مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۶۷–۸۷

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.49384.2365

آنالیز وجود جواب معادلات دیفرانسیل غیرخطی ترکیبی شامل مشتق کوانتومی کسری

حمیدرضا صاحبی[۱] [۱]، محمداسماعیل سامعی[۲]

[۱] گروه ریاضی، واحد آشتیان، دانشگاه آزاد اسلامی، آشتیان، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران

دبیر مسئول: محسن زیوری رضاپور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۱۰

چکیده: در این مقاله به بررسی وجود جواب برای رده جدیدی از معادلات دیفرانسیل غیرخطی هیبریدی شامل مشتق کسری از نوع کوانتومی کاپوتو پرداخته می‌شود. با بهره‌گیری از ساختار هیبریدی این معادلات و ویژگی‌های خاص مشتق کسری کوانتومی، چارچوبی تحلیلی ارائه شده است که شرایط کافی برای تضمین وجود جواب را فراهم می‌کند. ابزار اصلی اثبات، قضیه نقطه ثابت پترشین است که با استفاده از آن، معیارهای لازم بر اساس خواص فضاهای باناخ و اپراتورهای فشرده-پیوسته به‌دست آمده است. همچنین، چند مثال تحلیلی ارائه شده که نشان می‌دهد مدل پیشنهادی و شرایط وجود جواب به‌طور مؤثری قابل تحقق هستند. این مثال‌ها علاوه بر روشن‌سازی مراحل به‌کارگیری روش، اعتبار نتایج نظری به‌دست آمده را در زمینه کاربردی نیز تأیید می‌کنند. نتایج این پژوهش می‌تواند به‌عنوان پایه‌ای برای توسعه مطالعات بعدی در زمینه تحلیل کیفی و عددی معادلات دیفرانسیل کسری با ساختارهای پیچیده به کار گرفته شود.

واژه‌های کلیدی: حسابان کوانتومی، مشتق کوانتوم کاپوتو، اندازه نافشردگی، قضیه نقطه ثابت پترشین، معادلات غیرخطی.

رده‌بندی ریاضی: 47H09; 47H10

[۱] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: sahebi.aiau.ac.ir@gmail.com

۱ مقدمه

در سال ۱۹۳۰ میلادی، مفهوم اندازه نافشردگی که توسط کوراتسکی (Kuratowski) معرفی گردید، به عنوان ابزاری قدرتمند در آنالیز تابعی بکار گرفته شد. این مفهوم به محققین امکان بررسی خواص اپراتورهای غیرفشرده را می‌دهد. همچنین نقش بسزایی در اثبات و مطالعه وجود جواب‌های معادلات انتگرالی و دیفرانسیل غیرخطی ایفا می‌نماید. این مفهوم به دلیل قابلیت در کنترل رفتار عملگرهای نافشرده، ابزاری موثر در زمانی است که اصول فشردگی نتوان استفاده نمود.

در سال ۱۹۵۵، داربو (Darbo) از مفهوم اندازه نافشردگی برای تعمیم قضیه شاودر در مورد وجود نقطه ثابت استفاده نمود. این ایده به ویژه برای حل معادلات انتگرالی و وجود جواب آنها با عملگرهای غیرفشرده کاربرد دارد. یکی از تعمیم‌های قضیه داربو، قضیه پترشین (Petryshyn) می‌باشد که برای بررسی وجود جواب معادلات انتگرالی و اپراتورهای غیرفشرده بکار می‌رود. در حالی که قضیه داربو نیازمند بررسی اندازه نافشردگی برای تصویر یک زیرمجموعه بسته و کراندار از یک فضای باناخ می‌باشد، قضیه پترشین تنها به بررسی برخی زیرمجموعه‌ها که شرایط اندازه نافشردگی را برآورده می‌کنند، را بررسی می‌کند. حسابان کوانتومی که تحت عنوان q-حسابان نیز شناخته شده‌اند، یکی از موضوعات کاربردی در ریاضی است که در آن با استفاده از تعریف جایگزین، از حد تابع در تعریف مشتق معمولی استفاده نمی‌شود. هم‌چنین این ویژگی ارتباطی بین علوم ریاضی و فیزیک برقرار می‌کند. سابقه این موضوع به ریاضیدان معروف اویلر برمی‌گردد. اما اولین بار در سال ۱۹۱۰ جکسون مفهوم q-مشتق و q-انتگرال را بیان کرد [۲۲]. از جمله کاربردهای حسابان کوانتومی کسری می‌توان به نظریه اعداد و ترکیبیات، چند جمله‌ای‌های متعامد، نظریه توابع هندسی و موضوعاتی در فیزیک مانند مکانیک، نظریه نسبیت و نظریه کوانتوم اشاره کرد [۸، ۹، ۱۴، ۱۷، ۱۹-۲۱، ۲۵، ۳۰، ۳۱].

حسابان کوانتومی کسری یا q-حسابان کسری، ایده q-مشتق و q-انتگرال را برای مرتبه غیرصحیح تعمیم می‌دهد. این موضوع را می‌توان در آثار السلام (Al-Salam) و آگاروال (Agarwal) نگریست [۲، ۶]. تاریبون (Taribon) و تویاس (Ntouyas) ایده q-حسابان را در بازه‌های متناهی بیان کرده‌اند [۲۷، ۳۴]. آنها q-مشتق کسری و q-انتگرال ریمان-لیوویل روی بازه بسته $[\tau_1, \tau_2]$ معرفی کردند [۳۵]. در سال ۲۰۱۰، داگ و همکاران در [۱۳] وجود جواب برای دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را مورد بررسی قرار دادند:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u(t)}{\mathbb{z}(t,u(t))}\right) = \Omega\big(t,u(t)\big), & t \in J_\circ = [t, t+a], \\ u(t_\circ) = u_\circ, & u_\circ \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

پس از آن، ژائو و همکارانش در [۳۶] به بررسی و تحلیل وجود جواب q-انتگرال ریمان-لیوویل

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}^{q}_{\circ+}\left(\frac{u(t)}{\mathbb{z}(t,u(t))}\right) = \Omega\big(t,u(t)\big), & t \in \Upsilon_\circ := [\circ, T], \\ u(t_\circ) = \circ, \end{cases}$$

روی بازه بسته $[\circ, T]$ پرداختند. در سال ۲۰۲۳، داس و همکارانش [۱۲] با بکارگیری قضیه داربو و اندازه نافشردگی روشی تحلیلی به منظور وجود جواب برای یک معادله دیفرانسیل کسری ترکیبی ارائه دادند:

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}^{q}\left(\frac{L(\varrho)}{\mathbb{z}(\varrho,L(\varrho))}\right) = \Omega\big(\varrho,L(\varrho)\big), & q \in (\circ,1), \varrho \in \Upsilon_\circ, \\ L(\circ) = \circ. \end{cases}$$

در این پژوهش، براساس نتایج حاصل از مقالات مذکور، به بررسی و تحلیل در وجود جواب برای یک دسته معادله دیفرانسیل کوانتومی ترکیبی شامل q-مشتق کسری کاپوتو و q-انتگرال کسری ریمان-لیوویل، به صورت

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}^{\alpha}_{q}\left[\frac{u(t)-\mathbb{z}\Big(t,u(\eta_1(t)),\sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}^{\beta_i}_{q}\mathbb{v}_i(t,u(\eta_2(t)))\Big)}{\mathbb{g}(t,u(\eta_3(t)))}\right] = \Omega\left(t,u\left(\eta_4(t)\right), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}^{\gamma}_{q}u(t)\right), \qquad (۱.۱)$$

برای $t \in \Upsilon_\circ$، $T = 1$ و $q \in (\circ,1)$، می‌پردازیم، که در آن $\circ < \alpha < 1$، $\gamma > \circ$، $\beta_i > \circ$،

$$i \in \mathbb{N}_m = \Big\{1, 2, \ldots, m\Big\},$$

که در آن $\mathbb{z} \in C\left(\Upsilon_{\circ} \times \mathbb{R}^{\mathsf{r}}\right)$، $\mathbb{g} \in C\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{\circ\}\right)$، $\mathbb{v} \in C\left(\mathbb{R}\right)$ به طوری که $\mathbb{v}_i(\circ,\circ) = \circ$، $\Omega \in C\left(\Upsilon_{\circ} \times \mathbb{R}^{\mathsf{r}}\right)$ و $\eta_j : \Upsilon_{\circ} \to \Upsilon_{\circ}$ توابعی با ویژگی‌های مشخص، در نظر گرفته می‌شوند.

مدل پیشنهادی شامل مشتق کسری از نوع q-کاپوتو با مرتبه α و عملگر انتگرال ریمان-لیوویل کسری ${}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q$ و ورودی‌ها به صورت تابعی از زمان $u(\eta_i(t))$ می‌باشد. هدف از بکارگیری ساختار ترکیبی مذکور، فراهم نمودن الگویی است که هم ویژگی‌های حافظه‌داری کسری را دارا باشد و هم امکان تغییر مقیاس زمانی را از طریق پارامتر q فراهم نماید. همچنین با تنظیم پارامترهای α, β_i, γ می‌توان به طیف وسیعی از رفتارهای الگو دست یافت. از سویی وجود چند پارامتر کسری در کنار پارامتر q سبب می‌گردد تا اثبات یکتایی، تحلیل پایداری پیچیده‌تر و حل عددی آن در زمان طولانی انجام گیرد. لذا در این تحقیق به بررسی وجود جواب برای مدل (۱.۱) پرداخته خواهد شد.

مطالب این پژوهش به ترتیب زیر ارائه شده‌اند: در بخش ۲ برخی از مفاهیم مقدماتی و لم‌های مورد نیاز در ارتباط با حسابان کوانتومی، q-حسابان کسری و برخی قضایای مورد نیاز در بخش های آتی بیان می‌گردد. در بخش ۳ به بررسی و تحلیل در وجود جواب برای معادله پیشنهادی (۱.۱) با کمک قضیه نقطه ثابت پترشین پرداخته خواهد شد. در بخش ۴ این نتایج در قالب مثال‌های کاربردی به صورت عددی نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتیجه گیری دستاوردهای مقاله در بخش ۵ ارائه شده است.

