مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۲۷–۴۴

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.47633.2301

اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا: تعمیم، ویژگی‌ها و کاربردها در تجزیه و تحلیل قابلیت اطمینان

مرتضی محمدی [۱] [۱] و مجید هاشم‌پور [۲]

[۱] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه زابل، زابل، ایران
[۲] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران

دبیر مسئول: غلامعلی پرهام

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۲۳

چکیده: این مقاله، تعمیم یک معیار عدم حتمیت تحت عنوان اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا را معرفی می‌کند. ارتباط این معیار با معیارهای قابلیت اعتماد مانند گشتاورهای شرطی مرتبه اول و دوم گذشته عمر، میانگین گذشته عمر وزنی، تابع نرخ خطر وارون و غیره مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین، اثر تبدیل خطی و ویژگی یکنوایی بر روی اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا بررسی می‌شود و کران‌های بالا و پایین برای این معیار حاصل می‌شود. به‌علاوه، ترتیب‌های تصادفی بر مبنای اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برای مقایسه بین جوامع ارائه می‌گردد و رفتار چند توزیع آماری پرکاربرد از قبیل نمایی، رایلی و پارتو برپایه این معیار عدم حتمیت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه، یک برآوردگر ناپارامتری تجربی برای معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا معرفی می‌گردد و خواص مجانبی آن مطالعه می‌شود. در نهایت، یک شاخص برای انتخاب مدل مناسب برازش به داده‌ها براساس معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا ارائه و کاربرد آن در تحلیل یک مجموعه داده واقعی بررسی می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: اکستروپی وزنی، اکستروپی گذشته تجمعی، گشتاورهای شرطی، میانگین گذشته عمر وزنی.

رده‌بندی ریاضی: 62E10; 62F10

۱ مقدمه

کلود شانون [۱۹] مفهوم آنتروپی را به عنوان معیار عدم حتمیت و سنجش پایداری با انتشار مقاله ای معرفی کرد. آنتروپی متغیر تصادفی را می‌توان به عنوان متوسط میزان اطلاعات حاصل از مقادیر مشاهده شده متغیر تصادفی درباره مدل توزیع نیز ارائه کرد. در نظریه اطلاع، معیار آنتروپی یک ابزار پایه ای است که جایگاه خود را در بین علوم مختلف از جمله فیزیک، مهندسی، آمار و احتمال تثبیت کرده است و معمولا برای مقایسه دو توزیع احتمال به کار می‌رود.

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(M. Hashempour) ma.hashempour@hormozgan.ac.ir, (M. Mohammadi) mo.mohammadi@uoz.ac.ir

فرض کنید X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و نامنفی با تابع چگالی $f(x)$ باشد. آنگاه آنتروپی شانون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(X) = -E[\log f(X)] = -\int_S f(x)\log f(x)dx, \qquad (۱.۱)$$

به‌طوری‌که S تکیه‌گاه مقادیر عددی متغیر تصادفی X است. پس از تعریف آنتروپی توسط شانون، محققان تعمیم‌هایی از آن را ارائه دادند که در این بخش به معرفی مختصری از آن خواهیم پرداخت. از آن جا که آنتروپی شانون برای وقوع هر پیشامدی اهمیت یکسان قائل بود برای رفع این محدودیت، آنتروپی وزنی جایگزین آنتروپی کلاسیک شانون شد.

دی کرشنزو و لانگوباردی [۵]، آنتروپی وزنی را ارائه کردند:

$$H^w(X) = -E[X\log f(X)] = -\int_0^\infty xf(x)\log f(x)dx, \qquad (۲.۱)$$

که عامل x در انتگرال به عنوان وزن می‌باشد و به صورت خطی برقوع $X = x$ تأکید می‌کند.

اخیراً نویسندگان زیادی نسخه‌های آنتروپی و کاربردهای آن را مورد بحث قرار داده‌اند. دی‌کرشنزو و لانگوباردی [۶]، آنتروپی گذشته تجمعی را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\mathrm{CPE}(X) = -\int_0^\infty F(x)\log F(x)dx,$$

میثاق و همکاران [۱۴]، آنتروپی های گذشته تجمعی وزنی را معرفی کردند:

$$\mathrm{WCPE}(X) = -\int_0^\infty xF(x)\log F(x)dx,$$

دی‌کرشنزو و لانگوباردی [۶]، آنتروپی گذشته تجمعی پویا را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\mathrm{DCPE}(X;t) = -\int_0^t \frac{F(x)}{F(t)}\log\frac{F(x)}{F(t)}dx.$$

لاد و همکاران [۱۲] یک اندازه مکمل دوگان برای آنتروپی به نام اکسترویی ارائه کردند که می‌تواند نظریه اطلاع را گسترش دهد. اصطلاح اکسترویی، به عنوان نقطه مقابل آنتروپی در ادبیات دانشگاهی مورد استفاده قرار می‌گیرد در صورتی که آنتروپی و اکسترویی ویژگی های ریاضی مشابهی دارند. معیارهای آنتروپی و اکسترویی مانند تصاویر سیاه و سفید در یک فیلم عکاسی مرتبط هستند و با هم به توصیف اطلاعات در یک توزیع کمک می‌کنند. اکسترویی در موقعیت های خاص از لحاظ مفهوم برتری دارد و مقایسه ی عدم حتمیت دو متغیر تصادفی را تسهیل می‌کند. اکسترویی کاربرد های مختلفی در زمینه های تجاری و علمی مانند اندازه گیری های نجومی، توزیع گرما در کهکشان ها، ستاره ها، دینامیک سیالات، تحلیل تصاویر مدل های رشد جمعیت و . . . مورد مطالعه ی جهانی قرار گرفته است.

لاد و همکاران [۱۲] معیار اکسترویی را به صورت زیر ارائه دادند:

$$J(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 f\big(F^{-1}(u)\big)du. \qquad (۳.۱)$$

که $0 < u < 1$ و $F^{-1}(u) = \inf\{t; F(t) \geq u\}$، تابع چندک تابع F می‌باشد.

اکسترویی برای مقایسه عدم حتمیت دو متغیر تصادفی نیز استفاده می‌شود. اگر اکسترویی متغیر تصادفی X کمتر از اکسترویی متغیر تصادفی Y باشد $J(X) < J(Y)$ به این معناست که متغیر تصادفی X عدم حتمیت بیشتر نسبت به متغیر تصادفی Y دارد به عبارتی، میزان اطلاعات در متغیر تصادفی X بیشتر از متغیر تصادفی Y است. به دلیل کاربرد فراوان این معیار عدم حتمیت، نسخه‌هایی تعمیم‌یافته زیادی از این معیار ارائه شده است. در ادامه برخی از این شاخص ها ارائه می‌شود:

بالاکریشنان و همکاران [۲]، اکسترویی وزنی متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته X با تابع چگالی $f(x)$ را به صورت زیر ارائه دادند:

$$J^w(X) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty xf^2(x)dx.$$

کمری و بونو [۱۰]، اکسترویی گذشته طول عمر متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته X با تابع چگالی $f(x)$ را به صورت زیر ارائه دادند:

$$PJ(X) = -\frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{f(x)}{F(t)}\right]^2 dx.$$

برای مطالعه مفاهیم مورد نیاز از قبیل میانگین گذشته عمر وزنی، تابع نرخ خطر وارون و ارتباط بین آن‌ها می‌توان به بلیس و گوسیا [۳]، اسدی و زهره وند [۱]، و کاور و توماس [۴] مراجعه کرد. جدیدترین تعمیم‌های اکستروپی و کاربردهای آن را می‌توان در مطالعات [۷، ۸، ۱۵، ۱۶] مشاهده نمود. بنابراین، معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا در بخش دوم این مقاله معرفی خواهد شد. بخش سوم به بررسی نامساوی‌ها و کران‌های مرتبط با معیار معرفی شده اختصاص یافته است. در بخش چهارم، ترتیب‌های تصادفی براساس معیار پیشنهادی مطالعه می‌شود. در بخش پنجم، برآوردگرهای ناپارامتری و خواص مجانبی ارائه شده است و در انتها، کاربردی از معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا در تحلیل داده‌های واقعی بررسی می‌گردد.

