مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۵۵–۶۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.49808.2376

گسترش‌هایی خاص از فضاهای توپولوژی

سیده سمیه موسوی [۱] [۱] و مهرداد کاروان جهرمی [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده مهندسی سیستم‌های هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده مهندسی سیستم‌های هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

دبیر مسئول: علی رضایی علی آبادی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۱۰

چکیده: در این مقاله، انواع خاصی از گسترش‌های توپولوژی مورد توجه قرار می‌گیرد، که در آن خاصیت هاسدورف، منظم و تیخونوف حفظ می‌گردد و یا گسترش منجر به یک فضای تیخونوف (منظم) ω–حل‌ناپذیر می‌شود. گسترش‌های $\mathcal{C}$–ساده و شکافنده را معرفی می‌کنیم. گسترش‌های $\mathcal{C}$–ساده و شکافنده ویژگی‌های شمارای اول و شمارای دوم را حفظ می‌کند. هم‌چنین به‌کمک گسترش $\mathcal{C}$–ساده نشان می‌دهیم که هر فضای تیخونوف انبوه دارای گسترش تیخونوف انبوه ω–حل‌ناپذیر قوی است و در کلاس فضاهای T_1، هاسدورف، منظم و یا تیخونوف، فضاهای ماکسیمال شمارای اول و ماکسیمال شمارای دوم حل‌ناپذیرند. همچنین ثابت می‌کنیم یک فضای توپولوژی ω–حل‌پذیر است اگر و تنها اگر τ دارای یک گسترش $\mathcal{C}$–ساده باشد. افزون‌براین، گسترش‌هایی را بررسی می‌کنیم که زیرماکسیمال هستند و ویژگی‌های شاخصی چون هاسدورف بودن، هم‌بندی، انبوه بودن و شدیداً ناهم‌بندی را حفظ می‌کند.

واژه‌های کلیدی: گسترش پایا، گسترش $\mathcal{C}$–ساده، گسترش شکافنده، حل‌پذیری، فضای زیرماکسیمال.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

مقدمه:

فرض کنیم $\mathcal{P}$ یک خاصیت توپولوژیکی باشد. توپولوژی τ روی مجموعه داده شده X را ماکسیمال نسبت به $\mathcal{P}$ نامیم هرگاه τ دارای خاصیت $\mathcal{P}$ باشد و هر توپولوژی اکیداً ظریف‌تر از τ دارای خاصیت $\mathcal{P}$ نباشد. از جمله خواص مورد توجه می‌توان از هم‌بندی، هاسدورف بودن، منظم بودن و . . . نام برد. این تعریف ابتدا در [۶] ثبت شده است. در حالت خاص (X,τ) را ماکسیمال نامیم هرگاه (X,τ)، ماکسیمال انبوه باشد. یعنی آن‌که هرگاه τ_1 یک توپولوژی اکیداً ظریف‌تر از τ باشد، آن‌گاه (X,τ_1) دارای نقاط تنها است.
مفهوم‌های ماکسیمال، زیرماکسیمال و حل‌پذیری در فضاهای توپولوژی برای نخستین بار در سال ۱۹۴۳ توسط هویت معرفی گردید [۶]. هویت مفهوم فضاهای حل‌پذیر را این‌گونه معرفی کرد: فضای توپولوژی (X,τ) حل‌پذیر است اگر زیرمجموعه‌ای چون D از X موجود باشد که D و $X\setminus D$ هر دو در X چگال باشند. بنابراین فضا را حل‌پذیر گوییم اگر و تنها اگر بتوان آن را به‌صورت اجتماعی مجزا از دو زیرمجموعه چگال نوشت. پس از آن سِدر مفهوم فضاهای حل‌پذیر را گسترش داد و اصطلاح κ–حل‌پذیر را معرفی کرد [۴]. به ازای عدد کاردینالیتی κ، فضای توپولوژی (X,τ) را κ–حل‌پذیر نامید اگر گردایه‌ای متشکل از κ زیرمجموعه چگال دوبه‌دو مجزا از X موجود باشد.

[۱] سیده سمیه موسوی
(M. Karavan jahromi) Mkaravan@pgu.ac.ir (S. Mousavi), Smousavi@mehr.pgu.ac.ir

باتوجه به این تعریف، هر فضای حل‌پذیر، فضای ۲-حل‌پذیر است. هر فضای توپولوژی خواه حل‌پذیر باشد یا نباشد، فضای ۱-حل‌پذیر است. هم‌چنین فضای تهی برای هر عدد کاردینالی κ، فضایی κ-حل‌پذیر است. علاوه بر این، فضای توپولوژی X حل‌ناپذیر قوی (ω-حل‌ناپذیر قوی) است هرگاه هر زیرمجموعه باز آن حل‌ناپذیر (ω-حل‌ناپذیر) باشد.

هویت در همان مقاله فضای دیگری را که هر زیرمجموعه چگال آن باز است را فضای توپولوژی به‌طور ماکسیمال حل‌پذیر نام‌گذاری نمود و آن را MI-فضا نامید که امروزه این فضا را زیرماکسیمال می‌نامند. در سال ۱۹۹۳ این موضوع با ارائه یک مثال توسط ون دوون دوباره مورد بحث قرار گرفت [۹]. او هم‌چنین در این مقاله برای اولین بار فضای توپولوژی را که هر زیرمجموعه هیچ‌جا چگال آن بسته است، فضای نودک نامید. او در قالب یک قضیه ثابت کرد در کلاس فضاهای انبوه، فضای ماکسیمال همان فضای نودک ابرناهم‌بند است [۹].

فضای نودک توسط برخی پژوهشگران مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. آرهانگلسکی و کولینز در سال ۱۹۹۴، مقاله‌ای با عنوان "فضاهای زیرماکسیمال" ارائه کردند که به عنوان مرجعی جامع برای فضاهای زیرماکسیمال و نودک شناخته می‌شود [۲]. در این مقاله تعاریف و قضایای اساسی راجع به این فضاها بیان و اثبات شده است. پس از آن بورباکی در سال ۱۹۹۶ فضاهای زیرماکسیمال را مورد مطالعه قرار داد [۳] و بدین ترتیب توجه بسیاری از نویسندگان به فضاهای زیرماکسیمال و نودک جلب شد.

در ابتدای قرن بیستم، وقتی توپولوژی به عنوان یک شاخه مستقل از ریاضیات شکل گرفت، مفهوم چگالی به عنوان یکی از ویژگی‌های مهم فضاهای توپولوژی مورد توجه قرار گرفت. به‌تدریج، ایده افزودن مجموعه‌های باز به یک توپولوژی بدون تغییر در نقاط فضا، برای مطالعه فضاهای چگال و ویژگی‌های مرتبط با آن شکل گرفت. این مفهوم به مرور توسط ریاضیدانان مختلف گسترش یافت و به‌صورت امروزی درآمد. بنابراین، گسترش‌های چگال به عنوان یک مفهوم مستقل، احتمالاً به‌تدریج و در طول تکامل توپولوژی توسط چندین ریاضیدان توسعه یافته‌اند، بدون اینکه بتوان شخص یا گروه خاصی را به عنوان معرفی‌کننده اولیه آن دانست. گسترش‌های چگال و گسترش قابل قبول که توسط اندرسون معرفی شده است، از مهم‌ترین انواع گسترش تعریف‌شده تا کنون هستند.