۲ تعاریف و مقدمات مورد نیاز

در این بخش، تعاریف و قضایای مورد نیاز برای بدست آوردن نتایج اصلی بیان می‌شوند. عدد کوانتومی $[\nu]_q$ و تابع توانی $\left(\nu - \grave{\nu}\right)^k$ برای $\nu, \grave{\nu} \in \mathbb{R}$ به صورت

$$[\nu]_q = \frac{\mathsf{1}-q^{\nu}}{\mathsf{1}-q} = q^{\nu-\mathsf{1}} + q^{\nu-\mathsf{2}} + \cdots + q + \mathsf{1},$$

و

$$\left(\nu - \grave{\nu}\right)^{(k)} = \begin{cases} \mathsf{1}, & k = \circ, \\ \prod_{j=\circ}^{k-\mathsf{1}} \left(\nu - \grave{\nu} q^j\right), & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

تعریف می‌شوند [۷]. اگر $k = l \in \mathbb{R}$ باشد، آنگاه

$$\left(\nu - \grave{\nu}\right)^{(l)} = \nu^l \prod_{j=\circ}^{\infty} \frac{\nu - \grave{\nu} q^j}{\nu - \grave{\nu} q^{l+j}}, \qquad \nu \neq \circ.$$

به علاوه، وقتی که $\grave{\nu} = \circ$ آنگاه $\nu^{(l)} = \nu^l$ می‌باشد.

تعریف ۱.۲ ([۱]). مشتق کوانتومی (q-مشتق) برای تابع $u(t)$، روی بازه $[\circ, b]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\left(\mathscr{D}_q u\right)(t) = \frac{u(t)-u(qt)}{(\mathsf{1}-q)t}, \quad t \neq \circ, \qquad \left(\mathscr{D}_q u\right)(\circ) = \lim_{\nu \to \circ} \left(\mathscr{D}_q u\right)(t), \tag{۱.۲}$$

که به q-مشتق جکسون *(Jackson)* معروف است. به کمک این تعریف روابط

$$\left(\mathscr{D}_q^{\circ} u\right)(t) = u(t), \qquad \left(\mathscr{D}_q^{n} u\right)(t) = \mathscr{D}_q\left(\mathscr{D}_q^{n-\mathsf{1}} u\right)(t),$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار هستند [۱]. همچنین انتگرال کوانتومی (q-انتگرال) برای تابع $u(t)$، روی بازه $[\circ, b]$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\left(\mathscr{I}_q u\right)(t) = \int_{\circ}^{t} u(\lambda)\, \mathrm{d}_q\lambda = t(\mathsf{1}-q) \sum_{\grave{\imath}=\mathsf{1}}^{\infty} u\left(tq^{\grave{\imath}}\right) q^{\grave{\imath}}, \qquad t \in [\circ, b]. \tag{۲.۲}$$

در حالتی که $a \in [0, b]$ انتگرال تابع u از a تا b به کمک تعریف

$$\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}_q t = \int_0^b u(t)\,\mathrm{d}_q t - \int_0^a u(t)\,\mathrm{d}_q t, \tag{۳.۲}$$

حاصل می‌شود [۲۹].

تعریف ۲.۲ ([۱۵]). انتگرال کسری ریمان-لیوویل (q-ریمان-لیوویل) برای تابع u، روی بازه $[0, b]$ به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma} u\right)(t) = \begin{cases} u(t), & \gamma = 0, \\ \int_0^t \frac{(t-q\lambda)^{(\gamma-1)}}{\Gamma_q(\gamma)} u(\lambda)\,\mathrm{d}_q\lambda, & \gamma > 0, \end{cases}$$

اگر انتگرال برای $\gamma > 0$ وجود داشته باشد، که درآن تابع گاما کوانتومی (q-گاما) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_q(t) = \tfrac{(1-q)^{(t-1)}}{(1-q)^{t-1}}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}.$$

همچنین برای $\gamma, \gamma_0 > 0$ داریم $\left({}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma_0}\kappa\right)(\nu) = \left({}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma+\gamma_0}\kappa\right)(\nu)$ [۱۵]. علاوه بر آن، برای $l > -1$ روابط زیر از تعریف حاصل می‌شوند:

$${}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma}\nu^l = \tfrac{\Gamma_q(l+1)}{\Gamma_q(\gamma+l+1)}\nu^{\gamma+l}, \qquad \left({}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma}1\right)(\nu) = \tfrac{1}{\Gamma_q(\gamma+l+1)}\nu^{\gamma}, \ (\nu > 0).$$

تعریف ۳.۲ ([۴]). فرض کنیم $n - 1 < \gamma < n$ با $n = [\gamma] + 1$ باشد. در این صورت مشتق کسری کوانتومی کاپوتو از مرتبه $\gamma \geq 0$ برای تابع $u \in C^{(n)}([0, b])$ از رابطه

$$\left({}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{\gamma} u\right)(t) = \int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(n-\gamma-1)}}{\Gamma_q(n-\gamma)} \mathscr{D}_q^n u(\lambda)\,\mathrm{d}_q\lambda,$$

نتیجه می‌شود، اگر انتگرال موجود باشد.

مطابق با تعریف برای $l > -1$ و به ازای $t > 0$، می‌توان نوشت:

$${}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{\gamma} t^l = \tfrac{\Gamma_q(l+1)}{\Gamma_q(l-\gamma+1)} t^{l-\gamma}, \qquad \left({}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{\gamma}1\right)(t) = 0.$$

لم ۴.۲ ([۴]). فرض کنید $n - 1 < \gamma < n$ باشد. در این صورت $\left({}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{\gamma}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma} u\right)(t) = u(t)$ و

$$\left({}^{\mathrm{RL}}\mathscr{J}_q^{\gamma}\,{}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{\gamma} u\right)(t) = u(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \tfrac{t^j}{\Gamma_q(j+1)} \left({}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{j} u\right)(0).$$

لم ۵.۲ ([۲۹]). برای $\beta > 0$ داریم:

$$\int_0^t (t - q\lambda)^{(\beta-1)}\,\mathrm{d}_q\lambda = \tfrac{t^{(\beta)}}{[\beta]_q}.$$

لم ۶.۲ ([۱۱]). فرض کنید $t_1, t_2 \in \Upsilon_0$ باشند به طوری که $t_1 < t_2$ باشد. در این صورت اگر $\alpha \geq 1$ باشد، آنگاه

$$t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} \leq \alpha(t_2 - t_1),$$

و نیز اگر $0 < \alpha < 1$ انتخاب شود، آنگاه، نابرابری $t_2^{\alpha} - t_1^{\alpha} \leq (t_2 - t_1)^{\alpha}$، برقرار است.

در مقاله حاضر، Σ یک فضای باناخ در میدان $\Sigma \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ است. به‌علاوه،

$$\bar{B}_\rho = \Big\{u \in \Sigma \ : \ \|u\| \leq \rho\Big\},$$

گوی بسته و $\partial\bar{B}_\rho = \big\{u \in \Sigma \ : \ \|u\| = \rho\big\}$ مرز کره‌ای به مرکز $\circ$ و شعاع $\rho > \circ$ است.

تعریف ۷.۲ ([۲۴]). اگر $\mathcal{P}$ یک زیرمجموعه کران‌دار از فضای Σ باشد. آنگاه اندازه نافشردگی کوراتسکی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathfrak{m}_{\mathrm{K}}(\mathcal{P}) = \inf\Big\{\varepsilon > \circ \ : \ \mathcal{P} \text{ به‌وسیله تعداد متناهی، مجموعه‌های با قطر کم‌تر از } \varepsilon \text{ پوشیده می‌شود}\Big\}$$

تعریف ۸.۲ ([۱۶]). همچنین، اندازه نافشردگی هاسدورف به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P}) = \inf\Big\{\varepsilon > \circ \ : \ \text{یک } \varepsilon\text{- شبکه متناهی برای } \mathcal{P} \text{ در } \Sigma \text{ موجود است.}\Big\}$$

که در آن ε - شبکه متناهی یعنی $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_m\} \subset \Sigma$ موجود باشد که گوی‌های

$$B_\varepsilon\big(\Sigma; u_۱\big),\ B_\varepsilon\big(\Sigma; u_۲\big),\ \ldots,\ B_\varepsilon\big(\Sigma; u_m\big)$$

مجموعه $\mathcal{P}$ را بپوشانند.

اندازه نافشردگی‌های ذکر شده فوق، برای هر زیرمجموعه کران‌دار $\mathcal{P}$ در Σ در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P}) \leq \mathfrak{m}_{\mathrm{K}}(\mathcal{P}) \leq ۲\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P}).$$

قضیه ۹.۲ ([۲۸]). اگر Σ یک فضای باناخ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subset \Sigma$ باشند، در این صورت:

۱) $\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = \max\big\{\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P}), \mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{Q})\big\}$؛

۲) $\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \leq \mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P}) + \mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{Q})$؛

۳) $\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\lambda\mathcal{P}) = \mid \lambda \mid \mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P})$؛

۴) $\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P}) \leq \mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{Q})$ برای $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$؛

۵) $\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}\big(\bar{\mathrm{co}}\mathcal{P}\big) = \mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P})$؛

۶) $\mathfrak{m}_{\mathrm{H}}(\mathcal{P}) = \circ$ اگر و فقط اگر $\mathcal{P}$ دارای بستار فشرده باشد.

در این تحقیق، فضای باناخ مورد مطالعه $\Sigma = C(\Upsilon_\circ, \mathbb{R})$ تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[\circ, ۱]$ با نرم استاندارد

$$\|u\| = \sup\Big\{|u(t)| \ : \ t \in \Upsilon_\circ\Big\},$$

در نظر گرفته می شود. همچنین، مدول پیوستگی برای تابع $u \in C(\Upsilon_\circ)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_{\Upsilon_\circ}(u, \rho) = \sup\Big\{\big|u(t) - u(\grave{t})\big| \ : \ \big|t - \grave{t}\big| \leq \rho\Big\}.$$

واضح است با توجه به فرض پیوستگی یکنواخت u روی $\Upsilon_\circ$، وقتی $\rho \to \circ$ آنگاه $\omega_{\Upsilon_\circ}(u, \rho) \to \circ$.

قضیه ۱۰.۲ ([۱۶]). فرض کنیم $\Sigma = C\big(\Upsilon_\circ\big)$. برای هر زیرمجموعه کران‌دار $\mathcal{P}$ در Σ اندازه نافشردگی ۸.۲ معادل است با

$$\mathfrak{m}_H(\mathcal{P}) = \lim_{\rho \to \circ} \sup_{u \in \mathcal{P}} \omega(u, \rho) \qquad (۴.۲)$$

تعریف ۱۱.۲ ([۲۶]). فرض کنیم $\nabla : \Sigma \to \Sigma$ یک نگاشت پیوسته باشد. دراین‌صورت، ∇ را یک λ -انقباض مجموعه‌ای می‌نامند هرگاه برای هر $A \subset \Sigma$ کران‌دار، $\nabla(A)$ نیز کران‌دار باشد و

$$\mathfrak{m}_H(\nabla A) \leq \lambda \mathfrak{m}_H(A), \quad ۰ < \lambda < ۱.$$

به‌علاوه ∇ را چگال می‌نامند هرگاه به ازای هر $\mathfrak{m}_H(A) > ۰$ داشته باشیم:

$$\mathfrak{m}_H(\nabla A) < \mathfrak{m}_H(A).$$

قضیه ۱۲.۲ (قضیه پترشین [۲۸]). فرض کنیم $\bar{B}_\rho$ یک گوی بسته حول مرکز در فضای باناخ Σ باشد. همچنین فرض کنیم $\nabla : \bar{B}_\rho \to \Sigma$ یک نگاشت چگال و پیوسته باشد که در شرط مرزی زیر صدق می‌کند اگر برای $u \in \partial B_\rho$ داشته باشیم $\nabla(u) = \lambda u$ آنگاه $\lambda \leq ۱$ در این صورت، مجموعه نقاط ثابت ∇ در $\bar{B}_\rho$ ناتهی است.