۲ اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا

در این بخش، به مطالعه ارتباط شاخص های قابلیت اعتماد مانند تابع نرخ خطر وارون، گشتاورهای شرطی و میانگین گذشته عمر با اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا پرداخته می‌شود. در ادامه، چند معیار مرتبط با موضوع مورد مطالعه ارائه می‌شود. نیر و ستار [۱۷] اکستروپی گذشته تجمعی متغیر تصادفی X را ارائه کردند:

$$\mathcal{E}PJ(X) = -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} F^{۲}(x)dx. \tag{۱.۲}$$

اخیراً، هاشم پور و همکاران [۹] اکستروپی گذشته تجمعی وزنی متغیر تصادفی X را معرفی کردند:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X) = -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\infty} xF^{۲}(x)dx. \tag{۲.۲}$$

تعریف **۱.۲**. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع توزیع $F(x)$ باشد. نسخه پویای اکستروپی گذشته تجمعی وزنی که اکستروپی گذشته تجمعی وزنی برای $[X \mid X \leq t]$ است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) = -\frac{۱}{۲F^{۲}(t)}\int_{۰}^{t} xF^{۲}(x)dx, \tag{۳.۲}$$

بدیهی است که اگر t به سمت بی نهایت میل کند آنگاه (۳.۲) به (۲.۲) تبدیل می‌شود.

مثال **۲.۲**. فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته دارای توزیع رایلی با تابع توزیع $F(t) = ۱ - e^{-\lambda t^{۲}}$ باشد. با توجه به رابطه (۳.۲)، اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برابر با

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) = -\frac{\left(۲t^{۲}\lambda - ۳\right)e^{۲t^{۲}\lambda} + ۴e^{t^{۲}\lambda} - ۱}{۸\lambda\left(e^{t^{۲}\lambda} - ۱\right)^{۲}},$$

می‌باشد که اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویای توزیع رایلی وابسته به زمان است. در شکل ۱، رفتار تابع $\mathcal{E}PJ^{w}(X;t)$ نسبت به پارامترهای t و λ رسم شده است. این تابع نسبت به پارامترهای t و λ غیرصعودی است.

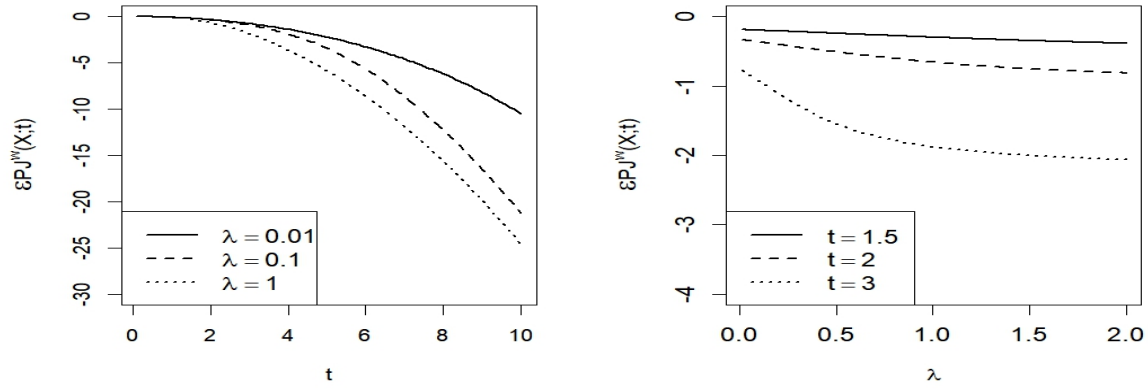
مثال **۳.۲**. فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی دارای توزیع بتا تغییر مقیاس یافته با تابع توزیع

$$F(t) = ۱ - \left(۱ - \frac{t}{R}\right)^{c}, \qquad ۰ \leq t \leq R, c > ۱,$$

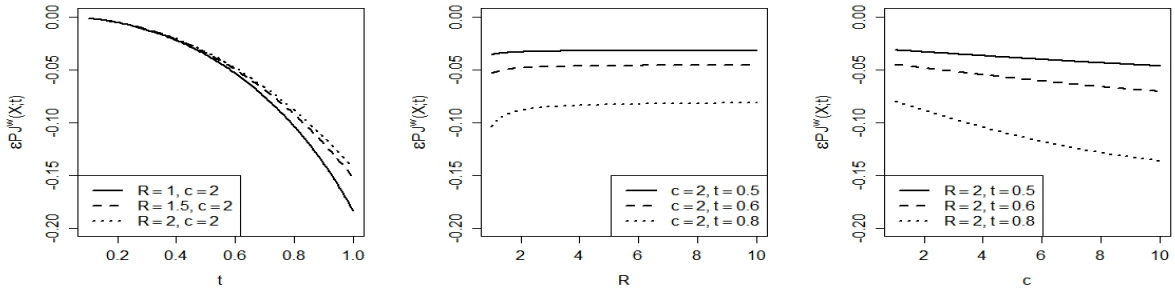
باشد. با استفاده از (۳.۲)، اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا عبارت است از:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) = -\frac{(t-R)^{۲c}\left(\left(۲c+۱\right)t^{۲} - ۲Rct - R^{۲}\right) + (-R)^{۲c}R^{۲}}{\left(۸c^{۲} + ۱۲c + ۴\right)(t-R)^{۲c}}.$$

در شکل ۲، رفتار تابع $\mathcal{E}PJ^{w}(X;t)$ نسبت به پارامترهای t، c و R رسم شده است. این تابع نسبت به پارامترهای t و c غیرصعودی و نسبت به پارامتر R غیرنزولی است.



شکل ۱: اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برای توزیع رایلی در مثال ۲.۲



شکل ۲: اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برای توزیع بتا تغییر مقیاس یافته در مثال ۳.۲

مثال **۴.۲**. فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته دارای توزیع یکنواخت روی تکیه گاه $(۰, ۱)$ باشد. با توجه به رابطه (۳.۲)، اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برابر با

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) = -\frac{t^۳}{۸},$$

است که تابعی نزولی نسبت به t است.

در ادامه، شرط یکنوایی اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا ارائه می‌شود.

قضیه **۵.۲**. اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا، افزایشی (کاهشی) است اگر و تنها اگر

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) \leq (\geq) -\frac{t}{۴}r_F^{-۱}(t), \qquad (۴.۲)$$

که در آن $r_F(t) = \frac{f(t)}{F(t)}$ است.

اثبات. فرض کنید $\mathcal{E}PJ^w(X;t)$ افزایشی باشد، در این‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}PJ^w(X;t) &= -\frac{۱}{۲}\left(\frac{tF^۴(t) - ۲F(t)f(t)}{F^۴(t)}\int_۰^t xF^۲(t)dx\right)\\ &= -\frac{t}{۴} - ۲r_F(t)\mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq ۰.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \leq -\frac{t}{۴r_F(t)}.$$

به طور مشابه، زمانی‌که $\mathcal{E}PJ^{w}(X;t)$ کاهشی باشد، قابل اثبات است. □

تعریف **۶.۲**. فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته باشد. گشتاور مرتبه دوم $[X \mid X \leq t]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vartheta_X(t) = E[X^{۲} \mid X \leq t] = t^{۲} - ۲\mu_X(t). \tag{۵.۲}$$

به‌طوریکه $\mu_X(t) = \int_{۰}^{t} x\frac{F(x)}{F(t)}dx$ میانگین گذشته عمر وزنی است. وقتی که $x = ۱$ باشد $\mu_X(t)$ به میانگین گذشته عمر تبدیل می‌شود.

