مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۸۸–۱۰۱

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.48277.2327

میانگین ارزش در معرض ریسک شرطی استوار تحت توزیع و میانگین بازده مبهم

حوا داداشی عینشیخ [(۱)] و مازیار صلاحی [(۱)] [۱]

[(۱)] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه گیلان، گیلان، ایران

دبیر مسئول: حسن میش مست نهی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۸/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۲۷

چکیده: در این مقاله مسئله انتخاب سبد سهام بهینه را با استفاده از معیار ارزش در معرض ریسک شرطی برای یک بازار مالی متشکل از n دارایی ریسکی و یک دارایی بدون ریسک وقتی فروش استقراضی مجاز است در نظر می‌گیریم. ابتدا وقتی توزیع بازده دارایی‌ها مبهم اما بردار میانگین بازده و ماتریس واریانس/کوواریانس دارایی‌ها ثابت است، سبد سهام استوار توزیعی را به‌دست می‌آوریم. پس از آن در حالتی‌که میانگین بازده متعلق به مجموعه عدم قطعیت بیضی‌گون و توزیع بازده دارایی‌ها مبهم است، یک جواب صریح برای مسئله انتخاب سبد سهام ارزش در معرض ریسک شرطی استوار با دارایی بدون ریسک و همچنین عدم حضور دارایی بدون ریسک با قید حداکثر زیان ارائه می‌دهیم. سپس روی داده‌های $S\&P۵۰۰$ نتایج به‌دست آمده بررسی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: سبد سهام استوار، ارزش در معرض ریسک شرطی، عدم قطعیت توزیعی، عدم قطعیت بیضی‌گون
رده‌بندی ریاضی: 90C20; 91G10

۱ مقدمه

تشکیل سبد سهام بهینه یکی از اصلی‌ترین حوزه‌های تصمیم‌گیری و مدیریت سرمایه‌گذاری است. بنابراین تعیین سبد سهامی که بتواند دارای بالاترین نرخ بازده و حداقل ریسک سرمایه‌گذاری باشد به یکی از مسائل اصلی در بازارهای مالی تبدیل شده است. معیار ریسک ارزش در معرض ریسک (VaR) بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار در یک دوره زمانی معین و با یک سطح اطمینان مشخص است. چون این معیار ریسک از نظر آماری برآوردی استوار است یعنی نسبت به تغییرات کوچک توزیع مشاهدات حساس نیست، به‌طور گسترده در صنعت مالی به‌کار می‌رود [۶]. با این حال چون VaR غیر محدب است و بزرگی زیان‌های احتمالی را در نظر نمی‌گیرد و همچنین در شرایط ریسک منسجم صدق نمی‌کند، معیار دیگری به‌نام ارزش در معرض ریسک شرطی ($CVaR$) معرفی شد که میانگین زیان‌های بیشتر از VaR تعریف می‌شود [۱، ۲]. مسئله‌های برنامه‌ریزی ریاضی عموماً با فرض غیرقطعی بودن داده‌های موجود در مسئله حل می‌شوند، حال آنکه در دنیای واقعی داده‌ها غیرقطعی بوده و تغییر در آن‌ها باعث نقض برخی از محدودیت‌ها شده و ممکن است مسئله غیربهینه یا حتی غیرممکن شود. چون عدم قطعیت داده‌ها در تعیین سبد سهام بهینه بسیار موثر است بنابراین محققان تلاش‌های بسیاری در مدل‌سازی مسائل با عدم قطعیت

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(M.Salahi) salahim@guilan.ac.ir

داده انجام دادند. همچنین رویکردهای مختلفی برای مدل‌سازی تحت شرایط غیرقطعی ارائه شده است که یکی از این رویکردها بهینه‌سازی استوار است. مسئله انتخاب سبد سهام استوار با عدم‌قطعیت توسط زو و فوکوشیما [۱۳] مورد بررسی قرار گرفت. ناتاراجان و همکاران [۹] مدل‌های بازده مورد انتظار بهینه‌سازی سبد سهام با یک تابع بازده مقعر تکه‌ای خطی را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها با در نظر گرفتن کران‌ها در بدترین حالت، بازده مورد انتظار را به‌دست آورده و با حل مسئله مخروطی، سبد سهام بهینه را محاسبه کردند. چن و همکاران [۳] تحقیقات [۱۳] را در حالت n دارایی ریسکی توسعه دادند. آن‌ها سبدهای سهام را در بدترین حالت معیار ریسک $CVaR$ روی همه توزیع‌های با گشتاور اول و دوم ثابت محاسبه کردند. پک و پینار [۱۰] یک جواب صریح برای مسئله انتخاب سبد سهام با قید حداقل میانگین بازده با عدم قطعیت در توزیع و میانگین بازده با دارایی ریسکی و بدون ریسک وقتی فروش استقراضی مجاز است ارائه کردند و نتایج [۳] را توسعه دادند. کانگ و لی [۴] یک سبد سهام بهینه برای مدل بهینه‌سازی میانگین–ریسک چندگانه استوار با عدم قطعیت توزیع ارائه کردند. آن‌ها برای حل مسئله بهینه‌سازی میانگین–ریسک استوار توزیعی، با پیشنهاد یک اندازه ریسک سه‌گانه شامل واریانس، VaR و $CVaR$ که انعطاف بیشتری در پیدا کردن سبد سهام ایجاد می‌کرد یک جواب بهینه برای مسئله میانگین–ریسک با خطای برآورد به‌دست آوردند. لیو و همکاران [۷] مسئله انتخاب سبد سهام میانگین $CVaR$ استوار توزیعی یک دوره‌ای و چنددوره‌ای را با در نظر گرفتن یک مجموعه عدم قطعیت ترکیبی شامل توزیع، گشتاور اول و دوم مورد مطالعه قرار دادند و برای یافتن جواب‌های بهینه به فرم بسته از روش پارامتریک و تکنیک برنامه‌ریزی پویا استفاده کردند. کانگ، لی و زو [۵] مسئله میانگین $CVaR$ استوار تحت ابهام توزیع، میانگین و کوواریانس را مورد مطالعه قرار دادند و از روش غیرپارامتریک بوت‌استرپ برای تنظیم سطوح عدم قطعیت استفاده کردند. آن‌ها با استفاده از یک محدودیت خطی میانگین بازده، مسئله را به‌صورت یک مسئله برنامه‌ریزی مخروطی مدل‌بندی کردند و سبدهای سهام متنوع‌تر و با ثبات‌تری نسبت به نمونه غیراستوار به‌دست آوردند. لطفی و زنیوس [۸] مدل‌های بهینه‌سازی VaR و $CVaR$ استوار با عدم قطعیت در توزیع، میانگین بازده و ماتریس کوواریانس را با محدودیت حداقل بازده توسعه دادند. آن‌ها مدل‌های با عدم قطعیت میانگین و کوواریانس را با مجموعه عدم قطعیت بازه‌ای، چندوجهی و بیضی‌گون مدل‌بندی کردند و با ارائه الگوریتم‌هایی برای ساخت مجموعه عدم قطعیت بیضی‌گون توام، محافظه‌کارانه بودن مدل‌های بهینه‌سازی استوار را محدود کردند.