۳ بررسی وجود جواب معادله (۱.۱)

در این بخش به بررسی و اثبات وجود جواب برای معادله دیفرانسیل دیفرانسل ترکیبی کوانتومی شامل مشتق مرتبه کسری تعریف شده مطابق با الگوی کاپوتو (۱.۱)، با توجه به شرایط حاکم بر معادله خواهیم پرداخت.

در این راستا، نیاز به ارائه مفروضات زیر هستیم:

(۱W) $\mathbb{z} \in C\big(\Upsilon_۰ \times \mathbb{R}^۲\big)$، $\mathbb{g} \in C\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}\backslash\{۰\}\big)$، $\mathbb{v}_i(۰,۰) = ۰$ و $\Omega \in C\big(\Upsilon_۰ \times \mathbb{R}^۲\big)$؛

(۲W) ثابت‌های نا منفی $l_{۱,\mathbb{z}}$، $l_{۲,\mathbb{z}}$، $l_{۳,\Omega}$، $l_{۴,\Omega}$ و $l_{۵,\mathbb{g}}$ موجود باشند به طوری که برای هر $t \in \Upsilon_۰$ با شرط اینکه

$$\Delta := \frac{l_{۵,\mathbb{g}} S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} + l_{۱,\mathbb{z}} < ۱, \tag{۱.۳}$$

داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
&\big|\mathbb{z}(t,x,y) - \mathbb{z}(t,\hat{x},\hat{y})\big| \leq l_{۱,\mathbb{z}}|x-\hat{x}| + l_{۲,\mathbb{z}}|y-\hat{y}|,\\
&\big|\Omega(t,x,y) - \Omega(t,\hat{x},\hat{y})\big| \leq l_{۳,\Omega}|x-\hat{x}| + l_{۴,\Omega}|y-\hat{y}|,\\
&\big|\mathbb{g}(t,x) - \mathbb{g}(t,\hat{x})\big| \leq l_{۵,\mathbb{g}}|x-\hat{x}|;
\end{aligned}$$

(۳W) عدد حقیقی $\rho \geq ۰$ وجود داشته باشد به طوری که در شرط زیر صدق نماید

$$\Delta' := \sup\left\{\frac{S(\mathbb{g})\, S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} + S(\mathbb{z})\right\} \leq \rho, \tag{۲.۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
S(\Omega) &= \sup\Big\{\big|\Omega(s,u,\hat{u})\big| \;:\; s \in \Upsilon_۰,\, u,\hat{u} \in [-\rho,\rho]\Big\},\\
S(\mathbb{g}) &= \sup\Big\{\big|\mathbb{g}(s,u)\big| \;:\; s \in \Upsilon_۰,\, u \in [-\rho,\rho]\Big\},\\
S(\mathbb{v}_i) &= \sup\Big\{\big|\mathbb{v}_i(s,u)\big| \;:\; s \in \Upsilon_۰,\, u \in [-\rho,\rho]\Big\},\\
S(\mathbb{z}) &= \sup\left\{\big|\mathbb{z}(s,u,\hat{u})\big| \;:\; s,u \in \Upsilon_۰,\, |\hat{u}| \leq \sum_{i=۱}^{m} \frac{S(\mathbb{v}_i)}{\Gamma_q(\beta_i+۱)}\right\}.
\end{aligned}$$

ملاحظه ۱.۳. با بکارگیری عملگر ${}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\alpha}$ از دو طرف (۱.۱)، لم ۴.۲ و اعمال شرط مرزی به سادگی می‌توان نشان داد که معادله (۱.۱)، معادل است با

$$u(t) = \mathbb{g}\big(t, u(\eta_3(t))\big) \int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u(\eta_4(s)), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(s)\right) \mathrm{d}_q\lambda + \mathbb{z}\big(t, u\big(\eta_1(t)\big), \sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t, u(\eta_2(t))\big)\big).$$

قضیه ۲.۳. اگر شرایط W۱)، W۲) و W۳) برقرار باشند، آنگاه معادله (۱.۱)، حداقل دارای یک جواب $u = u(t)$ در فضای باناخ $\Sigma = C\big(\Upsilon_0\big)$ است.

اثبات. قضیه ۱۲.۲ نقش اساسی در اثبات بررسی وجود جواب معادلات کوانتومی ترکیبی (۱.۱) ایفا می‌کند. به این منظور، اثبات در سه گام انجام می‌پذیرد. ابتدا عملگر $T : B_\rho \to \Sigma$ را به صورت

$$(\nabla u)(t) = \mathbb{g}\big(t, u(\eta_3(t))\big) \int_0^t \tfrac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(s, u(\eta_4(s)), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(s)\right) \mathrm{d}_q\lambda + \mathbb{z}\left(t, u\big(\eta_1(t)\big), \sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t, u(\eta_2(t))\big)\right),$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که نگاشت ∇ خوش تعریف است.

گام اول: عملگر ∇ در گوی B_ρ پیوسته است. فرض کنیم $\epsilon > 0$ و $u, \hat{u} \in B_\rho$ به طوری که $\|u - \hat{u}\| \leq \epsilon$ آن گاه برای $t \in \Upsilon_0$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\big|(\nabla u)(t) - (\nabla \hat{u})(t)\big| \\
&\quad= \Big|\mathbb{g}\big(t, u(\eta_3(t))\big) \int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u(\eta_4(\lambda)), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\
&\qquad+ \mathbb{z}\left(t, u\big(\eta_1(t)\big), \sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t, u(\eta_2(t))\big)\right) \\
&\qquad- \mathbb{g}\big(t, \hat{u}(\eta_3(t))\big) \int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, \hat{u}\big(\eta_4(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} \hat{u}(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\
&\qquad- \mathbb{z}\left(t, \hat{u}\big(\eta_1(t)\big), \sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t, \hat{u}(\eta_2(t))\big)\right)\Big| \\
&\quad\leq \Big|\mathbb{g}\big(t, u(\eta_3(t))\big) \int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_4(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\
&\qquad- \mathbb{g}\big(t, \hat{u}(\eta_3(t))\big) \int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, \hat{u}\big(\eta_4(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} \hat{u}(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda\Big| \\
&\qquad+ \Big|\mathbb{z}\left(t, u\big(\eta_1(t)\big), \sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t, u(\eta_2(t))\big)\right) \\
&\qquad- \mathbb{z}\left(t, \hat{u}\big(\eta_1(t)\big), \sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t, \hat{u}(\eta_2(t))\big)\right)\Big| = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2.
\end{aligned}$$

اکنون تقریبی برای $\mathcal{I}_1$ و $\mathcal{I}_2$ بدست می‌آوریم. بنابراین

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &\le \left|\mathbb{g}\big(t,u(\eta_3(t))\big)-\mathbb{g}\big(t,\hat{u}(\eta_3(t))\big)\right| \\
&\quad\times\left|\int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}\Omega\left(\lambda,u(\eta_4(\lambda)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}u(\lambda)\right)\,\mathrm{d}_q\lambda\right| \\
&\quad+\left|\mathbb{g}\big(t,\hat{u}(\eta_3(t))\big)\right|\left|\int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}\Omega\left(\lambda,u\big(\eta_4(s)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}u(\lambda)\right)\,\mathrm{d}_q\lambda\right. \\
&\quad\left.-\int_0^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}\Omega\left(\lambda,\hat{u}\lambda(\eta_4(\lambda)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}\hat{u}(\lambda)\right)\,\mathrm{d}_q\lambda\right| \\
&\le \tfrac{l_{\mathbb{d},\mathbb{g}}\,t^{\alpha}S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+1)}\left|u\big(\eta_3(t)\big)-\hat{u}\big(\eta_3(t)\big)\right| \\
&\quad+\left|\mathbb{g}\big(t,\hat{u}(\eta_3(t))\big)\right|\int_0^t \tfrac{(t-qs)^{(\alpha-1)}}{\Gamma_q(\alpha)}\Big\{\Big|\Omega\left(\lambda,u\big(\eta_4(s)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}u(\lambda)\right) \\
&\quad-\Omega\left(\lambda,\hat{u}\big(\eta_4(\lambda)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}u(\lambda)\right)\Big| \\
&\quad+\Big|\Omega\left(\lambda,\hat{u}\big(\eta_4(\lambda)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}u(\lambda)\right)-\Omega\left(\lambda,\hat{u}\big(\eta_4(\lambda)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}\hat{u}(\lambda)\right)\Big|\Big\}\,\mathrm{d}_q\lambda \\
&\le \tfrac{l_{\mathbb{d},\mathbb{g}}\,t^{\alpha}S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+1)}\left|u\big(\eta_3(t)\big)-\hat{u}\big(\eta_3(t)\big)\right|+\tfrac{S(\mathbb{g})l_{3,\Omega}\,t^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\left|u\big(\eta_4(t)\big)-\hat{u}\big(\eta_4(t)\big)\right| \\
&\quad+\tfrac{S(\mathbb{g})l_{4,\Omega}\,t^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\left|\Omega\left(\lambda,u\big(\eta_4(\lambda)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}u(\lambda)\right)-\Omega\left(\lambda,\hat{u}\big(\eta_4(\lambda)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}\hat{u}(\lambda)\right)\right| \\
&\le \tfrac{l_{\mathbb{d},\mathbb{g}}\,t^{\alpha}S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+1)}\|u-\hat{u}\|+\tfrac{S(\mathbb{g})l_{3,\Omega}\,t^{\alpha}}{\Gamma_q(\alpha+1)}\|u-\hat{u}\|+\tfrac{S(\mathbb{g})l_{4,\Omega}\,t^{\alpha}t^{\gamma}}{\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\gamma+1)}\|u-\hat{u}\|,
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_2 &\le \left|\mathbb{z}\left(t,u(\eta_1(t)\big),\sum_{i=1}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,u(\eta_2(t))\big)\right)\right. \\
&\quad\left.-\mathbb{z}\left(t,\hat{u}\big(\eta_1(t)\big),\sum_{i=1}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,u(\eta_2(t))\big)\right)\right| \\
&\quad+\left|\mathbb{z}\left(t,\hat{u}\big(\eta_1(t)\big),\sum_{i=1}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,u(\eta_2(t))\big)\right)\right. \\
&\quad\left.-\mathbb{z}\left(t,\hat{u}\big(\eta_1(t)\big),\sum_{i=1}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,\hat{u}(\eta_2(t))\big)\right)\right| \\
&\le l_{1,\mathbb{z}}\left|u\big(\eta_1(t)\big)-\hat{u}\big(\eta_1(t)\big)\right|+l_{2,\mathbb{z}}\left|\sum_{i=1}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,u(\eta_2(t))\big)\right. \\
&\quad\left.-\sum_{i=1}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,\hat{u}(\eta_2(t))\big)\right| \\
&\le l_{1,\mathbb{z}}\|u-\hat{u}\|+l_{2,\mathbb{z}}\sum_{i=1}^{m}\left|{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,u(\eta_2(t))\big)-{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,\hat{u}(\eta_2(t))\big)\right| \\
&\le l_{1,\mathbb{z}}\|u-\hat{u}\|+l_2\sum_{i=1}^{m}\tfrac{t^{\beta_i}}{\Gamma_q(\beta_i+1)}\omega_{\Upsilon_0}(\mathbb{v}_i,\epsilon) \\
&\le l_{1,\mathbb{z}}\|u-\hat{u}\|+l_{2,\mathbb{z}}\sum_{i=1}^{m}\tfrac{t^{\beta_i}}{\Gamma_q(\beta_i+1)}\omega_{\Upsilon_0}(\mathbb{v}_i,\epsilon)\,.
\end{aligned}
$$