ملاحظه **۷.۲**. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) = c_{۱}(t)\mathcal{E}PJ(X) + c_{۲}(t), \tag{۶.۲}$$

به طوری که، $c_{۱}(t) = F^{-۲}(t)$ و $c_{۲}(t) = \frac{۱}{۲}\int_{t}^{\infty} x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{۲} dx$.

اثبات. از رابطه (۳.۲) داریم،

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) &= -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t} x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{۲} dx \\
&= -\frac{۱}{۲}\left(\int_{۰}^{\infty} x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{۲} dx - \int_{t}^{\infty} x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{۲} dx\right) \\
&= F^{-۲}(t)\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) + \frac{۱}{۲}\int_{t}^{\infty} x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{۲} dx \\
&= c(t_{۱})\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) + c(t_{۲}).
\end{aligned}$$

□

گزاره **۸.۲**. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ باشد. $\mu_X(t)$ نسبت به t صعودی (نزولی) است اگر و تنها اگر $\mu_X(t) \leq (\geq) tr_F^{-۱}(t)$.

اثبات. فرض کنید، $\mu_X(t)$ نسبت به t صعودی باشد، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu_X(t) = t - r_F(t)\mu_X(t) \geq ۰. \tag{۷.۲}$$

آن‌گاه داریم،

$$\mu_X(t) \leq tr_F^{-۱}(t). \tag{۸.۲}$$

برای حالت نزولی به‌طور مشابه اثبات می‌شود. □

در ادامه، به بررسی اثر تبدیل خطی بر معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا پرداخته می‌شود.

قضیه **۹.۲**. فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته و نامنفی به ترتیب با توابع توزیع $F(x)$ و $G(x)$ باشند. اگر $Y = cX + d$ و $c > ۰$ و $d \geq ۰$ باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(Y;t) = c^{۲}\mathcal{E}PJ^{w}(X;\frac{t-d}{c}) + dc\mathcal{E}PJ(X;\frac{t-d}{c}), \quad t \geq d. \tag{۹.۲}$$

اثبات. با توجه به رابطه $F_Y(y) = F_X(\frac{y-d}{c})$ و نیز تعریف ۳.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}PJ^w(Y;t) &= -\frac{1}{2}\int_0^t y\Big[\frac{F_Y(y)}{F_Y(t)}\Big]^2 dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t y\left(\frac{F_X(\frac{y-d}{c})}{F_X(\frac{t-d}{c})}\right)^2 dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{t-d}{c}} (cx+d)\left(\frac{F_X(x)}{F_X(\frac{t-d}{c})}\right)^2 c dx \\
&= -\frac{c^2}{2}\int_0^{\frac{t-d}{c}} x\left(\frac{F_X(x)}{F_X(\frac{t-d}{c})}\right)^2 dx - \frac{dc}{2}\int_0^{\frac{t-d}{c}} \left(\frac{F_X(x)}{F_X(\frac{t-d}{c})}\right)^2 dx \\
&= c^2\mathcal{E}PJ^w(X;\frac{t-d}{c}) + cd\,\mathcal{E}PJ(X;\frac{t-d}{c}).
\end{aligned}$$

نتیجه ۱۰.۲. در قضیه ۹.۲، به ازای $t=d$ داریم: $\mathcal{E}PJ^w(Y;t) = c^2\mathcal{E}PJ^w(X) + cd\,\mathcal{E}PJ(X)$.

ملاحظه ۱۱.۲. فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته و نامنفی X و Y با توابع توزیع تجمعی به ترتیب $F(x)$ و $G(x)$ باشند. به ازای هر $t \geq 0$ ، $\mu_X(t) = \mu_Y(t)$ اگر و تنها اگر X و Y هم توزیع باشند. این مطلب همچنین برای گشتاور مرتبه دوم $[X \mid X \leq t]$ نیز صادق است.

در بخش بعد، کران های مفیدی برای معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا ارائه خواهد شد.

۳ کران ها و نامساوی ها

در طول سال‌های اخیر نامساوی‌ها مورد توجه بسیار قرار گرفته‌اند و در اغلب زمینه‌های آمار و احتمال از جمله نظریه قابلیت اعتماد، تحلیل بقاء، اقتصاد، بیمه و علم مدیریت کاربرد بسیاری دارند. در این بخش، کران های پایینی برای شاخص (۵.۲) بر حسب میانگین گذشته عمر وزنی، تابع نرخ خطر وارون، اکستروپی گذشته تجمعی و گشتاور مرتبه دوم $[X \mid X \leq t]$ بدست می‌آید.

گزاره ۱.۳. فرض کنید $F(x)$ تابع توزیع متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X باشد، آنگاه:

(الف) $\frac{\mathcal{E}PJ^w(X)}{F^2(t)} \leq \mathcal{E}PJ^w(X;t) \leq 0$،

(ب) $-\frac{t^2}{4} \leq \mathcal{E}PJ^w(X;t) \leq 0$.

اثبات. (الف) بدیهی است که

$$\int_0^t xF^2(x)dx \leq \int_0^\infty xF^2(x)dx.$$

بنابراین،

$$-\frac{1}{2}\int_0^t x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^2 dx \geq -\frac{1}{2}\int_0^\infty x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^2 dx.$$

در نتیجه داریم،

$$0 \geq \mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq F^{-2}(t)\mathcal{E}PJ^w(X).$$

(ب) با توجه به این‌که

$$\int_{۰}^{t} xF^{۲}(x)dx \leq \int_{۰}^{t} xdx = \frac{t^{۲}}{۲}.$$

داریم،

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \geq -\frac{t^{۲}}{۴F^{۲}(t)} = \left(\frac{t}{۲F(t)}\right)^{۲}.$$

□

ملاحظه **۲.۳**. فرض کنید متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته X با تابع نرخ خطر وارون $r_F(t)$ باشد، آنگاه داریم:

$$r_F(t) = \vartheta'_X(t)\left[t^{۲} - \vartheta_X(t)\right]^{-۱}. \qquad (۱.۳)$$

اثبات. می‌دانیم که

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vartheta_X(t)}{\partial t} &= ۲t - ۲\left(\frac{tF^{۲}(t)}{F^{۲}(t)} - \frac{f(t)\int_{۰}^{t} xF(x)dx}{F^{۲}(t)}\right)\\ &= ۲\frac{f(t)}{F(t)}\int_{۰}^{t} x\frac{F(x)}{F(t)}dx.\end{aligned}$$

با مشتق گرفتن نسبت به t داریم،

$$\frac{\frac{\partial \vartheta_X(t)}{\partial t}}{t^{۲} - \vartheta_X(t)} = r_F(t).$$

بنابراین

$$r_F(t) = \frac{\partial \vartheta_X(t)}{\partial t}\left(t^{۲} - \nu_X(t)\right)^{-۱}.$$

□

گزاره **۳.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته با تابع توزیع $F(x)$ باشد. اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا افزایشی (کاهشی) است اگر و تنها اگر

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \leq (\geq) - \frac{t}{۴}\left[\frac{t^{۲}}{\vartheta'_X(t)} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\log \vartheta_X(t)\right)^{-۱}\right]. \qquad (۲.۳)$$

اثبات. با فرض این‌که اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا افزایشی باشد، با مشتق‌گرفتن از $\mathcal{E}PJ^{w}(X;t)$ نسبت به t می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) = -\frac{۱}{۲}\left(t - ۲\frac{f(t)}{F(t)}\int_{۰}^{t} x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{۲}dx\right) \geq ۰.$$

با توجه به ملاحظه ۲.۳ داریم

$$-\frac{t}{۲} - \frac{۲\vartheta'_X(t)}{t^{۲} - \vartheta_X(t)}\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \geq ۰.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) &\leq -\frac{t}{۴}\left(\frac{t^{۲} - \vartheta_X(t)}{\vartheta'_X(t)}\right)\\ &= -\frac{t}{۴}\left(\frac{t^{۲}}{\vartheta'_X(t)} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\log \vartheta_X(t)\right)^{-۱}\right).\end{aligned}$$

برای حالتی که اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا کاهشی باشد، به طور مشابه اثبات می‌شود. □

در ادامه، یک کران پایین براساس میانگین گذشته عمر وزنی برای $\mathcal{E}PJ^w(X;t)$ ارایه می شود.