در این مقاله مشابه [۱۰] یک جواب صریح برای مسئله انتخاب سبد سهام با مینیمم‌سازی $CVaR$ با عدم قطعیت توزیع (هیچ اطلاعی از توزیع بازده دارایی‌های ریسکی وقتی میانگین و واریانس/کوواریانس معلوم‌اند وجود ندارد) ارائه می‌کنیم. چون دارایی بدون ریسک جزئی از تئوری انتخاب سبد سهام بهینه است و قرار گرفتن آن در میان دارایی‌ها باعث موقعیت‌هایی با فاصله زیاد در سبد سهام می‌شود، برای به‌دست آوردن سبد سهام بهینه به فرم بسته، معیار $CVaR$ را با قید حداکثر زیان به‌کار می‌بریم. خاطرنشان شود که در [۱۰] همین مسئله با قید حداقل بازده مورد مطالعه قرار گرفته است. در بخش دوم سبد سهام میانگین $CVaR$ استوار را معرفی کرده و سبد سهام بهینه در بدترین حالت $CVaR$ با قید حداکثر زیان و با عدم قطعیت در توزیع را به‌دست می‌آوریم. در بخش سوم مسئله $CVaR$ استوار را با این فرض که میانگین بازده در مجموعه عدم قطعیت بیضی‌گون قرار دارد و توزیع بازده دارایی‌ها مبهم است در نظر می‌گیریم و با حل مسئله به فرم بسته، سبد سهام بهینه را محاسبه می‌کنیم. در بخش چهارم یک جواب صریح برای مسئله $CVaR$ استوار با عدم حضور دارایی بدون ریسک به‌دست می‌آوریم. در بخش پنجم با استفاده از داده‌های سهام $S\&P۵۰۰$ به بررسی نتایج به‌دست آمده می‌پردازیم. در بخش شش نیز نتیجه‌گیری را بیان می‌کنیم.

۲ میانگین $CVaR$ استوار

فرض کنید X متغیر تصادفی زیان و $\theta \in (۰, ۱)$ سطح اطمینان در یک دوره زمانی مشخص باشد، در این‌صورت VaR به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$VaR_\theta(x) = \min\{c|p(x \leqslant c) \geqslant \theta\}$$

که نشان‌دهنده بیشترین زیان در سطح θ٪ و کمترین زیان در سطح $(۱ - \theta)$٪ است. همچنین فرض کنید $F_\theta(x, \gamma)$ تابع توزیع زیان متغیر تصادفی X است. $CVaR$ که مقدار زیان مورد انتظار بیشتر از VaR است به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$CVaR_\theta(x) = E[X|X \geqslant VaR_\theta(x)].$$

راکفلر و یوراسیو [۱۱] با استفاده از تعریف VaR و $CVaR$ تابع جدیدی ارائه کردند و نشان دادند که محاسبه $CVaR$ با مینیمم‌کردن تابع زیر به‌دست می‌آید:

$$F_\theta(x, \gamma) = \{\gamma + \frac{۱}{۱ - \theta} E[(f(x, \xi) - \gamma)]_+\},$$

که در آن $[t]^+ = \max\{۰, t\}$ محدب و متناهی است و داریم:

$$CVaR_\theta = \min_{\gamma \in R} F_\theta(x, \gamma).$$

مجموعه محدب متشکل از مقادیری از γ که F_θ را مینیمم می‌کند شامل VaR_θ می‌شود که کمترین مقدار در مجموعه است.

حال یک بازار مالی با n دارایی ریسکی به‌علاوه یک دارایی بدون ریسک را در نظر بگیرید. فرض کنید ξ و R به‌ترتیب نرخ بازده دارایی‌های ریسکی و بدون ریسک است. تابع زیان را که یک تابع از بردار $x \in R^n$ (تخصیص به دارایی‌های ریسکی) است، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,\xi) = -(x^T\xi + R(1 - x^Te)),$$

که در آن e نشان‌دهنده یک بردار n تایی واحد است. همچنین فرض کنید میانگین بازده مازاد به‌صورت $\tilde{\mu} = \mu - \mathrm{Re}$ تعریف می‌شود و $h = \tilde{\mu}^T\Gamma^{-1}\tilde{\mu}$ بزرگترین نسبت شارپ به‌دست آمده در بازار است. از آنجایی که معیار ریسک $CVaR$ به‌صورت تابعی از توزیع زیان تعریف می‌شود ابتدا باید از توزیع آن اطلاع داشته باشیم. اگر هیچ اطلاعاتی از توزیع آن در دسترس نباشد به‌سختی می‌توان جواب دقیقی از $F_\theta(x,\gamma)$ را به‌دست آورد. بنابراین بدترین حالت $CVaR$ وقتی‌که ξ توزیعی از مجموعه

$$D = \{\pi | E_\pi[\xi] = \bar{\mu}, \mathrm{cov}_\pi[\xi] = \Gamma \succ 0\}$$

دارد (مجموعه همه توزیع‌های نامعلوم با میانگین $\bar{\mu}$ و کوواریانس Γ معلوم) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} RCVaR_\alpha(x) &= \max_{\pi\in D} CVaR_\alpha(x) \\ &= \max_{\pi\in D}\min_{\gamma\in R} F_\alpha(x,\xi). \end{aligned}$$

عملگر سوپریمم را جایگزین ماکزیمم می‌کنیم چون در همه حالت‌ها فرض می‌کنیم سوپریمم اتفاق می‌افتد و یک جواب صریح برای مسئله انتخاب سبد سهام مینیمم $CVaR$ در بدترین حالت تحت قید حداکثر زیان به‌دست می‌آوریم.