مطابق با آنچه بدست آمد، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_۱ + \mathcal{I}_۲ \leq\ & l_{۵,\mathbb{g}} \frac{t^\alpha S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} \|u-\hat{u}\| + \frac{S(\mathbb{g}) l_{۳,\Omega} t^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+۱)} \|u-\hat{u}\| + \frac{S(\mathbb{g}) l_{۴,\Omega} t^\alpha t^\gamma}{\Gamma_q(\alpha+۱)\Gamma_q(\gamma+۱)} \|u-\hat{u}\| \\ & + l_{۱,\mathbb{z}} \|u-\hat{u}\| + l_{۲,\mathbb{z}} \sum_{i=۱}^{m} \frac{t^{\beta_i}}{\Gamma_q(\beta_i+۱)} \omega_{\Upsilon_\circ}\left(\mathbb{v}_i, \epsilon\right),\end{aligned}$$

که در آن

$$\omega_{\Upsilon_\circ}\left(\mathbb{v}_i, \epsilon\right) = \sup\Big\{ \big|\mathbb{v}_i(\lambda, u) - \mathbb{v}_i(\lambda, \hat{u})\big| \ :\ \lambda \in \Upsilon_\circ,\ u, \hat{u} \in [-\rho, \rho],\ |u-\hat{u}| \leq \epsilon \Big\}.$$

با اعمال سوپریمم از دو طرف نامساوی حاصل، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla \hat{u}\| \leq\ & \frac{l_{۵,\mathbb{g}} t^\alpha S(\Omega)}{\Gamma_۱(\alpha+۱)} \epsilon + \frac{S(\mathbb{g}) l_{۳,\Omega} t^\alpha}{\Gamma_q(\alpha+۱)} \epsilon + \frac{S(\mathbb{g}) l_{۴,\Omega} t^\alpha t^\gamma}{\Gamma_q(\alpha+۱)\Gamma_q(\gamma+۱)} \epsilon \\ & + l_{۱,\mathbb{z}} \|u-\hat{u}\| + l_{۲,\mathbb{z}} \sum_{i=۱}^{m} \frac{L^{\beta_i}}{\Gamma_q(\beta_i+۱)} \omega_{\Upsilon_\circ}\big(\mathbb{v}_i, \epsilon\big).\end{aligned}$$

از طرفی چون توابع $\mathbb{v}_i = \mathbb{v}_i(t,u)$ روی زیربازه فشرده $\Upsilon_\circ^۲ \times [-\rho, \rho]$ پیوسته یکنواخت هستند، لذا هنگامی که $\epsilon \to ۰$ خواهیم داشت $\omega_{\Upsilon_\circ}\big(\mathbb{v}_i, \epsilon\big) \to ۰$. بنابراین به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که عملگر ∇ در B_ρ پیوسته است.

گام دوم: عملگر ∇ در شرط چگال بودن، نسبت به اندازه μ تعریف شده، در رابطه (۴.۲) صدق می‌کند. در این راستا، ثابت دلخواه $\epsilon > ۰$ انتخاب می‌کنیم. فرض کنیم $u \in \mathcal{P}$ و $\mathcal{P}$ زیر مجموعه کرانداری از $\Sigma = C\big(\Upsilon_\circ\big)$ باشند و همچنین $t_۱, t_۲ \in \Upsilon_\circ$. بدون کاسته شدن از کلیت استدلال، فرض می‌کنیم که $t_۱ \leq t_۲$ و $t_۲ - t_۱ \leq \epsilon$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\big|(\nabla u)(t_۲) - (\nabla u)(t_۱)\big| \\ &\quad= \bigg| \mathbb{g}\big(t_۲, u(\eta_۳(t_۲))\big) \int_\circ^{t_۲} \frac{(t_۲ - qs)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\gamma u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\ &\qquad + \mathbb{z}\bigg(t_۲, u\big(\eta_۱(t_۲)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۲, u(\eta_۲(t_۲))\big)\bigg) \\ &\qquad - \mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big) \int_\circ^{t_۱} \frac{(t_۱ - qs)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\gamma u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\ &\qquad - \mathbb{z}\bigg(t_۱, u\big(\eta_۱(t_۱)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big)\bigg) \bigg| \\ &\quad\leq \bigg| \mathbb{g}\big(t_۲, u(\eta_۳(t_۲))\big) \int_\circ^{t_۲} \frac{(t_۲ - q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(s)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\gamma u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\ &\qquad - \mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big) \int_\circ^{t_۱} \frac{(t_۱ - q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(s)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\gamma u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \bigg| \\ &\qquad + \bigg| \mathbb{z}\bigg(t_۲, u\big(\eta_۱(t_۲)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۲, u(\eta_۲(t_۲))\big)\bigg) \\ &\qquad - \mathbb{z}\bigg(t_۱, u\big(\eta_۱(t_۱)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۱, u(\eta_۲(t_۱))\big)\bigg) \bigg| = \mathcal{I}_۳ + \mathcal{I}_۴.\end{aligned}$$

مجددا، تقریبی برای $\mathcal{I}_۳$ و $\mathcal{I}_۴$ بدست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_۳ &\leq \Big|\mathbb{g}\big(t_۲, u(\eta_۳(t_۲))\big) \int_۰^{t_۲} \tfrac{(t_۲-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\
&\quad - \Big|\mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big) \int_۰^{t_۲} \tfrac{(t_۲-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda\Big| \\
&\quad + \Big|\mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big) \int_۰^{t_۲} \tfrac{(t_۲-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda \\
&\quad - \mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big) \int_۰^{t_۱} \tfrac{(t_۱-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right) \mathrm{d}_q\lambda\Big| \\
&\leq \big|\mathbb{g}\big(t_۲, u(\eta_۳(t_۲))\big) - \mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big)\big| \\
&\quad \times \int_۰^{t_۲} \tfrac{(t_۲-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Big|\Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right)\Big| \mathrm{d}_q\lambda \\
&\quad + \big|\mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big)\big| \int_۰^{t_۲} \Big|\tfrac{(t_۲-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right)\Big| \mathrm{d}_q\lambda \\
&\quad - \int_۰^{t_۱} \Big|\tfrac{(t_۱-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right)\Big| \mathrm{d}_q\lambda \\
&\leq \Big[\big|\mathbb{g}\big(t_۲, u(\eta_۳(t_۲))\big) - \mathbb{g}\big(t_۲, u(\eta_۳(t_۱))\big)\big| \\
&\quad + \big|\mathbb{g}\big(t_۲, u(\eta_۳(t_۱))\big) - \mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big)\big|\Big] \\
&\quad \times \int_۰^{t_۲} \tfrac{(t_۲-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Big|\Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right)\Big| \mathrm{d}_q\lambda \\
&\quad + \big|\mathbb{g}\big(t_۱, u(\eta_۳(t_۱))\big)\big| \int_۰^{t_۲} \Big|\tfrac{(t_۲-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right)\Big| \mathrm{d}_q\lambda \\
&\quad - \int_۰^{t_۱} \Big|\tfrac{(t_۱-qs)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(\lambda)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma} u(\lambda)\right)\Big| \mathrm{d}_q\lambda \\
&\leq \big(l_{\mathbb{۵},\mathbb{g}} \big|u\big(\eta_۳(t_۲)\big) - u\big(\eta_۳(t_۱)\big)\big| + \omega_{\Upsilon_۰}(\mathbb{g}, \epsilon)\big) \tfrac{t_۲^{\alpha} S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} \\
&\quad + S(\mathbb{g}) \Big|\tfrac{t_۲^{\alpha} S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} - \tfrac{t_۱^{\alpha} S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}\Big| \\
&\leq \Big[l_{\mathbb{۵},\mathbb{g}} \omega\big(u, \omega(\eta_۳, \epsilon)\big) + \omega_{\Upsilon_۰}(\mathbb{g}, \epsilon)\Big] \tfrac{S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} + \tfrac{S(\mathbb{g})\, S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} \big|t_۲ - t_۱\big|^{\alpha},
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_۴ &\leq \Big|\mathbb{z}\Big(t_۲, u\big(\eta_۱(t_۲)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۲, u(\eta_۲(t_۲))\big)\Big) \\
&\quad - \mathbb{z}\Big(t_۲, u\big(\eta_۱(t_۲)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۱, u(\eta_۲(t_۱))\big)\Big)\Big| \\
&\quad + \Big|\mathbb{z}\Big(t_۲, u\big(\eta_۱(t_۲)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۱, u(\eta_۲(t_۱))\big)\Big) \\
&\quad - \mathbb{z}\Big(t_۲, u\big(\eta_۱(t_۱)\big), \sum_{i=۱}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t_۱, u(\eta_۲(t_۱))\big)\Big)\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\mathbb{z}\Big(t_{۲},u\big(\eta_{۱}(t_{۱})\big),\sum_{i=۱}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_{q}^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t_{۱},u(\eta_{۲}(t_{۱}))\big)\Big)\right.\\
&\left.-\,\mathbb{z}\Big(t_{۱},u\big(\eta_{۱}(t_{۱})\big),\sum_{i=۱}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_{q}^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t_{۱},u(\eta_{۲}(t_{۱}))\big)\Big)\right|\\
&\le l_{۲,\mathbb{z}}\left|\sum_{i=۱}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_{q}^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t_{۲},u(\eta_{۲}(t_{۲}))\big)-\sum_{i=۱}^{m}{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_{q}^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t_{۱},u(\eta_{۲}(t_{۱}))\big)\right|\\
&\quad+l_{۱,\mathbb{z}}\big|u\big(\eta_{۱}(t_{۲})\big)-u\big(\eta_{۱}(t_{۱})\big)\big|+\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon)\\
&\le l_{۲,\mathbb{z}}S\left(\mathbb{v}_i\right)\sum_{i=۱}^{m}\left|\int_{\circ}^{t_{۲}}\tfrac{(t_{۲}-q\lambda)^{(\beta_i-۱)}}{\Gamma_q(\beta_i)}\,\mathrm{d}_q\lambda-\int_{\circ}^{t_{۱}}\tfrac{(t_{۱}-q\lambda)^{(\beta_i-۱)}}{\Gamma_q(\beta_i)}\,\mathrm{d}_q\lambda\right|\\
&\quad+l_{۱,\mathbb{z}}\big|u\big(\eta_{۱}(t_{۲})\big)-u\big(\eta_{۱}(t_{۱})\big)\big|+\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon)\\
&\le l_{۲,\mathbb{z}}S(\mathbb{v}_i)\sum_{i=۱}^{m}\left|\tfrac{t_{۲}^{\beta_i}}{\Gamma_q(\beta_i+۱)}-\tfrac{t_{۱}^{\beta_i}}{\Gamma_q(\beta_i+۱)}\right|\\
&\quad+l_{۱,\mathbb{z}}\big|u\big(\eta_{۱}(t_{۲})\big)-u\big(\eta_{۱}(t_{۱})\big)\big|+\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon)\\
&\le l_{۲,\mathbb{z}}\sum_{i=۱}^{m}\tfrac{S(\mathbb{v})}{\Gamma_q(\beta_i+۱)}\big|t_{۲}-t_{۱}\big|+l_{۱,\mathbb{z}}\omega\big(u,\omega(\eta_{۱},\epsilon)\big)+\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon).
\end{aligned}
$$

