مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۱۰۲–۱۱۷

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.49000.2347

رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال در حل مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه

عباس حسینی [۱] و منصور سراج [۲] [۱]

[۱,۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: مازیار صلاحی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۱/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۰۶

چکیده: در این مقاله، یک روش ترکیبی و کارآمد برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه با ساختار سیگنومیال نامحدب ارائه شده است. این مسائل به دلیل پیچیدگی‌های ذاتی خود، چالش‌های قابل‌توجهی را در حوزه بهینه‌سازی ریاضی ایجاد می‌کنند. برخلاف روش های کلاسیک، روش پیشنهادی، نیازی به محدب‌سازی اولیه مسئله ندارد و امکان حل مستقیم مسائل نامحدب را فراهم می‌کند. این ویژگی، پیچیدگی محاسبات و زمان حل مسئله را به‌طور چشم‌گیری کاهش داده و رویکردی کارآمدتر از روش‌های کلاسیک ارائه می‌دهد. در گام اول این روش، جواب‌های ایده‌آل برای هر تابع هدف به‌صورت مستقل محاسبه می‌شوند. در همین راستا، از روش چارنز و کوپر [a] استفاده می‌شود تا هر تابع هدف از فرم کسری غیرخطی به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل شود. پس از آن رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال [b] به‌کار گرفته می‌شود تا مدل‌سازی دقیق‌تر تابع اهداف و محدودیت‌ها انجام شود و مقادیر بهین متغیرهای مسئله محاسبه گردند. این مقادیر، همان جواب‌های ایده‌آل برای هر تابع هدف هستند. در گام بعد، الگوریتم دینکل باخ [c] به‌کار گرفته می‌شود تا مسئله اصلی (برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه) به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تک‌هدفه تبدیل گردد، که این تبدیل، فرایند حل مسئله را تسهیل می‌کند. در گام آخر، با به‌کار گیری مجدد رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، مسئله تک‌هدفه حل شده و جواب بهین حاصل از آن، به عنوان یک جواب بهین پاراتو برای مسئله اصلی در نظر گرفته می‌شود. در پایان مقاله، یک مثال عددی برای ارزیابی صحت و کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه، روش چارنز و کوپر، الگوریتم دینکل باخ، برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال.

[a] Charnes & Cooper method
[b] Signomial geometric programming approach
[c] Dinkelbach's algorithm

[۱] نویسنده مسئول مقاله (A. Hosseini) abbas.hosseini.1398@gmail.com , (M. Saraj) msaraj@scu.ac.ir

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر، با پیشرفت سریع فناوری رایانه، حوزه بهینه‌سازی به یکی از حوزه‌های تحقیقاتی حائز اهمیت تبدیل شده است. در این میان، مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی، توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده‌اند و تحقیقات متعددی در این زمینه انجام شده است که در ادامه، به برخی از این پژوهش‌ها اشاره خواهد شد:
برنامه‌ریزی هندسی، برای اولین بار توسط ریچارد دافین[۲]، المور پترسون[۳] و کلارنس زینر[۴] [۴، ۵] به منظور به حداقل رساندن هزینه‌های طراحی یک مدل معرفی گردید. ماتیاس ارگوت[۵] [۶] کتابی با عنوان «بهینه‌سازی چند معیاره» تألیف نمود. فاطمه بازی‌کار[۶] و منصور سراج[۷] [۱] رویکردی را پیشنهاد دادند که می‌توان از روش نقطه مرجع، برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی چندهدفه خطی استفاده کرد. اوز[۸] و همکاران [۱۱]، روشی برای یافتن جواب‌های بهین پاراتو مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه، با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی ارائه دادند. چارنز و کوپر[۹] [۲] یک روش ساده و موثر، برای تبدیل یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی، به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی معرفی کردند. با استفاده از تکنیک چارنز و کوپر، سودیپتا میشرا[۱۰] و رشمی رنجان[۱۱] [۱۰]، یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی را با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال حل نمودند. همچنین از الگوریتم دینکل باخ [۳] می‌توان برای تبدیل یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی، به دنباله‌ای از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده نمود.

۲ برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال

در اواخر دهه ۱۹۶۰ و اوایل دهه ۱۹۷۰، ریچارد دافین و المور پترسون، در تحقیقات خود در زمینه "بهینه‌سازی جبری عمومی" برای اولین بار مفهوم سیگنومیال را معرفی کردند. سیگنومیال‌ها در واقع گسترشی از چندجمله‌ای‌های چندبُعدی (پوزینومیال‌ها) هستند که به ضرایب اجازه می‌دهند که هر عدد حقیقی دلخواهی باشند، نه صرفاً اعداد صحیح نامنفی. برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال یکی از روش‌های پیشرفته در بهینه‌سازی ریاضی است که برای حل مسائل پیچیده و غیرخطی در مقیاس بزرگ به‌کار می‌رود. این تکنیک نسخه تعمیم‌یافته‌ای از برنامه‌ریزی هندسی محسوب می‌شود و امکان مدل‌سازی دقیق‌تر اهداف و محدودیت ها را فراهم می‌سازد. از جمله کاربردهای مهم این روش می‌توان به طراحی مدارهای الکتریکی، تحلیل‌های آماری، بهینه‌سازی مالی و سایر حوزه‌های مهندسی اشاره کرد. در سال ۱۹۸۸، چارنز و کوپر شکل کلی یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال را ارائه دادند و روش‌هایی برای تقریب آن با یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی معرفی نمودند. این تکنیک، اغلب در مقایسه با سایر روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی، نتایج ریاضی بسیار بهتری در حل مسائل دنیای واقعی ارائه می‌دهد [۹].
اگر $G_t(X)$ برای $t = ۰, ۱, ۲, \ldots, q$، توابع حقیقی از متغیرهای مثبت $X = (x_۱, x_۲, \ldots, x_m)^t$ باشند، آنگاه، یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{X\subseteq\mathbb{R}^m} \quad & G_۰(X) = \sum_{i=۱}^{p} \sigma_i c_i \prod_{j=۱}^{m} x_j^{a_{ij}} \\ \text{s.t.} \quad & G_t(X) = \sum_{i=p+۱}^{n} \sigma_i c_i \prod_{j=۱}^{m} x_j^{a_{ij}} \le \zeta_t \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (t = ۱, ۲, \ldots, q) \\ & c_i, x_j > ۰, \sigma_i = \pm ۱, \ \zeta_t = \pm ۱, \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n; \ j = ۱, ۲, \ldots, m). \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

که در آن:
- $G_۰(X)$ تابع هدف مسئله اولیه است و باید کمینه شود.
- $G_t(X)$ برای $t = ۱, ۲, \ldots, q$، قیود مسئله اولیه هستند و باید رعایت شوند.
- c_i برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، ضرایب مثبت هستند.

[2] Richard Duffin
[3] Elmore Peterson
[4] Clarence Zener
[5] Matthias Ehrgott
[6] Fatemeh Bazikar
[7] Mansour Saraj
[8] Öz
[9] Charnes & Cooper
[10] Sudipta Mishra
[11] Rashmi Ranjan

- σ_i برای $i = ۱, ۲, ..., n$، علامت هر جمله را مشخص می‌کنند و مقدار آن‌ها می‌تواند ± ۱ باشد.
- x_j برای $j = ۱, ۲, ..., m$، متغیرهای تصمیم‌گیری هستند و مقدار آن‌ها مثبت است.
- a_{ij} توان‌های متغیرهای تصمیم‌گیری هستند و می‌توانند مقادیر حقیقی داشته باشند.
- ζ_t برای $t = ۱, ۲, ..., q$، مقادیر حدی برای قیود مسئله اولیه هستند و مقدار آن‌ها می‌تواند ± ۱ باشد.