قضیه و دو لم زیر در اثبات قضیه اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

قضیه **۱.۲**. [۱۲] مسئله اولیه

$$\min_{x\in X}\left\{f(x) = \sup_{P\in M} E_P[F(x,\xi)]\right\}$$

و دوگان آن

$$\max_{p\in M}\left\{g(p) = \inf_{x\in X} E_P[F(x,\xi)]\right\}$$

را در نظر بگیرید. فرض‌کنید مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}^n$ یک زیر مجموعه ناتهی، محدب و بسته و M (مجموعه توزیع‌ها یا اندازه‌های احتمال) محدب باشد. همچنین $F(x,\xi)$ به ازای هر $\xi \in \theta$ در x محدب باشد و مسئله اولیه، مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه ناتهی و کراندار داشته باشد. آن‌گاه بین مساله اولیه و دوگان، شکاف دوگانی وجود ندارد.

لم **۲.۲**. [۳] فرض کنید $A = \{a^T\mu | E[\xi] = \mu, \mathrm{cov}(\xi) = \Gamma\}$ و $B = \{\eta | E[\eta] = a^T\mu, Var(\eta) = a^T\Gamma a\}$، آن‌گاه برای هر $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ داریم $A = B$.

لم **۳.۲**. [۳] اگر $X \sim (\mu, \sigma^2)$ آن‌گاه

$$\sup_{X\sim(\mu,\sigma^2)} E[(r-X)_+] = \frac{r - \mu + \sqrt{\sigma^2 + (r-\mu)^2}}{2}.$$

قضیه زیر یک جواب صریح از مسئله انتخاب سبد سهام مینیمم‌سازی بدترین $CVaR$ با یک قید حداکثر زیان، یعنی

$$\begin{aligned} \min_{x\in R^n} \quad & RCVaR_\theta(x) \\ s.t. \quad & x^T\Gamma x \leqslant \sigma_0 \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

ارائه می‌دهد.

قضیه **۴.۲**. اگر $\theta \leqslant \frac{4h}{1+4h}$، آن‌گاه مسئله (۱.۲) دارای جواب بهینه $x^* = \frac{\sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-1}\tilde{\mu}$ است. همچنین اگر $\theta > \frac{4h}{1+4h}$، آن‌گاه مسئله (۱.۲) بی‌کران است.

اثبات. چون مجموعه D محدب است و تابع $\gamma + \frac{۱}{۱-\alpha}E[(f(x,\xi)-\gamma)]_+$ به ازای هر ξ نسبت به γ محدب است بنابر قضیه ۱.۲ می‌توانیم جای sup و min را عوض کنیم، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\min_{\gamma\in R}\max_{\pi\in D} F_\theta(x,\gamma) &= \min_{\gamma\in R}\gamma + \frac{۱}{۱-\theta}\max_{\pi\in D} E[(-(x^T\xi + R(۱-x^Te))-\gamma)_+] \\
&= \min_{\gamma\in R}\gamma + \frac{۱}{۱-\theta}\max_{\pi\in D} E[(-x^T\xi - R + Rx^Te-\gamma)_+] \\
&= \min_{\gamma\in R}\gamma + \frac{۱}{۱-\theta}\max_{\xi\sim(\mu,\gamma)} E[(-R-\gamma-x^T(\xi-\mathrm{Re}))_+] \qquad (۲.۲)\\
&= \min_{\gamma\in R}\gamma + \frac{۱}{۱-\theta}\max_{\eta\sim(\nu,\sigma^۲)} E[(-R-\gamma-\eta)_+] \qquad (۳.۲)\\
&= \min_{\gamma\in R}\gamma + \frac{۱}{۱-\theta}\frac{-R-\gamma-\nu+\sqrt{\sigma^۲+(-R-\gamma-\nu)^۲}}{۲}. \qquad (۴.۲)
\end{aligned}$$

عملگرهای ماکزیمم در (۲.۲) و (۳.۲) معادل‌اند، چون با فرض $\nu = x^T(\xi-\mathrm{Re})$ و $\sigma^۲ = x^T\Gamma x$ و با تغییر جزئی در لم ۲.۲ می‌توانیم مجموعه‌های معادل از توزیع‌های تصادفی تک متغیره زیر را بیان کنیم:

$$\begin{aligned}
D_۱ &= \{x^T(\xi-\mathrm{Re}) : \xi\sim(\mu,\Gamma)\},\\
D_۲ &= \{\eta : \eta\sim(\nu,\sigma^۲)\}.
\end{aligned}$$

تساوی (۴.۲) نیز از لم ۳.۲ نتیجه می‌شود. پس $RCVaR_\theta(x)$ مینیمم تابع زیر نسبت به γ است:

$$h_x(\gamma) = \gamma + \frac{۱}{۱-\theta}\frac{-R-\gamma-\nu+\sqrt{\sigma^۲+(R+\gamma+\nu)^۲}}{۲}.$$

برای یافتن مینیمم $h_x(\gamma)$ داریم:

$$h'_x(\gamma) = ۱ + \frac{۱}{۱-\theta}\frac{-۱+(R+\gamma+\nu)+(\sigma^۲+(R+\gamma+\nu)^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}{۲}$$

و

$$h''_x(\gamma) = \frac{۱}{۲(۱-\theta)}(\sigma^۲+(R+\gamma+\nu)^۲)^{-\frac{۳}{۲}}\sigma^۲.$$