مطابق با آنچه بدست آمد، داریم

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{۳}+\mathcal{I}_{۴}\le{}&\big(l_{\delta,\Omega}\omega\big(u,\omega(\eta_{۳},\epsilon)\big)+\omega_{\Upsilon_{\circ}}\left(\mathbb{g},\epsilon\right)\big)\,\tfrac{S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}+\tfrac{S(\mathbb{g})\,S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}\big|t_{۲}-t_{۱}\big|^{\alpha}\\
&+l_{۲,\mathbb{z}}\sum_{i=۱}^{m}\tfrac{S(\mathbb{v}_i)}{\Gamma_q(\beta_i+۱)}\big|t_{۲}-t_{۱}\big|+l_{۱,\mathbb{z}}\omega\big(u,\omega(\eta_{۱},\epsilon)\big)+\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon),
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon)&=\sup\Big\{|\mathbb{z}(s,x,u)-\mathbb{z}(\hat{s},x,u)|\ :\ |s-\hat{s}|\le\epsilon,\ s,\hat{s},x\in\Upsilon_{\circ},\ u\in[-\rho,\rho]\Big\},\\
\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{g},\epsilon)&=\sup\Big\{|\mathbb{g}(s,u)-\mathbb{g}(\hat{s},u)|\ :\ |s-\hat{s}|\le\epsilon,\ s,\hat{s}\in\Upsilon_{\circ},\ u\in[-\rho,\rho]\Big\}.
\end{aligned}
$$

اگر $t_{۲}\to t_{۱}$ و $\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon)\to\circ$، $\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{g},\epsilon)\to\circ$ و در نتیجه:

$$
\begin{aligned}
\omega\big(\nabla u,\epsilon\big)\le{}&\big(l_{\delta,\mathbb{g}}\omega\big(u,\omega(\eta_{۳},\epsilon)\big)+\omega_{\Upsilon_{\circ}}\left(\mathbb{g},\epsilon\right)\big)\,\tfrac{S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}+\tfrac{S(\mathbb{g})\,S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}\epsilon^{\alpha}\\
&+l_{۲,\mathbb{z}}\sum_{i=۱}^{m}\tfrac{S(\mathbb{v})}{\Gamma_q(\beta_i+۱)}\epsilon+l_{۱,\mathbb{z}}\omega\big(u,\omega(\eta_{۱},\epsilon)\big)+\omega_{\Upsilon_{\circ}}(\mathbb{z},\epsilon).
\end{aligned}
$$

با سوپریمم گرفتن از طرفین نامساوی اخیر روی مجموعه $\mathcal{P}$ و استفاده از رابطه (۴.۲) وقتی $\epsilon\to\circ$، خواهیم داشت:

$$
\omega\big(\nabla u,\epsilon\big)\le\left(\tfrac{l_{\delta,\mathbb{g}}\,S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}+l_{۱,\mathbb{z}}\right)\omega(u,\epsilon),
$$

و لذا

$$
\mu\big(T\mathcal{P}\big)\le\left(\tfrac{l_{\delta,\mathbb{g}}\,S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}+l_{۱,\mathbb{z}}\right)\mu(\mathcal{P}).
$$

شرط (W۲) در قضیه ۲.۳ ایجاب می‌کند که عملگر ∇ یک نگاشت چگال است.

گام سوم: بررسی برقراری قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم $u \in \partial \bar{B}_\rho$، در این صورت اگر $\nabla u = \lambda u$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\lambda\rho = \lambda\|u\| = \|Tu\|.$$

با استفاده از شرط (W۳) نتیجه می‌گیریم که:

$$|\nabla u(t)| = \Big| \mathbb{g}\big(t, u(\eta_۲(t))\big) \int_۰^t \tfrac{(t-q\lambda)^{(\alpha-۱)}}{\Gamma_q(\alpha)} \Omega\left(\lambda, u\big(\eta_۴(s)\big), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\gamma u(s)\right) \mathrm{d}_q\lambda + \mathbb{z}\Big(t, u\big(\eta_۱(t)\big), \sum_{i=۱}^m {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i} \mathbb{v}_i\big(t, u(\eta_۲(t))\big)\Big)\Big| \le \rho,$$

که در آن $t \in \Upsilon_۰$. از این رو $\|\nabla u\| \le \rho$. این نشان می‌دهد که $\lambda \le ۱$. با توجه به اینکه تمام شرایط یاد شده در قضیه ۱۲.۲ برقرار می‌باشد، بنابراین وجود جواب برای معادله (۱.۱) اثبات گردید. □

بسیاری از نتایج حاصل در بررسی وجود جواب برای معادلات انتگرالی حالت خاصی از انتگرال های کوانتوم با مقدار $q = ۰$ حاصل می‌گردند.

ملاحظه ۳.۳ (کاکان[۲۳]). وجود جواب برای معادله دیفرانسیل کسری زیر را مورد بررسی قرار داد:

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^\alpha u(t) = \Omega\left(t, u(t), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\gamma u(t)\right), \\ u(۰) = ۰. \end{cases}$$

این نتیجه با انتخاب $q = ۰$، $\mathbb{z} = ۰$، $\mathbb{g} = ۱$ و $\Omega = \Omega\left(t, {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\beta u(t)\right)$ در قضیه ۲.۳ به سادگی حاصل می‌گردد.

ملاحظه ۴.۳ ([۳]). آسواسامریت و همکاران با استفاده از روش نقطه ثابت و اعمال شرایط بر روی الگوی پیشنهادی وجود جواب برای معادله دیفرانسیل کوانتومی مرتبه کسری زیر را ثابت نمودند:

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^\alpha u(t) = \Omega\left(t, u(t), {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^\gamma u(t)\right), \\ u(۰) = ۰. \end{cases}$$

با انتخاب $\mathbb{z} = ۰$، $\mathbb{g} = ۱$ در قضیه ۲.۳ وجود جواب به سادگی حاصل خواهد شد.

نتیجه ۵.۳. فرض کنیم

(۱M) $\Omega \in C\big(\Upsilon_۰ \times \mathbb{R}\big)$ و $\mathbb{v}_i(۰,۰) = ۰$، $\mathbb{g} \in C\big(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{۰\}\big)$؛

(۲M) ثابت‌های نامنفی l_Ω، $l_\mathbb{g}$ موجود باشند به طوری که برای هر $t \in \Upsilon_۰$ با شرط اینکه $T = ۱$ m

$$\tfrac{l_\mathbb{g}\, S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} < ۱,$$

داشته باشیم:

$$\big|\Omega(t,u) - \Omega(t,\hat{u})\big| \le l_\Omega |u-\hat{u}|, \qquad \big|\mathbb{g}(t,u) - \mathbb{g}(t,\hat{u})\big| \le l_\mathbb{g}|u-\hat{u}|;$$

(۳M) عدد حقیقی $\rho \ge ۰$ وجود داشته باشد به طوری که در شرط زیر صدق نماید

$$\sup\left\{\tfrac{S(\mathbb{g})\, S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)}\right\} \le \rho,$$

که در آن

$$S(\Omega) = \sup\Big\{\big|\Omega(s,u)\big| \;:\; s \in \Upsilon_۰,\, u \in [-\rho,\rho]\Big\},$$
$$S(\mathbb{g}) = \sup\Big\{\big|\mathbb{g}(s,u)\big| \;:\; s \in \Upsilon_۰,\, u \in [-\rho,\rho]\Big\}.$$

در این صورت معادله مقدار مرزی ترکیبی شامل مشتق کسری کوانتومی کاپوتو

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{\alpha}\left[\frac{u(t)-\sum_{i=1}^{m} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i(t,u(t))}{\mathfrak{g}(t,u(t))}\right]=\Omega\big(t,u(t)\big), \tag{۳.۳}$$

حداقل دارای یک جواب در $C(\Upsilon_{\circ})$ است.

۴ کاربردها

در این بخش بر اساس آنچه در قضیه ۲.۳ ارائه و اثبات گردید، مثال‌هایی به عنوان کاربرد مطرح می گردند که با تغییرات پارامترهای معادله، درستی نتایج را تایید می‌کنند. در ابتدا، به عنوان کاربرد از رده معادله معرفی شده (۱.۱) مثال ۱.۴ رال معرفی می کنیم.