در مسائل برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، اغلب از فرم دوگان مسئله برای یافتن جواب‌های بهین استفاده می‌شود. دلیل این امر آن است که فرم اولیه این مسائل معمولاً نامحدب بوده و حل مستقیم آن‌ها دشوار و زمان‌بر است. در مقابل، فرم دوگان معمولاً ساختار ریاضی ساده‌تری دارد و در بسیاری از موارد محدب است. این خاصیت موجب می‌شود که حل مسئله با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی محدب آسان‌تر و کارآمدتر باشد.

دوگان یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\max_{\delta \in \mathbb{R}^n} \quad \nu(\delta) = \zeta_۰ \left(\prod_{i=۱}^{n} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\sigma_i \delta_i} \prod_{t=۱}^{q} \lambda_t^{\zeta_t \lambda_t} \right)^{\zeta_۰} \tag{۲.۲}$$

$$\text{s.t.} \quad \zeta_t \lambda_t = \sum_{i=p+۱}^{n} \sigma_i \delta_i, \quad (t = ۱, ۲, \ldots, q)$$

$$\lambda_۰ = \sum_{i=۱}^{p} \sigma_i \delta_i = \zeta_۰ \qquad \text{(شرط نرمال)}$$

$$\sum_{i,j} \sigma_i a_{ij} \delta_i = ۰, a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n;\ j = ۱, ۲, \ldots, m) \quad \text{(شرایط متعامد)}$$

$$c_i, \delta_i > ۰, \sigma_i = \pm ۱, \zeta_۰ = \pm ۱, \zeta_t = \pm ۱, \quad (i = ۱, ۲, \ldots, n;\ t = ۱, ۲, \ldots, q) \quad \text{(شرط شدنی)}.$$

که در آن:

- $\nu(\delta)$ تابع هدف مسئله دوگان است و باید بیشینه شود.
- c_i برای $i = ۱, ۲, ..., n$، ضرایب مثبت هستند.
- δ_i برای $i = ۱, ۲, ..., n$، متغیرهای دوگان یا وزن‌های متناظر با تابع هدف و قیود مسئله اولیه هستند و میزان تأثیر هر کدام را در فرایند دوگان‌سازی مشخص می‌کنند.
- σ_i برای $i = ۱, ۲, ..., n$، علامت هر جمله را مشخص می‌کنند و مقدار آن می‌تواند ± ۱ باشد.
- $\lambda_۰$ مجموع وزن‌های مرتبط با جملات تابع هدف مسئله دوگان است.
- λ_t برای $t = ۱, ۲, ..., q$، مجموع وزن‌های مرتبط با جملات قیود مسئله دوگان است.
- a_{ij} توان متغیرهای تصمیم‌گیری در مسئله اولیه هستند که می‌توانند مقادیر حقیقی داشته باشند.
- $\zeta_۰$ و ζ_t برای $t = ۱, ۲, ..., q$، به ترتیب مقادیر حدی برای تابع هدف و قیود مسئله دوگان هستند و مقدار آن‌ها می‌تواند ± ۱ باشد.

تعریف **۱.۲**. برای هر مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال که دارای n جمله و m متغیر است، درجه سختی (DD)[۱۲] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DD = n - m - ۱. \tag{۳.۲}$$

در این‌صورت، اگر درجه‌ی سختی، بزرگ تر یا مساوی صفر شود $(DD \geq ۰)$، آنگاه با اعمال تکنیک‌های شناخته شده، مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال قابل حل بوده، و جواب بهین یافت می‌شود. اما اگر درجه‌ی سختی کوچکتر از صفر باشد $(DD < ۰)$، آنگاه مسئله، فاقد جواب خواهد بود؛ با این حال، می‌توان با استفاده از روش حداقل مربعات یا روش مینی–ماکس، یک جواب تقریبی برای این مسائل به‌دست آورد [۷].

لم **۲.۲**. [۹] اگر X، یک جواب شدنی برای مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، و δ، یک جواب شدنی برای دوگان مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال باشد، آنگاه:

$$G_۰(X) \geq \nu(\delta) \qquad \text{(نامساوی اولیه–دوگان)}. \tag{۴.۲}$$

[12] Degree of Difficulty

تحت همین شرایط، $G_{\circ}(X) = \nu(\delta)$؛ اگر و تنها اگر:

$$\delta_i^* = \begin{cases} \dfrac{g_i(X)}{\zeta_{\circ}\nu(\delta^*)}; & (i = ۱, ۲, \ldots, p) \\ \lambda_t g_i(X); & (i = p+۱, \ldots, n;\ t = ۱, ۲, \ldots, q). \end{cases} \tag{۵.۲}$$

که در آن:

- δ_i^* برای $i = ۱, ۲, ..., n$، مقدار بهین متغیرهای دوگان است.
- $g_i(X)$ برای $i = ۱, ۲, ..., p$، مقادیر مرتبط با جملات تابع هدف مسئله اولیه است و برای $i = p+۱, ..., n$، مقادیر مرتبط با جملات قیود مسئله اولیه می باشند.
- $\nu(\delta^*)$ مقدار بهین تابع هدف در مسئله دوگان است.
- λ_t: برای $t = ۱, ۲, ..., q$، مجموع وزن های مرتبط با قیود مسئله دوگان است.
- $\zeta_{\circ}$ یک مقدار حدی برای تابع هدف مسئله اولیه و مسئله دوگان است و مقدار آن می‌تواند ± ۱ باشد.

نتیجه **۳.۲**. [۹] هر جمله متناظر با تابع هدف، در مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، برابر است با:

$$g_i(X) = \zeta_{\circ}\delta_i^*\nu(\delta^*), \qquad (i = ۱, ۲, \ldots, p) \tag{۶.۲}$$

و هر جمله متناظر با قیود، در مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، برابر است با:

$$g_i(X) = \frac{\delta_i^*}{\lambda_t}, \qquad (i = p+۱, \ldots, n;\ t = ۱, ۲, \ldots, q). \tag{۷.۲}$$

نتیجه **۴.۲**. [۹] اگر $\zeta_{\circ} = +۱$ شود، آنگاه مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال به یک مسئله برنامه‌ریزی هندسی پوزینومیال تبدیل می‌شود که از لحاظ محاسبات و روند حل مسئله، بسیار ساده‌تر از مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال است. در همین‌راستا، در حل مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، ابتدا $\zeta_{\circ} = +۱$ قرار داده و مسئله را حل می‌کنیم. اگر مقدار متغیرهای دوگان، منفی به‌دست آید، آنگاه $\zeta_{\circ} = -۱$ قرار داده و مسئله را مجدداً حل می‌نماییم.

۳ برنامه‌ریزی چندهدفه

برنامه‌ریزی چندهدفه یکی از روش‌های پیشرفته در بهینه‌سازی ریاضی است که برای تصمیم‌گیری در مسائل پیچیده با اهداف متضاد به‌کار می‌رود. این رویکرد در حوزه‌های مختلفی مانند مهندسی، اقتصاد و مدیریت کاربرد دارد. برخلاف روش‌های سنتی بهینه‌سازی که تنها به دنبال یافتن یک جواب بهین هستند، برنامه‌ریزی چندهدفه مجموعه‌ای از جواب‌های بهین را ارائه می‌دهد که اغلب به‌عنوان مجموعه جواب‌های بهین پارتو شناخته می‌شوند. این ویژگی به تصمیم‌گیرندگان این امکان را می‌دهد تا با توجه به ترجیحات و اولویت‌های خود، مناسب‌ترین گزینه را از میان این مجموعه انتخاب کنند. در واقع، هدف اصلی این روش، دستیابی به نوعی تعادل میان اهداف متضاد است تا راهکاری جامع، کارآمد و قابل‌قبول فراهم شود [۶].

