مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۱۶–۲۶

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.49571.2371

برخی نتایج در خصوص q−برد عددی چندجمله‌ای‌های ماتریسی

شریفه رضاقلی [۱] [۱] و حلیمه اردکانی [۲]

[۱],[۲] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
دبیر مسئول: غلامرضا آقاملائی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۰۷

چکیده: مجموعه‌ی q−برد عددی مرتبه α، به‌عنوان یکی از تعمیم‌های برد عددی ماتریس‌های مربعی، در این مقاله معرفی شده است. برخی خصوصیات جبری و هندسی آن مانند تعداد مولفه‌های همبند و تقارن‌های آن بررسی شده‌اند و با توجه به روابط به‌دست آمده، نامساوی‌هایی در خصوص q−شعاع عددی و q−شعاع عددی داخلی به‌دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: q−برد عددی مرتبه α، q−برد عددی یک ماتریس، q−برد عددی یک چندجمله‌ای ماتریسی.

رده‌بندی ریاضی: 15A60; 47A12; 30C15

۱ مقدمه

در این مقاله M_n را جبر همه‌ی ماتریس‌های مختلط $n \times n$ در نظر می‌گیریم. برای ماتریس $A \in \mathsf{M}_n$، چندجمله‌ای $(A-\lambda I)^{\alpha+1}$ که در آن λ متغیر مختلط، $\alpha \in \mathbb{C}$ و $I \in \mathsf{M}_n$ ماتریس همانی است، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. به‌خصوص وقتی که α اندازه‌ی بزرگترین بلوک جردن متناظر با مقدار ویژه‌ی صفر برای ماتریس A باشد؛ در این حالت α را شاخص ماتریس A می‌نامیم. در واقع این چندجمله‌ای ماتریسی به یافتن شرطی معادل برای محاسبه‌ی مجموعه‌ی غلاف عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس‌ها، که تعمیمی از برد عددی ماتریس‌ها است و در همگرایی روش‌های تکراری حل معادلات خطی کاربرد دارد، کمک می‌کند. این چندجمله‌ای در خلال استفاده از روش زیرفضایی کرایلف برای حل دستگاه‌های معادلات $Ax=b$ مورد توجه قرارگرفته است. صفرزاده و سالمی در [۹] با استفاده از برد عددی توأم توان‌های متوالی دسته‌ی خطی $A-\lambda I$، به محاسبه‌ی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای‌وار ماتریس A پرداخته‌اند و به‌کمک آن کران‌های مناسبی برای تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به جواب معادله $Ax=b$ به‌دست آورده‌اند. به‌علاوه، آن‌ها α−برد عددی ماتریس $A \in \mathsf{M}_n$ را به‌صورت $\mathsf{W}^{(\alpha)}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x^*(A-\lambda I)^{\alpha+1}x = 0, \text{ for some } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$ معرفی و نمایش

[۱] نویسنده مسئول مقاله (Sh. Rezagholi) rezagholi@pnu.ac.ir, (H. Ardakani) ardakani@pnu.ac.ir

داده‌اند، که تعمیمی از برد عددی ماتریس‌ها است. در [۸] نیز برد عددی رتبه−kای شاخصی، به‌عنوان یکی از تعمیم‌های برد عددی شاخصی که در محاسبات کوانتومی کاربرد دارد، معرفی و مطالعه شده است. q−برد عددی ماتریس‌ها در [۵] به‌عنوان فرم یک و نیم خطی $A\{\xi,\zeta\}=\zeta^*A\xi$ بر دامنه‌ی $\{(\xi,\zeta):\xi,\zeta\in\mathbb{C}^n,\|\xi\|=\|\zeta\|=1,\zeta^*\xi=\mathsf{q}\}$ مورد توجه قرار گرفت. پس از آن محققان دیگری به مطالعه و بررسی خواص این مجموعه و همچنین q−برد عددی چندجمله‌ای‌های ماتریسی پرداختند ([۱]، [۴] و مراجع آن‌ها). فرض کنیم

$$\mathsf{P}(\lambda)=A_m\lambda^m+A_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+A_1\lambda+A_0, \tag{۱.۱}$$

یک چندجمله‌ای ماتریسی باشد که در آن $A_j\in\mathsf{M_n}(j=0,1,\ldots,m)$ و λ یک متغیر مختلط باشد. q−برد عددی چندجمله‌ای ماتریسی $\mathsf{P}(\lambda)$ به‌صورت

$$\mathsf{W_q}[\mathsf{P}(\lambda)]=\{\lambda\in\mathbb{C}:x^*\mathsf{P}(\lambda)y=0,x^*x=1,y^*y=1,x^*y=\mathsf{q}\}$$

معرفی و نمایش داده می‌شود. درحالتی‌که $\mathsf{q}\neq 0$، می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\mathsf{W_q}[\lambda I-A]&=\{\lambda\in\mathbb{C}:x^*(\lambda I-A)y=0,x^*x=1,y^*y=1,x^*y=\mathsf{q}\}\\&=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda x^*y-x^*Ay=0,x^*x=1,y^*y=1,x^*y=\mathsf{q}\}\\&=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\mathsf{q}^{-1}x^*Ay,x^*x=1,y^*y=1,x^*y=\mathsf{q}\},\end{aligned}$$