گزاره **۴.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ باشد. کران پایین برای اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq -\frac{۱}{۴}[t^۲ - \vartheta_X(t)]. \tag{۳.۳}$$

اثبات. می‌دانیم که $۰ \leq F(x) \leq ۱$ است. از آن‌جایی‌که $۰ < x < t$ است، می‌توان نوشت

$$F(x) < F(t) \Rightarrow \frac{F(x)}{F(t)} \leq ۱, \tag{۴.۳}$$

با توجه به تعریف ۶.۲ و رابطه (۴.۳) در نتیجه داریم:

$$-\frac{۱}{۲}\int_۰^t x\Big(\frac{F(x)}{F(t)}\Big)^۲ \mathrm{d}x \geq -\frac{۱}{۲}\int_۰^t x\frac{F(x)}{F(t)}dx.$$

با استفاده از تعریف ۱.۲ و رابطه (۵.۲) داریم:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq -\frac{۱}{۴}[t^۲ - \vartheta_X(t)].$$

□

در ادامه، بر حسب تابع مولد گشتاور یک کران برای اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا ارائه می‌شود:

گزاره **۵.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تکیه گاه $x < c$ و تابع مولد گشتاور $M_X(t)$ متناهی باشد، آنگاه داریم:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq K_۱(t)\int_۰^t x\left[\frac{F(x)}{F(t)}\right]^۲ \left[e^{tc} - M_X(t)\right]^{-۱} dx, \tag{۵.۳}$$

به طوری که $K_۱(t) = -e^{tc}F(c)/۲$ است.

اثبات. بدیهی است که

$$M_X(t) \geq \int_c^\infty e^{tx}dF(x) \geq e^{ct}P(X \geq c).$$

بنابراین،

$$F(c) \geq ۱ - \frac{M_X(t)}{e^{ct}}.$$

از طرفی، اگر $x < c$ باشد، داریم

$$F(x) \leq F(c) \Rightarrow \frac{F(x)}{F(c)} \leq ۱,$$

و

$$\frac{e^{ct}}{e^{ct} - M_X(t)} \geq \frac{۱}{F(c)}.$$

بنابراین،

$$\frac{e^{ct}F^۲(x)}{e^{ct} - M_X(t)} \geq \frac{F^۲(x)}{F(c)}.$$

در نتیجه،

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq -\frac{e^{ct}}{۲F^{-۱}(c)}\int_۰^t x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^۲ \left(e^{ct} - M_X(t)\right)^{-۱} dx.$$

□

گزاره **۶.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا متناهی باشد. در این صورت داریم:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) = \frac{۱}{۲}E\left[S(X,t)|X \leq t\right], \tag{۶.۳}$$

به طوری که

$$S(x,t) = -\int_x^t u\frac{F(u)}{F(t)}du. \tag{۷.۳}$$

اثبات. با استفاده از قضیه فوبینی و رابطه (۳.۲) اثبات گزاره حاصل می‌شود. □

در زیر، رابطه اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا با گشتاور مرتبه دوم $[X \mid X \leq t]$ ارائه می‌شود.

قضیه **۷.۳**. اگر X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و نامنفی با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و با میانگین متناهی باشد آنگاه:

$$E\Big[\vartheta_X(t) \mid X \leq t\Big] \geq ۴\mathcal{E}PJ^w(X;t) + E\left[X^۲|X \leq t\right].$$

اثبات. با استفاده از قضیه فوبینی و رابطه (۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
E\Big[\vartheta_X(t) \mid X \leq t\Big] &= ۲\int_۰^t \Big[\int_۰^x u\frac{F(u)}{F(x)}\frac{f(x)}{F(t)}du\Big]dx + E\left[X^۲|X \leq t\right] \\
&= ۲\int_۰^x \Big[\int_u^t u\frac{F(u)}{F^۲(x)}f(x)dx\Big]du + E\left[X^۲|X \leq t\right] \\
&= -۲\int_۰^t u\frac{F(u)}{F(t)}\log\frac{F(u)}{F(t)}du + E\left[X^۲|X \leq t\right] \\
&\geq -۲\int_۰^t u\Big[\frac{F(u)}{F(t)}\Big]^۲du + E\left[X^۲|X \leq t\right] \\
&= ۴\mathcal{E}PJ^w(X;t) + E\left[X^۲|X \leq t\right].
\end{aligned}$$

□

نتیجه **۸.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و نامنفی باشد آنگاه:

$$E(\vartheta_X(x)) \geq ۴\mathcal{E}PJ^w(X) + E(X^۲).$$

قضیه **۹.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته دارای تابع توزیع $F(x)$ باشد آن‌گاه اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا افزایشی (کاهشی) است اگر $r_F(t)$ افزایشی (کاهشی) نسبت به t باشد.

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم که $r_F(t)$ افزایشی باشد. با مشتق‌گیری از رابطه (۳.۲) داریم:

$$\frac{\partial\mathcal{E}^wJ(X;t)}{\partial t} = \frac{t}{۲} - \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}\int_t^\infty x\Big[\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(t)}\Big]^۲dx.$$

بنا به تعریف تابع نرخ خطر رابطه فوق را بازنویسی می‌کنیم درنتیجه داریم:

$$\frac{\partial\mathcal{E}^wJ(X;t)}{\partial t} = -\frac{t}{۲} + ۲r_F(t)\mathcal{E}^wJ(X;t) \geq ۰.$$

مشتق را بزرگتر از صفر قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم:

$$\mathcal{E}^wJ(X;t) \geq \frac{-t}{۴r_F(t)}.$$

با توجه به قضیه ۵.۲، اگر $\mathcal{E}^wJ(X;t)$ افزایشی باشد $r_F(t)$ افزایشی باشد در نتیجه اکستروپی باقیمانده تجمعی وزنی پویا افزایشی خواهد بود و اگر $r_F(t)$ کاهشی باشد $\mathcal{E}^wJ(X;t)$ کاهشی خواهد بود در نتیجه اکستروپی باقیمانده تجمعی وزنی پویا کاهشی خواهد بود. □

ملاحظه **۱۰.۳**. اگر در اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا، وزن x را با $\gamma(x)$ که تابعی پیوسته و نامنفی است جایگزین کنید نسخه کلی‌تری برای شاخص ارائه شده بدست می‌آید:

$$\mathcal{E}PJ^{w}_{\gamma}(X;t) = -\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\gamma(x)\left[\frac{F(x)}{F(t)}\right]^{2}dx.$$

مثال **۱۱.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی از توزیع توانی با تکیه گاه $[0,b]$ پیروی می‌کند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{c},\ 0 \le x < b,\ c > 0. \tag{۸.۳}$$

با توجه به رابطه (۳.۲) داریم:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) = -\frac{t^{2}}{4(c+1)},$$

در ادامه این بخش، رابطه میانگین گذشته عمر وزنی را با اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا مورد بررسی قرار می‌گیرد.