تعریف **۱.۳**. اگر $f_\alpha(X)$ برای $\alpha = ۱, ۲, \ldots, k$، توابعی حقیقی از متغیرهای مثبت $X = (x_۱, x_۲, \ldots, x_m)^t$ باشند، آنگاه، یک مجموعه از تمامی این توابع هدف را بردار هدف می‌گویند.

تعریف **۲.۳**. فضای اهداف یک فضای $k-$بُعدی $(k \geq ۲)$ می‌باشد که هر بعد از آن متناظر با مقدار یکی از k تابع هدف است.

هدف از یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه، بهینه‌سازی k تابع هدف، به‌صورت هم‌زمان است. بنابراین یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{X \subseteq \mathbb{R}^m} \quad & f(X) = (f_۱(X), f_۲(X), \ldots, f_k(X)) \\ \text{s.t.} \quad & R_t(X) \leq ۰; \qquad (t = ۱, ۲, \ldots, q). \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

در بیشتر موارد، توابع هدف این نوع مسائل در تضاد با یکدیگر قرار می‌گیرند؛ یعنی، کمینه‌سازی یک تابع هدف، منجر به بیشینه‌سازی تابع هدف دیگری می‌شود. بنابراین، آشکار است که در اغلب مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه، نقطه‌ای که بتواند به‌طور هم‌زمان، تمامی توابع هدف

را مینیمم سراسری نماید، به ندرت یافت می‌شود.

* جواب یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه، می‌تواند در یکی از وضعیت‌های زیر قرار بگیرد:
۱) جواب بهین کامل
۲) جواب کارا (بهین پاراتو)
۳) جواب بهین پاراتو ضعیف
۴) جواب ایده‌آل
۵) جواب بهین مُرجَّح
۶) جواب رضایت‌بخش.

تعریف **۳.۳**. هر جواب شدنی که بتواند تمامی توابع اهداف را به‌صورت هم‌زمان بهینه نماید، جواب بهین کامل می‌گویند. به عبارت دیگر $X^* \subseteq \mathbb{R}^m$ یک جواب بهین کامل برای مسئله (۱.۳) است اگر و تنها اگر به ازای هر $X \subseteq \mathbb{R}^m$:

$$f_\alpha(X^*) \leq f_\alpha(X), \qquad (\alpha = ۱, ۲, \ldots, k). \tag{۲.۳}$$

تعریف **۴.۳**. جواب شدنی $X^* \subseteq \mathbb{R}^m$ را یک جواب کارا (بهین پاراتو) برای مسئله (۱.۳) می‌نامیم، هرگاه $X \subseteq \mathbb{R}^m$ یافت نشود، به‌طوری‌که:

$$f_\alpha(X) \leq f_\alpha(X^*), \qquad (\alpha = ۱, ۲, \ldots, k) \tag{۳.۳}$$

و برای حداقل یک $۱ \leq \beta \leq k$:

$$f_\beta(X) < f_\beta(X^*), \qquad (\alpha \neq \beta). \tag{۴.۳}$$

* یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه می‌تواند تعداد بیشماری جواب بهین پاراتو داشته باشد. مجموعه‌ی این جواب‌ها در فضای اهداف، مرز پاراتو را به وجود می‌آورند.

* مفهوم کارایی، نخستین بار توسط فردی به نام ویلفردو پاراتو[۱۳] معرفی گردید؛ به همین دلیل، به جواب کارا، جواب بهین پاراتو نیز گفته می‌شود.

تعریف **۵.۳**. جواب شدنی $X^* \subseteq \mathbb{R}^m$ را یک جواب بهین پاراتو ضعیف برای مسئله (۱.۳) می‌نامیم، هرگاه $X \subseteq \mathbb{R}^m$ یافت نشود، به‌طوری‌که:

$$f_\alpha(X) < f_\alpha(X^*), \qquad (\alpha = ۱, ۲, \ldots, k). \tag{۵.۳}$$

نکته **۶.۳**. اگر X^w، X^p و X^c به ترتیب، نمایش مجموعه بردارهای جواب بهین پاراتو ضعیف، جواب بهین پاراتو، و جواب بهین کامل باشند، آنگاه رابطه‌ی زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$X^c \subseteq X^p \subseteq X^w. \tag{۶.۳}$$

تعریف **۷.۳**. جواب ایده‌آل، به جوابی در فضای اهداف اطلاق می‌شود که در آن، تمامی توابع هدف به‌طور مستقل به بهترین مقدار خود رسیده‌اند. این جواب که معمولاً به دلیل تضاد بین اهداف قابل دستیابی نیست، به عنوان یک مرجع نظری برای ارزیابی جواب‌های بهین پارتو استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، اگر $f_۱, f_۲, \ldots, f_k$ توابع هدف مسئله باشند، جواب ایده‌آل $z^* = (z_۱^*, z_۲^*, \ldots, z_k^*)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_\alpha^* = \min_{X \subseteq \mathbb{R}^m} f_\alpha(X), \qquad (\alpha = ۱, ۲, \ldots, k).$$

تعریف **۸.۳**. هر جواب بهینی که تصمیم‌گیرنده، از بین جواب‌های بهین پاراتو انتخاب کند، جواب بهین مُرجَّح نامیده می‌شود.

تعریف **۹.۳**. هر جواب که سطح انتظار تصمیم‌گیرنده را برآورده سازد، جواب رضایت‌بخش نامیده می‌شود. انتخاب این جواب، کاملاً بسته به نظر تصمیم‌گیرنده دارد و لزومی ندارد که از بین جواب‌های بهین پاراتو انتخاب شود.

[13] Vilfredo Pareto

۴ برنامه‌ریزی کسری غیرخطی

در مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی، تابع هدف، به‌صورت نسبت دو تابع حقیقی ظاهر می‌شود؛ به‌طوری‌که حداقل یکی از این توابع یا محدودیت‌های مسئله، غیرخطی باشند. برنامه‌ریزی کسری غیرخطی، تکنیک قدرتمندی برای فرمول‌بندی برنامه‌های علمی مرتبط با مدیریت پورتفولیو، مدیریت مالی، و برنامه‌ریزی تولید است [۱۳].
یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{X\subseteq\mathbb{R}^m} \quad & f(X)=\frac{N(X)}{D(X)} \\ \text{s.t.} \quad & R_t(X)\le 0; \qquad (t=1,2,\dots,q) \\ & D(X)\neq 0 \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

که در آن $N(X)$، $D(X)$ و $R_t(X)$، توابعی حقیقی، و حداقل یکی از آن‌ها غیرخطی است.

۵ روش چارنز و کوپر

به کمک روش چارنز و کوپر، که برای اولین بار در سال ۱۹۶۲ توسط ابراهام چارنز[14] و ویلیام کوپر[15] معرفی شد، می‌توانیم با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب، یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی را به یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی تبدیل نماییم [۲].
یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با q قید و m متغیر را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min_{X\subseteq\mathbb{R}^m} \quad & f(X)=\frac{C^TX+\eta}{D^TX+\theta} \\ \text{s.t.} \quad & AX(\le=\ge)B \\ & X\ge 0 \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

که در آن η و θ اعدادی حقیقی، و $C^T=(c_1,c_2,\dots,c_m)$، و $D^T=(d_1,d_2,\dots,d_m)$ و

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qm} \end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}$$

می‌باشد.