گسترش‌های توپولوژی‌ها با هدف ایجاد توپولوژی‌های جدید برای مطالعه خواص متفاوتی از فضاها (چگالی، هم‌بندی، تفکیک‌پذیری، حل‌پذیری، خواص جدایی و . . .) طراحی شده‌اند. بسیاری از این گسترش‌ها در زمینه‌های مختلف ریاضیات همچون توپولوژی جبری، هندسه جبری، نظریه حلقه‌ها و توپولوژی عمومی کاربرد دارند.

هویت در سال ۱۹۴۳ با ارائه یک مثال ثابت کرد که یک فضای T_1 زیرماکسیمال نامتناهی هم‌بند وجود دارد [۶]، اما وجود چنین فضایی را زمانی که فضا هاسدورف است، زیر سوال برد. ده سال پس از هویت، پادماوالی توانست فضای زیرماکسیمالی را ارائه دهد که هاسدورف، نامتناهی و هم‌بند است [۸]. اندرسون با استفاده از تکنیک گسترش توپولوژی، یک قضیه وجودی کلی درباره فضاهای هاسدورف هم‌بند و حل‌ناپذیر ثابت کرد که نشان می‌دهد دسته چنین فضاهایی بیش از آن است که پیش‌تر تصور می‌شد. او در [۱] «گسترش قابل قبول»[۲] را بدین شکل تعریف کرد: اگر (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد و $\{D_\alpha : \alpha \in A\}$ مجموعه‌ای از تمامی زیرمجموعه‌های τ-چگال در X باشد، آن‌گاه τ^* یک گسترش قابل قبول از توپولوژی τ است هرگاه τ^* دارای زیرپایه‌ای به شکل $\tau \cup \{D_\beta : \beta \in B \subseteq A\}$ باشد، به‌گونه‌ای که هر D_β یک مجموعه τ^*-چگال باشد.

در سراسر این مقاله، فضاهای توپولوژی فضاهای انبوه هستند و $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

۱ گسترش‌های $\mathcal{C}$-ساده

در این بخش به تعریف و بررسی گسترش $\mathcal{C}$-ساده[۳] از فضای توپولوژی تیخونوف (منظم) می‌پردازیم. هم‌چنین، نتایج و قضایایی در زمینه حل‌پذیری فضاهای توپولوژی به‌دست می‌آوریم که به ما در ارزیابی خواص توپولوژی کمک می‌کند.

تعریف ۱.۱. الف. گوییم توپولوژی τ دارای یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده است، هرگاه تابع $f : X \to [0,1]$ چنان موجود باشد که برای هر بازه باز J در $[0,1]$، $f^{-1}(J)$ در X چگال باشد. کوچک‌ترین توپولوژی $\tau \subseteq \tau'$ را که در آن f تابعی پیوسته باشد، یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده از τ می‌نامیم.

ب. توپولوژی انبوه τ' یک $\mathcal{C}$-گسترش از τ نامیده می‌شود هرگاه τ' شامل یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده از τ باشد.

در ادامه ویژگی‌هایی از گسترش $\mathcal{C}$-ساده را بیان می‌کنیم. پیش از آن، یادآوری دو قضیه مفید است.

ملاحظه ۲.۱. با توجه به قضیه‌های ۳.۶ و ۳.۷ از [۵] داریم:

الف. اگر (X,τ) فضای هاسدورف باشد، آن‌گاه X فضای تیخونوف است اگر و تنها اگر توپولوژی ضعیف القا شده به‌وسیله $C(X)$ برابر τ باشد.

---

[2] admissible

[۳] گسترش پایای $\mathcal{C}$-ساده اولین بار توسط مهرداد کاروان و واتسون در مقاله منتشر نشده [۷] تعریف شد.

ب. اگر X فضای هاسدورفی باشد که توپولوژی آن به‌وسیله زیرگردایه‌ای از $X^{\mathbb{R}}$ تولید می‌شود، آن‌گاه X فضای تیخونوف است.

لم ۳.۱. اگر τ فضای تیخونوف و τ' یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده برای τ باشد، آن‌گاه τ' تیخونوف است.

اثبات. با توجه به بند اول از ملاحظه۲.۱، τ توپولوژی ضعیف القایی به‌وسیله $C((X,\tau))$ است، بنابراین τ' توپولوژی القایی ضعیف به‌وسیله $C((X,\tau))\cup\{f\}$ (تابع f بیان شده در تعریف ۱.۱) است. اکنون به استناد بند دوم ملاحظه ۲.۱، τ' تیخونوف است. □

لم ۴.۱. اگر τ یک توپولوژی انبوه باشد، آن‌گاه هر گسترش $\mathcal{C}$-ساده از آن نیز انبوه است.

اثبات. فرض کنیم τ' یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده از τ باشد و $\{x\}\in\tau'$. در این‌صورت $J\subset[0,1]$ و $U\in\tau$ موجود است که $U\cap f^{-1}(J)=\{x\}$ که این مطلب با توجه به چگال بودن $f^{-1}(J)$ در (X,τ) غیرممکن است.
□

قضیه ۵.۱. اگر (X,τ) یک فضای توپولوژی منظم باشد، آن‌گاه هر گسترش $\mathcal{C}$-ساده از آن نیز منظم است.

اثبات. فرض کنیم τ' یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده از τ بوده و F در (X,τ') بسته باشد و $x\notin F$. در این‌صورت

$$F^c=\bigcup_{\alpha\in I}(f^{-1}(J_\alpha)\cap U_\alpha).$$

بنابراین $x\in F^c$ پس α به‌گونه‌ای موجود است که $x\in f^{-1}(J_\alpha)\cap U_\alpha$ قرار می‌دهیم $F^*=U_\alpha^c$. F^* در τ بسته است و $x\notin F^*$. چون (X,τ) منظم است، پس همسایگی باز V از x زیرمجموعه باز W شامل F^* در τ وجود دارند که $V\cap W=\emptyset$.

$$x\in V\cap f^{-1}(J_\alpha)\subseteq U_\alpha\cap f^{-1}(J_\alpha).$$

قرار می‌دهیم $O_1=V\cap f^{-1}(J_\alpha)$ و $O_2=W\cup f^{-1}(J_\alpha)^c=W\cup f^{-1}(J_\alpha^c)$ (توجه داریم که $f^{-1}(J_\alpha^c)$ در τ' باز است). اکنون O_1 و O_2 در τ' باز هستند و $O_1\cap O_2=\emptyset$. هم‌چنین

$$F=\bigcap_{\alpha\in I}\left(U_\alpha^c\cup f^{-1}(J_\alpha^c)\right).$$

$O_2=W\cup f^{-1}(J_\alpha^c)\supseteq F$ پس $U_\alpha^c=F^*\subseteq W$.