چون $\theta > ۰$ پس $h''_x(\gamma) \geqslant ۰$، بنابراین $h_x(\gamma)$ محدب است و مینیمم آن در ریشه مشتق اول اتفاق می‌افتد:

$$h'_x(\gamma) = ۱ + \frac{۱}{۱-\theta}\frac{-۱+(R+\gamma+\nu)+(\sigma^۲+(R+\gamma+\nu)^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}{۲} = ۰,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
&۲\theta-۱ = (R+\gamma+\nu)/\sqrt{\sigma^۲+(R+\gamma+\nu)^۲},\\
&(۲\theta-۱)^۲ = \frac{(R+\gamma+\nu)^۲}{\sigma^۲+(R+\gamma+\nu)^۲},\\
&(۲\theta-۱)^۲(\sigma^۲+(R+\gamma+\nu)^۲) = (R+\gamma+\nu)^۲,\\
&(۲\theta-۱)^۲\sigma^۲ + (۲\theta-۱)^۲(R+\gamma+\nu) = (R+\gamma+\nu)^۲,\\
&(۲\theta-۱)^۲\sigma^۲ = (R+\gamma+\nu)^۲(۱-(۲\theta-۱)^۲),\\
&(R+\gamma+\nu)^۲ = \frac{(۲\theta-۱)^۲\sigma^۲}{۱-(۲\theta-۱)^۲} = \frac{(۲\theta-۱)^۲\sigma^۲}{۱-۴\theta^۲+۴\theta-۱},\\
&R+\gamma+\nu = \frac{(۲\theta-۱)\sigma}{\sqrt{۴\theta-۴\theta^۲}}.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\gamma_x^* = -R - \nu + \frac{(۲\theta - ۱)\sigma}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}}.$$

بنابراین با قرار دادن γ_x^* در $h_x(\gamma)$ می‌توانیم مقدار مین‌ماکس را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
\min_{\gamma\in\mathbb{R}} \max_{\pi\in\mathbb{D}} F_\theta(x,\gamma) &= \min_{\gamma\in\mathbb{R}} h_x(\gamma) \\
&= h_x(\gamma_x^*) \\
&= -R - \nu + \frac{(۲\theta - ۱)\sigma}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}} + \frac{۱}{۱-\theta}\frac{\frac{(۲\theta-۱)\sigma}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}} + \sqrt{\sigma^۲ + \frac{(۲\theta-۱)^۲}{۴\theta(\theta-۱)}\sigma^۲}}{۲} \\
&= -R - \nu + \frac{(۲\theta - ۱)\sigma}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}} + \frac{۱}{۱-\theta}\frac{\sigma}{۲}\left(\frac{-۲\theta + ۱ + ۱}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}}\right) \\
&= -R - \nu + \frac{(۲\theta - ۱)\sigma}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}} + \frac{۱}{۱-\theta}\frac{\sigma(۱-\theta)}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}} \\
&= -R - \nu + \frac{۲\theta\sigma}{۲\sqrt{\theta}\sqrt{۱-\theta}} \\
&= -R - \nu + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}\sigma} \\
&= -R - (\mu - \mathrm{Re})^T x + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x}.
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$RCVaR_\theta(x) = -R - (\mu - \mathrm{Re})^T x + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x}.$$

اکنون تابع لاگرانژ مسئله (۱.۲) را در نظر می‌گیریم:

$$L(x,\lambda) = -R - (\mu - \mathrm{Re})^T x + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x} + \lambda(x^T\Gamma x - \sigma_۰).$$

با فرض $k = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}$ و بنابر شرایط مرتبه اول داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= -(\mu - \mathrm{Re}) + k\frac{\Gamma x}{۲\sqrt{x^T\Gamma x}} + \lambda\Gamma x = ۰ \\
&= -\tilde{\mu} + \left(\frac{k}{۲\sqrt{\sigma_۰}} + \lambda\right)\Gamma x = ۰,
\end{aligned}$$

پس

$$\Gamma x = \frac{\tilde{\mu}}{\frac{k}{۲\sqrt{\sigma_۰}} + \lambda}$$

که نتیجه می‌دهد

$$x = \frac{۲\sqrt{\sigma_۰}}{k + ۲\sqrt{\sigma_۰\lambda}}\Gamma^{-۱}\tilde{\mu}. \tag{۵.۲}$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^T \Gamma x - \sigma_\circ \leqslant \circ,$$

بنابراین $x^T \Gamma x \leqslant \sigma_\circ$. با فرض $x^T \Gamma x = \sigma_\circ$ و قراردادن (۵.۲) در رابطه اشاره شده و حل آن مقدار λ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&(\frac{۲\sqrt{\sigma_\circ}}{k+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda}\Gamma^{-۱}\tilde{\mu})^T \Gamma (\frac{۲\sqrt{\sigma_\circ}}{k+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda}\Gamma^{-۱}\tilde{\mu}) = \sigma_\circ,\\
&\frac{۴\sigma_\circ}{(k+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda)^۲}\tilde{\mu}^T\Gamma^{-۱}\Gamma\Gamma^{-۱}\tilde{\mu} = \sigma_\circ,\\
&(k+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda)^۲ = ۴h,\\
&k+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda = ۲\sqrt{h},\\
&۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda = ۲\sqrt{h}-k,\\
&\lambda = \frac{۲\sqrt{h}-k}{۲\sqrt{\sigma_\circ}}. \qquad (۶.۲)
\end{aligned}$$

مسئله دارای جواب بهینه است هرگاه داشته باشیم $\lambda \geqslant \circ$. چون $\sigma_\circ > \circ$ بنابراین

$$۲\sqrt{h}-k \geqslant \circ$$

در نتیجه داریم:

$$k^۲ \leqslant ۴h. \qquad (۷.۲)$$

با جای‌گذاری $k = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}$ در عبارت (۷.۲) کران θ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\frac{\theta}{۱-\theta} \leqslant ۴h,\\
&\theta \leqslant ۴h - ۴h\theta,\\
&\theta(۱+۴h) \leqslant ۴h,\\
&\theta \leqslant \frac{۴h}{۱+۴h}.
\end{aligned}$$