فرض کنیم ناحیه شدنی مسئله (۱.۵)، ناتهی باشد و مخرج کسر به ازای هر جواب شدنی، تنها مقادیر مثبت را اختیار کند.
حال، تغییر متغیر زیر را برای آن به‌کار می‌بریم:

$$z=\frac{1}{D^TX+\theta}. \tag{۲.۵}$$

در این‌صورت، با اعمال روش طرفین وسطین بر روی رابطه (۲.۵)، تساوی زیر حاصل می‌گردد که باید به عنوان یک محدودیت جدید به مسئله اضافه شود:

$$D^TXz+\theta z=1. \tag{۳.۵}$$

اکنون تغییر متغیر $X=\dfrac{Y}{z}$ به‌کار می‌بریم، و در نهایت، برنامه‌ریزی کسری خطی به شکل زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \min_{Y\subseteq\mathbb{R}^m,z\in\mathbb{R}} \quad & f(Y,z)=C^TY+\eta z \\ \text{s.t.} \quad & AY(\le=\ge)Bz \\ & D^TY+\theta z=1 \\ & Y>0,\ z>0. \end{aligned} \tag{۴.۵}$$

[14] Abraham Charnes
[15] William Cooper

مسئله فوق، یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، دارای $(q+1)$ قید و $(m+1)$ متغیر بوده و به روش دو فازی یا $M-$بزرگ قابل حل است.

۶ الگوریتم دینکل باخ

الگوریتم دینکل باخ یکی از تکنیک‌های شناخته شده برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی و غیرخطی است که در سال ۱۹۶۷ توسط ورنر دینکل باخ[۱۶] معرفی شد. این روش با حل دنباله‌ای از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی، امکان دستیابی به یک جواب بهین برای مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی را فراهم می‌کند. در هر تکرار از این روش، یک جواب بهین جدید محاسبه شده و سپس با بهره گیری از اطلاعات به‌دست آمده، فضای جست‌وجو محدودتر می‌شود تا در نهایت به جواب بهین مسئله اصلی دست یابیم.
این روش در ابتدا برای مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی محدب به‌کار گرفته شد. اما رودنز[۱۷] و همکارانش نشان دادند که می‌توان از این روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی نامحدب نیز استفاده کرد [۱۲].

قضیه ۱.۶. [۱۲] (قضیه جاگاناتان[۱۸]): مسئله (۲.۴) و تابع کمکی $\phi(\mu)=\min\limits_{X\subseteq\mathbb{R}^m}\{N(X)-\mu D(X)\ :\ \mu\in\mathbb{R}\}$ را در نظر بگیرید. بردار X^* یک جواب بهین برای مسئله (۲.۴) است اگر و تنها اگر X^* یک جواب بهین برای مسئله پارامتری زیر باشد:

$$\phi(\mu^*)=N(X^*)-\mu^*D(X^*)=0 \tag{۱.۶}$$

که در آن

$$\mu^*=\frac{N(X^*)}{D(X^*)}. \tag{۲.۶}$$

اثبات. برهان این قضیه در دو قسمت انجام می‌شود.

قسمت اوّل: اگر بردار X^*، یک جواب بهین برای مسئله (۲.۴) باشد، آنگاه X^* یک جواب بهین برای مسئله (۱.۶) خواهد بود.
برهان. اگر بردار X^*، یک جواب بهین برای مسئله (۲.۴) باشد، آنگاه:

$$\mu^*=\frac{N(X^*)}{D(X^*)}\leq\frac{N(X)}{D(X)},\qquad \forall X\subseteq\mathbb{R}^m$$

با فرض مثبت بودن $D(X)$، نامساوی فوق را در $D(X)$ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{N(X^*)}{D(X^*)}D(X)\leq N(X)\Rightarrow N(X)-\frac{N(X^*)}{D(X^*)}D(X)\geq 0,\qquad \forall X\subseteq\mathbb{R}^m$$

آنگاه با توجه به رابطه (۲.۶) می توان نوشت:

$$N(X)-\mu^*D(X)\geq 0,\qquad \forall X\subseteq\mathbb{R}^m$$

با مینیمم گرفتن از رابطه فوق روی $X\subseteq\mathbb{R}^m$ به‌دست می آوریم:

$$\min_{X\subseteq\mathbb{R}^m}\{N(X)-\mu^*D(X)\}=0$$

و به ازای $X=X^*$ داریم:

$$N(X^*)-\mu^*D(X^*)=0$$

که این نشان می‌دهد X^* یک جواب بهین برای مسئله (۱.۶) است.

[16] Werner Dinkelbach
[17] Ródenas
[18] Jagannathan's theorem

قسمت دوم: اگر بردار X^*، یک جواب بهین برای مسئله (۱.۶) باشد، آنگاه X^*، یک جواب بهین برای مسئله (۲.۴) است.
برهان. اگر بردار X^*، یک جواب بهین برای مسئله (۱.۶) باشد، آنگاه:

$$\circ = N(X^*) - \mu^* D(X^*) \leq N(X) - \mu^* D(X), \qquad \forall X \subseteq \mathbb{R}^m$$

با توجه به رابطه (۲.۶) می‌توان نوشت:

$$N(X) - \frac{N(X^*)}{D(X^*)} D(X) \geq \circ \Rightarrow N(X) \geq \frac{N(X^*)}{D(X^*)} D(X), \quad \forall X \subseteq \mathbb{R}^m$$

با فرض مثبت بودن $D(X)$، نامساوی فوق را بر $D(X)$ تقسیم می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\frac{N(X^*)}{D(X^*)} \leq \frac{N(X)}{D(X)}, \qquad \forall X \subseteq \mathbb{R}^m$$

که این نشان می‌دهد بردار X^* یک جواب بهین برای مسئله (۲.۴) است. □

الگوریتم دینکل باخ به شرح زیر است:

- گام ۱: $X^k \subseteq \mathbb{R}^m$ را در نظر بگیرید، و تعریف کنید $\mu_k = \frac{N(X^k)}{D(X^k)}$.
- گام ۲: $X^{k+1} = \arg \min_{X \subseteq \mathbb{R}^m} \{N(X) - \mu_k D(X)\}$ را محاسبه کنید.
- گام ۳: اگر $F(X^{k+1}) = \circ$، آنگاه $X^{k+1} = X^*$، یک جواب بهین است، و باید، روند حل مسئله را متوقف کنید. در غیر این‌صورت، به گام ۴ بروید.
- گام ۴: قرار دهید $\mu_{k+1} = \frac{N(X^{k+1})}{D(X^{k+1})}$، و به گام ۲ بروید.

با استفاده از الگوریتم دینکل باخ، می‌توان یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه را به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تک‌هدفه تبدیل کرد که در ادامه به شرح آن می‌پردازیم.

لم ۲.۶. یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \min_{X \subseteq \mathbb{R}^m} \quad & f(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_k(X)) \\ \text{s.t.} \quad & R_t(X) \leq \circ; \qquad (t = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned} \tag{۳.۶}$$

که در آن:

$$f_\alpha(X) = \frac{N_\alpha(X)}{D_\alpha(X)}; \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k) \tag{۴.۶}$$

و حداقل یکی از توابع حقیقی $N_\alpha(X)$، $D_\alpha(X)$ و $R_t(X)$، غیرخطی است. همچنین $D_\alpha(X) \neq \circ$.
در این‌صورت، X^*، یک جواب بهین پاراتو برای مسئله (۳.۶) است اگر و تنها اگر X^*، یک جواب بهین برای مسئله زیر باشد:

$$\begin{aligned} F(X^*) = \min_{X \subseteq \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{\alpha=1}^{k} (N_\alpha(X) - \mu_\alpha^* D_\alpha(X)) \\ \text{s.t.} \quad & R_t(X) \leq \circ; \qquad (t = 1, 2, \ldots, q) \end{aligned} \tag{۵.۶}$$

که در آن:

$$\mu_\alpha^* = \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)}; \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k). \tag{۶.۶}$$

اثبات. برهان این لم در دو قسمت انجام می‌شود.