مثال ۱.۴ ([۱۰])**.** در مهندسی شیمی و فرآیندهای انتقال جرم در محیط‌های متخلخل مانند خاک، فیلترها یا کاتالیست‌های متخلخل، رفتار انتقال ماده معمولاً حافظه‌دار و غیرمحلی است. این پدیده‌ها را می‌توان با معادلات دیفرانسیلی کوانتومی شامل $q-$ مشتق کسری کاپوتو مدل‌سازی نمود که به خوبی اثرات حافظه و ساختار هندسی محیط را لحاظ می‌کند. معادله انتقال جرم زیر را در نظر بگیرید:

$$ {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{\alpha}C(t)=\lambda\cdot\mathscr{I}_q^{\beta}\left(\frac{\partial^{2}C(t)}{\partial x^{2}}\right)-\kappa C(t)+S(t). \tag{۱.۴}$$

که در آن $\frac{\partial^{2}C(t)}{\partial x^{2}}$ انتشار ماده، λ ضریب نفوذ، κ نرخ واکنش و $S(t)$ مقدار ماده ورودی در زمان t می‌باشند. با بکارگیری قضیه نقطه ثابت پترشین و شرط

$$\big[\lambda\sup(C)+\kappa\big]\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}<1,$$

قضیه (۲.۳) ایجاب می‌کند معادله (۱.۴) در فضای $C(\Upsilon_{\circ})$ دارای جواب است.

در ادامه با مثالهای عددی سعی می‌کنیم درستی قضیه ۲.۳ را ارزیابی کنیم.

مثال ۲.۴. مطابق با مساله (۱.۱)، معادله دیفرانسیل کوانتومی ترکیبی شامل $q-$مشتق کسری کاپوتو و $q-$انتگرال کسری ریمان-لیویل،

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_q^{4/5}\left[\frac{u(t)-\frac{1}{5}\sin u(t)-\sum_{i=1}^{2} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i(t,u(\eta_2(t)))}{\mathfrak{g}(t,u(\eta_2(t)))}\right]=e^{-t}+\frac{t^{2}+u(\sin t)}{12} \\ \qquad +\frac{3e^{-2t}}{10}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{7/20}\left(t+u(t)+e^{\sqrt{t}}\right), \\ u(0)=0, \end{cases} \tag{۲.۴}$$

را برای $t\in\Upsilon_{\circ}$، $T=1$ و به ازای سه مقدار متفاوت $q\in\left\{\frac{1}{7},\frac{\ln 10}{3},\frac{8}{9}\right\}$ با تعریف توابع

$$\sum_{i=1}^{2} {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\beta_i}\mathbb{v}_i\big(t,u(\eta_2(t))\big)={}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{1/2}\left(\frac{3e^{-t}}{10}\left[\sqrt{3+t}u(t)+t\right]\right) + {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{7/4}\left(\frac{t\cos t}{1+t^{2}}\left[\frac{e^{\pi t}|u(t)|}{16+|u(t)|}\right]\right),$$

$$\Omega\left(t,u\big(\eta_4(t)\big),{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{\gamma}u(t)\right)=\frac{1}{\sqrt{16+t^{2}}}e^{-t}+\frac{t^{2}+u(\sin t)}{12}+\frac{3e^{-7t}}{10}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{0.35}\left(t+u(t)+e^{\sqrt{t}}\right),$$

و

$$\mathfrak{g}\big(t,u(\eta_3(t))\big)=\frac{u(t)+1}{12},$$

در نظر می‌گیریم. به سادگی نشان داده می‌شود که شرط W۱) قضیه ۲.۳ برقرار می‌باشد. همچنین برای $x, y, \hat{x}, \hat{y}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbb{z}(t,x,y) &= \tfrac{۱}{۵}\sin x + \tfrac{۳}{۱۰}e^{-t}x + \tfrac{t\cos t}{۱+t^{۲}}y,\\
\Omega(t,x,y) &= \tfrac{۱}{\sqrt{۱۶+t^{۲}}}e^{-t} + \tfrac{t^{۲}+x}{۱۲} + \tfrac{۳e^{-۲t}}{۱۰}y,\\
\mathbb{g}(t,x) &= \tfrac{x+۱}{۱۲}.
\end{aligned}$$

بنابراین طبق شرایط قید شده در قضیه ۲.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\big|\mathbb{z}(t,x,y)-\mathbb{z}(t,\hat{x},\hat{y})\big| &\le \tfrac{۱}{۵}\big|x-\hat{x}\big| + \tfrac{۴}{۱۰}\big|y-\hat{y}\big|,\\
\big|\Omega(t,x,y)-\Omega(t,\hat{x},\hat{y})\big| &\le \tfrac{۱}{۱۲}\big|x-\hat{x}\big| + \tfrac{۳}{۱۰}\big|y-\hat{y}\big|\\
\big|\mathbb{g}(t,x)-\mathbb{g}(t,\hat{x})\big| &\le \tfrac{۱}{۱۲}\big|x-\hat{x}\big|.
\end{aligned}$$

که در نابرابریها، می‌توان مقادیر $l_{۱,\mathbb{z}} = \frac{۱}{۵}$، $l_{۲,\mathbb{z}} = \frac{۴}{۱۰}$، $l_{۳,\Omega} = \frac{۱}{۱۲}$، $l_{۴,\Omega} = \frac{۳}{۱۰}$ و $l_{۵,\mathbb{g}} = \frac{۱}{۱۲}$ را در شرط W۲) انتخاب کرد. اکنون شرط W۳) قضیه ۲.۳ را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $\rho \le \|u(t)\|$ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\big|u(t)\big| &= \Bigg|\tfrac{u(t)+۱}{۱۲}\int_{۰}^{t}\tfrac{(t-q\lambda)^{(-۰/۲)}}{\Gamma_q(۰/۸)}\Big[\tfrac{۱}{\sqrt{۱۶+\lambda^{۲}}}e^{-\lambda} + \tfrac{\lambda^{۲}+u(\sin\lambda)}{۱۲}\\
&\quad + \tfrac{۳e^{-۲\lambda}}{۱۰}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{۰/۳۵}\Big(\lambda+u(\lambda)+e^{\sqrt{\lambda}}\Big)\Big]\,\mathrm{d}_q\lambda + \tfrac{۱}{۵}\sin u(t)\\
&\quad + \tfrac{۳e^{-t}}{۱۰}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{۱/۲}\Big(\sqrt{۳+t}u(t)+t\Big) + \tfrac{t\cos t}{۱+t^{۲}}\,{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_q^{۷/۴}\tfrac{e^{\pi t}|u(t)|}{۱۶+|u(t)|}\Bigg|\\
&< \tfrac{۱}{۱۲\Gamma_q(۱/۸)}\Big[\tfrac{۱}{۴} + \tfrac{\rho+۱}{۱۲} + \tfrac{۳}{۱۰\Gamma_q(۱/۳۵)}(۱+\rho+e)\Big]\\
&\quad + \tfrac{۱}{۵}\rho + \tfrac{۳}{۱۰\Gamma_q\left(\frac{۴}{۳}\right)}(۲\rho+۱) + \tfrac{۱}{۱۶\Gamma_q\left(\frac{۱۱}{۴}\right)}\\
&\simeq \left\{\begin{array}{ll} ۴/۱۳۲۳, & q = ۱/۲,\\ ۵/۱۷۰۵, & q = \ln(۱۰)/۳,\\ ۶/۰۵۲۰, & q = ۸/۹,\end{array}\right\} \le \rho = \left\{\begin{array}{ll} ۴/۲۵, & q = ۱/۲,\\ ۵/۱۸, & q = \ln(۱۰)/۳,\\ ۶/۱۲, & q = ۸/۹.\end{array}\right. \qquad (۳.۴)
\end{aligned}$$

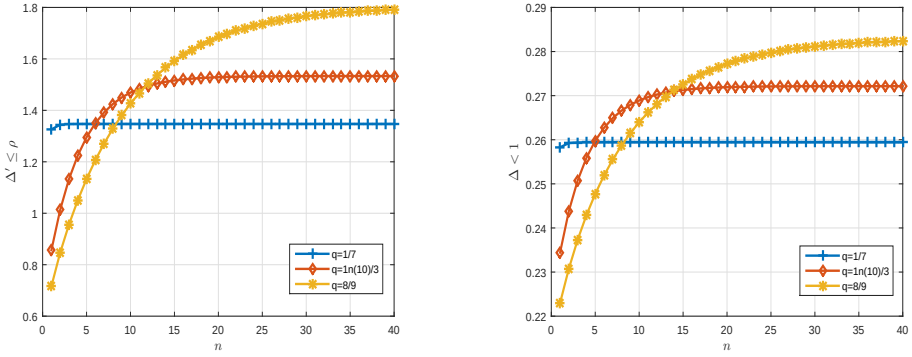
نتایج حاصل در (۳.۴) به کمک الگوریتم ۱ برای سه مقدار متفاوت $q \in (۰,۱)$ محاسبه شده‌اند. نامساوی (۳.۴) به ازای مقادیر $\rho \in (-۴/۲۵, ۴/۲۵)$، $\rho \in (-۵/۱۸, ۵/۱۸)$ و $\rho \in (-۶/۱۲, ۶/۱۲)$ به ترتیب برای $q = \frac{۱}{۷}$، $q = \frac{\ln ۱۰}{۳}$ و $q = \frac{۸}{۹}$ برقرار می‌باشد. همچنین به ازای مقادیر منتخب ρ به ازای هر q، داریم:

$$S(\Omega) = \left\{\begin{array}{ll} ۰/۴۳۷۵, & q = ۱/۲,\\ ۰/۸۱۴۵, & q = \ln(۱۰)/۳,\\ ۰/۹۳۱۰, & q = ۸/۹.\end{array}\right.$$

این نتایج در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. به خوبی مشخص است که با نزدیک شدن q به عدد ۱ مقدار $S(\Omega)$ افزایش می‌یابد. در نتیجه از روابط (۱.۳) و (۲.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \tfrac{l_{۵,\mathbb{g}}S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} + l_{۱,\mathbb{z}} \approx \left\{\begin{array}{ll} ۰/۲۵۹۴, & q = ۱/۲,\\ ۰/۲۷۲۱, & q = \ln(۱۰)/۳,\\ ۰/۲۸۲۹, & q = ۸/۹,\end{array}\right\} < ۱,\\
\Delta' &= \tfrac{S(\mathbb{g})\,S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} + S(\mathbb{z}) \approx \left\{\begin{array}{ll} ۱/۳۴۷۰, & q = ۱/۲,\\ ۱/۵۳۳۳, & q = \ln(۱۰)/۳,\\ ۱/۸۰۲۲, & q = ۸/۹,\end{array}\right\} \le \rho.
\end{aligned}$$

این نتایج در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. مشاهده که با نزدیک شدن q به عدد ۱ مقادیر Δ و Δ' به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابند و همچنان شرط $\Delta < ۱$ و $\Delta' \le \rho$ همچنان برای هر سه مقدار q برقرار است که شرایط قضیه ۲.۳ را



(آ) Δ (ب) Δ'

شکل ۱: منحنی پارامترهای Δ و Δ' برای مسأله (۲.۴) به ازای $t \in \Upsilon_\circ$ و سه مقدار متفاوت $q \in (\circ, 1)$.