همچنین با قرار دادن (۶.۲) در معادله (۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{۲\sqrt{\sigma_\circ}}{k+۲\sqrt{\sigma_\circ}(\frac{۲\sqrt{h}-k}{۲\sqrt{\sigma_\circ}})}\Gamma^{-۱}\tilde{\mu}\\
&= \frac{\sqrt{\sigma_\circ}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-۱}\tilde{\mu}.
\end{aligned}$$

بنابراین برای $\theta \leqslant \frac{۴h}{۱+۴h}$ جواب بهینه مسئله به‌صورت زیر است:

$$x^* = \frac{\sqrt{\sigma_\circ}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-۱}\tilde{\mu}.$$

اگر $\theta > \frac{۴h}{۱+۴h}$ آن‌گاه داریم:

$$\theta > \frac{۴h}{۱+۴h} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}} > ۲\sqrt{h} \Leftrightarrow ۲\sqrt{h}-k < \circ.$$

چون $\sigma_\circ > \circ$ پس $\frac{۲\sqrt{h}-k}{۲\sigma_\circ} < \circ$ بنابراین مقدار $\lambda < \circ$ است، یعنی دوگان نشدنی است. اکنون چون مسئله (۱.۲) شدنی است، پس بنابر قضیه اساسی دوگان، مسئله بی‌کران می‌شود. □

۳ استوار $CVaR$ با عدم قطعیت توزیع و میانگین بازده

حال مسئله انتخاب سبد سهام زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\max_{\pi\in D,\bar{\mu}\in U_{\bar{\mu}}} CVaR_\theta(x) &= \max_{\bar{\mu}\in U_{\bar{\mu}}}\max_{\pi\in D}\min_{\gamma\in R} F_\theta(x,\gamma)\\ &= \max_{\bar{\mu}\in U_{\bar{\mu}}} -R-(\bar{\mu}-\mathrm{Re})^T x+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x}\end{aligned}$$

که در آن $\bar{\mu}$ متعلق به مجموعه عدم قطعیت بیضی‌گون به‌صورت زیر است:

$$U_{\bar{\mu}}=\{\bar{\mu}\Big|\Big\|\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\bar{\mu}-\mu^{nom})\Big\|_2\leqslant\sqrt{\varepsilon}\},$$

و μ^{nom} نشان‌دهنده بردار میانگین بازده اسمی است که به عنوان برآورد در دسترس میانگین بازده در نظر گرفته می‌شود. پارامتر ε نیز به عنوان معیار اطمینان برآورد میانگین بازده است.
ابتدا لم زیر را که در اثبات قضیه اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان می‌کنیم.

لم **۱.۳**. برای x داده شده جواب بهینه مسئله

$$\begin{aligned}&\max \quad (\bar{\mu}-\mathrm{Re})^T x\\ &s.t. \quad \left\|\Gamma^{-1/2}(\bar{\mu}-\mu^{nom})\right\|_2\leqslant\sqrt{\varepsilon}\end{aligned}$$

نسبت به $\bar{\mu}$ به‌صورت $\bar{\mu}^*=\mu^{nom}-\mathrm{Re}+\left\|\Gamma^{1/2}x\right\|\sqrt{\varepsilon}$ است.

اثبات. فرض می‌کنیم $z=\Gamma^{-1/2}(\bar{\mu}-\mu^{nom})$ است. داریم $\Gamma^{1/2}z=\bar{\mu}-\mu^{nom}$ و در نتیجه $\bar{\mu}=\mu^{nom}+\Gamma^{1/2}z$. پس مسئله معادل زیر را داریم:

$$\begin{aligned}&\max \quad (\mu^{nom}-\mathrm{Re}+\Gamma^{1/2}z)^T x\\ &s.t. \quad \|z\|_2\leqslant\sqrt{\varepsilon},\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}(\mu^{nom}-\mathrm{Re})^T x+&\max z^T\Gamma^{1/2}x\\ &s.t. \quad \|z\|_2\leqslant\sqrt{\varepsilon}.\end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$z^T\Gamma^{1/2}x\leqslant\|z\|\left\|\Gamma^{1/2}x\right\|\leqslant\left\|\Gamma^{1/2}x\right\|\sqrt{\varepsilon}$$

که با انتخاب $z=\sqrt{\varepsilon}\frac{\Gamma^{1/2}x}{\left\|\Gamma^{1/2}x\right\|}$ تساوی برقرار می‌شود. در نتیجه جواب بهینه مسئله برابر است با

$$\bar{\mu}^*=\mu^{nom}-\mathrm{Re}+\left\|\Gamma^{1/2}x\right\|\sqrt{\varepsilon}.$$

□

اکنون مسئله انتخاب سبد سهام $RCVaR$ استوار را در نظر می‌گیریم:

$$RRCVaR_\theta(x)=\max_{\bar{\mu}\in U_{\bar{\mu}}}\max_{\pi\in D}\min_{\gamma\in R} F_\theta(x,\gamma)$$

مانند قضیه ۴.۲ وقتی‌که $\bar{\mu}$ ثابت است، مسئله ماکس‌مین درونی را به‌ترتیب روی $\pi \in D$ و $\gamma \in R$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\max_{\bar{\mu}\in U_{\bar{\mu}}} RCVaR_\theta(x) &= \max_{\bar{\mu}\in U_{\bar{\mu}}} -R-(\bar{\mu}-\mathrm{Re})^T x+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x}\\ &= -R-(\mu^*)^T x+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{x^T\Gamma x}+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x} \qquad (۱.۳)\end{aligned}$$

که در آن تساوی (۱.۳) از لم ۱.۳ نتیجه می‌شود و $\mu^* = \mu^{nom} - \mathrm{Re}$. بنابراین مسئله مینیمم‌سازی سبد سهام $RRCVaR$ با قید حداکثر زیان به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&\min_{x\in R^n} -R-x^T\mu^*+(\sqrt{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}})\sqrt{x^T\Gamma x} \qquad (۲.۳)\\ &s.t. \quad x^T\Gamma x \leqslant \sigma_۰.\end{aligned}$$

قضیه **۲.۳**. اگر $\theta \leqslant \frac{(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}{۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}$، آن‌گاه مسئله (۲.۳) دارای جواب بهینه $x^* = \frac{\sqrt{\sigma_۰}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-۱}\mu^*$ است. همچنین اگر $\theta > \frac{(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}{۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}$، آن‌گاه مسئله (۲.۳) بی‌کران است.