قسمت اوّل: اگر X^* یک جواب بهین پاراتو برای مسئله (۳.۶) باشد، آنگاه X^* یک جواب بهین برای مسئله (۵.۶) خواهد بود.
برهان خلف: فرض کنیم X^* یک جواب بهین پاراتو برای مسئله (۳.۶) باشد، اما یک جواب بهین برای مسئله (۵.۶) نباشد، در این‌صورت $X \subseteq \mathbb{R}^m$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \left(N_\alpha(X) - \mu_\alpha^* D_\alpha(X)\right) < \sum_{\alpha=1}^{k} \left(N_\alpha(X^*) - \mu_\alpha^* D_\alpha(X^*)\right). \tag{۷.۶}$$

با توجه به رابطه (۶.۶) می‌توان نوشت:

$$N_\alpha(X^*) - \mu_\alpha^* D_\alpha(X^*) = N_\alpha(X^*) - \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X^*) = 0. \tag{۸.۶}$$

همچنین با توجه به روابط (۷.۶) و (۸.۶) داریم:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \left(N_\alpha(X) - \mu_\alpha^* D_\alpha(X)\right) < \sum_{\alpha=1}^{k} \left(N_\alpha(X) - \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X)\right) < 0. \tag{۹.۶}$$

اکنون فرض می‌کنیم برای هر $1 \leq \alpha \leq k$ داشته باشیم:

$$\frac{N_\alpha(X)}{D_\alpha(X)} \geq \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)}. \tag{۱۰.۶}$$

با فرض مثبت بودن $D_\alpha(X)$، نامساوی (۱۰.۶) را در $D_\alpha(X)$ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$N_\alpha(X) \geq \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X) \Rightarrow N_\alpha(X) - \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X) \geq 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k). \tag{۱۱.۶}$$

با جمع کردن نامساوی (۱۱.۶) خواهیم داشت:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \left(N_\alpha(X) - \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X)\right) \geq 0, \tag{۱۲.۶}$$

که در تناقض با نامساوی (۹.۶) است. بنابراین باید حداقل یک $1 \leq \alpha \leq k$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\frac{N_\alpha(X)}{D_\alpha(X)} < \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)}. \tag{۱۳.۶}$$

با توجه به رابطه (۴.۶) می‌توان نوشت:

$$f_\alpha(X) < f_\alpha(X^*), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

این بدین معناست که X بر X^* غلبه دارد و این، با فرض اوّلیه که: «X^* یک جواب بهین پاراتو برای مسئله (۳.۶) است»، تناقض دارد. بنابراین X^*، باید یک جواب بهین برای مسئله (۵.۶) باشد.

قسمت دوم: اگر X^* یک جواب بهین برای مسئله (۵.۶) باشد، آنگاه X^* یک جواب بهین پاراتو برای مسئله (۳.۶) خواهد بود.
برهان خلف: فرض کنیم X^* یک جواب بهین برای مسئله (۵.۶) باشد، اما یک جواب بهین پاراتو برای مسئله (۳.۶) نباشد، در این‌صورت $X \subseteq \mathbb{R}^m$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$f_\alpha(X) < f_\alpha(X^*), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \tag{۱۴.۶}$$

با توجه به رابطه (۴.۶) می‌توان نوشت:

$$\frac{N_\alpha(X)}{D_\alpha(X)} < \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)}, \qquad (\alpha = ۱, ۲, \dots, k). \tag{۱۵.۶}$$

با فرض مثبت بودن $D_\alpha(X)$، نامساوی (۱۵.۶) را در $D_\alpha(X)$ ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$N_\alpha(X) < \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X) \Rightarrow N_\alpha(X) - \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X) < ۰ \qquad (\alpha = ۱, ۲, \dots, k). \tag{۱۶.۶}$$

با جمع کردن نامساوی (۱۶.۶) خواهیم داشت:

$$\sum_{\alpha=۱}^{k} \left(N_\alpha(X) - \frac{N_\alpha(X^*)}{D_\alpha(X^*)} D_\alpha(X) \right) < ۰. \tag{۱۷.۶}$$

از طرفی، با توجه به رابطه (۶.۶) می‌توان نوشت:

$$\sum_{\alpha=۱}^{k} (N_\alpha(X) - \mu_\alpha^* D_\alpha(X)) < ۰. \tag{۱۸.۶}$$

با توجه به رابطه (۸.۶)، تساوی

$$\sum_{\alpha=۱}^{k} (N_\alpha(X^*) - \mu_\alpha^* D_\alpha(X^*)) = ۰, \tag{۱۹.۶}$$

برقرار است، پس نامساوی (۱۸.۶) نشان می‌دهد که X، مقدار کمتری نسبت به X^* در مسئله (۵.۶) دارد و این، با فرض اوّلیه که: «X^* یک جواب بهین برای مسئله (۵.۶) است»، تناقض دارد. بنابراین X^* باید یک جواب بهین پاراتو برای مسئله (۳.۶) باشد. □

۷ الگوریتم پیشنهادی

در این بخش، یک روش ترکیبی کارآمد برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه معرفی می‌شود. این مسائل، به دلیل ماهیت پیچیده و غیرمحدب بودن فضای شدنی، چالش‌های قابل توجهی را در یافتن جواب بهین ایجاد می‌کنند. در حالی که الگوریتم دینکل‌باخ به عنوان یک ابزار کلاسیک برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری شناخته می‌شود، در این پژوهش، در چارچوب مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه با ساختار سیگنومیال غیرمحدب به‌کار گرفته شده است. روش پیشنهادی، با تلفیق الگوریتم دینکل‌باخ و رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، امکان حل این دسته از مسائل را بدون نیاز به محدب‌سازی اولیه فراهم می‌سازد. این امر منجر به کاهش پیچیدگی محاسباتی و بهبود کارایی فرایند حل مسئله می‌گردد. در ادامه، جزئیات این الگوریتم و چگونگی عملکرد آن در حل مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه به‌طور کامل تشریح خواهد شد.

- الگوریتم پیشنهادی به شرح زیر است:

گام اوّل: در این مرحله، با استفاده از روش چارنز و کوپر، هر تابع هدف که به‌صورت یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیر خطی است، به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود. سپس، با بهره‌گیری از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، این مسئله حل شده و مقادیر بهین متغیرهای تغییر یافته به‌دست می‌آید. در ادامه، با به کارگیری روابط تغییر متغیر تعریف شده در روش چارنز و کوپر، مقادیر بهین متغیرهای اصلی مرتبط با توابع هدف استخراج می‌شود. این مقادیر، جواب‌های ایده‌آل برای هر یک از توابع هدف مسئله اصلی را تشکیل می‌دهند [۱۰].

گام دوم: در این مرحله، بر اساس جواب‌های ایده‌آل به‌دست آمده از گام اول برای هر تابع هدف، از الگویتم دینکل باخ استفاده می‌شود تا مسئله اصلی که یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه است، به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تک‌هدفه تبدیل شود.

گام سوم: در این مرحله، مشابه گام اول، از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تک‌هدفه استفاده می‌شود. جواب بهین حاصل از این مسئله، یک جواب بهین پاراتو برای مسئله اصلی، یعنی برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه خواهد بود.