گزاره **۱۲.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی با تابع توزیع $F_X(x)$ باشد. کران های پایین برای اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا بر اساس میانگین گذشته عمر وزنی به‌صورت زیر بدست می‌آید:

(الف) $\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \ge -\frac{1}{2}\mu_X(t)$،

(ب) $\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \ge -\frac{1}{2}F^{-1}(t)\mu_X(t)$.

اثبات. (الف) برای $x \le t$، $\frac{F(x)}{F(t)} \le 1$ و $\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{2} \le \frac{F(x)}{F(t)}$ است. بنابراین

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{t} x\left(\frac{F(x)}{F(t)}\right)^{2}dx \ge -\frac{1}{2}\int_{0}^{t} x\frac{F(x)}{F(t)}dx.$$

در نتیجه

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \ge -\frac{1}{2}\mu_X(t).$$

(ب) مشابه قسمت (الف)، برای $x \le t$،

$$\int_{0}^{t} xF^{2}(x)dx \le \int_{0}^{t} xF(x)dx,$$

است و در نتیجه با تقسیم طرفین این نامساوی بر $F^{2}(t)$ داریم،

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) \ge -\frac{1}{2F(t)}\int_{0}^{t} x\frac{F(x)}{F(t)}dx.$$

در نهایت، با توجه به تعریف $\mu_X(t)$ اثبات کامل است.

□

قضیه **۱۳.۳**. فرض کنید X متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته و نامنفی با تابع توزیع $F_X(x)$ و تکیه گاه $[c,\infty]$ باشد به‌طوری‌که c متناهی بوده و نسبت به $\frac{c}{2}$ متقارن می‌باشد. آنگاه داریم:

(الف) $\mathcal{E}PJ^{w}(X;t) = c\,\mathcal{E}J(X;c-t) - \mathcal{E}J^{w}(X;c-t)$،

(ب) $\mathcal{EP}^w J(X;t) \geq c\,\mathcal{E}J(X;c-t)$.

اثبات. (الف) با درنظر گرفتن تغییر متغیر $y = c - x$ و $\bar{F}(x) = F(c-x)$ و نیز تعریف ۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}PJ^w(X;t) &= -\frac{۱}{۲}\int_c^t x\Big[\frac{\bar{F}(c-x)}{\bar{F}(t)}\Big]^۲ dx \\
&= \frac{۱}{۲}\int_۰^{c-t}(c-y)\Big[\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(c-t)}\Big]^۲ dy \\
&= \frac{c}{۲}\int_۰^{c-t}\Big[\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(c-t)}\Big]^۲ dy - \frac{۱}{۲}\int_۰^{c-t} y\Big[\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(c-t)}\Big]^۲ dy \\
&= -\frac{c}{۲}\int_{c-t}^{\infty}\Big[\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(c-t)}\Big]^۲ dy + \frac{۱}{۲}\int_{c-t}^{\infty} y\Big[\frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(c-t)}\Big]^۲ dy,
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) = c\mathcal{E}J(X;c-t) - \mathcal{E}J^w(X;c-t). \qquad (۹.۳)$$

(ب) با توجه قسمت الف و منفی بودن شاخص $\mathcal{E}J(X;c-t)$ بدیهی است که

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq c\mathcal{E}J(X;c-t).$$

□

در ادامه، اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا را برای چند توزیع آماری پرکاربرد مورد مطالعه قرار داده می‌شود.

مثال **۱۴.۳**. (الف) اگر متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X دارای توزیع نمایی با میانگین $\lambda^{-۱}$ باشد آن‌گاه داریم:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) = -\frac{(۲t^۲\lambda^۲ - ۷)\,\mathrm{e}^{۲t\lambda} + ۸\,(t\lambda+۱)\,\mathrm{e}^{t\lambda} - ۲t\lambda - ۱}{۸\lambda^۲\,(\mathrm{e}^{t\lambda}-۱)^۲},$$

در نتیجه اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا توزیع نمایی تابع غیر خطی از t است.

(ب) اگر متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی X دارای توزیع پارتو با پارامترهای α و β باشد و تابع توزیع تجمعی پارتو برابر است با:

$$F_X(x) = ۱ - \Big(\frac{\beta}{x}\Big)^{\alpha}, \quad x \geq \beta \quad \beta > ۰, \quad \alpha > ۰.$$

بنابراین داریم:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) = -\frac{(۴\alpha - ۴)\,\beta^{\alpha}t^{\alpha+۲} + t^{۲\alpha}\big((\alpha^۲ - ۳\alpha + ۲)t^۲ - \alpha^۲\beta^۲\big) + (۲-\alpha)\,\beta^{۲\alpha}t^۲}{۴\,(\alpha^۲ - ۳\alpha + ۲)\left(\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha} - ۱\right)^۲ t^{۲\alpha}}.$$

مشاهده می‌شود که اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا تابعی غیر خطی از زمان است.

(ج) فرض کنید X متغیر تصادفی نامنفی و پیوسته دارای توزیع مقدار فرین نوع ۳ با تابع توزیع تجمعی

$$F(t) = e^{c(t-b)},\ t < b,\ c > ۰.$$

باشد. با توجه به رابطه (۳.۲)، اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برای این توزیع به ترتیب برابر با

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) = -\frac{e^{-۲ct} + ۲ct - ۱}{۸c^۲},$$

است که اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا مستقل از پارامتر مکان b می‌باشد.

۴ ترتیب‌های تصادفی

در شرایطی که مقایسه جوامع با ابزاری مانند شاخص های مرکزی و پراکندگی امکان پذیر نباشد یکی از روش های پیشنهادی برای مقایسه جوامع، استفاده از ترتیب های تصادفی می‌باشد. در سال‌های اخیر مفهوم و کاربرد ترتیب‌های تصادفی مورد توجه بسیار قرار گرفته است و در برخی از زمینه‌های آمار و احتمال از جمله نظریه قابلیت اعتماد، تحلیل بقاء و نیز در اقتصاد، بیمه و علم مدیریت کاربرد بسیاری دارند. در ادامه به معرفی و کاربرد چند مورد از این مفهوم پرداخته می‌شود.

تعریف **۱.۴**. اگر X و Y متغیرهای تصادفی با توابع توزیع به ترتیب $F(\cdot)$ و $G(\cdot)$ باشند آنگاه داریم:

۱. در ترتیب تصادفی معمولی $X \underset{st}{\leq} Y$ است اگر $F(x) \geq G(x)$ باشد،

۲. در ترتیب تصادفی نرخ خطر وارون $X \underset{rhr}{\leq} Y$ است اگر $r_F(x) \leq r_G(x)$ که $r_F(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ تابع نرخ خطر وارون است.

برای مطالعه خواص و ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر می‌توان به مارشال و اولکین [۱۳]و شیکد و شانتیکومار [۱۸] مراجعه کرد.

قضیه **۲.۴**. اگر $X \underset{rhr}{\leq} Y$ باشد آنگاه به ازای هر $t \geq 0$، $\mu_X(t) \leq \mu_Y(t)$ است.