اثبات. مشابه با اثبات قضیه ۴.۲ تابع لاگرانژ مسئله به‌صورت زیر است:

$$L(x,\lambda) = -R-x^T\mu^*+(\sqrt{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}})\sqrt{x^T\Gamma x}+\lambda(x^T\Gamma x-\sigma_۰).$$

با فرض $k = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}$ و بنابر شرایط مرتبه اول داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\mu^*+(\sqrt{\varepsilon}+k)\frac{\Gamma x}{۲\sqrt{x^T\Gamma x}}+\lambda\Gamma x = ۰.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&(\sqrt{\varepsilon}+k)\frac{\Gamma x}{۲\sqrt{\sigma_۰}}+\lambda\Gamma x = \mu^*,\\ &(\frac{(\sqrt{\varepsilon}+k)}{۲\sqrt{\sigma_۰}}+\lambda)\Gamma x = \mu^*,\\ &\Gamma x = \frac{۲\sqrt{\sigma_۰}}{(\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_۰}\lambda}\mu^*.\end{aligned}$$

در نتیجه مقدار x برابر است با

$$x = \frac{۲\sqrt{\sigma_۰}}{(\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_۰}\lambda}\Gamma^{-۱}\mu^*.$$

همچنین داریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^T\Gamma x-\sigma_۰ \leqslant ۰,$$

که با فرض $x^T\Gamma x = \sigma_\circ$ مقدار λ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{۲\sqrt{\sigma_\circ}}{(\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda}\Gamma^{-۱}\mu^*)^T\Gamma(\frac{۲\sqrt{\sigma_\circ}}{(\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda}\Gamma^{-۱}\mu^*)=\sigma_\circ,\\
&\frac{۴\sigma_\circ}{((\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda)^۲}\mu^{*T}\Gamma^{-۱}\mu^*=\sigma_\circ,\\
&((\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda)^۲=۴h,\\
&(\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda=۲\sqrt{h},\\
&۲\sqrt{\sigma_\circ}\lambda=۲\sqrt{h}-(\sqrt{\varepsilon}+k),\\
&\lambda=\frac{۲\sqrt{h}-(\sqrt{\varepsilon}+k)}{۲\sqrt{\sigma_\circ}}.
\end{aligned}
$$

مسئله دارای جواب بهینه است هرگاه داشته باشیم $\lambda \geqslant \circ$، پس داریم:

$$
\begin{aligned}
&۲\sqrt{h}-(\sqrt{\varepsilon}+k)\geqslant \circ,\\
&k\leqslant ۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon},\\
&k^۲\leqslant (۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲.
\end{aligned}
$$

با قرار دادن مقدار k در عبارت فوق داریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta}{۱-\theta}\leqslant (۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲,\\
&\theta\leqslant (۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲-(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲\theta,\\
&\theta(۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲)\leqslant (۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲,\\
&\theta\leqslant \frac{(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}{۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}.
\end{aligned}
$$

حال با قرار دادن λ در x مقدار بهینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{۲\sqrt{\sigma_\circ}}{(\sqrt{\varepsilon}+k)+۲\sqrt{\sigma_\circ}(\frac{۲\sqrt{h}-(\sqrt{\varepsilon}+k)}{۲\sqrt{\sigma_\circ}})}\Gamma^{-۱}\mu^*\\
&=\frac{\sqrt{\sigma_\circ}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-۱}\mu^*.
\end{aligned}
$$

پس برای $\theta \leqslant \frac{(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}{۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}$ جواب بهینه برابر است با

$$x^*=\frac{\sqrt{\sigma_\circ}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-۱}\mu^*.$$

به‌طور مشابه با اثبات قضیه ۴.۲ برای $\theta > \frac{(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}{۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}$ مسئله (۲.۳) بی‌کران است. □

۴ استوار $CVaR$ با عدم قطعیت توزیع و میانگین بازده و عدم حضور دارایی بدون ریسک

اکنون مسئله بخش قبل را در حالت عدم حضور دارایی بدون ریسک و با قید حداکثر زیان در نظر می‌گیریم. در این حالت تابع زیان به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x,\xi)=-x^T\xi.$$

تابع کمکی مسئله نیز به‌صورت زیر است:

$$F_\theta(x,\gamma)=\gamma+\frac{۱}{۱-\theta}E[(-x^T\xi-\gamma)_+].$$

قضیه **۱.۴**. مسئله $CVaR$ استوار با عدم قطعیت در توزیع و میانگین بازده

$$\min_{x\in R^n}\max_{\bar\mu\in U_{\bar\mu}}\max_{\pi\in D} CVaR_\theta(x) \qquad (۱.۴)$$
$$s.t.\quad x^T\Gamma x\leqslant \sigma_۰$$

را در نظر بگیرید. اگر $\theta\leqslant\frac{(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}{۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}$، آن‌گاه مسئله دارای جواب بهینه $x^*=\frac{\sqrt{\sigma_۰}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-۱}\mu^{nom}$ است. همچنین اگر $\theta>\frac{(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}{۱+(۲\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^۲}$، آن‌گاه مسئله بی‌کران است.