و بنابراین، $\mathsf{W_q}[\lambda I-\mathsf{q}A]=q^{-1}\mathsf{W_q}(A)$، که در آن $\mathsf{W_q}(A)=\{x^*Ay:x^*x=1,y^*y=1,x^*y=\mathsf{q}\}$ ، q−برد عددی ماتریس A می‌باشد. از طرفی، اگر $\mathsf{q}=1$، آنگاه

$$\mathsf{W}_1[\mathsf{P}(\lambda)]=\mathsf{W}[\mathsf{P}(\lambda)]=\{\lambda\in\mathbb{C}:x^*\mathsf{P}(\lambda)x=0,x^*x=1\},$$

که در آن $\mathsf{W}(\cdot)$ برد عددی کلاسیک می‌باشد و همواره $\mathsf{W}[\mathsf{P}(\lambda)]\subseteq\mathsf{W_q}[\mathsf{P}(\lambda)]$. با توجه به اینکه $\|x\|=\|y\|=1$، با اعمال نامساوی شوارتز بر x و y نتیجه می‌گیریم که $|\mathsf{q}|\leq 1$. بنابراین q−برد عددی فقط به ازای مقادیر $|\mathsf{q}|\leq 1$ قابل تعریف می‌باشد. از طرفی $\mathsf{q}=|\mathsf{q}|e^{i\theta}$ $(0\leq\theta<2\pi)$، و بنابراین $e^{i\theta}\mathsf{W}_{|\mathsf{q}|}(A)=\mathsf{W_q}(A)$. در نتیجه، برای مطالعه‌ی q−برد عددی کافی است حالت $0\leq\mathsf{q}\leq 1$ را در نظر بگیریم.

در این مقاله به معرفی مجموعه‌های q−برد عددی از مرتبه‌ی α و q−برد عددی شاخصی ماتریس‌های مربعی می‌پردازیم و برخی خواص جبری و هندسی آن‌ها را مطالعه می‌کنیم. در بخش دوم، پس از معرفی q−برد عددی از مرتبه‌ی α و بررسی برخی خصوصیات مقدماتی آن، تقارن این مجموعه‌ها نسبت به اعداد حقیقی، کران‌هایی برای تعداد مولفه‌های همبند، ارتباط این مجموعه‌ها با طیف ماتریس و نقاط مرزی آن‌ها به‌دست آمده است. در بخش سوم، پس از یادآوری مفاهیم q−شعاع عددی داخلی و q−شعاع عددی، کران‌هایی برای قدرمطلق اعضای q−برد عددی ماتریس‌ها برحسب q−شعاع عددی داخلی و q−شعاع عددی به‌دست آمده است. سپس به‌کمک q−شعاع عددی ماتریس همراه چندجمله‌ای ماتریسی، کران بالایی برای قدرمطلق اعضای q−برد عددی یک ماتریس به‌دست آمده است.

۲ q−برد عددی مرتبه α

این بخش را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $A\in\mathsf{M_n}$، $0\leq\mathsf{q}\leq 1$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. q−برد عددی از مرتبه‌ی α به‌صورت زیر معرفی و نمایش داده می‌شود:

$$\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:x^*(A-\lambda I_n)^{\alpha+1}y=0,x^*x=y^*y=1,x^*y=\mathsf{q}\}.$$

به‌علاوه، اگر α برابر با شاخص ماتریس A باشد، آنگاه q−برد عددی شاخصی ماتریس A به‌صورت

$$\mathsf{IW_q}(A):=\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$$

معرفی و نمایش داده می‌شود.

در مثال زیر، q−برد عددی با مرتبه‌های مختلف برای ماتریس جردن ۲ × ۲ با مقدار ویژه‌ی صفر محاسبه شده است.

مثال ۲.۲. فرض‌کنیم $J_۲$ بلوک جردن ۲ × ۲ با مقدار ویژه‌ی صفر باشد. با محاسبه‌ی مستقیم می‌توان دید که $W_q^{(۰)}(J_۲) = \frac{۱}{q}W_q(J_۲)$، $W_q^{(۱)}(J_۲) = \frac{۲}{q}W_q(J_۲)\cup\{۰\}$ و $W_q^{(۲)}(J_۲) = \frac{۳}{q}W_q(J_۲)\cup\{۰\} = IW_q(J_۲)$.
از طرفی با توجه به [۲، قضیه ۱]، $W_q(J_۲)$ دیسک دایره‌ای بسته حول مبدأ به شعاع $\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۱-q^۲})$ است. بنابراین می‌توان گفت

$$W_q^{(۰)}(J_۲) = \{z\in\mathbb{C} : |z| \le \frac{۱}{۲q}(۱+\sqrt{۱-q^۲})\};$$
$$W_q^{(۱)}(J_۲) = \{z\in\mathbb{C} : |z| \le \frac{۱}{q}(۱+\sqrt{۱-q^۲})\};$$
$$W_q^{(۲)}(J_۲) = \{z\in\mathbb{C} : |z| \le \frac{۳}{۲q}(۱+\sqrt{۱-q^۲})\}.$$

در گزاره زیر برخی خواص عمومی q−برد عددی از مرتبه‌ی α آورده شده است.

