the proposed approach are studied by solving some numerical examples.

Keywords: Tanh-Jacobi functions, Shifted Jacobi polynomials, Sobolev equation, Cattaneo equation, Unbounded domain, Caputo fractional derivative.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[6]Mohammad Hossein Heydari
E-mail addresses: heydari@sutech.ac.ir (M. H. Heydari), seyedeelhamhosseini97@gmail.com (S. E. Hosseini), h.azin1370@gmail.com (H. Azin).