□

فضاهای ω-حل‌پذیر از جمله فضاهای توپولوژی هستند که دارای گسترش $\mathcal{C}$-ساده هستند. در قضیه زیر، ضمن اثبات این واقعیت، یکی از روش‌های یافتن چنین گسترشی را نیز معرفی می‌کنیم.

قضیه ۶.۱. (X,τ) یک فضای ω-حل‌پذیر است اگر و تنها اگر τ دارای یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده باشد.

اثبات. $\Leftarrow$) فرض کنیم

$$X=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^*}D_q$$

که در آن D_qها زیرمجموعه‌های چگال دو به دو مجزا هستند. تابع $f:X\to[0,1]$ را که هر $x\in D_q$ را به q می‌نگارد ($f(D_q)=q$)، در نظر بگیرید. در این‌صورت، برای هر بازه باز J در زیرفضای $[0,1]$، $f^{-1}(J)$ در (X,τ) چگال است. از این‌رو تابع f شرایط تعریف ۱.۱ را برآورده می‌کند پس τ دارای یک گسترش $\mathcal{C}$-ساده است.
$\Rightarrow$) بنا بر فرض تابع $f:X\to[0,1]$ وجود دارد که برای هر بازه باز J در $[0,1]$، مجموعه $f^{-1}(J)$ در X چگال است. اکنون کافی است خانواده دوبه‌دو مجزای $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $[0,1]$ را در نظر بگیریم و قرار دهیم $D_n=f^{-1}(J_n)$. □

ملاحظه ۷.۱. $\mathcal{C}$-گسترش ساده معرفی شده در اثبات قضیه ۶.۱، هم‌بندی را حفظ نمی‌کند، زیرا $f^{-1}([0,\frac{\sqrt{2}}{2}))$ و $f^{-1}((\frac{\sqrt{2}}{2},1])$ یک جداسازی برای (X,τ') است.

مطالعه رفتار فضاهای توپولوژی ماکسیمال تیخونوف و منظم، از نظر ویژگی‌های حل‌پذیری حائز اهمیت است. در ادامه، نشان می‌دهیم که هر فضای ماکسیمال تیخونوف (منظم)، یک فضای حل‌ناپذیر است. پیش از آن، یک لم کاربردی را بیان می‌کنیم.

لم ۸.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک خانواده بالارونده از توپولوژی‌های روی X باشند و $\tau_\circ = \bigcup \mathcal{A}$. در این‌صورت احکام زیر برقرارند:

الف. اگر (X, τ) برای هر $\tau \in \mathcal{A}$ انبوه باشد، آن‌گاه $(X, \tau_\circ)$ نیز انبوه است.

ب. اگر (X, τ) برای هر $\tau \in \mathcal{A}$ یک فضای T_i $(i = ۱, ۲, ۳, ۴)$ باشد، آن‌گاه $(X, \tau_\circ)$ نیز چنین است.

ج. فرض کنیم $\tau_۱, \tau_۲ \in Top(X)$ و $\tau_۱ \subseteq \tau_۲$. در این‌صورت اگر تابع $f : X \to Y$ تحت توپولوژی $\tau_۱$ پیوسته باشد، آن‌گاه تحت توپولوژی $\tau_۲$ نیز پیوسته است.

د. اگر (X, τ) برای هر $\tau \in \mathcal{A}$ تیخونوف باشد، آن‌گاه $(X, \tau_\circ)$ نیز چنین است.

اثبات. الف. اگر $(X, \tau_\circ)$ انبوه نباشد، آن‌گاه $x \in X$ وجود دارد که $\{x\} \in \tau_\circ = \bigcup \mathcal{A}$. بنابراین $\tau_\alpha \in \mathcal{A}$ به گونه‌ای موجود است که $\{x\} \in \tau_\alpha$ و این با فرض انبوه بودن τ_α در تناقض است.

ب. اثبات با توجه به تعریف فضاهای T_i برای $i = ۱, ۲, ۳, ۴$، به سادگی امکان‌پذیر است.

ج. فرض کنیم تابع $f : X \to Y$ تحت توپولوژی $\tau_۱$ پیوسته بوده و U زیرمجموعه بازی در Y باشد، در این‌صورت

$$f^{-۱}(U) \in \tau_۱ \subseteq \tau_۲.$$

بنابراین $f^{-۱}(U) \in \tau_۲$ و در نتیجه تابع f تحت توپولوژی $\tau_۲$ پیوسته است.

د. فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای بسته در $(X, \tau_\circ)$ و $x \notin F$. در این‌صورت $\tau_\alpha \in \mathcal{A}$ وجود دارد که در (X, τ_α) بسته است. از آنجا که (X, τ_α) فضای تیخونوف است، پس تابع پیوسته $f : X \to [۰, ۱]$ چنان موجود است که $f(F) = ۰$ و $f(x) = ۱$. با توجه به اینکه $\tau_\alpha \subseteq \tau_\circ$ و به استناد بند ج، نتیجه می‌شود که f تحت توپولوژی $\tau_\circ$ نیز پیوسته بوده و بنابراین $(X, \tau_\circ)$ نیز تیخونوف است.

□

نتیجه ۹.۱. هر فضای انبوه ماکسیمال تیخونوف (منظم)، ω-حل‌ناپذیر است.

اثبات. فرض کنیم (فرض خلف) (X, τ) فضای ماکسیمال تیخونوف (منظم) ω-حل‌پذیر است. در این‌صورت بنابر قضیه ۶.۱، گسترش $\mathcal{C}$-ساده مانند τ' از τ موجود است که طبق لم ۳.۱ (لم ۴.۱)، تیخونوف (منظم) است و این با ماکسیمال تیخونوف (منظم) بودن فضای (X, τ) در تناقض است. □

لم ۱۰.۱. اگر (X, τ) یک فضای تیخونوف و τ' کوچک‌ترین توپولوژی شامل $\tau \cup \{A, A^c\}$ برای مجموعه‌ای چون $A \subseteq X$ باشد، آن‌گاه فضای (X, τ') نیز تیخونوف است.

اثبات. فرض کنیم F زیرمجموعه‌ای بسته در (X, τ') بوده و $x \notin F$. مجموعه باز W شامل x به‌گونه‌ای موجود است که

$$W \cap F = \emptyset.$$

می‌توان فرض کرد $W = V \cap A$ که V زیرمجموعه‌ای باز در (X, τ) است. چون (X, τ) فضای تیخونوف است پس تابع $f : X \to [۰, ۱]$ موجود است که $f(x) = ۱$ و $f(V^c) = ۰$. تابع $g : (X, \tau') \to [۰, ۱]$ که $g(A) = ۱$ و $g(A^c) = ۰$ تابعی پیوسته است. اکنون تابع حاصل‌ضربی $f \cdot g$ تابعی پیوسته بوده و $f \cdot g(x) = ۱$ و $f \cdot g(F) = ۰$. □

قضیه ۱۱.۱. هر فضای انبوه ماکسیمال تیخونوف (منظم)، حل‌ناپذیر است.