در ادامه، الگوریتم پیشنهادی را با ارائه یک مثال عددی مورد ارزیابی قرار خواهیم داد.

۸ بررسی مثال عددی

مثال **۱.۸**. مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
\min_{X\subseteq\mathbb{R}^۲} \quad & f_۱(X)=\frac{x_۱^۴-x_۲^۲}{x_۱^۲+x_۲^{-۱}}\\
\min_{X\subseteq\mathbb{R}^۲} \quad & f_۲(X)=\frac{x_۱^۲x_۲^۳-x_۱}{x_۱^۲+x_۲^{-۱}}\\
\text{s.t.} \quad & x_۱^{-۳}x_۲^۵\le ۱\\
& X=(x_۱,x_۲)>۰.
\end{aligned}$$

حل. در ابتدا باید جواب‌های ایده‌آل برای هر یک از توابع هدف مسئله داده شده را به‌دست آوریم.
نخست جواب ایده‌آل برای تابع هدف اول را به‌دست آورده و آن را $\mu_۱^*$ نام‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\min_{X\subseteq\mathbb{R}^۲} \quad & f_۱(X)=\frac{x_۱^۴-x_۲^۲}{x_۱^۲+x_۲^{-۱}}\\
\text{s.t.} \quad & x_۱^{-۳}x_۲^۵\le ۱\\
& X=(x_۱,x_۲)>۰.
\end{aligned}$$

با استفاده از الگوریتم چارنز و کوپر، این مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌نماییم.

برای این منظور، با تغییر متغیرهای $x_۱=\dfrac{y_۱}{z}$ و $x_۲=\dfrac{y_۲}{z}$، مسئله را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\min_{Y\subseteq\mathbb{R}^۲,z\in\mathbb{R}} \quad & f_۱(Y,z)=y_۱^۴z^{-۲}-y_۲^۲\\
\text{s.t.} \quad & y_۱^۲+y_۲^{-۱}z^۳=۱\\
& y_۱^{-۳}y_۲^۵z^{-۲}\le ۱\\
& Y=(y_۱,y_۲)>۰, z>۰.
\end{aligned}$$

اکنون، با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، مسئله فوق را حل می‌کنیم:

$$g_۱(Y,z)=y_۱^۴z^{-۲},\quad g_۲(Y,z)=y_۲^۲,\qquad g_۳(Y,z)=y_۱^۲$$

$$g_۴(Y,z)=y_۲^{-۱}z^۳,\quad g_۵(Y,z)=y_۱^{-۳}y_۲^۵z^{-۲},\quad n=۵,\quad m=۳$$

$$DD=n-m-۱=۵-۳-۱=۱>۰$$

بنابراین، مسئله دارای جواب خواهد بود. اکنون دوگان مسئله فوق را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
\max_{\delta\subseteq\mathbb{R}^۵} \quad & \nu_۱(\delta)=\zeta_۰\left(\left(\frac{۱}{\delta_۱}\right)^{\delta_۱}\left(\frac{۱}{\delta_۲}\right)^{-\delta_۲}\left(\frac{۱}{\delta_۳}\right)^{\delta_۳}\left(\frac{۱}{\delta_۴}\right)^{\delta_۴}\left(\frac{۱}{\delta_۵}\right)^{\delta_۵}(\delta_۳+\delta_۴)^{\delta_۳+\delta_۴}(\delta_۵)^{\delta_۵}\right)^{\zeta_۰}\\
\text{s.t.} \quad & \delta_۱-\delta_۲=\zeta_۰\\
& ۴\delta_۱+۲\delta_۳-۳\delta_۵=۰\\
& -۲\delta_۲-\delta_۴+۵\delta_۵=۰\\
& -۲\delta_۱+۳\delta_۴-۲\delta_۵=۰,\\
& \delta_i>۰,\ \ i=۱,۲,\dots,۵.
\end{aligned}$$

با قرار دادن $\zeta_\circ = +۱$، در مسئله فوق، مقادیر بهین متغیرهای دوگان، منفی به‌دست می‌آید. بنابراین، در این مسئله $\zeta_\circ = -۱$، در نظر گرفته می‌شود. اکنون با استفاده از نرم‌افزار لینگو، مقادیر بهین متغیرهای دوگان به شرح زیر استخراج می‌شود:

$$\delta_۱ = ۰/۴۱۷, \quad \delta_۲ = ۱/۴۱۷, \quad \delta_۳ = ۰/۲۴۳, \quad \delta_۴ = ۰/۷۵۷, \quad \delta_۵ = ۰/۷۱۸.$$

در نتیجه

$$\max_{\delta \subseteq \mathbb{R}^۵} \nu_۱(\delta) = -۰/۲۴۳.$$

اکنون طبق نتیجه ۳.۲، مقدار بهین $y_۱$، $y_۲$ و z را به‌دست می‌آوریم:

× هر جمله متناظر با تابع هدف، در مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، برابر است با:

$$g_i(X) = \zeta_\circ \delta_i^* \nu(\delta^*), \quad (i = ۱, ۲) \quad \overset{\zeta_\circ = -۱}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} g_۱ = -۰/۴۱۷ \times (-۰/۲۴۳) = ۰/۱۰۱ \\ g_۲ = -۱/۴۱۷ \times (-۰/۲۴۳) = ۰/۳۴۴. \end{cases}$$

× هر جمله متناظر با قیود، در مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، برابر است با:

$$g_i = \frac{\delta_i}{\lambda_t}, \quad (t = ۱, i = ۳, ۴) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} g_۳ = \dfrac{\delta_۳}{\delta_۳ + \delta_۴} = \dfrac{۰/۲۴۳}{۱} = ۰/۲۴۳ \\ g_۴ = \dfrac{\delta_۴}{\delta_۳ + \delta_۴} = \dfrac{۰/۷۵۷}{۱} = ۰/۷۵۷ \end{cases}$$

$$g_i = \frac{\delta_i}{\lambda_t}, \quad (t = ۲, i = ۵) \quad \Rightarrow \quad g_۵ = \frac{\delta_۵}{\delta_۵} = \frac{۰/۷۱۸}{۰/۷۱۸} = ۱.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} g_۱ = ۰/۱۰۱ \\ g_۲ = ۰/۳۴۴ \\ g_۳ = ۰/۲۴۳ \\ g_۴ = ۰/۷۵۷ \\ g_۵ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_۱^۴ z^{-۲} = ۰/۱۰۱ \\ y_۲^۲ = ۰/۳۴۴ \\ y_۱^۲ = ۰/۲۴۳ \\ y_۲^{-۱} z^۳ = ۰/۷۵۷ \\ y_۱^{-۳} y_۲^۵ z^{-۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۰/۴۹۳ \\ y_۲ = ۰/۵۸۷ \\ z = ۰/۷۶۳. \end{cases}$$

اکنون، از روابط تغییر متغیری که در روش چارنز و کوپر تعریف نمودیم، مقدار بهین متغیرهای اصلی مسئله را پیدا می‌کنیم:

$$x_j = \frac{y_j}{z}; \ (j = ۱, ۲) \ \Rightarrow \ \begin{cases} x_۱ = \dfrac{y_۱}{z} = \dfrac{۰/۴۹۳}{۰/۷۶۳} = ۰/۶۴۶ \\ x_۲ = \dfrac{y_۲}{z} = \dfrac{۰/۵۸۷}{۰/۷۶۳} = ۰/۷۶۹ \end{cases} \Rightarrow f_۱(۰/۶۴۶, ۰/۷۶۹) = -۰/۲۴۳ = \mu_۱^*$$