گزاره ۳.۲. فرض کنیم $A\in M_n$، $۰ \le q \le ۱$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. آنگاه، گزاره‌های زیر برقرارند:

(آ) $W_۰^{(\alpha)}(A) = \mathbb{C}$؛

(ب) $W_q^{(\alpha)}(A)$ بسته است؛

(پ) اگر $q \neq ۰$، $W_q^{(\alpha)}(A)$ کراندار است؛

(ت) اگر U ماتریسی یکانی باشد، آنگاه $W_q^{(\alpha)}(U^*AU) = W_q^{(\alpha)}(A)$؛

(ث) اگر $۰ \le q \le \tilde{q} \le ۱$، آنگاه $W_{\tilde{q}}^{(\alpha)}(A) \subseteq W_q^{(\alpha)}(A)$؛

(ج) $W_q^{(\alpha)}(A)$ حداکثر $\alpha+۱$ مولفه‌ی همبند دارد؛

اثبات. آنچنان که در [۴] اشاره شده است، $W_۰(A) = \{z\in\mathbb{C} : |z| \le \min_{\lambda\in\mathbb{C}}\|A-\lambda I\|\}$. بنابراین،

$$\begin{aligned} W_۰^{(\alpha)}(A) &= \{\lambda\in\mathbb{C} : x^*(A-\lambda I)^{\alpha+۱}y = ۰, x^*x = y^*y = ۱, x^*y = ۰\} \\ &= W_۰[(A-\lambda I)^{\alpha+۱}] \\ &= \{\gamma\in\mathbb{C} : ۰ \in W_۰((A-\gamma I)^{\alpha+۱})\}, \end{aligned}$$

که در آن منظور از $W_۰[(A-\lambda I)^{\alpha+۱}]$ در تساوی دوم، ۰-برد عددی چندجمله‌ای ماتریسی $(A-\lambda I)^{\alpha+۱}$ بوده و منظور از $W_۰((A-\gamma I)^{\alpha+۱})$ در تساوی سوم، ۰-برد عددی ماتریس $(A-\gamma)^{\alpha+۱}$ است. با توجه به این که تساوی سوم به ازای همه‌ی مقادیر γ برقرار است، مجموعه‌ی فوق با $\mathbb{C}$ برابر است و حکم قسمت (آ) ثابت می‌شود.
از فشرده‌بودن مجموعه‌ی $\{x\in\mathbb{C}^n : \|x\| = ۱\}$ و پیوسته‌بودن چندجمله‌ای‌ها و ضرب داخلی، حکم قسمت (ب) به‌دست می‌آید.
برای اثبات قسمت (پ)، از آنجا که ضریب بزرگترین توان λ در چندجمله‌ای ماتریسی $(A-\lambda I)^{\alpha+۱}$، ماتریس $(-۱)^{\alpha+۱}I$ است و $W_q((-۱)^{\alpha+۱}I) = \{(-۱)^{\alpha+۱}q\}$ ، بنابراین در حالتی که $q \neq ۰$، باتوجه به قضیه ۱.۲ از [۷]، $W_q^{(\alpha)}(A)$ مجموعه‌ای کراندار است.
برای اثبات قسمت (ت)، توجه کنید که اگر $z\in W_q^{(\alpha)}(U^*AU)$ ، آنگاه بردارهای یکه‌ی x و y موجودند به‌طوری‌که $x^*y = q$ و $x^*(U^*AU-zI)^{\alpha+۱}y = ۰$، که این رابطه معادل است با

$$x^*U^*(A-zI)^{\alpha+۱}Uy = ۰. \qquad (۱.۲)$$

از طرفی بردارهای Ux و Uy نیز بردارهایی یکه بوده و $(Ux)^*(Uy) = \mathsf{q}$. بنابراین، رابطه‌ی (۱.۲) نشان می‌دهد که $z \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$. از طرفی، چنانچه x و y بردارهای یکه‌ای باشند که $x^*(A - zI)^{\alpha+1}y = 0$ و $x^*y = \mathsf{q}$، می‌توان بردارهای یکه‌ی $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را به گونه‌ای یافت که $x = U\hat{x}$ و $y = U\hat{y}$. به سادگی می‌توان دید که $\hat{x}^*\hat{y} = \mathsf{q}$ و $\hat{x}^*(U^*(A - zI)^{\alpha+1}U)\hat{y} = 0$ و بنابراین، $z \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(U^*AU)$ ؛ در نتیجه، تساوی مجموعه‌ای برقرار است.
برای اثبات قسمت (ث)، فرض کنیم $\lambda \in \mathsf{W}_{\tilde{\mathsf{q}}}^{(\alpha)}(A)$. بنابراین، $0 \in \mathsf{W}_{\tilde{\mathsf{q}}}[(A - \lambda I)^{\alpha+1}]$. اکنون با توجه به [۴، قضیه ۲.۵] نتیجه می‌گیریم $0 \in \mathsf{W_q}[(A - \lambda I)^{\alpha+1}]$، و این با $\lambda \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ معادل است.
قسمت (ج) به‌کمک [۷، قضیه ۲.۱] نتیجه می‌شود.

□

قسمتهای (ب) و (پ) از گزاره‌ی ۳.۲ نتیجه‌ی زیر را به‌دست می‌دهند.

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$، $0 < \mathsf{q} \leq 1$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. آنگاه، $\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ فشرده است.

در گزاره‌ی زیر شرایطی برای تقارن q−برد عددی مرتبه α نسبت به محور اعداد حقیقی به‌دست آورده‌ایم.

گزاره ۵.۲. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$، $0 \leq \mathsf{q} \leq 1$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. در این‌صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

(آ) اگر ماتریس A هرمیتی باشد، آنگاه $\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ نسبت به محور اعداد حقیقی متقارن است؛

(ب) اگر ماتریس A دارای این خاصیت باشد که تمام درایه‌های آن روی یک خط گذرنده از مبدأ قرار بگیرند، آنگاه $\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ نسبت به محور اعداد حقیقی متقارن است.