جدول ۱: نتایج عددی $S(\Omega)$، Δ و Δ' برای مسأله (۲.۴) به ازای سه مقدار متفاوت $q \in \{\frac{1}{7}, \frac{\ln 10}{3}, \frac{8}{9}\}$.

	$q = ۱/۷$			$q = \ln(۱۰)/۳$			$q = ۸/۹$		
n	$S(\Omega)$	Δ	Δ'	$S(\Omega)$	Δ	Δ'	$S(\Omega)$	Δ	Δ'
۱	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۸۳	۱٫۳۲۶۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۳۴۴	۰٫۸۵۶۹	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۲۳۰	۰٫۷۱۶۷
۲	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۲	۱٫۳۴۴۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۴۳۸	۱٫۰۱۴۰	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۳۰۸	۰٫۸۴۷۴
۳	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۶۶	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۵۰۸	۱٫۱۳۳۱	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۳۷۳	۰٫۹۵۶۵
۴	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۰	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۵۵۹	۱٫۲۲۴۷	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۴۲۹	۱٫۰۵۰۷
۵	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۵۹۸	۱٫۲۹۵۵	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۴۷۷	۱٫۱۳۳۴
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۲۲	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۰	۱٫۵۳۰۶	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۷۸۴	۱٫۷۰۹۲
۲۳	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۰	۱٫۵۳۱۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۷۸۹	۱٫۷۱۹۵
۲۴	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۱۸	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۷۹۴	۱٫۷۲۸۷
۲۵	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۲۱	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۷۹۸	۱٫۷۳۶۸
۲۶	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۲۴	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۰۱	۱٫۷۴۴۰
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳۳	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۲	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۱۷	۱٫۷۷۶۷
۳۴	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۲	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۱۸	۱٫۷۷۹۵
۳۵	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۰	۱٫۷۸۲۰
۳۶	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۱	۱٫۷۸۴۳
۳۷	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۲	۱٫۷۸۶۲
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۵۷	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۸	۱٫۸۰۰۷
۵۸	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۹	۱٫۸۰۰۹
۵۹	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۹	۱٫۸۰۱۰
۶۰	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۹	۱٫۸۰۱۱
۶۱	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۹	۱٫۸۰۱۳
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۸۴	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۹	۱٫۸۰۲۱
۸۵	۰٫۶۹۹۳	۰٫۲۵۹۴	۱٫۳۴۷۱	۰٫۸۱۴۵	۰٫۲۷۲۱	۱٫۵۳۳۳	۰٫۹۳۱۰	۰٫۲۸۲۹	۱٫۸۰۲۲

تایید می‌کند. منحنی‌های Δ و Δ' در شکلهای ۱آ و ۱ب براساس داده‌های محاسبه شده، رسم شده‌اند. در اینجا محور x مشخص کننده تعداد جملات محاسبه شده در تعریف q می‌باشد. بعلاوه، دستورات مورد نیاز برای اجرای نتایج در برنامه متلب *(MatLab)*، در الگوریتم ۱ مشاهده می‌شود. بنابراین تمام شرایط قضیه ۲.۳ برقرار می‌باشد، یعنی، (۲.۴) حداقل دارای یک جواب در فضای باناخ $\Sigma = C(\Upsilon_\circ)$ می‌باشد.

الگوریتم ۱: دستورات مورد نیاز برای محاسبه متغیرها در مثال ۲.۴.

```
syms t x y;
q=[1/7 log(10)/3 8/9];
[xq yq]=size(q);
alpha=0.8; beta=[1/3 7/4]; gamma=0.35; m=2;
rho=[4.25 5.18 6.12];
l_1_mathbbz=1/5;
l_2_mathbbz=4/10;
l_3_Omega=1/12;
l_4_Omega=3/10;
l_5_mathbbg=1/12;
mathbbz=1/5*sin(x)+3/10*exp(-t)*y+t*cos(t)/(1+t^2)*y;
Omega=1/(sqrt(16+t^2))*exp(-t)+(t^2+x)/12+3*exp(-2*t)/10*y;
mathbbg=(x+1)/12;
mathbbv_1=3*exp(-t)/10*(sqrt(3+t)*x+t);
mathbbv_2=t*cos(t)/(1+t^2)*exp(pi*t)*abs(x)/(16+x);
k=120;
t_0 =0; T =1;
column=1;
for s=1:yq
    for n=1:k
        pm(n, column)=n;
        G1=qGammanew(q(s),alpha+1,n);
        G2=qGammanew(q(s),gamma+1,n);
        G3=qGammanew(q(s),beta(1)+1,n);
        G4=qGammanew(q(s),beta(2)+1,n);
        pm(n, column+1)=G1;
        pm(n, column+2)=G2;
        pm(n, column+3)=G3;
        pm(n, column+4)=G4;
        D=1/(12*G1)*(1/4+(rho(s)+1)/12+3/(10*G2)*(1+rho(s)+exp(1))) ...
            +1/5*rho(s)+3/(10*G3)*(2*rho(s)+1)+1/(16*G4);
        pm(n, column+5)=DD;
        pm(n, column+6)=rho(s);
        pm(n, column+7)=D≤rho(s);
        SOmega=eval(subs(subs(subs(Omega,{y},{rho(s)}), ...
            {x},{rho(s)}),{t},{T}));
        pm(n, column+8)=SOmega;
        sup_mathbbg=eval(subs(mathbbg,{x},{rho(s)}));
        pm(n, column+9)=sup_mathbbg;
        SUM=eval(subs(subs(mathbbv_1,{x},{rho(s)}),{t},{T}))/(G3) ...
            +eval(subs(subs(mathbbv_2,{x},{rho(s)}),{t},{T}))/(G4);
        pm(n, column+10)=SUM;
        Smathbbz=eval(subs(subs(subs(mathbbz,{y},{SUM}),{x},{T}),{t},{T}));
        pm(n, column+11)=Smathbbz;
        Delta=l_5_mathbbg*SOmega/(G1)+l_1_mathbbz;
        pm(n, column+12)=Delta;
        pm(n, column+13)=Delta<1;
        Smathbbg=eval(subs(subs(mathbbg,{x},{rho(s)}),{t},{T}));
        pm(n, column+14)=Smathbbg;
        Deltaprime=Smathbbg*SOmega/(G1)+Smathbbz;
        pm(n, column+15)=Deltaprime;
        pm(n, column+16)=Deltaprime≤rho(s);
    end;
    column=column+17;
end;
```

در مثال دوم، درستی نتیجه ۵.۳ را برای یک معادله متفاوت بررسی می‌کنیم.

مثال ۳.۴. برای $t \in \Upsilon_{\circ}$، $T = ۱$، و $q = \frac{۱}{۲}$، معادله دیفرانسیل کوانتومی ترکیبی شامل q-مشتق کسری کاپوتو و q-انتگرال کسری ریمان-لیویل،

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{C}}\mathscr{D}_{۱/۲}^{۴/۵}\left[\frac{u(t)-{}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_{۱/۲}^{۷/۲}\ln u(t)}{\mathfrak{g}(t,u(t))}\right] = \frac{t^{۳}u(t)}{۳+۲t^{۲}}, \\ u(۰) = ۰, \end{cases} \tag{۴.۴}$$

را با فرض

$$\mathfrak{g}\big(t,u(t)\big) = \frac{۱}{۲+\sqrt{t}}e^{t-۱} + \frac{u(t^{۳})t^{۲}}{۳(۱+t^{۲})},$$

در نظر می‌گیریم. واضح است که $\Omega(t,u) = \frac{t^{۳}u}{۳+۲t^{۲}}$. با داده‌های موجود، شرایط M۱) و M۲) در نتیجه‌ی ۵.۳ با انتخاب که $l_{\mathfrak{g}} = \frac{۱}{۳}$ و $l_{\Omega} = \frac{۱}{۳}$ برقرار می‌باشند، زیرا

$$\begin{aligned} \big|\Omega(t,u)-\Omega(t,\hat{u})\big| &= \left|\frac{t^{۳}u}{۳+۲t^{۲}} - \frac{t^{۳}\hat{u}}{۳+۲t^{۲}}\right| \le \frac{۱}{۳}\big|u-\hat{u}\big|, \\ \big|g(t,x)-g(t,\hat{x})\big| &= \left|\frac{ut^{۲}}{۳(۱+t^{۲})} - \frac{\hat{u}t^{۲}}{۳(۱+t^{۲})}\right| \le \frac{۱}{۳}\big|u-\hat{u}\big|. \end{aligned}$$

اکنون شرط M۳) را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم $\|u(t)\| \le \rho$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \big|u(t)\big| &= \left|\left(\frac{۱}{۲+\sqrt{t}}e^{t-۱} + \frac{u(t^{۳})t^{۲}}{۳(۱+t^{۲})}\right)\int_{\circ}^{t}\frac{(t-q\lambda)^{-۰/۵}}{\Gamma_{۰/۸}(۰/۵)}\frac{t^{۳}u(t)}{۳+۲t^{۲}}\,\mathrm{d}_q\lambda + {}^{\mathrm{RL}}\mathscr{I}_{۰/۵}^{۷/۲}\log u(t)\right| \\ &\le \left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\rho\right)\frac{\rho}{\Gamma_{۰/۵}(۱/۸)} + \frac{\rho}{\Gamma_{۰/۵}\left(\frac{۱۰}{۳}\right)} \le \rho. \end{aligned}$$

نامساوی اخیر به ازای مقادیر $\rho \in (۰, ۲/۲۸۲۸)$ برقرار می‌باشد، همچنین

$$\frac{l_{\mathfrak{g}}S(\Omega)}{\Gamma_q(\alpha+۱)} \approx ۰/۱۱۶۴۴ < ۱.$$

نتیجه‌ی ۵.۳ ایجاب می‌کند که معادله (۴.۴) حداقل دارای یک جواب در $C\big(\Upsilon_{\circ}\big)$ است.