اثبات. در نتیجه ۹.۱ ثابت کردیم که هر فضای ماکسیمال تیخونوف (منظم) (X, τ)، ω-حل‌ناپذیر است. پس یک عدد طبیعی مانند n به‌گونه‌ای موجود است که (X, τ) یک فضای n-حل‌پذیر است. بنابراین زیرمجموعه‌های چگال مجزای $D_۱, D_۲, \ldots, D_n$ وجود دارند که $X = \bigcup_{i=۱}^{n} D_i$. اکنون τ' را توپولوژی تولید شده به‌وسیله $\tau \cup \{D_۱, D_۱^c\}$ در نظر بگیریم. (X, τ') گسترشی از τ بوده که به استناد لم ۱۰.۱، تیخونوف (منظم) است. از آنجا که (X, τ) ماکسیمال تیخونوف (منظم) است پس $\tau' = \tau$ و بنابراین n نمی‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد. بنابراین (X, τ) حل‌ناپذیر است. □

یکی از مسائل مهم در مطالعه گسترش‌های یک فضای حل‌پذیر، وجود گسترش ماکسیمال برای این فضا و شرایط حل‌پذیری فضای گسترش یافته است. در قالب یک قضیه به این مهم می‌پردازیم.

قضیه **۱۲.۱**. برای هر فضای تیخونوف (منظم) انبوه ω–حل‌پذیر (X,τ) یک $\mathcal{C}$–گسترش ماکسیمال تیخونوف (منظم) انبوه وجود دارد که ω–حل‌ناپذیر است.

اثبات. اگر (X,τ) فضای ω–حل‌پذیر تیخونوف (منظم) انبوه باشد، آن‌گاه بنا بر قضیه ۶.۱، توپولوژی τ دارای یک $\mathcal{C}$–گسترش ساده از τ است. قرار می‌دهیم

$$\Sigma_{\mathcal{C}} = \{\tau' : \tau' \text{ یک } \mathcal{C}\text{–گسترش تیخونوف (منظم) انبوه از } \tau \text{ باشد.}\}$$

Σ ناتهی است. برای هر τ' و τ'' تعریف می‌کنیم $\tau' \leq \tau''$ اگر و تنها اگر τ'' یک $\mathcal{C}$–گسترش τ' باشد. در این‌صورت $(\Sigma,\leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی است. زنجیر $\mathcal{A} = \{\tau_\alpha\}$ را در نظر بگیرید. $\bigcup \mathcal{A}$ پایه توپولوژی $\vee_\alpha \tau_\alpha$ است، این توپولوژی یک کران بالا برای $\mathcal{A}$ است. بنابراین Σ دارای یک عضو ماکسیمال مانند τ^* است. τ^* یک $\mathcal{C}$–گسترش از τ بوده که ω–حل‌ناپذیر است. زیرا اگر ω–حل‌پذیر باشد، آن‌گاه بنابر لم ۳.۱ و قضیه ۶.۱، τ^* دارای یک $\mathcal{C}$–گسترش تیخونوف (منظم) است و این با ماکسیمال بودن τ^* در تناقض است. □

$\mathcal{C}$–گسترش‌ها لزوماً فشردگی را حفظ نمی‌کنند، اما خصوصیات شمارایی اول و شمارایی دوم توسط این گسترش‌ها حفظ می‌شوند. در ادامه، با ارائه یک مثال و یک لم، صحت این ادعا را اثبات خواهیم کرد.

مثال **۱۳.۱**. فرض کنیم $X = [0,1]$، τ توپولوژی معمولی روی X و τ' یک $\mathcal{C}$–گسترش دل‌خواه از τ باشد. در این‌صورت (X,τ') فشرده نیست. برای اثبات این مطلب با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم τ' یک $\mathcal{C}$–گسترش فشرده از τ بوده و f تابعی باشد که شرایط تعریف ۱.۱، را دارا باشد. در این‌صورت برای هر $a < b \in [0,1]$،

$$A = X \setminus f^{-1}(a,b)$$

در τ' بسته است. چون A زیرمجموعه بسته‌ای از مجموعه فشرده X است، پس A فشرده است. اکنون تابع همانی به عنوان تابعی از فضای توپولوژی (X,τ') به فضای (X,τ) را در نظر می‌گیریم. به‌راحتی دیده می‌شود که این تابع پیوسته است. پس تصویر A تحت این تابع در (X,τ) فشرده است؛ یعنی مجموعه A در (X,τ) بسته است که چنین نیست.

لم **۱۴.۱**. هر گسترش $\mathcal{C}$–ساده از τ خاصیت شمارای اول و شمارای دوم را حفظ می‌کند.

اثبات. فرض کنیم τ' یک گسترش $\mathcal{C}$–ساده از τ بوده و تابع f شرایط تعریف ۱.۱ را دارد.
گیریم $\mathcal{B}$ پایه شمارای (X,τ) باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{B}' = \{B \cap f^{-1}(p,q) : B \in \mathcal{B},\ p,q \in \mathbb{Q}^*\}.$$

آشکار است که $\mathcal{B}'$ شمارا است. تنها باید نشان دهیم که $\mathcal{B}'$ پایه‌ای برای فضای (X,τ') است. برای این منظور فرض کنیم $U \in \tau'$. پیدا است که $V \in \tau$ و بازه باز J در $[0,1]$ وجود دارند که $U = V \cap f^{-1}(J)$. چون $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، پس مجموعه‌های شمارش‌پذیر A و B در $\mathbb{Q}^*$ وجود دارند که $J = \bigcup_{(p,q)\in A\times B}(p,q)$. بنابراین

$$U = V \cap f^{-1}(J) = V \cap f^{-1}\Big(\bigcup_{(p,q)\in A\times B}(p,q)\Big) = \bigcup_{(p,q)\in A\times B} V \cap f^{-1}((p,q)).$$

□

مشابه اثبات ارائه شده برای نتیجه ۹.۱، می‌توان نتیجه زیر را نیز ثابت کرد.

نتیجه **۱۵.۱**. در کلاس فضاهای T_1، هاسدورف، منظم یا تیخونوف، فضاهای ماکسیمال شمارای اول و ماکسیمال شمارای دوم ω–حل‌ناپذیرند.

در یک فضای توپولوژیکیِ ω–حل‌ناپذیر، هر زیرمجموعه‌ی باز آن لزوماً ω–حل‌ناپذیر نیست. از این‌رو، بررسی گسترش‌هایی که یک فضای تیخونوف انبوه را به فضایی ω–حل‌ناپذیر تبدیل می‌کنند، به‌گونه‌ای که هم خاصیت تیخونوف و انبوه بودن حفظ شود و هم هر زیرمجموعه‌ی باز آن نیز ω–حل‌ناپذیر باشد (یعنی گسترش حاصل، یک فضای ω–حل‌ناپذیر قوی باشد)، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در ادامه، قضیه‌ای در این زمینه بیان و اثبات می‌شود.

نتیجه **۱۶.۱**. هر فضای تیخونوف انبوه، دارای گسترش تیخونوف انبوه ω–حل‌ناپذیر قوی است.