اثبات. فرض کنیم $\lambda \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$. بنابر تعریف ۱.۲، بردارهای یکه‌ی x و y موجودند به‌طوری‌که $x^*y = \mathsf{q}$ و $x^*(A - \lambda I)^{\alpha+1}y = 0$. بنابراین، $(x^*(A - \lambda I)^{\alpha+1}y)^* = y^*(A - \bar{\lambda} I)^{\alpha+1}x = 0$. از آنجا که $y^*x = \mathsf{q}$، می‌توان گفت $\bar{\lambda} \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ و قسمت (آ) ثابت می‌شود.
برای اثبات قسمت (ب)، با توجه به آنکه تمام درایه‌های ماتریس A روی خطی گذرنده از مبدأ قرار دارند، زاویه θ_0 موجود است به‌طوری‌که $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ و $A = e^{i\theta_0}B$، که در آن B ماتریسی با درایه‌های حقیقی است. فرض کنیم $\lambda \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$. آنگاه بنابر تعریف ۱.۲، می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned} 0 \in \mathsf{W_q}[(A - \lambda I)^{\alpha+1}] &= \mathsf{W_q}[e^{i\theta_0(\alpha+1)}(B - \lambda e^{-i\theta_0} I)^{\alpha+1}] \\ &= e^{i\theta_0(\alpha+1)}\mathsf{W_q}[(B - \lambda e^{-i\theta_0} I)^{\alpha+1}]. \end{aligned}$$

یعنی بردارهای یکه‌ی x و y موجودند به‌طوری‌که $x^*y = \mathsf{q}$ و $x^*(B - \lambda e^{-i\theta_0} I)^{\alpha+1}y = 0$. بنابراین،

$$\left(x^*(B - \lambda e^{-i\theta_0} I)^{\alpha+1}y\right)^* = y^*(B - \bar{\lambda} e^{i\theta_0} I)^{\alpha+1}x = 0,$$

که در آن $y^*x = \mathsf{q}$. چنانچه طرفین رابطه‌ی بالا را در $e^{-i\theta_0(\alpha+1)}$ ضرب کنیم، نتیجه می‌گیریم که $\bar{\lambda} \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ و حکم قسمت (ب) ثابت می‌شود.

□

اگرچه در گزاره‌ی ۳.۲(ج)، تعداد مولفه‌های همبند $\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ حداکثر $\alpha + 1$ محاسبه شده است، در گزاره‌ی زیر کران دیگری برای تعداد مولفه‌های همبند $\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ به‌دست آمده که در مواردی می‌تواند ظریف‌تر باشد. این گزاره با توجه به کراندار بودن q−برد عددی مرتبه α، از [۶، نتیجه ۱۵] نتیجه می‌شود.

گزاره ۶.۲. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. اگر x و y بردارهایی یکه باشند و چندجمله‌ای $x^*(A - \lambda I)^{\alpha+1}y = 0$ حداکثر دارای μ ریشه‌ی متمایز باشد، آنگاه برای هر $0 < q \leq |x^*y|$، مجموعه‌ی $\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ حداکثر μ مولفه‌ی همبند دارد.

مثال زیر نشان می‌دهد تعداد مولفه‌های همبند به‌دست آمده از گزاره‌ی ۶.۲ می‌تواند ظریف‌تر از تعداد مولفه‌های همبند به‌دست آمده از گزاره‌ی ۳.۲(ج) باشد.

مثال ۷.۲. فرض کنیم J_2 بلوک جردن 2×2 با مقدار ویژه‌ی صفر باشد. از آنجا که برای این ماتریس $\alpha = 2$، که با شاخص عددی این ماتریس برابر است، با توجه به گزاره‌ی ۳.۲(ج)، $W_q^{(\alpha)}(J_2)$ حداکثر ۳ مولفه‌ی همبند دارد. اکنون، اگر قرار دهیم $x = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$، داریم $x^*(J_2 - \lambda I)^3 y = -\lambda^3$، که $\lambda = 0$ تنها ریشه‌ی آن است. بنابراین، با توجه به گزاره ی ۶.۲، $W_q^{(\alpha)}(J_2)$ $(0 < q \leq 1)$ حداکثر یک مولفه‌ی همبند دارد؛ یعنی همبند است. البته در مثال ۲.۲ نیز $W_q^{(2)}(J_2)$ محاسبه شده و مجموعه‌ای همبند است.

می‌دانیم q−برد عددی یک چندجمله‌ای ماتریسی شامل طیف آن چندجمله‌ای ماتریسی است ([۷])؛ در قضیه‌ی زیر ارتباط بین طیف یک ماتریس و q−برد عددی مرتبه αی آن نشان داده شده است.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم $0 \leq q \leq 1$، α عددی صحیح و نامنفی و $A \in M_n$. دراین‌صورت،

$$\sigma(A) \subseteq W_q^{(\alpha)}(A).$$

به‌علاوه، اگر $q \neq 1$ و $(A - \lambda I)^{\alpha+1}$ یک چندجمله‌ای ماتریسی غیر اسکالر باشد، آنگاه

$$\sigma(A) \subseteq int(W_q^{(\alpha)}(A)),$$

که در آن $\sigma(\cdot)$ نشان دهنده‌ی طیف ماتریس و $int(\cdot)$ نشان دهنده‌ی مجموعه‌ی نقاط درونی می‌باشد.