اثبات. با توجه به رابطه (۵.۲) داریم:

$$\mu_X(t) = \int_0^t x \frac{F(x)}{F(t)} \mathrm{d}x = \int_0^t x \exp\{-\int_x^t r_X(u)du\}dx. \tag{۱.۴}$$

در ادامه با استفاده از تعریف ترتیب تصادفی نرخ خطر وارون نتیجه می‌گیریم که:

$$X \underset{rhr}{\leq} Y \Rightarrow r_X(u) \leq r_Y(u), \quad \forall u \geq 0. \tag{۲.۴}$$

پس بنا به رابطه (۲.۴) می‌توان نوشت:

$$r_Y(u) \leq r_X(u) \Rightarrow \int_x^t r_Y(u)du \leq \int_x^t r_X(u)du. \tag{۳.۴}$$

در نتیجه:

$$\exp\{-\int_x^t r_Y(u)du\} \geq \exp\{-\int_x^t r_X(u)du\}. \tag{۴.۴}$$

از رابطه (۴.۴) نسبت به x در بازه $(0, t)$ انتگرال می‌گیریم. در نتیجه داریم:

$$\int_0^t x \exp\{-\int_x^t r_Y(u)du\}dx \geq \int_0^t x \exp\{-\int_x^t r_X(u)du\}dx. \tag{۵.۴}$$

با استفاده از تعریف ۱.۲ داریم:

$$\mu_Y(t) \geq \mu_X(t),$$

و اثبات کامل شد. □

نتیجه **۳.۴**. با توجه به قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر $X \underset{rhr}{\leq} Y$ باشد آنگاه به ازای هر $t \geq 0$، $\vartheta_X(t) \leq \vartheta_Y(t)$ است.

قضیه **۴.۴**. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی و مطلقاً پیوسته به ترتیب با توابع توزیع تجمعی $F(x)$ و $G(x)$ و توابع نرخ خطر وارون $r_F(t)$ و $r_G(t)$ باشند. اگر $Y \underset{rhr}{\leq} X$ و $r_F(t)$ نسبت به t غیر افزایشی باشد، آنگاه:

$$\mathcal{E}PJ^w(X;t) \geq \mathcal{E}PJ^w(Y;t).$$

اثبات. با توجه به رابطه (۳.۲) داریم:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t)=-\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t}x\Big[\exp\{-\int_{x}^{t}r_{X}(u)du\}\Big]^{۲}dx,$$

از آنجایی که $X \underset{rhr}{\leq} Y \implies r_X(u)\geq r_Y(u)$، آنگاه داریم:

$$-\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t}x\Big[\frac{۱}{e^{\int_{x}^{t}r_{X}(u)du}}\Big]^{۲}dx\leq-\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t}x\Big[\frac{۱}{e^{\int_{x}^{t}r_{Y}(u)du}}\Big]^{۲}dx.$$

در نتیجه اثبات کامل می‌شود. □

در ادامه، مثال هایی برای کاربرد قضیه ۴.۴ ارائه می‌شود.

مثال ۵.۴. فرض کنید نمونه تصادفی $X_{۱},X_{۲},\cdots,X_{m}$ نشان‌دهنده طول عمر m مؤلفه مستقل و هم توزیع در یک سیستم موازی باشند که هر کدام دارای توزیع نمایی با تابع توزیع $F(t)=۱-e^{-\lambda t},\ t\geq ۰,\ \lambda>۰$ باشد. طول عمر سیستم $Y=\max\{X_{۱},\cdots,X_{m}\}$ با تابع توزیع $F(t)=\left(۱-e^{-\lambda t}\right)^{m},\ t\geq ۰,\ \lambda\geq ۰$ می‌باشد. در این‌صورت

$$r_{m}(t)=\frac{m\lambda e^{-\lambda t}}{۱-e^{-\lambda t}}\leq\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{۱-e^{-\lambda t}}=r_{F}(t).$$

به عبارتی $r_F(t)$ تابع غیر افزایشی از t است. بنابراین طبق قضیه ۴.۴ نتیجه کامل خواهد شد. ضمنا داریم:

$$\mathcal{E}PJ^{w}(X;t)=-\frac{\left(۲t^{۲}\lambda^{۲}-۷\right)\mathrm{e}^{۲t\lambda}+۸\left(t\lambda+۱\right)\mathrm{e}^{t\lambda}-۲t\lambda-۱}{۸\lambda^{۲}\left(\mathrm{e}^{t\lambda}-۱\right)^{۲}},$$

$$\mathcal{E}PJ^{w}(Y;t)=-\infty.$$

مثال ۶.۴. فرض کنید نمونه تصادفی $X_{۱},X_{۲},\cdots,X_{m}$ دارای توزیع دامنه متناهی با تابع توزیع تجمعی

$$F(t)=۱-(۱-t)^{\lambda},\quad t\geq ۰,\quad ۰<\lambda<۱,$$

باشد و X_iها نشان‌دهنده طول عمر m مؤلفه مستقل و هم توزیع در یک سیستم موازی باشند. بدیهی است که طول عمر سیستم $Z=\max\{X_{۱},\cdots,X_{m}\}$ با تابع توزیع

$$F(t)=\Big[۱-(۱-t)^{\lambda}\Big]^{m},\ t\geq ۰,\ ۰<\lambda<۱,$$

می‌باشد. فرض کنید که $r_F(t)$ تابع نرخ خطر مؤلفه‌ها و $r_m(t)$ تابع نرخ خطر وارون سیستم می‌باشد. از این‌رو داریم:

$$r_{m}(t)=\frac{m\lambda\left(۱-t\right)^{\lambda-۱}}{۱-(۱-t)^{\lambda}}\leq\frac{\lambda\left(۱-t\right)^{\lambda-۱}}{۱-(۱-t)^{\lambda}}=r_{F}(t),$$

به عبارتی دیگر $r_F(t)$ تابع غیر افزایشی از t است.

۵ برآوردگر ناپارامتری

در این بخش، برآوردگرهای ناپارامتری برای اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا ارائه می‌شوند. فرض کنید $X_۱$، ...، X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $F(\cdot)$ باشد. شکل کلی برای برآوردگر ناپارامتری معیار پیشنهادی بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$\widehat{\mathcal{EPJ}}^{w}(X;t) = -\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{t} x\left[\frac{\widehat{F}(x)}{\widehat{F}(t)}\right]^{۲} dx, \tag{۱.۵}$$

که در آن $\widehat{F}(x)$ برآورد تابع توزیع براساس مشاهدات است. با جایگذاری برآورد تابع توزیع به روش تجربی در رابطه (۱.۵)، برآوردگر تجربی اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا حاصل می‌شود.

اگر نمونه مرتب شده به صورت $X_{(۱)} \leq X_{(۲)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ در نظر گرفته شود، آن‌گاه برآورد تجربی تابع توزیع برابر با $F_n(x) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} I(X_i \leq x)$ خواهد بود. برای نمونه‌های کوچک‌تر از t به صورت $X_{(۱)} \leq X_{(۲)} \leq \cdots \leq X_{(j)}$، برآوردگر تجربی اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برابر است با:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{EPJ}}_n^{w}(X;t) &= -\frac{۱}{۲}\int_{t}^{\infty} x\left(\frac{F_n(x)}{F_n(t)}\right)^{۲} dx \\
&= -\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{j-۱}\int_{X_{(i)}}^{X_{(i+۱)}} x\left(\frac{F_n(x)}{F_n(t)}\right)^{۲} dx \\
&= -\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{j-۱} U_{(i)}\left(\frac{i}{j}\right)^{۲},
\end{aligned} \tag{۲.۵}$$

که در آن $U(i) = \frac{۱}{۲}(X_{(i+۱)}^{۲} - X_{(i)}^{۲}), i = ۱, \cdots, j-۱$ است.