اثبات. فرض کنیم (X,τ) فضای تیخونوف است. قرار می‌دهیم:

$$\Sigma = \{\tau' : \text{. } \tau' \text{ یک گسترش تیخونوف انبوه از } \tau \text{ است}\}.$$

Σ ناتهی بوده و $(\Sigma,\subseteq)$ یک مجموعه مرتب جزیی است. برای هر زنجیر دلخواه $\mathcal{A}$ در Σ توپولوژی $\bigcup\mathcal{A}$ یک کران بالا است. پس Σ دارای یک عضو ماکسیمال مانند τ^* است. نشان می‌دهیم τ^* فضای ω-حل‌ناپذیر قوی است. برای این منظور فرض کنیم (فرض خلف) $U\subseteq X$ زیرمجموعه باز ω-حل‌پذیر در τ^* و $U=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^*}D_q$ که $\{D_q\}_{q\in\mathbb{Q}^*}$ خانواده‌ای دوبه‌دو مجزا از زیرمجموعه‌های چگال در U است. تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} q & x\in D_q \\ \circ & x\notin U \end{cases} \tag{۱.۱}$$

دراین‌صورت $\tau^\dagger$ توپولوژی ضعیفی باشد که f را پیوسته می‌کند، یک گسترش(نه لزوماً $\mathcal{C}$-ساده) از τ بوده که بنا بر ملاحظه ۲.۱ تیخونوف است و این با فرض ماکسیمال بودن τ^* در تناقض است.

□

۲ گسترش شکافنده

اکنون به معرفی گسترشی دیگر می‌پردازیم که از دیدگاه‌های متفاوتی قابل بررسی است.

تعریف **۱.۲**. فرض کنیم (X,τ) فضای توپولوژی و $A\subseteq X$. در این‌صورت τ' توپولوژی تولیدشده به‌وسیله $\tau\cup\{A,A^c\}$ را یک گسترش شکافنده τ نسبت به A می‌نامیم.

انبوه بودن گسترش یک توپولوژی نقش مهمی در بررسی خواص آن دارد. در ادامه، با ارائه یک لم، به بررسی این ویژگی می‌پردازیم.

لم **۲.۲**. اگر (X,τ) یک فضای انبوه و $D\subseteq X$ چگال باشد، آن‌گاه گسترش شکافنده τ نسبت به D نیز انبوه است.

اثبات. فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای چگال در فضای توپولوژی (X,τ) باشد و τ' گسترش شکافنده τ نسبت به D باشد، به‌طوری‌که دارای نقطه تنهای x است. در این‌صورت می‌توان فرض کرد $U\in\tau$ به گونه‌ای موجود است که $U\cap D=\{x\}$. از آنجا که (X,τ) انبوه است، پس U تک‌عضوی نیست. فرض کنیم $x\neq y\in U$ و $y\in V\subseteq U$. در این‌صورت $V\cap D=\emptyset$ و این با فرض چگال بودن D در تناقض است. □

از لم ۱۰.۱ نتیجه می‌گیریم که هر گسترش شکافنده، خاصیت تیخونوف بودن را از فضای اولیه حفظ می‌کند. اکنون نشان می‌دهیم که چنین گسترشی، منظم بودن را نیز حفظ می‌نماید.

لم **۳.۲**. اگر (X,τ) فضای توپولوژی منظم و τ' گسترش شکافنده‌ای از τ باشد، آن‌گاه (X,τ') نیز منظم است.

اثبات. فرض کنیم τ' گسترش شکافنده از τ نسبت به A باشد. همچنین فرض کنیم F در (X,τ') بسته بوده و $x\notin F$. در این‌صورت F^c در (X,τ') باز است و $x\in F^c$. بنابراین $U\in\tau$ به‌گونه‌ای موجود است که $x\in U\cap A\subseteq F^c$ یا $x\in U\cap A^c$. می‌توان فرض کرد $x\in U\cap A$.
قرار می‌دهیم $F'=U^c$. در این‌صورت F' در (X,τ) بسته است و $x\notin F'$. چون (X,τ) فضای منظم است پس زیرمجموعه‌های باز V و W در τ وجود دارند که $x\in V$، $F'\subseteq W$ و $V\cap W=\emptyset$. قرار می‌دهیم $O_۱=V\cap A$ و $O_۲=W\cup A^c$. در این‌صورت $O_۱,O_۲\in\tau'$، $O_۱\cap O_۲=\emptyset$ و

$$x\in O_۱\subseteq U\cap A,\quad F\subseteq (U\cap A)^c=U^c\cup D^c\subseteq W\cup A^c.$$

بنابراین (X,τ') منظم است.

□

لم **۴.۲**. هر گسترش شکافنده از τ خاصیت شمارای اول و شمارای دوم را حفظ می‌کند.

اثبات. فرض کنیم $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}_x$ به ترتیب پایه‌های شمارا برای فضای X و نقطه $x \in X$ باشند. اگر τ' یک گسترش شکافنده از τ نسبت به زیرمجموعه $A \subseteq X$ باشد، در این‌صورت

$$\mathcal{B}' = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\} \cup \{B \cap A^c : B \in \mathcal{B}\},\ \mathcal{B}'_x = \{B_x \cap A : B_x \in \mathcal{B}_x\} \cup \{B_x \cap A^c : B_x \in \mathcal{B}_x\}$$

پایه‌های شمارا برای X و x نسبت به توپولوژی τ' خواهند بود. □

نتیجه **۵.۲**. هر فضای ماکسیمال تیخونوف (منظم)، ماکسیمال شمارای اول و ماکسیمال شمارای دوم حل‌ناپذیرند.

اثبات. اگر τ فضای ماکسیمال تیخونوف (منظم) حل‌پذیر باشد و $X = D \cup D^c$، آن‌گاه گسترش شکافنده τ نسبت به D گسترش تیخونوف (منظم) τ بوده که با ماکسیمال بودن τ در تناقض است. حکم برای خاصیت شمارای اول و دوم نیز به راحتی قابل اثبات است. □

۳ گسترش‌های پایای دیگر

در این بخش، انواع دیگری از گسترش‌های پایای فضاهای توپولوژی را معرفی کرده و سپس ویژگی‌های این گسترش‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هم‌چنین، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک فضای توپولوژی را به یک فضای زیرماکسیمال گسترش داد.

تعریف **۱.۳**. برای فضای توپولوژی داده شده (X, τ)، گسترش τ' از τ را

الف. گسترش پایای نوع ۱ گوییم، اگر هر مجموعه چگال باز در (X, τ)، در (X, τ') نیز چگال باز باشد.

ب. گسترش پایای نوع ۲ نامیم، اگر τ' دارای زیرپایه‌ای مانند $\mathcal{A}$ باشد به‌گونه‌ای که برای هر $V \in \mathcal{A}$، مجموعه $U \in \tau$ چنان موجود باشد که V در (U, τ') چگال باز باشد.

ج. گسترش پایای نوع ۳ می‌نامیم، هرگاه برای هر $U, V \in \tau'$ اگر $U \cap V = \emptyset$، آن‌گاه مجموعه‌های G و H در τ چنان موجود باشند که $U \subseteq H$، $V \subseteq G$ و $G \cap H = \emptyset$.