اثبات. باتوجه به تعریف طیف چندجمله‌ای‌های ماتریسی و خواص دترمینان می‌توان مشاهده کرد که

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : det(A - \lambda I) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (det(A - \lambda I))^{\alpha+1} = det\left((A - \lambda I)^{\alpha+1}\right) = 0\} \\ &= \sigma[(A - \lambda I)^{\alpha+1}].\end{aligned}$$

بنابراین، اگر $\lambda_0 \in \sigma(A)$ ، بردار یکه‌ی x موجود است به‌طوری‌که

$$(A - \lambda_0 I)^{\alpha+1} x = 0 \Rightarrow x^*(A - \lambda_0 I)^{\alpha+1} x = 0;$$

یعنی $\sigma[(A - \lambda I)^{\alpha+1}] \subseteq W^{(\alpha)}(A)$. از طرفی با توجه به گزاره‌ی ۳.۲(ث)،

$$W^{(\alpha)}(A) = W_1^{(\alpha)}(A) \subseteq W_q^{(\alpha)}(A).$$

درنتیجه، $\sigma(A) \subseteq W_q^{(\alpha)}(A)$.

برای قسمت بعد، فرض کنیم $\lambda_0 \in \sigma(A) = \sigma[(A - \lambda I)^{\alpha+1}]$. بنابراین، $0 \in \sigma\left((A - \lambda_0 I)^{\alpha+1}\right)$. از طرفی با توجه به غیر اسکالر بودن چندجمله‌ای ماتریسی $(A - \lambda_0 I)^{\alpha+1}$، به‌کمک [۴، قضیه ۲.۷] داریم:

$$0 \in q\sigma\left((A - \lambda_0 I)^{\alpha+1}\right) \subseteq int\left(W_q\left((A - \lambda_0 I)^{\alpha+1}\right)\right).$$

با توجه به رابطه‌ی بالا، به‌کمک [۷، قضیه ۲.۲] نتیجه‌می‌گیریم که λ_0 نمی‌تواند نقطه‌ی مرزی از $W_q^{(\alpha)}(A)$ باشد و بنابراین $\lambda_0 \in int(W_q^{(\alpha)}(A))$. □

با توجه به قضیه‌ی قبل و اثبات آن، نتیجه‌ی زیر، که شایستگی دارد جداگانه بیان شود، به‌دست می‌آید.

نتیجه ۹.۲. فرض کنیم $0 \leq q \leq 1$، α عددی صحیح و نامنفی و $A \in M_n$. آنگاه

$$\sigma(A) \subseteq W_q(A) \cap W_q^{(\alpha)}(A).$$

می‌دانیم که $\lambda_\circ \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ معادل است با $\circ \in W_q((A-\lambda_\circ I)^{\alpha+1})$. در قضیه‌ی بعد این هم‌ارزی برای نقاط مرزی $\alpha-$برد عددی بررسی شده است.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$، $\circ < \mathsf{q} \leq 1$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. در این صورت، روابط زیر برقرارند:

(آ) اگر $\lambda_\circ \in \partial\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ ، آنگاه $\circ \in \partial W_q((A-\lambda_\circ I)^{\alpha+1})$؛

(ب) اگر $\circ \in \partial W_q((A-\lambda_\circ I)^{\alpha+1})$، $(A-\lambda_\circ I)^{\alpha+1} \neq \circ$ و $\lambda_\circ \notin \mathsf{W_q}^{(\alpha-1)}(A)$، آنگاه $\lambda_\circ \in \partial\mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$، که در آن $\partial(.)$ نشان دهنده‌ی نقاط مرزی است.

اثبات. قسمت (آ) نتیجه‌ی سرراست از [۷، قضیه ۲.۲] است. برای اثبات قسمت (ب)، با توجه به رابطه‌ی

$$\mathsf{W_q}^{(\alpha-1)}(A) = \mathsf{W_q}[(-1)(\alpha+1)(A-\lambda I)^{\alpha}] = \mathsf{W_q}[((A-\lambda I)^{\alpha+1})'],$$

می‌توان گفت: $\lambda_\circ \notin \mathsf{W_q}^{(\alpha-1)}(A)$ معادل است با $\lambda_\circ \notin \mathsf{W_q}[((A-\lambda I)^{\alpha+1})']$ و این عبارت معادل است با $\circ \notin \mathsf{W_q}(((A-\lambda I)^{\alpha+1})'|_{\lambda_\circ})$. اکنون حکم به کمک [۲، قضیه ۱(ii)] به‌دست می‌آید. □

در گزاره زیر شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آن‌ها ، q−برد عددی مرتبه αی ماتریس حتما شامل صفر است.

گزاره ۱۱.۲. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$، $\circ \leq \mathsf{q} \leq 1$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. در این‌صورت، اگر هریک از شرایط (آ) یا (ب) برقرار باشند، آنگاه $\circ \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$؛

(آ) A پوچتوان با درجه‌ی پوچی کمتر یا مساوی $\alpha+1$ باشد؛

(ب) A ماتریسی منفرد باشد.