مثال ۱.۵. درنظر بگیرید که $X_۱$، ...، X_n یک نمونه تصادفی از توزیع رایلی با تابع توزیع $F(x) = ۱ - e^{-\lambda x^{۲}},\ x > ۰$ باشد. در این‌صورت، متغیر تصادفی $Y = X^{۲}$ دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$ و در نتیجه $X_{(i+۱)}^{۲} - X_{(i)}^{۲},\ i = ۱, \cdots, n-۱$ مستقل از هم و دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda(n-i)}$ خواهد بود. بنابراین، مقادیر امیدریاضی و واریانس برآورد اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا طبق رابطه (۲.۵) برای توزیع رایلی بدین صورت حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
E\left(\widehat{\mathcal{EPJ}}_n^{w}(X;t)\right) &= -\frac{۱}{۴\lambda}\sum_{i=۱}^{j-۱}\left(\frac{i}{j}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{j-i}\right), \\
Var\left(\widehat{\mathcal{EPJ}}_n^{w}(X;t)\right) &= \frac{۱}{۱۶\lambda^{۲}}\sum_{i=۱}^{j-۱}\left(\frac{i}{j}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{j-i}\right)^{۲}.
\end{aligned}$$

در قضیه ۲.۵، همگرایی قریب به یقین برای $\widehat{\mathcal{EJ}}_n^{w}(X;t)$ بررسی می‌شود.

قضیه ۲.۵. فرض کنید برای متغیر تصادفی نامنفی X به ازای $p > ۲$، $E(X^{p}) < \infty$ باشد. اگر $n \to \infty$، آن‌گاه $\widehat{\mathcal{EPJ}}_n^{w}(X;t)$ به طور قریب به یقین $(a.s.)$ به $\mathcal{EPJ}_n^{w}(X;t)$ همگرا است؛ به عبارت دیگر $\widehat{\mathcal{EPJ}}_n^{w}(X;t) \xrightarrow{a.s.} \mathcal{EPJ}^{w}(X;t)$.

اثبات. براساس رابطه (۲.۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
-۲\widehat{\mathcal{EPJ}}_n^{w}(X;t) &= \int_{۰}^{t} x\left(\frac{F_n(x)}{F_n(t)}\right)^{۲} dx \\
&= \frac{۱}{F_n^{۲}(t)}\int_{۰}^{t} xF_n^{۲}(x)dx.
\end{aligned} \tag{۳.۵}$$

از طرفی، بنا به قانون قوی اعداد بزرگ[۲]، برای نمونه تصادفی $X_۱$، ...، X_n می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} E(X_۱), \qquad n \to \infty.$$

علاوه براین،

$$xF_n^۲(x) \le x\big(۲ - F_n(x)\big) = x\left(۱ + \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} I_{(X_i>x)}\right) \le x\left(۱ + \frac{۱}{nx^p}\sum_{i=۱}^{n} X_i^p\right) \le x + \frac{\alpha}{x^{p-۱}},$$

که در آن $\alpha = \sup_n \left\{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} X_i^p\right\} < \infty$ است. در نتیجه، با توجه به قضیه گلیونکو–کانتلی[۳] و قضیه همگرایی غالب[۴] برای انتگرال در بازه متناهی $[۰, t]$ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\int_۰^t xF_n^۲(x)dx \xrightarrow{a.s.} \int_۰^t xF^۲(x)dx, \qquad n \to \infty. \tag{۴.۵}$$

و با استفاده از رابطه (۳.۵) اثبات کامل می‌شود. □

۶ کاربرد در انتخاب مدل

در این بخش، با معرفی یک معیار جدید، کاربردی از اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا در انتخاب مدل ارائه می‌شود. معیار پیشنهادی برای انتخاب مدل به صورت

$$\Delta_F = \sup_t \left|\widehat{\mathcal{E}PJ}_n^w(X;t) - \mathcal{E}PJ_۰^w(X;t)\right|,$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathcal{E}PJ_۰^w(X;t)$ مقدار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا براساس توزیع مدنظر است. توزیعی که دارای کمترین مقدار شاخص Δ_F باشد، برازش بهتری به داده‌ها دارد.

در مثال ۱.۶، کاربردی از شاخص Δ_F براساس معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا در انتخاب توزیع مناسب داده‌های واقعی ارائه می‌شود.

مثال ۱.۶. براساس مطالعه خراشادی‌زاده [۱۱]، داده‌های مربوط به مقدار تولید نفت گاز (برحسب مترمکعب در روز) در پالایشگاه‌های کشور ایران از سال ۱۳۷۱ تا ۱۳۹۳ به شرح زیر است:
۶۴۷۳۱، ۶۹۵۴۵، ۶۹۹۴۵، ۷۰۸۷۹، ۷۱۹۲۳، ۷۳۱۵۴، ۷۷۰۳۷، ۷۹۲۱۵، ۸۰۴۷۳، ۸۱۵۴۹، ۸۴۹۵۷، ۸۸۷۰۲، ۹۰۹۵۱، ۹۴۶۷۷، ۹۳۵۹۵، ۹۷۶۸۹، ۹۶۰۱۶.

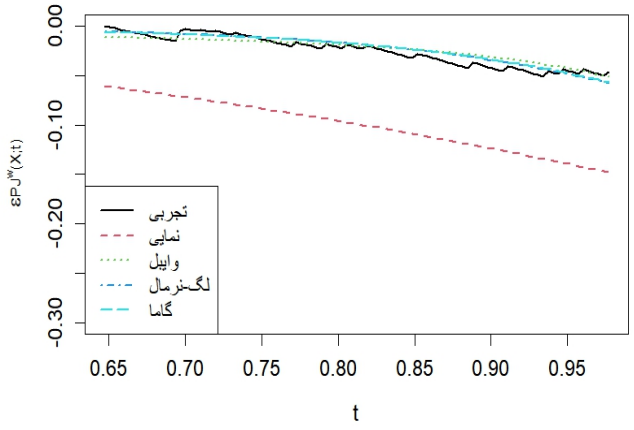
در جدول ۱، مقادیر لگاریتم درستنمایی[۵]، معیار اطلاعاتی آکائیک[۶] (AIC) و معیار اطلاعاتی بیزی[۷] (BIC) و همچنین نتایج آزمون نیکویی برازش کلموگروف–اسمیرنوف[۸] ($K-S$) و مقدار احتمال مربوط به آن برای انتخاب مناسب‌ترین توزیع داده‌ها ($\times ۱۰^{-۵}$) در بین توزیع‌های نمایی، وایبل، لگ–نرمال و گاما ارائه شده است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که توزیع لگ–نرمال با برآورد حداکثر درستنمایی پارامترهای مکان ۰٫۲۱۳- و مقیاس ۰٫۱۲۷ و همچنین توزیع گاما با پارامترهای مقیاس ۷۶٫۶۶۹ و شکل ۶۲٫۴۶۵، بهترین برازش‌ها را به داده‌های مقدار تولید نفت گاز دارد.