۵ نتیجه‌گیری

استفاده همزمان مشتق کاپوتو و انتگرال ریمان با توابع غیرخطی و ترکیبی در قالب یک معادله از جنبه‌های اصلی این مقاله در حوزه معادلات کسری محسوب می‌گردد. این ترکیب سبب می‌گردد که مدل بتواند ویژگی‌های غیرمحلی، حافظه‌دار و گسسته را به صورت همزمان در سیستم بررسی نماید که در مطالعات سنتی کمتر به این صورت دیده و بررسی شده است. یکی از ابزارهای مهم در بررسی وجود جواب برای دسته‌ای از معادلات انتگرالی استفاده از قضیه نقطه ثابت داربو می‌باشد، لیکن در این تحقیق با بکارگیری قضیه نقطه ثابت پترشین به بررسی وجود جواب برای یک مدل شامل مشتق کسری کاپوتو پرداخته شده است. اجتناب از بررسی ویژگیهایی مانند بسته، محدب، و فشردگی عملگرها در فضای تعریف شده از مزایای استفاده از این قضیه می‌باشد. آن موضوع سبب می‌گردد تا حل پذیری معادلات انتگرالی با شرایط ضعیف‌تر مورد بررسی قرار گیرند. نتایج اخیر را می‌توان در سایر فضاها، از قبیل فضای سوبولف، فضای هولدر و اورلیچ مورد بررسی قرار داد.

فهرست منابع

[1] Adams, C. R., 1924. The general theory of a class of linear partial q-difference equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 26, pp. 283–312.

[2] Agarwal, R. P., 1969. Certain fractional q-integrals and q-derivatives, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 66, pp. 365–370.

[3] Asawasamrit, S., Tariboon, J. and Ntouyas, S. K., 2014. Existence of solutions for fractional q-integro-difference equations with nonlocal fractional q-integral conditions, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article ID 474138. doi: https://doi.org/10.1155/2014/474138

[4] Ahmad, B., Tariboon, J., Ntouyas, S. K., Alsulami, H. H. and Monaquel, S., 2016. Existence results for impulsive fractional q-difference equations with anti-periodic boundary conditions, *Boundary Value Problems*, 2016, pp. 15. doi: https://doi.org/10.1186/s13661-016-0521-y

[5] Ahmadi, A. and Samei, M. E., 2020. On existence and uniqueness of solutions for a class of coupled system of three term fractional q-differential equations, *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 14(1), pp. 69–80.

[6] Al-Salam, W. A., 1966. Some fractional q-integrals and q-derivatives, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 15, pp. 135–140.

[7] Annaby, M. H. and Mansour, Z. S., 2012. q-Fractional Calculus and Equations, New York, Springer, Heidelberg.

[8] Berhail, A., Tabouche, N., Alzabut, J. and Samei, M. E., 2022. Using Hilfer-Katugampola fractional derivative in initial value Mathieu fractional differential equations with application on particle in the plane, *Advances in Continuous and Discrete Models: Theory and Applications*, 2022, pp. 44. doi: https://doi.org/10.1186/s13662-022-03716-6

[9] Boutiara, A., Kaabar, M. K. A., Siri, Z., Samei, M. E. and Yue, X. G., 2022. Investigation of a generalized proportional Langevin and Sturm-Liouville fractional differential equations via variable coefficients and anti-periodic boundary conditions with a control theory application arising from complex networks, *Mathematical Problems in Engineering*, 2022, Article ID 7018170, pp. 21 pages. doi: https://doi.org/10.1155/2022/7018170

[10] Chen, Y. and Zhao, J. 2022. Fractional q-calculus modeling of anomalous diffusion in porous media, *Journal of Computational Physics*, 456, 110962. doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.11096

[11] Darwish, M. A. and Sadarangani, K., 2014. On Erdélyi-Kober type quadratic integral equation with linear modification of the argument, *Applied Mathematics and Computation* , 238, pp. 30–-42. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.04.002

[12] Das, A., Deb, S., Goswami, R., Ahmed, T., Izadi, Z. and Paevaneh, V., 2023. A generalized Darbo's fixed point theorem and its applications to different types of hybrid differential equations, *Boundary Value Problems*, 2023, pp. 112. doi: https://doi.org/10.1186/s13661-023-01800-8

[13] Dhage, B. C. and Lakshmikantham, V., 2010. Basic results on hybrid differential equations, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 4, pp. 414–424. doi: https://doi.org/10.1016/j.nahs.2009.10.005

[14] Eswari, R., Alzabut, J., Samei, M. E., Tunç, C. and Jonnalagad, J. M., 2022. New results on the existence of periodic solutions for Rayleigh equations with state-dependent delay, *Nonautonomous Dynamical Systems*, 9, 103–115. doi: https://doi.org/10.1515/msds-2022-0149

[15] Ferreira, R. A. C. and Markus, A. S., 2011. Positive solutions for a class of boundary value problems with fractional q-differences, *Computers & Mathematics with Applications*, 61, pp. 367–373. doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.11.012

[16] Malafosse, B. and Malkowsky, E., 2007. On the measure of noncompactness of linear operators in spaces of strongly α-summable and bounded sequences, *Periodica Mathematica Hungarica*, 55, pp. 129–148. doi: https://doi.org/10.1007/s10998-007-4129-4

[17] Hedayati, V. and Samei, M. E., 2019. Positive solutions of fractional differential equation with two pieces in chain interval and simultaneous Dirichlet boundary conditions, *Boundary Value Problems*, 2019, pp. 141. doi: https://doi.org/10.1186/s13661-019-1251-8

[18] Hilfer, R., 2000. Applications of Fractional Calculus in Physics, Singapore, World Scientific.

[19] Houas, M. and Samei, M. E., 2022. Existence and Mittag-Leffler-Ulam-stability results for duffing type problem involving sequential fractional derivatives, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8, pp. 185. doi: https://doi.org/10.1007/s40819-022-01398-y

[20] Houas, M. and Samei, M. E., 2023. Existence and stability of solutions for linear and nonlinear damping of $q-$fractional Duffing-Rayleigh problem, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20, pp. 148. doi: https://doi.org/10.1007/s00009-023-02355-9

[21] Izadi, M. and Samei, M. E., 2022. Time accurate solution to Benjamin-Bona-Mahony Burgers equation via Taylor-Boubaker series scheme, *Boundary Value Problems*, 2022, pp. 17. doi: https://doi.org/10.1186/s13661-022-01598-x

[22] Jackson, F. H., 1910. q-difference equations, American Journal of Mathematic, 32(4), pp. 305–314.

[23] Çakan, Ü., 2020. A Result on Solvability of Some Fractional Integro-differential Equations in Abstract Spaces, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 46, pp. 987–1001. doi: https://doi.org/10.1007/s41980-019-00306-3

[24] Kuratowski, K., 1930. Sur les espaces completes, *Fund. Math.*, 15, pp. 301–309.

[25] Mishra, S. K., Rajković, P., Samei, M. E., Chakraborty, S. K., Ram, B. and Kaabar, M. K. A., 2021. A q-gradient descent algorithm with quasi-Fejér convergence for unconstrained optimization problems, *Fractal and Fractional*, 5(3), 110. doi: https://doi.org/10.3390/fractalfract5030110

[26] Nussbaum, R., 1969. The fixed point index and fixed point theorems for k-set contractions, University of Chicago, Doctoral dissertation.

[27] Ntouyas, S. K. and Samei, M. E., 2019. Existence and uniqueness of solutions for multi-term fractional q-integro-differential equations via quantum calculus, *Advances in Difference Equations*, 2019, pp. 475. doi: https://doi.org/10.1186/s13662-019-2414-8

[28] Petryshyn, W. V., 1971. Structure of the fixed points sets of k-set-contractions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 40, pp. 312–328. doi: https://doi.org/10.1007/BF00252680

[29] Rajković, P. M., Stanković, S. D. and Miomir, S., 2007. Fractional Integrals and Derivatives in q-Calculus. Applicable Analysis and Discrete Mathematics, *Advances in Difference Equations*, 1, pp. 311–323.

[30] Samei, M. E., Hedayati, V. and Rezapour, S., 2019. Existence results for a fraction hybrid differential inclusion with Caputo-Hadamard type fractional derivative, *Advances in Difference Equations*, 2019, pp. 163. doi: https://doi.org/10.1186/s13662-019-2090-8

[31] Samei, M. E., Karimi, L. and Kaabar, M. K. A., 2022. To investigate a class of multi-singular pointwise defined fractional q-integro-differential equation with applications, *AIMS Mathematics*, 7(5), pp. 7781–7816. doi: https://doi.org/10.3934/math.2022437

[32] Suantai, S., Ntouyas, S. K., Asawasamrit, S. and Tariboon, J., 2015. A coupled system of fractional q-integro-difference equations with nonlocal fractional q-integral boundary conditions, *Advances in Difference Equations*, 2015, pp. 124. doi: https://doi.org/10.1186/s13662-015-0462-2

[33] Subramanian, M., Alzabut, J., Dumitru, D., Samei, M. E. and Zadaf, A., 2021. Existence, uniqueness and stability analysis of a coupled fractional-order differential systems involving Hadamard derivatives and associated with multi-point boundary conditions, *Advances in Difference Equations*, 2021, pp. 267. doi: https://doi.org/10.1186/s13662-021-03414-9

[34] Tariboon, J. and Ntouyas, S. K., 2013. Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2013, pp. 282. doi: https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-282

[35] Tariboon, J., Ntouyas, S. K. and Agarwal, P., 2015. New concepts of fractional quantum calculus and applications to impulsive fractional q-difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2015, pp. 18. doi: https://doi.org/10.1186/s13662-014-0348-8

[36] Zhao, Y., Sun, S., Han, Z. and Li, Q., 2011. Theory of fractional hybrid differential equations, Computers & Mathematics with Applications, 62, pp. 1312–1324. doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.041

Analysis of the existence of solutions to hybrid nonlinear differential equations including fractional q-derivative

Hamid Reza Sahebi[(1)][2], **Mohammad Esmael Samei**[(2)]

[(1)] Department of Mathematics, Ash. C., Islamic Azad University, Ashtian, Iran
[(2)] Department of Mathematics, Faculty of Science, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran

Communicated by: Mohsen Zivari Rezapour

Received: 19 April 2025 Accepted: 2 October 2025

Abstract: In this paper, we investigate the existence of solutions for a novel class of nonlinear hybrid differential equations involving the fractional quantum Caputo derivative. By exploiting the hybrid structure of the considered equations and the distinctive properties of the fractional quantum derivative, an analytical framework is established to derive sufficient conditions ensuring the existence of solutions. The proof is based on Petryshyn's fixed point theorem, employing the properties of spaces together with compact–continuous operators. Several illustrative examples are provided to demonstrate the applicability of the proposed model and to validate the theoretical results. Although explicit numerical values of the solutions are not computed, the examples confirm that the proposed existence conditions are practically realizable. The findings of this study serve as a foundation for further research in qualitative and numerical analysis of fractional differential equations with complex hybrid structures.

Keywords: Quantum calculus; Caputo's q-derivative, measure of non-compactness, Petryshyn fixed point theorem, nonlinear differential equations.

Keywords: 47H09; 47H10, 26A33

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author.
E-mail addresses: sahebi.aiau.ac.ir@gmail.com (H.R. Sahebi); mesamei@basu.ac.ir, mesamei@gmail.com (M.E. Samei).