و به همین شکل نقطه‌ی ایده‌آل برای تابع هدف دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$x_۱ = ۱/۱۲۲, \quad x_۱ = ۰/۵۲۹ \quad \Rightarrow \quad f_۲(۱/۱۲۲, ۰/۵۲۹) = -۰/۲۹۷ = \mu_۲^*.$$

اکنون با استفاده از جواب‌های ایده‌آل به دست آمده برای توابع هدف اول و دوم، می‌توانیم الگوریتم دینکل باخ را روی توابع هدف مسئله اصلی به‌صورت زیر پیاده کنیم:

$$F(X^*) = \min_{X \subseteq \mathbb{R}^۲} \left((x_۱^۴ - x_۲^۲) - (-۰/۲۴۳)(x_۱^۲ + x_۲^{-۱}) \right) + \left((x_۱^۲ x_۲^۳ - x_۱) - (-۰/۲۹۷)(x_۱^۲ + x_۲^{-۱}) \right).$$

در نتیجه مسئله نهایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \min_{X\subseteq\mathbb{R}^{۲}} \quad & F(X)=x_{۱}^{۴}-x_{۲}^{۲}+x_{۱}^{۲}x_{۲}^{۳}-x_{۱}+۰/۵۴x_{۱}^{۲}+۰/۵۴x_{۲}^{-۱} \\ \text{s.t.} \quad & x_{۱}^{-۳}x_{۲}^{۵}\leq ۱ \\ & X=(x_{۱},x_{۲})>۰. \end{aligned}$$

مشابه مراحل قبلی، مسئله فوق را با بهره‌گیری از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال حل می‌کنیم:

$$g_{۱}(X)=x_{۱}^{۴}, \quad g_{۲}(X)=x_{۲}^{۲}, \quad g_{۳}(X)=x_{۱}^{۲}x_{۲}^{۳}, \quad g_{۴}(X)=x_{۱}$$

$$g_{۵}(X)=۰/۵۴x_{۱}^{۲}, \quad g_{۶}(X)=۰/۵۴x_{۲}^{-۱}, \quad g_{۷}(X)=x_{۱}^{-۳}x_{۲}^{۵}, \quad n=۷, \quad m=۲$$

$$DD=n-m-۱=۷-۲-۱=۴>۰$$

بنابراین، مسئله دارای جواب خواهد بود. اکنون دوگان مسئله فوق را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \max_{\delta\subseteq\mathbb{R}^{۷}} \quad & \nu(\delta)=\zeta_{۰}\left((\frac{۱}{\delta_{۱}})^{\delta_{۱}}(\frac{۱}{\delta_{۲}})^{-\delta_{۲}}(\frac{۱}{\delta_{۳}})^{\delta_{۳}}(\frac{۱}{\delta_{۴}})^{-\delta_{۴}}(\frac{۰/۵۴}{\delta_{۵}})^{\delta_{۵}}(\frac{۰/۵۴}{\delta_{۶}})^{\delta_{۶}}(\frac{۱}{\delta_{۷}})^{-\delta_{۷}}(\delta_{۷})^{\delta_{۷}}\right)^{\zeta_{۰}} \\ \text{s.t.} \quad & \delta_{۱}-\delta_{۲}+\delta_{۳}-\delta_{۴}+\delta_{۵}+\delta_{۶}=\zeta_{۰} \\ & ۴\delta_{۱}+۲\delta_{۳}-\delta_{۴}+۲\delta_{۵}-۳\delta_{۷}=۰ \\ & -۲\delta_{۲}+۳\delta_{۳}-\delta_{۶}+۵\delta_{۷}=۰ \\ & \delta_{i}>۰, \quad i=۱,۲,\ldots,۷. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $\zeta_{۰}=+۱$ و استفاده از نرم افزار لینگو، مقادیر بهین متغیرهای دوگان به شرح زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} &\delta_{۱}^{*}=۳/۱۰۷, \quad \delta_{۲}^{*}=۱۱/۱۳۷, \quad \delta_{۳}^{*}=۳/۴۰۵, \quad \delta_{۴}^{*}=۱۲/۱۹۳ \\ &\delta_{۵}^{*}=۴/۱۷۳, \quad \delta_{۶}^{*}=۱۳/۶۴۵, \quad \delta_{۷}^{*}=۵/۱۳۱. \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\max_{\delta\subseteq\mathbb{R}^{۷}} \nu(\delta^{*})=۰/۰۵۲.$$

اکنون طبق نتیجه ۳.۲ مقدار بهین $x_{۱}$ و $x_{۲}$ را به‌دست می‌آوریم:
× هر جمله متناظر با تابع هدف، در مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، برابر است با:

$$g_{i}(X)=\zeta_{۰}\delta_{i}^{*}\nu(\delta^{*}), \quad (i=۱,\ldots,۶) \xrightarrow{\zeta_{۰}=+۱} \begin{cases} g_{۱}=۳/۱۰۷\times(۰/۰۵۲)=۰/۱۶۲ \\ g_{۲}=۱۱/۱۳۷\times(۰/۰۵۲)=۰/۵۷۹ \\ g_{۳}=۳/۴۰۵\times(۰/۰۵۲)=۰/۱۷۷ \\ g_{۴}=۱۲/۱۹۳\times(۰/۰۵۲)=۰/۶۳۴ \\ g_{۵}=۴/۱۷۳\times(۰/۰۵۲)=۰/۲۱۷ \\ g_{۶}=۱۳/۶۴۵\times(۰/۰۵۲)=۰/۷۱۰ \end{cases}$$

× هر جمله متناظر با قیود، در مسئله برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، برابر است با:

$$g_{i}=\frac{\delta_{i}}{\lambda_{t}}, \quad (t=۱,i=۷)\Rightarrow g_{۷}=\frac{\delta_{۷}}{\delta_{۷}}=\frac{۵/۱۳۱}{۵/۱۳۱}=۱$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} g_۱ = ۰/۱۶۲ \\ g_۲ = ۰/۵۷۹ \\ g_۳ = ۰/۱۷۷ \\ g_۴ = ۰/۶۳۴ \\ g_۵ = ۰/۲۱۷ \\ g_۶ = ۰/۷۱۰ \\ g_۷ = ۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x_۱^۴ = ۰/۱۶۲ \\ x_۲^۲ = ۰/۵۷۹ \\ x_۱^۲ x_۲^۳ = ۰/۱۷۷ \\ x_۱ = ۰/۶۳۴ \\ ۰/۵۴ x_۱^۲ = ۰/۲۱۷ \\ ۰/۵۴ x_۲^{-۱} = ۰/۷۱۰ \\ x_۱^{-۳} x_۲^۵ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_۱^۴ = ۰/۱۶۲ \\ x_۲^۲ = ۰/۵۷۹ \\ x_۱^۲ x_۲^۳ = ۰/۱۷۷ \\ x_۱ = ۰/۶۳۴ \\ x_۱^۲ = ۰/۴۰۲ \\ x_۲ = ۰/۷۶۱ \\ x_۱^{-۳} x_۲^۵ = ۱ \end{cases}$$

در نهایت، جواب مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تک‌هدفه به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_۱^* = ۰/۶۳۴ \quad , \quad x_۲^* = ۰/۷۶۱,$$

که یک جواب بهین پاراتو برای مسئله اصلی (برنامه‌ریزی کسری غیرخطی دو هدفه) است. همچنین، مقادیر $f_۱^*$ و $f_۲^*$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$f_۱^* = -۰/۲۴۳ \quad , \quad f_۲^* = -۰/۲۶۶.$$