---
[۲] Strong Law of Large Numbers
[۳] Glivenko-Cantelli Theorem
[۴] Dominated Convergence Theorem
[۵] Log-Likelihood
[۶] Akaike Information Criterion
[۷] Bayesian Information Criterion
[۸] Kolmogorov–Smirnov

جدول ۱: نتایج برازش توزیع‌ها برای داده‌های مقدار تولید نفت گاز

توزیع	لگاریتم درستنمایی	AIC	BIC	$K-S$	$P-Value$	Δ_F
نمایی	-۱۳٫۵۱۷	۲۹٫۰۳۳	۲۹٫۸۶۷	۰٫۵۴۸	۰٫۰۰۰	۰٫۰۹۷۷۵
وایبل	۱۴٫۲۳۴	-۲۴٫۴۶۷	-۲۲٫۸۰۱	۰٫۱۴۳	۰٫۸۳۲	۰٫۰۱۲۸۵
لگ-نرمال	۱۴٫۵۹۷	-۲۵٫۱۹۴	-۲۳٫۵۲۸	۰٫۱۳۷	۰٫۸۶۶	۰٫۰۰۹۷۱
گاما	۱۴٫۵۹۶	-۲۵٫۱۹۳	-۲۳٫۵۲۶	۰٫۱۳۹	۰٫۸۵۳	۰٫۰۱۰۰۸

در شکل ۳، برآورد تجربی اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برای داده‌های واقعی در مقایسه با توزیع‌های نمایی، وایبل، لگ-نرمال و گاما به ازای مقادیر مختلف t رسم شده است. در این شکل می‌توان مشاهده کرد که فاصله بین برآورد تجربی اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا با توزیع‌های وایبل، لگ-نرمال و گاما کمتر از توزیع نمایی است که نشان دهنده عدم برازش مناسب توزیع نمایی به داده‌ها است. علاوه‌بر این، مقدار شاخص Δ_F برای توزیع‌های مورد بررسی در جدول ۱ محاسبه شده است. توزیع لگ-نرمال دارای کمترین مقدار شاخص Δ_F است و در نتیجه به عنوان مناسب‌ترین توزیع براساس معیار پیشنهادی برای برازش به داده‌ها انتخاب می‌شود.



شکل ۳: برآورد اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا برای داده‌های مقدار تولید نفت گاز

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، معیار اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا معرفی و ارتباط آن با میانگین طول عمر گذشته، گشتاور مرتبه دوم گذشته عمر، تابع نرخ خطر وارون و غیره بررسی گردید. کران‌های بالا و پایین، نامساوی‌ها و ترتیب‌های تصادفی براساس اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا و تاثیر تبدیل خطی بر آن ارائه شد. یک برآوردگر تجربی برای اکستروپی گذشته تجمعی وزنی پویا ارائه و خواص مجانبی آن مطالعه گردید. در انتها، کاربردی از معیار معرفی شده در انتخاب مناسب‌ترین توزیع برای برازش به داده‌های واقعی بررسی شد که نتایج آن با معیارهای لگاریتم درستنمایی، AIC و BIC مطابقت داشت.

فهرست منابع

[1] Asadi, M. and Zohrevand, Y., 2007. On the dynamic cumulative residual entropy. *Journal of Statistical Planning and Inference, 137*(6), pp. 1931-1941. doi: 10.1016/j.jspi.2006.06.035

[2] Balakrishnan, N., Buono, F. and Longobardi, M., 2022. On weighted extropies. *Communications in Statistics-Theory and Methods, 51*(18), pp. 6250-6267. doi: 10.1080/03610926.2020.1860222

[3] Belis, M. and Guiasu, S., 1968. A quantitative-qualitative measure of information in cybernetic systems (Corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory, 14*(4), pp. 593-594. doi: 10.1109/TIT.1968.1054185

[4] Cover, T.M., 1999. *Elements of information theory*. John Wiley and Sons. doi: 10.1002/047174882X

[5] Di Crescenzo, A. and Longobardi, M., 2006. On weighted residual and past entropies. *Scientiae Mathematicae Japonicae, 64*(1), pp. 255-266. doi: 10.32219/isms.64.2-255

[6] Di Crescenzo, A. and Longobardi, M., 2009. On cumulative entropies. *Journal of statistical planning and inference, 139*(12), pp. 4072-4087. doi: 10.1016/j.jspi.2009.05.038

[7] Hashempour, M., Mohammadi, M., Jahanshahi, S.M.A. and Khammar, A.H., 2024. Modified cumulative extropies of doubly truncated random variables. *Sankhya B, 86*(2), pp. 558-585. doi: 10.1007/s13571-024-00328-w

[8] Hashempour, M., Mohammadi, M. and Kamari, O., 2025. On weighted version of dynamic residual inaccuracy measure using extropy in order statistics with applications in model selection. *Statistical Papers, 66*(4), pp. 1-28. doi: 10.1007/s00362-025-01696-9

[9] Kazemi, M.R., Hashempour, M. and Longobardi, M., 2022. Weighted cumulative past extropy and its inference. *Entropy, 24*(10), pp. 1444-1444. doi: 10.3390/e24101444

[10] Kamari, O. and Buono, F., 2021. On extropy of past lifetime distribution. *Ricerche di Matematica, 70*(1), pp. 505-515. doi: 10.1007/s11587-020-00488-7

[11] Khorashadizadeh, M., 2019. A Quantile approach to the interval Shannon entropy. *Journal of Statistical Research of Iran JSRI, 15*(2), pp. 317-333. doi: 10.29252/jsri.15.2.317

[12] Lad, F., Sanfilippo, G. and Agró, G., 2015. Extropy: Complementary dual of entropy. *Statistical Science, 30*(1), pp. 40-58. doi: 10.1214/14-STS430

[13] Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C., 1979. *Inequalities: theory of majorization and its applications*, Academic Press, New York. doi: 10.1007/978-0-387-68276-1

[14] Misagh, F., Panahi, Y., Yari, G.H. and Shahi, R., 2011. Weighted cumulative entropy and its estimation. *In 2011 ieee international conference on quality and reliability*, pp. 477-480. doi: 10.1109/ICQR.2011.6031765

[15] Mohammadi, M. and Hashempour, M., 2024. On weighted version of dynamic cumulative residual inaccuracy measure based on extropy. *Statistical Papers, 65*(7), pp. 4599-4629. doi: 10.1007/s00362-024-01568-8

[16] Mohammadi, M., Hashempour, M. and Kamari, O., 2024. On the dynamic residual measure of inaccuracy based on extropy in order statistics. *Probability in the Engineering and Informational Sciences, 38*(3), pp. 481-502. doi: 10.1017/S0269964823000268

[17] Nair, R.D. and Sathar, E.A., 2020. On dynamic failure extropy. *Journal of the Indian Society for Probability and Statistics, 21*(1), pp. 287-313. doi: 10.1007/s41096-020-00083-x

[18] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. eds., 2007. *Stochastic orders*. Springer, New York. doi: 10.1007/978-0-387-34675-5

[19] Shannon, C.E., 1948. A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal, 27*(3), pp. 379-423. doi: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x

Dynamic Weighted Cumulative Past Extropy: Generalization, Properties, and Applications in Reliability Analysis

Morteza Mohammadi[(1)] [9] and Majid Hashempour[(2)]

[(1)] Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, University of Zabol, Zabol, Iran
[(2)] Department of Statistics, Faculty of Basic Sciences, University of Hormozgan, Bandar Abbas, Iran

Communicated by: Gholamali Parham

Received: 14 August 2024 Accepted: 14 August 2024

Abstract: This paper introduces a generalization of an uncertainty measure called the dynamic weighted cumulative past extropy. The relationship of this measure with reliability metrics such as the first and second-order conditional moments of past lifetime, weighted mean past lifetime, inverse hazard rate function, and others is studied. Also, the effect of linear transformation and monotonicity properties on the dynamic weighted cumulative past extropy is examined, and upper and lower bounds for this measure are derived. Furthermore, stochastic orders based on dynamic weighted cumulative past extropy are presented for comparing populations, and the behavior of several commonly used statistical distributions, such as exponential, Rayleigh, and Pareto, is investigated based on this uncertainty measure. Subsequently, a non-parametric empirical estimator for the dynamic weighted cumulative past extropy measure is introduced, and its asymptotic properties are studied. Finally, an index for selecting the appropriate model fit to data based on the dynamic weighted cumulative past extropy measure is proposed, and its application in analyzing a real dataset is examined.

Keywords: Weighted extropy, Cumulative past extropy, Conditional moments, Weighted mean past lifetime.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[9]Corresponding author
E-mail addresses: (M. Mohammadi) mo.mohammadi@uoz.ac.ir, (M. Hashempour) ma.hashempour@hormozgan.ac.ir