د. گسترش پایای ساده برای τ بر پایه D است، اگر $\tau \cup \{O \cap D : O \in \tau\}$ زیرپایه‌ای برای τ' باشد که در آن D در (X, τ) چگال است.

در حقیقت، گسترش پایای نوع ۲ همان گسترش قابل قبول است که توسط اندرسون در [۱] معرفی شده است. اکنون به بیان معادل‌های دیگری برای گسترش پایای نوع ۲ می‌پردازیم.

ملاحظه **۲.۳**. فرض کنیم D_1 و D_2 زیرمجموعه‌های چگال باز و O زیرمجموعه باز ناتهی در X است. در این‌صورت $O \cap D_1$ باز ناتهی است و $(O \cap D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$.
بنابراین اشتراک دو زیرمجموعه چگال باز در X، در X چگال است.

لم **۳.۳**. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف. τ' گسترش پایای نوع ۲ از توپولوژی τ است.

ب. خانواده $\mathcal{A}^* = \{D \cap U : D \in \tau', \mathrm{cl}_{\tau'} D = X, U \in \tau\}$ پایه‌ای برای τ' است.

ج. τ' دارای زیرپایه $\mathcal{A}^{**}$ است که شامل τ و برخی زیرمجموعه‌های چگال باز در τ' باشد.

اثبات.

الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنیم $\mathcal{A}$ زیرپایه‌ای برای τ' باشد که در شرط تعریف ۱.۳ صدق کند و $V \in \mathcal{A}$. در این‌صورت $U \in \tau$ به گونه‌ای یافت می‌شود که V در (U, τ') چگال باز است. در این‌صورت

$$D = V \cup (X \setminus \mathrm{cl}_{(X,\tau)}(U))$$

زیرمجموعه چگال باز در (X, τ') است و $D \cap U = V$. پس هر عضو زیرپایه τ' را می‌توان به‌صورت اشتراک یک زیرمجموعه چگال باز در τ' و یک عضو از τ نوشت. برای اثبات پایه بودن $\mathcal{A}^*$، کافی است نشان دهیم $\mathcal{A}^*$ تحت اشتراک متناهی بسته است. برای این منظور فرض کنیم $(D_1 \cap U_1), (D_2 \cap U_2) \in \mathcal{A}^*$. در این‌صورت

$$(D_1 \cap U_1) \cap (D_2 \cap U_2) = (D_1 \cap D_2) \cap (U_1 \cap U_2).$$

$D_1 \cap D_2$ زیرمجموعه چگال باز در τ' است و $U_1 \cap U_2 \in \tau$ و در نتیجه حکم برقرار است.

ب $\Leftarrow$ ج) بدیهی است.

ج $\Leftarrow$ الف) فرض کنیم $V \in \mathcal{A}^{**}$. اگر $V \in \tau$، آن‌گاه حکم بدیهی است. فرض کنیم $V \in (\mathcal{A}^{**} \setminus \tau)$، در این‌صورت V زیرمجموعه چگال باز در (X, τ') است. قرار می‌دهیم $U = X$.

□

در ادامه ویژگی‌هایی از گسترش‌های پایا را بیان می‌کنیم.

لم **۴.۳**. فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژی است، در این‌صورت

الف. برای $i = ۱, ۲, ۳$، اگر τ'' گسترش پایای نوع i از τ' و τ' گسترش پایای نوع i از τ باشد، آن‌گاه τ'' گسترش پایای نوع i از τ است.

ب. هر گسترش پایای ساده برای τ بر پایه D، یک گسترش پایای نوع i است، برای $i = ۱, ۲, ۳$.

اثبات. الف. اثبات حکم برای گسترش پایای نوع ۱ و نوع ۳ به سادگی از تعریف امکان‌پذیر است، حکم را برای گسترش پایای نوع ۲ ثابت می‌کنیم.
فرض کنیم D یک زیرمجموعه چگال باز در τ بوده و $U \cap D'$ یک باز پایه در τ' باشد. در این‌صورت

$$D \cap (U \cap D') = (D \cap U) \cap D' \neq \emptyset.$$

بنابراین هر زیرمجموعه چگال باز در (X, τ) در هر گسترش پایای نوع ۲ آن نیز چگال باز است.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{D'' \cap U' : D'' \in \tau'', \mathrm{cl}_{\tau''} D'' = X, U' \in \tau'\} \\ &= \{D'' \cap D' \cap U : D'' \in \tau'', \mathrm{cl}_{\tau''} D'' = X, D' \in \tau\prime, \mathrm{cl}_{\tau'} = X, U \in \tau\}\end{aligned}$$

پایه‌ای برای τ'' است. از آنجا که هر زیرمجموعه چگال باز در τ' در توپولوژی τ'' نیز چگال باز است، پس داریم:

$$\mathcal{A} = \{D'' \cap U : D'' \in \tau'', \mathrm{cl}_{\tau''} D'' = X, U \in \tau\}.$$

بنابراین τ'' گسترش پایای نوع ۲ از τ است.

ب. حکم را برای گسترش پایای نوع ۳ ثابت می‌کنیم، بقیه موارد با توجه به تعریف اثبات می‌شوند.
فرض کنیم τ' یک گسترش پایای ساده برای τ بر پایه D بوده، $U, V \in \tau'$ و $U \cap V = \emptyset$. در این‌صورت اگر $U, V \in \tau$، آن‌گاه چیزی برای اثبات نمی‌ماند. در غیر این‌صورت زیرمجموعه‌های باز O و O' به‌گونه‌ای موجودند که $U = D \cap O$ و $V = D \cap O'$. اگر $O \cap O' \neq \emptyset$، آن‌گاه

$$U \cap V = (O \cap D) \cap (O' \cap D') = (O \cap O') \cap D \neq \emptyset.$$

□

گزاره **۵.۳**. هر گسترش پایای نوع ۲، یک گسترش پایای نوع ۱ و ۳ است.

اثبات. اثبات گسترش پایای نوع ۱: فرض کنیم τ' یک گسترش پایای نوع ۲ از τ، D زیرمجموعه چگال باز در (X, τ) و $W \in \tau'$. در این‌صورت بنا بر لم ۳.۳، زیرمجموعه چگال باز D' در (X, τ') و $U \in \tau$ وجود دارند که $D' \cap U \subseteq W$. داریم:

$$\emptyset \neq (U \cap D) \cap D' \subseteq W \cap D.$$

بنابراین D در (X, τ') نیز چگال باز است.