۹ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، کارایی یک روش ترکیبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه با ساختار سیگنومیال نامحدب بررسی شده است. یکی از چالش‌های اساسی در حل این دسته از مسائل، نامحدب بودن فضای شدنی مسئله به دلیل وجود تعابیر و عبارات سیگنومیال (شامل توان‌ها و ضرایب با علامت‌های مختلف) در توابع هدف و محدودیت‌ها است. روش‌های کلاسیک که عمدتاً برای حل مسائل محدب طراحی شده‌اند، در مواجهه با چنین مسائلی با محدودیت‌های جدی روبه‌رو می‌شوند. همچنین، تبدیل مسائل نامحدب به محدب اغلب پیچیدگی‌های محاسباتی زیادی به همراه دارد و ممکن است منجر به از دست رفتن برخی از ویژگی‌های مسئله اصلی شود. روش پیشنهادی، با ترکیب الگوریتم دینکل‌باخ و رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، امکان حل مستقیم این مسائل را بدون نیاز به محدب‌سازی اولیه فراهم می‌سازد و در نتیجه، دقت و کارایی بالاتری در دستیابی به جواب‌های بهین مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه، علی‌رغم پیچیدگی‌های ذاتی این مسائل در مقایسه با روش‌های کلاسیک، ایجاد می‌کند؛ به‌ویژه در مواجهه با مسائلی که شامل تعابیر و عبارات سیگنومیال باشند. در واقع، استفاده از الگوریتم دینکل‌باخ این امکان را فراهم می‌سازد که مسائل برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه به‌سادگی به مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی تک‌هدفه تبدیل شوند. این تبدیل نه‌تنها کیفیت نتایج را بهبود می‌بخشد، بلکه توانایی تحلیل و حل این مسائل را به‌طور چشمگیری افزایش می‌دهد. علاوه‌بر این، انعطاف‌پذیری در تغییر متغیرها با بهره‌گیری از تکنیک چارنز و کوپر، و همچنین استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر اهداف و محدودیت‌ها را فراهم کرده و فرایند حل را تسهیل می‌کند. این ویژگی‌ها در نهایت موجب کاهش زمان حل مسئله و هزینه‌های محاسباتی می‌شوند. از دیگر مزایای این روش آن است که می‌تواند تعداد تکرارهای مورد نیاز برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی چندهدفه را تنها به یک مرتبه بیشتر از تعداد توابع هدف این مسئله کاهش دهد. به‌عنوان مثال، یک مسئله برنامه‌ریزی کسری غیرخطی با دو تابع هدف، تنها با سه بار استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی هندسی سیگنومیال قابل حل خواهد بود. مجموع این مزایا سبب می‌شود که روش پیشنهادی بتواند به‌عنوان نقطه‌شروعی برای دستیابی به راه‌حل‌های مؤثرتر در حوزه برنامه‌ریزی غیرخطی چندهدفه در نظر گرفته شود و افق‌های جدیدی را پیش روی پژوهشگران این عرصه قرار دهد. پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی، اثرات این رویکرد در زمینه‌های دیگری مانند مسائل اقتصادی یا محیط زیستی مورد بررسی قرار گیرد و به توسعه روش‌های بهبودیافته برای حل مسائلی با ابعاد بزرگ‌تر، توجه ویژه‌ای شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت مالی تحت پژوهانه شماره SCU · MM۱۴۰۴ · ۴۱۴ تقدیر و تشکر می‌نمایند.

فهرست منابع

[1] Bazikar, F. and Saraj, M., 2014. Solving linear multi-objective geometric programming problems via reference point approach. *Sains Malaysiana*, 43(8), pp. 1271-1274.

[2] Cooper, A.C.W. and Charnes, W., 1962. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research logistics quarterly*, 9(3), pp. 181-186. doi: 10.1002/nav.3800090303.

[3] Dinkelbach, W., 1967. On nonlinear fractional programming. *Management science*, 13(7), pp. 492-498. doi: 10.1287/mnsc.13.7.492

[4] Duffin, R.J. and Peterson, E.L., 1973. Geometric programming with signomials. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 11(1), pp. 3-35. doi: 10.1007/BF00934288.

[5] Duffin, R.J., Peterson, E.L. and Zener, C.M., 1968. Geometric Programming Theory and Application. *John Wiley and Sons, New York*, 10(2), pp. 235-236. doi: 10.1137/1010047.

[6] Ehrgott, M., 2005. *Multicriteria optimization*. (Vol. 491). Springer Science & Business Media. doi: 10.1007/3-540-27659-9.

[7] Islam, S. and Roy, T.K., 2005. Modified geometric programming problem and its applications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17(1), pp. 121-144. doi: 10.1007/BF02936045.

[8] Li, H., 2015. A genetic algorithm using a finite search space for solving nonlinear/linear fractional bilevel programming problems. *Annals of Operations Research*, 235(1), pp. 543-558. doi: 10.1007/s10479-015-1878-5.

[9] Mandal, W.A. and Islam, S., 2019. Modified signomial geometric programming (MSGP) and its applications. *Independent Journal of Management & Production*, 10(2), pp. 440-458. doi: 10.14807/ijmp.v10i2.537.

[10] Mishra, S. and Ota, R.R., 2022. Signomial geometric programming approach to solve Non-Linear fractional programming problems. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8(1), pp. 37-44. doi: 10.1007/s40819-022-01248-x.

[11] Öz, E., Güzel, N. and Alp, S., 2017. An alternative approach to the solution of multi-objective geometric programming problems. *Open Journal of Optimization*, 6(1), pp. 11-25. doi: 10.4236/ojop.2017.61002.

[12] Ródenas, R.G., López, M.L. and Verastegui, D., 1999. Extensions of Dinkelbach's algorithm for solving non-linear fractional programming problems. Top 7, 33–70. doi: 10.1007/BF02564711

[13] Stancu-Minasian, I.M., 1997. Fractional programming: theory, methods and applications (Vol. 409). *Springer Science & Business Media*. doi: 10.1007/978-94-009-0035-6.

Signomial Geometric Programming Approach to Solve Multi-Objective Non-Linear Fractional Programming Problems

Abbas Hosseini[(1)] and Mansour Saraj[(2)][19]

[(1,2)] Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: Maziar Salahi

Received: 11 Februrary 2025 Accepted: 28 October 2025

Abstract: In this paper, a hybrid and efficient method is presented for solving multi-objective non-linear fractional programming problems with a non-convex signomial structure. These problems, due to their inherent complexities, pose significant challenges in the field of mathematical optimization. Unlike classical methods, the proposed method does not require initial convexification of the problem and allows for the direct solution of non-convex problems. This feature significantly reduces the computational complexity and solution time of the problem, offering a more efficient approach than classical methods. In this method, the ideal solutions for each objective function are first calculated independently. In this regard, the Charnes-Cooper transformation is used to convert each objective function from a non-linear fractional form into a non-linear programming problem. Subsequently, the signomial geometric programming approach is employed to model the objective functions and constraints more accurately and to calculate the optimal values of the problem variables. These values are the ideal solutions for each objective function. Then, the Dinkelbach's algorithm is applied to transform the original problem (multi-objective non-linear fractional programming) into a single-objective non-linear programming problem, which facilitates the solution process. Finally, the signomial geometric programming approach is used again to solve this single-objective programming problem. The optimal solution of this problem is considered a Pareto optimal solution for the original problem. At the end of the paper, a numerical example is provided to evaluate the accuracy and efficiency of the proposed method.

Keywords: Multi-objective Nonlinear Fractional Programming, Charnes and Cooper Method, Dinkelbach's Algorithm, Signomial Geometric Programming.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[19]Corresponding author
E-mail addresses: (A. Hosseini) abbas.hosseini.1398@gmail.com, (M. Saraj) msaraj@scu.ac.ir,