اثبات. فرض کنیم x و y بردارهای یکه‌ای باشند که $x^*y = \mathsf{q}$. اگر $\lambda = \circ$، عبارت $x^*(A-\lambda I)^{\alpha+1}y$ برابر با $x^*A^{\alpha+1}y$ است. اکنون اگر A پوچتوان با درجه‌ی پوچی کمتر یا مساوی $\alpha+1$ باشد، عبارت $A^{\alpha+1}$ صفر است. بنابراین، $\circ \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$. اگر A منفرد باشد، $\circ \in \sigma(A)$. آنگاه، با توجه به قضیه ۸.۲، $\circ \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$. □

۳ کران‌هایی برای q−شعاع عددی

در گزاره ۳.۲ اشاره کردیم که q−برد عددی مرتبه ی α کراندار است. در این بخش کران‌هایی برای اعضای این مجموعه پیدا می‌کنیم. نخست یادآوری‌می‌کنیم که q−شعاع عددی ماتریس A به‌صورت

$$\omega_{\mathsf{q}}(A) = max\{|z| : z \in \mathsf{W_q}(A)\},$$

و q−شعاع عددی داخلی ماتریس A به‌صورت

$$\tilde{\omega}_{\mathsf{q}}(A) = min\{|z| : z \in \mathsf{W_q}(A)\}$$

معرفی و نمایش داده می‌شود.

در قضیه زیر، کران بالایی برای قدر مطلق اعضای q−برد عددی از مرتبه ی α، برحسب q−شعاع عددی به‌دست آورده‌ایم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$، $\circ < \mathsf{q} \leq 1$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. آنگاه، برای هر $\mu \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$ داریم:

$$|\mu| \leq \sqrt{\alpha+1+\frac{1}{q^2}\sum_{k=1}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{k}^2(\omega_{\mathsf{q}}(A^k))^2}.$$

اثبات. فرض کنیم x و y بردارهایی یکه باشند به‌طوری‌که $x^*y = \mathsf{q}$. اگر μ ریشه‌ای از چندجمله‌ای $x^*(A-\lambda I)^{\alpha+1}y$ باشد، با استفاده از $\|.\|_2$ می‌توان نشان داد (۵.۶.۴۶ در [۳]):

$$\begin{aligned}|\mu| &\leq \sqrt{\alpha+1+|\frac{x^*A^{\alpha+1}y}{\mathsf{q}}|^2+\binom{\alpha+1}{\alpha}^2|\frac{x^*A^{\alpha}y}{\mathsf{q}}|^2+\cdots+\binom{\alpha+1}{1}^2|\frac{x^*Ay}{\mathsf{q}}|^2}\\ &= \sqrt{\alpha+1+\frac{1}{\mathsf{q}^2}(\sum_{k=1}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{k}^2|x^*A^ky|^2)}\\ &\leq \sqrt{\alpha+1+\frac{1}{\mathsf{q}^2}\sum_{k=1}^{\alpha+1}\binom{\alpha+1}{k}^2(\omega_{\mathsf{q}}(A^k))^2}.\end{aligned}$$

□

در قضیه‌ی زیر با استفاده از کران کوشی برای صفرهای چندجمله‌ای، کران پایین و کران بالایی برای $\mathsf{q}-$برد عددی مرتبه α پیدامی‌کنیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$، $0 < \mathsf{q} \leq 1$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. اگر $\mu \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$، آنگاه نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{\tilde{\omega}_{\mathsf{q}}(A^{\alpha+1})}{\omega_{\mathsf{q}}(A^{\alpha+1})+max_{0\leq k\leq\alpha}\{\binom{\alpha+1}{k}\omega_{\mathsf{q}}(A^k)\}} \leq |\mu| \leq 1+\frac{1}{\mathsf{q}}\max_{1\leq k\leq\alpha+1}\{\binom{\alpha+1}{k}\omega_{\mathsf{q}}(A^k)\}.$$

اثبات. فرض کنیم x و y بردارهایی یکه باشند که $x^*y = \mathsf{q}$. اگر μ ریشه‌ی چندجمله‌ای $x^*(A-\lambda I)^{\alpha+1}y$ باشد، آنگاه با توجه به کران بالای کوشی (۵.۶.۴۷ در [۳]) برای آن داریم:

$$\begin{aligned}|\mu| &\leq 1+\max_{1\leq k\leq\alpha+1}(\frac{\binom{\alpha+1}{k}|x^*A^ky|}{\mathsf{q}})\\ &\leq 1+\frac{1}{\mathsf{q}}\max_{1\leq k\leq\alpha+1}\binom{\alpha+1}{k}\omega_{\mathsf{q}}(A^k).\end{aligned}$$

برای کران پایین، ابتدا قرار می‌دهیم

$$\mathsf{S} := \{x,y \in \mathbb{C}^n : x^*y = q, \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

با توجه به کران پایین کوشی (۵.۶.P۳۰ در [۳])، داریم:

$$\begin{aligned}|\mu| &\geq \frac{\frac{|x^*A^{\alpha+1}y|}{q}}{\frac{|x^*A^{\alpha+1}y|}{q}+\max_{1\leq k\leq\alpha}\{1,\binom{\alpha+1}{k}\frac{|x^*A^ky|}{q}\}}\\ &= \frac{|x^*A^{\alpha+1}y|}{|x^*A^{\alpha+1}y|+\max_{0\leq k\leq\alpha}\{\binom{\alpha+1}{k}|x^*A^ky|\}}\\ &\geq \frac{\min_{x,y\in\mathsf{S}}|x^*A^{\alpha+1}y|}{\max_{x,y\in\mathsf{S}}|x^*A^{\alpha+1}y|+\max_{x,y\in\mathsf{S}}(\max_{0\leq k\leq\alpha}\{\binom{\alpha+1}{k}|x^*A^ky|\})}\\ &= \frac{\tilde{\omega}_{\mathsf{q}}(A^{\alpha+1})}{\omega_{\mathsf{q}}(A^{\alpha+1})+max_{0\leq k\leq\alpha}\{\binom{\alpha+1}{k}\omega_{\mathsf{q}}(A^k)\}}.\end{aligned}$$

□

در مثال زیر، کران‌های بالای به‌دست‌آمده از قضیه‌ی ۱.۳ و قضیه‌ی ۲.۳ را مقایسه می‌کنیم.