اثبات. مسئله را با این فرض که خطای میانگین بازده‌ها، به بیضی

$$U_{\bar\mu}=\{\bar\mu\Big|\Big\|\Gamma^{-\frac{۱}{۲}}(\bar\mu-\mu^{nom})\Big\|_۲\leqslant\sqrt{\varepsilon}\},$$

محدود است، که در آن μ^{nom} نشان‌دهنده بردار میانگین بازده اسمی است بررسی می‌کنیم. مشابه با اثبات قضیه ۴.۲، برای $\bar\mu$ دلخواه داریم:

$$\max_{\pi\in D}CVaR_\theta(x)=-x^T\bar\mu+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x}.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\max_{\bar\mu\in U_{\bar\mu}}\max_{\pi\in D}CVaR_\theta(x)&=\max_{\bar\mu\in U_{\bar\mu}}-x^T\bar\mu++\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x}\\&=-x^T\mu^{nom}+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}\sqrt{x^T\Gamma x}+\sqrt{\varepsilon}\sqrt{x^T\Gamma x},\end{aligned}\qquad (۲.۴)$$

که در آن تساوی (۲.۴) از لم ۱.۳ نتیجه می‌شود. پس به مسئله زیر می‌رسیم:

$$\min_{x\in R^n}-x^T\mu^{nom}+(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}+\sqrt{\varepsilon})\sqrt{x^T\Gamma x}$$
$$s.t.\quad x^T\Gamma x\leqslant\sigma_۰.$$

تابع لاگرانژ مسئله نیز به‌صورت زیر است:

$$L(x,\lambda)=-x^T\mu^{nom}+(\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{۱-\theta}}+\sqrt{\varepsilon})\sqrt{x^T\Gamma x}+\lambda(x^T\Gamma x-\sigma_۰).$$

از شرایط مرتبه اول مقدار x به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x}=-\mu^{nom}+(k+\sqrt{\varepsilon})\frac{\Gamma x}{۲\sqrt{x^T\Gamma x}}+\lambda\Gamma x=۰,\\&(\frac{k+\sqrt{\varepsilon}}{۲\sqrt{\sigma_۰}}+\lambda)\Gamma x=\mu^{nom},\\&x=\frac{۲\sqrt{\sigma_۰}}{(k+\sqrt{\varepsilon})+۲\sqrt{\sigma_۰}\lambda}\Gamma^{-۱}\mu^{nom},\end{aligned}$$

که در آن $k = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{1-\theta}}$ و $x^T\Gamma x = \sigma_\circ$. مقدار λ نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&(\frac{2\sqrt{\sigma_\circ}}{(k+\sqrt{\varepsilon})+2\sqrt{\sigma_\circ}\lambda}\Gamma^{-1}\mu^{nom})^T\Gamma(\frac{2\sqrt{\sigma_\circ}}{(k+\sqrt{\varepsilon})+2\sqrt{\sigma_\circ}\lambda}\Gamma^{-1}\mu^{nom}) = \sigma_\circ,\\
&\frac{4\sigma_\circ}{((k+\sqrt{\varepsilon})+2\sqrt{\sigma_\circ}\lambda)^2}(\mu^{nom})^T\Gamma^{-1}(\mu^{nom}) = \sigma_\circ,\\
&((k+\sqrt{\varepsilon})+2\sqrt{\sigma_\circ}\lambda)^2 = 4h,\\
&(k+\sqrt{\varepsilon})+2\sqrt{\sigma_\circ}\lambda = 2\sqrt{h},\\
&\lambda = \frac{2\sqrt{h}-(k+\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\sigma_\circ}}.
\end{aligned}
$$

اگر $\lambda \geqslant \circ$ در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{h}-(k+\sqrt{\varepsilon}) \geqslant \circ,\\
&k+\sqrt{\varepsilon} \leqslant 2\sqrt{h},\\
&k \leqslant 2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon},\\
&k^2 \leqslant (2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2,\\
&\frac{\theta}{1-\theta} \leqslant (2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2,\\
&\theta \leqslant (2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2-(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2\theta,\\
&\theta(1+(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2) \leqslant (2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2,\\
&\theta \leqslant \frac{(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2}{1+(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2}.
\end{aligned}
$$

همچنین با قرار دادن مقدار λ در x جواب بهینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2\sqrt{\sigma_\circ}}{(k+\sqrt{\varepsilon})+2\sqrt{\sigma_\circ}(\frac{2\sqrt{h}-(k+\sqrt{\varepsilon})}{2\sqrt{\sigma_\circ}})}\Gamma^{-1}\mu^{nom}\\
&= \frac{\sqrt{\sigma_\circ}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-1}\mu^{nom}.
\end{aligned}
$$

پس برای $\theta \leqslant \frac{(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2}{1+(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2}$ جواب بهینه برابر است با

$$x^* = \frac{\sqrt{\sigma_\circ}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-1}\mu^{nom}.$$

به‌طور مشابه برای $\theta > \frac{(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2}{1+(2\sqrt{h}-\sqrt{\varepsilon})^2}$ مسئله (۱.۴) بی‌کران است. □

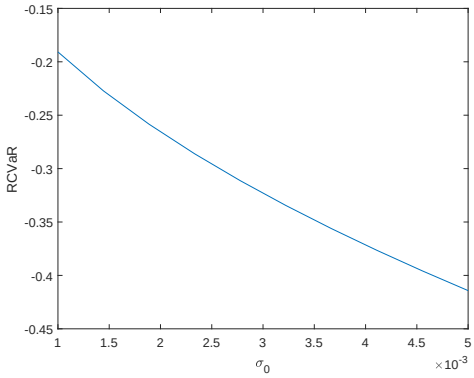
نتیجه **۲.۴**. مسئله $CVaR$ استوار با عدم قطعیت در توزیع را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x\in R^n}\max_{\pi\in D} CVaR_\theta(x)\\
&s.t. \quad x^T\Gamma x \leqslant \sigma_\circ
\end{aligned}
$$

اگر $\theta \leqslant \frac{4h}{1+4h}$، آن‌گاه این مسئله دارای جواب بهینه $x^* = \frac{\sqrt{\sigma_\circ}}{\sqrt{h}}\Gamma^{-1}\mu$ است. اگر $\theta > \frac{4h}{1+4h}$، آن‌گاه این مسئله بی‌کران است.