اثبات گسترش پایای نوع ۳: فرض کنیم τ' یک گسترش پایای نوع ۲ برای τ است. به استناد لم ۳.۳، τ' دارای زیرپایه شامل مجموعه‌های به‌صورت $D \cap O$ است که D یک مجموعه چگال در τ' (به وضوح چگال در τ) است و $O \in \tau$. فرض کنیم U و V

مجموعه‌های باز در τ' بوده و $U \cap V = \emptyset$. اکنون $U = \bigcup_i (D_i \cap O_i)$ و $V = \bigcup_j (D'_j \cap O'_j)$ که در آن برای هر i و j، $O_i, O_j \in \tau$ و D_i, D_j چگال‌اند. $U \cap V = \emptyset$ نتیجه می‌دهد که برای هر i و j،

$$(D_i \cap O_i) \cap (D'_j \cap O'_j) = \emptyset.$$

اگر i و j چنان باشند که $O_i \cap O'_j \neq \emptyset$، آن‌گاه چون $D_i \cap D_j$ زیرمجموعه چگال باز در τ است، پس

$$(O_i \cap O'_j) \cap (D_i \cap D_j) \neq \emptyset$$

که این یک تناقض است. بنابراین $\bigcup_i O_i$ و $\bigcup_i O'_j$ دو مجموعه باز جدای از هم در τ بوده که به‌ترتیب شامل U و V هستند. □

با ارائه یک مثال نشان می‌دهیم که گسترش پایای نوع ۱ لزوماً گسترش پایای نوع ۲ و یا گسترش پایای نوع ۳ نیست.

مثال **۶.۳**. فرض کنیم (X, τ) فضای توپولوژی هم‌بند باشد که دارای زیرمجموعه چگال و متمم‌چگال Q در (X, τ) است. قرار می‌دهیم $\tau' = \tau \cup \{Q, X \setminus Q\}$. اگر D در (X, τ) زیرمجموعه چگال باز باشد، آن‌گاه با توجه به لم ۴.۳، $D \setminus Q$ و $D \cap Q$ در (X, τ) چگال خواهند بود. بنابراین D در (X, τ') چگال است. در نتیجه τ' یک گسترش پایای نوع ۱ برای τ است. از آن‌جا که (X, τ') ناهم‌بند است، پس طبق قضیه ۹.۳، نتیجه می‌شود که τ' گسترش پایای نوع ۲ برای τ نیست. هم‌چنین بررسی اینکه τ' گسترش پایای نوع ۳ برای τ نیست، به‌راحتی صورت می‌پذیرد.

نمادگذاری: برای $i = ۱, ۲, ۳$، قرار می‌دهیم:

$$\Gamma_i = \{\tau' : \tau' \text{ یک گسترش پایای نوع } i \text{ برای } \tau \text{ است.}\}.$$

گزاره **۷.۳**. برای $i = ۱, ۲, ۳$، اگر Γ_i دارای عضو ماکسیمال τ^* باشد، آن‌گاه τ^* زیرماکسیمال است.

اثبات. فرض کنیم τ^* فضای زیرماکسیمال نباشد و D یک زیرمجموعه چگال در τ^* بوده که در τ^* باز نیست. با توجه به بند سوم لم ۴.۳، گسترش پایای ساده $(\tau^*)'$ بر پایه D برای τ^*، یک گسترش پایای نوع i است برای $i = ۱, ۲, ۳$ که شامل τ^* است. اکنون با توجه به بند دوم لم ۹.۳ $(\tau^*)'$ یک گسترش پایای نوع i برای τ بوده و شامل τ^* است که یک تناقض است. □

گزاره **۸.۳**. $\Gamma_۱$، $\Gamma_۲$ و $\Gamma_۳$ دارای عضوهای ماکسیمال‌اند.

اثبات. برای هر $i = ۱, ۲, ۳$ گردایه Γ_i ناتهی است. برای هر τ' و τ'' تعریف می‌کنیم $\tau' \leq \tau''$ اگر و تنها اگر τ'' یک گسترش پایای نوع i از τ' باشد. در این‌صورت $(\Gamma_i, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزیی است. فرض کنیم ω_i یک زنجیر در Γ_i است. نشان می‌دهیم τ_i^* توپولوژی تولید شده توسط $\bigcup \omega_i$ کران بالای ω_i است و بنابراین هر Γ_i دارای عضو ماکسیمال است.
فرض کنیم $U = O_۱ \cap O_۲ \cap \cdots \cap O_n$ یک باز پایه‌ای در τ_i^* باشد. در این‌صورت توپولوژی‌های $\tau_{\alpha_۱}, \tau_{\alpha_۲}, \ldots, \tau_{\alpha_n} \in \omega_i$ به‌گونه‌ای موجودند که برای هر $j = ۱, ۲, \ldots, n$، $O_j \in \tau_{\alpha_j}$. برای $k = \max\{\alpha_۱, \alpha_۲, \ldots, \alpha_n\}$، داریم $\tau_{\alpha_j} \subseteq \tau_k$ برای هر $j = ۱, ۲, \ldots, n$. بنابراین $U \in \tau_k$.
گسترش پایای نوع ۱: فرض کنیم D زیرمجموعه چگال باز در (X, τ) باشد. از آنجا که τ_k یک گسترش پایای نوع ۱ از τ است، پس D در τ_k باز بوده و $D \cap U \neq \emptyset$.
گسترش پایای نوع ۲: برای هر $\tau_\alpha \in \omega_۲$، فرض کنیم $\mathcal{A}_\alpha$ زیرپایه‌ای برای τ_α باشد که در شرط تعریف ۱.۳ صدق کند. نشان می‌دهیم که $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ زیرپایه‌ای برای $\tau_۲^*$ است که همان شرط را نیز برآورده می‌سازد. برای این منظور فرض کنیم $V \in \mathcal{A}$. در این‌صورت، $\alpha \in I$ به‌گونه‌ای وجود دارد که $V \in \mathcal{A}\alpha$. از آنجا که τ_α گسترش پایای نوع ۲ از τ است، پس مجموعه باز $U \in \tau$ وجود دارد که V در (U, τ_α) چگال باز است. هم‌چنین، چون برای هر $\kappa > \alpha$، τ_κ نیز گسترش پایای نوع ۲ از τ است، بنابراین V در (U, τ_κ) نیز چگال باز است. بنابراین، V در $(U, \tau_۲^*)$ چگال باز است.
گسترش پایای نوع ۳: فرض کنیم U, V بازهای پایه‌ای مجزا در $(X, \tau_۳^*)$ باشند. در این‌صورت

$$U = \bigcap_{i=۱}^{n} O_{\alpha_i}, V = \bigcap_{i=۱}^{m} O_{\alpha'_i}.$$

قرار می‌دهیم $k = \max\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n, \alpha'_۱, \ldots, \alpha'_m\}$. در این‌صورت $U, V \in \tau_k$ و چون τ_k گسترش پایای نوع ۳ از توپولوژی τ است، پس زیرمجموعه‌های باز $G, H \in \tau_k$ موجودند که $U \subseteq H$، $V \subseteq G$ و $G \cap H = \emptyset$. از طرفی $\tau_k \subseteq \tau_۳^*$. بنابراین $G, H \in \tau_۳^*$ و حکم برقرار است. □

باتوجه به گزاره‌های ۷.۳ و ۸.۳ نتیجه می‌شود که هر فضای توپولوژی هاسدورف را می‌توان به یک فضای زیرماکسیمال گسترش داد. نشان خواهیم داد که این فضای زیرماکسیمال علاوه بر اینکه هاسدورف است، ویژگی‌هایی مانند هم‌بندی، شدیداً ناهم‌بندی و انبوه بودن را از فضای توپولوژی اولیه حفظ خواهد کرد.