مثال ۳.۳. فرض‌کنیم $J_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $\alpha = ۱$. اگر $q = ۰/۵$، چنان‌که در مثال ۲.۲ اشاره‌شد، $\omega_{۰/۵}(J_۲) = \frac{۱+\sqrt{۱-(۱/۲)^۲}}{۲} \approx ۰/۹۳۳$. از طرفی با توجه به مثال ۲.۲، می‌توان دید که اگر $\mu \in W^{(۱)}_{۰/۵}(J_۲)$، آنگاه $|\mu| \leq ۳/۷۳۲$. همچنین اگر $\mu \in W^{(۱)}_{۰/۵}(J_۲)$، با توجه به قضیه‌ی ۱.۳، $|\mu| \leq ۳/۹۹۱$ و با توجه به قضیه‌ی ۲.۳، $|\mu| \leq ۶/۵۹۸$. در حالتی‌که $q = ۰/۹$، به‌کمک مثال ۲.۲ می‌توان دید $\omega_{۰/۹}(J_۲) \approx ۰/۷۱۸$ و اگر $\mu \in W^{(۱)}_{۰/۹}(J_۲)$، آنگاه $|\mu| \leq ۱/۵۹۵$. کران بالای به‌دست آمده برای قدرمطلق اعضای $W^{(۱)}_{۰/۹}(J_۲)$ از قضیه‌ی ۱.۳ عبارت است از ۲/۱۳۲، و کران به‌دست آمده از قضیه‌ی ۲.۳ عبارت است از ۳/۳۹۳. از مقایسه‌ی این کران‌های بالای به‌دست‌آمده برای قدرمطلق اعضای $W^{(۱)}_{۰/۵}(J_۲)$ و $W^{(۱)}_{۰/۹}(J_۲)$، درمی‌یابیم که برای ماتریس $J_۲$، در حالتی که $q = ۰/۹$ یا $q = ۰/۵$، کران بالای به‌دست آمده از قضیه‌ی ۱.۳ ظریف‌تر و به مقدار واقعی نزدیک‌تر است.

یادآوری می‌کنیم که برای چندجمله‌ای ماتریسی $P(\lambda)$ مانند (۱.۱)، چندجمله‌ای ماتریسی $nm \times nm$ زیر

$$C(P) = \begin{pmatrix} I_n & & & ۰ \\ & I_n & & \\ & & \ddots & \\ ۰ & & & A_m \end{pmatrix} \lambda - \begin{pmatrix} ۰ & I_n & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_n & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_۰ & -A_۱ & -A_۲ & \cdots & -A_{m-۱} \end{pmatrix} \tag{۱.۳}$$

خطی‌سازی همراه برای چندجمله‌ای $P(\lambda)$ نامیده می‌شود. ماتریس $\begin{pmatrix} ۰ & I_n & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_n & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -A_۰ & -A_۱ & -A_۲ & \cdots & -A_{m-۱} \end{pmatrix}$ نیز ماتریس همراه چندجمله‌ای ماتریسی یکین $I\lambda^m + A_{m-۱}\lambda^{m-۱} + \cdots + A_۱\lambda + A_۰$ نامیده می‌شود که چندجمله‌ای کمین مربوط به این ماتریس نیز می‌باشد و بنابراین ریشه‌های آن مقادیر ویژه‌ی ماتریس اشاره شده خواهند بود ([۳، صفحه ۳۶۵]). در گزاره زیر به‌کمک خطی‌سازی همراه، ارتباط بین q−برد عددی مرتبه αی ماتریس A را با ماتریس همراه چندجمله‌ای $(A - \lambda I)^{\alpha+۱}$ به‌دست آورده‌ایم.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $A \in M_n$، $۰ < q \leq ۱$ و α عددی صحیح و نامنفی باشد. همچنین فرض کنیم

$$B = \begin{pmatrix} ۰ & I_n & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_n & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-۱)^\alpha A^{\alpha+۱} & (-۱)^{\alpha-۱}(\alpha+۱)A^\alpha & (-۱)^{\alpha-۲}\frac{۱}{۲}\alpha(\alpha+۱)A^{\alpha-۱} & \cdots & -A \end{pmatrix} \in M_{n(\alpha+۱)}.$$

بنابراین، $W_q^{(\alpha)}(A) \cup \{۰\} \subseteq q^{-۱}W_q(B)$.