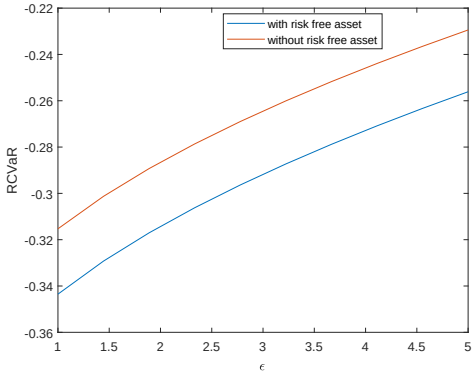
۵ نتایج عددی

در این بخش با استفاده از داده‌های ۵۰ سهم از سهام $S\&P۵۰۰$ رفتار $RCVaR$ را بررسی می‌کنیم. شکل (۱) مقدار $RCVaR$ را برای مقادیر مختلف σ_0 نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش σ_0، مقدار $RCVaR$ شیب نزولی دارد که با واقعیت منطبق است.



شکل ۱: نمودار $RCVaR$ برای مقادیر مختلف σ_0

همچنین نمودار $RCVaR$ به‌ازای مقادیر مختلف ε (پارامتر عدم قطعیت) در شکل (۲) در حالت با و بدون دارایی بدون ریسک آمده است. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش ε مقدار $RCVaR$ افزایشی است.



شکل ۲: نمودار $RCVaR$ به‌ازای مقادیر مختلف ε با دارایی بدون ریسک و بدون دارایی بدون ریسک

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، مسئله بهینه‌سازی سبد سهام استوار $CVaR$ با دارایی بدون ریسک و با قید حداکثر زیان بیان شد و یک جواب صریح برای مسئله با عدم قطعیت توزیع به‌دست آمد. همچنین وقتی‌که علاوه بر ابهام توزیع، میانگین بازده نیز دارای عدم قطعیت است و با یک مجموعه عدم قطعیت بیضی‌گون مدل‌بندی شده است، یک جواب بهینه برای مسئله سبد سهام $CVaR$ استوار با دارایی بدون ریسک و عدم حضور دارایی بدون ریسک با قید حداکثر زیان به‌دست آمد و در پایان نیز نتایج به‌دست آمده با استفاده از سهام $S\&P۵۰۰$ مورد بررسی قرار گرفت.

فهرست منابع

[1] Best, M.J., 2010. Portfolio Optimization, Chapman Hall/CRC. *Financial Mathematics Series, Boca Raton.*

[2] Black, F. and Litterman, R., 1992. Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal, 48*, pp.28-43. doi:10.2469/faj.v48.n5.28

[3] Chen, L., He, S. and Zhang, S., 2011. Tight Bounds for Some Risk Measures, with Applications to Robust Portfolio Selection. *Operations Research, 59*(4), pp.847-865. doi:10.1287/opre.1110.0950

[4] Kang, Z. and Li, Z., 2017. An exact solution to a robust portfolio choice problem with multiple risk measures under ambiguous distribution. *Mathematical Methods of Operations Research, 87*(7), pp.169-195. doi:10.1007/s00186-017-0614-0

[5] Kang, Z., Li, X., Li, Z. and Zhu, S., 2018. Data-driven robust mean-CVaR portfolio selection under distribution ambiguity. *Quantative finance, 19*(1), pp.105-121. doi:10.1080/14697688.2018.1466057

[6] Kou, S., Peng., X. and Heyde, C., 2013. External risk measures and Basel accords. *Mathematics of Operations Research, 38*(3), pp.393-417. doi:10.1287/moor.1120.0577

[7] Liu, J., Chen, Z., Lisser, A. and Xu, Z., 2017. Closed-Form optimal portfolios of distributionally robust mean-CVaR problems with unknown mean and variance. *Applied Mathematics and optimization, 79*(2), pp.671-693. doi:10.1007/s00245-017-9452-y

[8] Lotfi, S. and Zenios, S., 2018. Robust VaR and CVaR under joint ambiguity in distributions, means and covariances. *Euorpean Journal of Operational Research, 269*(2), pp.556-576. doi:10.1016/j.ejor.2018.02.003

[9] Natarajan, K., Sim, M. and Uichanco, J., 2010. Tractable Robust Expected Utility and Risk Models for Portfolio Optimization. *Mathematical Finance, 20*(4), pp.695-731. doi:10.1111/j.1467-9965.2010.00417.x

[10] Pac, B. and Pinar, M., 2014. Robust portfolio choice with CVaR and VaR under distribution and mean return ambiguity. *Top, 22*(3), pp.875-891. doi:10.1007/s11750-013-0303-y

[11] Rockafellar, T. and Uryasev, S., 2000. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *The Journal of Risk 2*(3), pp.21-42.

[12] Shapiro, A., 2011. Topics in Stochastic Programming. Universitie catholique de Louvain, Louvain-la-neuve.

[13] Zhu, S. and Fukushima, M., 2009. Worst-Case Conditional Value-at-Risk with Application to Robust Portfolio Management. *Operations Research, 57*(5), pp.1155-1168. doi:10.1287/opre.1080.0684

Robust mean-CVaR under distribution and mean return ambiguity

Havva Dadashi Einsheikh[(1)] [2] and Maziar Salahi[(1)]
[(1)] Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Guilan, Guilan, Iran

Communicated by: Hasan Mishmast Nehi

Received: 2 November 2024 Accepted: 19 October 2025

Abstract: In this paper, we consider the problem of optimal portfolio selection using CVaR measure for a financial market consisting of n risky assets and a riskless asset, where short positions are allowed. First, we obtain the distributionally robust portfolio when the distribution of return of assets is unknown but the mean return vector and variance/covariance matrix of assets are fixed. Then, we present an explicit solution for the problem of robust CVaR portfolio selection in the presence of a riskless asset and without the riskless asset with a maximum loss constraint, in the case that the mean return is in ellipsoidal uncertainty set and the distribution of returns unknown. Finally, the results are examined on the $S\&P500$ stock data.

Keywords: Robust portfolio, Conditional Value at Risk, distributional uncertainty, ellipsoidal uncertainty

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (M. Salahi) salahim@guilan.ac.ir