قضیه **۹.۳**. τ^* نشان‌دهنده عضو ماکسیمال Γ_2 نسبت به توپولوژی τ است. در این‌صورت τ^* زیرماکسیمال است و

الف. اگر τ هاسدورف باشد، آن‌گاه τ^* نیز هاسدورف است.

ب. اگر τ هم‌بند باشد، آن‌گاه τ^* هم‌بند است.

ج. اگر τ تفکیک‌پذیر باشد، آن‌گاه τ^* نیز تفکیک‌پذیر است.

د. اگر τ انبوه باشد، آن‌گاه τ^* نیز انبوه است.

ه. اگر τ شدیداً ناهم‌بند انبوه باشد، آن‌گاه τ^* شدیدا ناهم‌بند است.

اثبات. الف. بدیهی است.

ب. فرض کنیم $V \subseteq X$ نسبت به τ^* هم باز و هم بسته باشد. در این‌صورت بنا بر لم ۳.۳، $V = \bigcup_{i\in I} D_i \cap U_i$ که در آن D_i یک زیرمجموعه باز چگال در X، نسبت به τ^* است و $U_i \in \tau$ برای هر $i \in I$. پس می‌توان نوشت:

$$\bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{i\in I} \mathrm{cl}_{\tau^*}(D_i \cap U_i) \subseteq \mathrm{cl}_{\tau^*} V = V \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

در نتیجه $V = \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$. بنابراین V نسبت به τ نیز هم باز و هم بسته است و در نتیجه (X, τ) ناهم‌بند خواهدبود که یک تناقض است.

ج. فرض کنیم D یک زیرمجموعه چگال شمارا در (X, τ) باشد. در این‌صورت توپولوژی تولید شده به‌وسیله $\{D \cap O : O \in \tau\}$ یک توپولوژی تفکیک‌پذیر است که در آن D زیرمجموعه چگال شمارای باز است. بنابراین D در هر گسترش پایای نوع دوم آن چگال شمارای باز می‌ماند. در نتیجه عضو ماکسیمال Γ_2 نیز تفکیک‌پذیر است.

د. اگر $x \in X$، یک نقطه تنها باشد، آن‌گاه $\{x\} = D \cap O$ برای یک مجموعه τ-چگال D و $O \in \tau$ که یک تناقض است.

ه. فرض کنیم U در τ^* باز باشد. در این‌صورت $\mathrm{Cl}_{\tau^*} U$ شامل U و نقاطی از مرز U است. چون τ^* فضای زیرماکسیمال است، پس مرز U گسسته بوده و در نتیجه $\mathrm{Cl}_{\tau^*} U$ باز است. پس τ^* شدیداً گسسته است.

□

ملاحظه **۱۰.۳**. توجه به این نکته ضروری است که با استفاده از تکنیک‌های گسترش پایای نوع ۲ یا گسترش پایای نوع ۳ نمی‌توان به یک فضای زیرماکسیمال منظم دست یافت، اگر فضای اصلی خود زیرماکسیمال نباشد؛ چه فضای اصلی منظم باشد و چه نباشد. برای توضیح این مسئله، فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژی باشد و τ' یک گسترش پایای اکید از نوع ۳ آن باشد. همچنین فرض کنیم $U \in \tau' \setminus \tau$ و $F = X \setminus U$. اگر τ' منظم باشد، برای هر $x \in U$ مجموعه‌های باز U_x و V_x در τ' وجود دارند، به‌گونه‌ای که $x \in U_x$، $F \subseteq V_x$ و $U_x \cap V_x = \emptyset$. طبق فرض، مجموعه‌های باز G_x و H_x در τ نیز وجود دارند به‌طوری‌که $G_x \supseteq U_x$، $H_x \supseteq V_x$ و $G_x \cap H_x = \emptyset$. بنابراین، برای هر $x \in U$ مجموعه‌ای مانند $H_x \in \tau$ وجود دارد که در آن $H_x \subseteq U$ است. این امر تنها در صورتی ممکن است که U در τ باز باشد، که این یک تناقض است.

در پایان، بر خود لازم می‌دانیم از داوران گرانقدر به‌سبب مطالعه دقیق و نظرات ارزنده و سازنده‌شان که موجب بهبود کیفیت مقاله شد، صمیمانه سپاسگزاری کنیم.

فهرست منابع

[1] Anderson, D.R., 1965. On connected irresolvable Hausdorff spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16(2), pp.463–466.

[2] Arhangel'skii, A.V. and Collins, P.J., 1995. On submaximal spaces. *Topology and its Applications*, 64(3), pp.219–241.

[3] Bourbaki, N., 1961. *Topologie générale*, 3rd ed. Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1142. Hermann, Paris.

[4] Ceder, J.G., 1961. Some generalizations of metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 11(1), pp.105–125.

[5] Gillman, L. and Jerison, M., 1960. *Rings of continuous functions*. D. Van Nostrand Co., New York.

[6] Hewitt, E., 1943. A problem of set-theoretic topology. *Duke Mathematical Journal*, 10(2), pp.309–333.

[7] Karavan Jahromi, M. and Watson, S., 2003. Enlargement topology techniques, submaximal and non ω-resolvable spaces. Unpublished manuscript.

[8] Padmavally, K., 1953. An example of a connected irresolvable Hausdorff space. *Duke Mathematical Journal*, 20(4), pp.513–520.

[9] van Douwen, E.K., 1993. Applications of maximal topologies. *Topology and its Applications*, 51(2), pp.125–240.

Some specific extensions of topologycal spaces

Seyedeh Somayeh Mousavi[(1)] [4] and Mehrdad Karavan jahromi[(2)]

[(1)] Department of Mathematics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran

[(2)] Department of Mathematics, Faculty of Intelligent Systems Engineering and Data Science, Persian Gulf University, Bushehr, Iran

Communicated by: Ali Rezaei Aliabad

Received: 30 May 2024 Accepted: 9 September 2025

Abstract: In this paper, certain types of topological extensions are considered, in which the Hausdorff, regular, and Tychonoff properties are preserved, or the extension results in a Tychonoff (regular) space that is ω-irresolvable. We introduce $\mathcal{C}$-simple and splitting extensions. These extensions preserve the first and second countability. Moreover, using a $\mathcal{C}$-simple extension, we show that every dense-in-itself Tychonoff space has a strongly ω-irresolvable dense-in-itself Tychonoff extension. Within the classes of T_1, Hausdorff, regular, or Tychonoff spaces, maximal first-countable and maximal second-countable spaces are irresolvable. We also prove that a topological space is ω-resolvable if and only if τ has a $\mathcal{C}$-simple extension. Furthermore, we study extensions that are submaximal and preserve key properties such as the Hausdorff condition, connectedness, being dense-in-itself, and extreme disconnectedness.

Keywords: Stable extension, $\mathcal{C}$-simple stable extension, Splitting extension, Resolvability, Submaximal space.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[4]Corresponding author

E-mail addresses: (M. Namdari) Smousavi@mehr.pgu.ac.ir (F. Author), Mkaravan@pgu.ac.ir