اثبات. نخست توجه کنید که

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{\alpha+۱} &= \lambda^{\alpha+۱}I - \lambda^\alpha(\alpha+۱)A + \cdots + (-۱)^\alpha(\alpha+۱)A^\alpha + (-۱)^{\alpha+۱}A^{\alpha+۱} \\ &= (-۱)^{\alpha+۱}(A - \lambda I)^{\alpha+۱}.\end{aligned}$$

از طرفی، خطی‌سازی همراه چندجمله‌ای $(\lambda I - A)^{\alpha+۱}$ به‌صورت $C((\lambda I - A)^{\alpha+۱}) = \lambda I - B$ می‌باشد. درنتیجه،

بنابر [۷، قضیه ۱.۳] و [۴، حکم ۲.۲(b)]، داریم

$$\begin{aligned} \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A) \cup \{\circ\} &= \mathsf{W_q}[(\lambda I - A)^{\alpha+1}] \cup \{\circ\} \\ &\subseteq \mathsf{W_q}[\lambda I - B] \\ &= \mathsf{W_q}(\mathsf{q}^{-1} B) \\ &= \mathsf{q}^{-1}\mathsf{W_q}(B). \end{aligned}$$

□

گزاره‌ی پایانی این بخش نتیجه‌ای است که بی‌درنگ از قضیه‌ی ۴.۳ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۵.۳. فرض کنیم $A \in \mathsf{M_n}$، α عددی صحیح و نامنفی، $\circ < \mathsf{q} \leq 1$ و B همانند قضیه‌ی ۴.۳ باشد. اگر $\mu \in \mathsf{W_q}^{(\alpha)}(A)$، آنگاه $|\mu| \leq \mathsf{q}^{-1}\omega_{\mathsf{q}}(B)$.

۴ نتیجه گیری

فرض کنیم، α عددی صحیح و نامنفی باشد. برای $\circ < q \leq 1$، $q-$برد عددی مرتبه α مجموعه‌ای بسته و کراندار است که حداکثر $\alpha+1$ مولفه‌ی همبند دارد و هرچه q بزرگتر شود، این مجموعه کوچکتر خواهد شد. این مجموعه برای ماتریس‌های هرمیتی نسبت به محور اعداد حقیقی متقارن است و برای ماتریس‌های غیر اسکالر، طیف ماتریس زیرمجموعه‌ای از نقاط درونی $q-$برد عددی مرتبه α است. کران دیگری برای تعداد مولفه‌های همبند و شرایطی برای نقاط مرزی $q-$برد عددی مرتبه α به‌دست آمده است. چنانچه ماتریس پوچتوان با درجه‌ی پوچی کمتر یا مساوی $\alpha+1$ باشد یا ماتریس نامنفرد باشد، آنگاه $q-$برد عددی مرتبه α شامل صفر خواهد بود. به‌علاوه، کران‌هایی برای قدرمطلق اعضای $q-$برد عددی مرتبه α به‌دست آمده است. در آخر، ارتباط بین $q-$برد عددی ماتریس همراه چندجمله‌ای یکین $(\lambda I - A)^{\alpha+1}$ و $q-$برد عددی مرتبه α برای ماتریس A نشان داده شده است.

فهرست منابع

[1] Aghamollaei, Gh., Avizeh, N. and Jahanshahi, Y., 2013. Generalized numerical ranges of matrix polynomials. *Bull. Iranian Math. Soc., 39*(5), pp. 789-803. DOI:not available

[2] Chein, M., Nakazato, H. and Psarrakos, P., 2006. The q-numerical range and the Davis-Wielandt shell of reducible 3×3 matrices. *Linear Multilinear Algebra, 54*(2), pp. 79-112. DOI: 10.1080/00036810500148994

[3] Horn, R. A., and Johnson, C. R., 2012. *Matrix analysis* . Cambridge University Press, 2nd edition, .

[4] Li, C. K., Mehta, P. P., and Rodman, L., 1994. A generalized numerical range: the range of a constrained sesquilinear form. *Linear Multilinear Algebra, 37*(1-3), pp. 25-49. DOI: 10.1080/03081089408818311

[5] Marcus, M., and Andersen, P., 1977. Constrained extrema of bilinear functionals. *Monatsh Math., 84*, pp. 219-235. DOI: 10.1007/BF01538033

[6] Psarrakos, P. J., 2001, The $q-$numerical range of matrix polynomials, II, *Bull. Greek Math. Soc., 45*, pp. 3-15. DOI: not available

[7] Psarrakos, P. J., and Vlamos, P. M., 1998. The $q-$numerical range of matrix polynomials. *Linear Multilinear Algebra, 47*(1), pp. 1-9. DOI: 10.1080/03081080008818627

[8] Rezagholi, Sh. and Yasini, R., 2024. Index rank$-k$ numerical range of matrices. *J. Mahani Math. Res., 13*(1), pp. 525-534. DOI: 10.22103/jmmr.2023.21566.1445

[9] Safarzadeh, M. and Salemi, A., 2018. DGMRES and index numerical range of matrices. *J. Comput. Appl. Math., 335*, pp. 349-360. DOI: 10.1016/j.cam.2017.12.009

Some results on the q−numerical range of matrix polynomials

Sharifeh Rezagholi[(1)] [2] and Halimeh Ardakani[(2)]

[(1),(2)] Department of Mathematics, Payame Noor University, Tehran, Iran

Communicated by: Gholamreza Aghamolaei

Received: 6 May 2025 Accepted: 29 September 2025

Abstract: The set of q−numerical range of order α, as one of the generalizations of the numerical range of square matrices, is introduced in this paper. Some of its algebraic and geometrical properties, such as the number of connected components and its symmetries, are investigated, and considering the obtained relations, inequalities regarding the q−numerical radius and the inner q−numerical radius are obtained.

Keywords: q−numerical range of order α, q−numerical range of a matrix, q−numerical range of a matrix polynomial.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (Sh. Rezagholi) rezagholi@pnu.ac.ir, (H. Ardakani) ardakani@pnu.ac.ir