مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۱۱۸–۱۲۶

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.48421.2331

فرآیندهای بازه‌ای- مقدار همبسته متناوب

مریم هاشمی [۱] و زهرا سجادنیا

[(۱)] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم کامپیوتر و ریاضی خوانسار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
[(۲)] گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

دبیر مسئول: غلامعلی پرهام

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۲۴

چکیده: در این مقاله به معرفی فرایندهای بازه‌ای مقدار با همبستگی متناوب پرداخته شده است. برآورد میانگین و خودکوواریانس آنها معرفی و رفتار مجانبی آنها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با استفاده از شبیه سازی، رفتار برآورد میانگین و خودکوواریانس این فرایندها مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج حاصل تحلیل و ارزیابی شده است.

واژه‌های کلیدی: فرآیندهای همبسته متناوب، متغیر تصادفی بازه ای-مقدار، خودکوواریانس

رده‌بندی ریاضی: 60G07

۱ مقدمه

در بسیاری از تحلیلهای آماری داده‌ها به صورت بازه‌ای جمع‌آوری می‌شوند و به عنوان داده های بازه‌ای-مقدار شناخته می شوند. این نوع داده ها به طور کلی به دو دلیل ایجاد می شوند:
۱) مشاهده مقادیر نادقیق: در این حالت مقدار مشاهده شده به صورت فاصله ای از مقادیر ممکن ارائه می‌شود.
۲) تجمیع اطلاعات: تجمیع اطلاعات زمانی به وجود می‌آید که موضوع مورد مطالعه شامل کلاس‌ها، مجموعه‌ها یاگروه‌هایی باشد که ویژگی های آنها به صورت بازه‌ای گزارش شوند [۳].

داده‌های بازه‌ای-مقدار، شناخته‌شده‌ترین نوع داده‌های نمادین،هستند. به عنوان مثال، داده های قیمت سهام در طول روز معمولا به صورت بازه ای از کمترین تا بیشترین قیمت ارائه می شوند [۸].
داده های بازه ای-مقدار همچنین می توانند بیانگر محدوده تغییرات متغیرهایی مانند دمای هوای روزانه[۹]، شاخص کیفیت هوای روزانه[۱۲]، بازدهی یک سهام[۲] [۵] یا پارامترهای عملکردی یک سیستم در بازه های زمانی مشخص باشند.
مدل‌های سنتی، تحلیل داده‌های بازه‌ای-مقدار را با تکیه بر آماره‌هایی مانند میانگین انجام می‌دهند که می‌تواند منجر به از دست رفتن اطلاعات شود. بر این اساس، تحلیل داده‌های بازه‌ای-مقدار نیازمند تکنیک‌هایی است که منجر به درک صحیح، دقیق و کامل از این داده‌ها شود. در سه

[۱] نویسنده مسئول
(Z.Sajjadnia) sajjadnia@shirazu.ac.ir, (M. Hashemi) m.hashemi.t@khc.ui.ac.ir

دهه گذشته، روش های نوین بسیاری برای تحلیل این نوع داده ها پیشنهاد شده است که درک عمیق تری از آنها فراهم می آورد. داده‌های بازه ای مقدار علاوه بر نمایش بازه ای گاهی به صورت مرکز و طول بازه تیز نمایش داده می شوند. انتخاب نمایش مناسب برای داده‌های بازه‌ای–مقدار بستگی به نوع تحلیل، دقت موردنظر و ماهیت داده‌ها دارد. در کاربردهای مختلف، نمایش های متفاوت می توانند کاربردهای خاص خود را داشته باشند و به تحلیل بهتر و درک عمیق‌تر داده ها کمک کنند. از مطالعات انجام شده بر روی تجزیه و تحلیل داده های بازه‌ای–مقدار می توان به [۴]، [۱۱]، [۱۴] و [۷] اشاره کرد.
یکی از زمینه های مهمی که داده‌های بازه‌ای–مقدار در آن استفاده می شوند، فرایندهای تصادفی است. فرایندهای تصادفی بازه‌ای–مقدار ایستا در سال ۲۰۱۶ توسط وانگ معرفی شده و به طور کامل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۱۰].
یکی از انواع فرآیندهای تصادفی، فرآیندهای همبسته متناوب است. تئوری فرآیندهای همبسته متناوب اولین بار توسط گلادیشف ارائه شد. فرآیندهای همبسته متناوب یکی از انواع فرایندهای تصادفی هستند که در آنها ویژگی های آماری مانند میانگین و کوواریانس به طور تناوبی تغییر می‌کنند. این فرایندها معمولا در مدلسازی سیستم هایی به کار می روند که رفتار دوره‌ای دارند، مانند سیستم های اقتصادی، زیست محیطی یا مهندسی.
با وجود پیشرفت های انجام شده در مدلسازی فرایندهای بازه‌ای–مقدار و فرایندهای همبسته متناوب به صورت جداگانه، ترکیب این دو رویکرد در قالب "فرایندهای بازه‌ای–مقدار همبسته متناوب" هنوز حوزه ای نوظهور در ادبیات تحقیق است. این مدل ها با لحاظ کردن هم زمان الگوهای چرخه ای و ویژگی های بازه ای، می توانند ابزار قدرتمندی برای پیش بینی دقیق تر و تحلیل جامع تر داده های واقعی با نوسانات فصلی و عدم قطعیت ذاتی فراهم آورند. از این رو، توسعه روش های تحلیلی در این حوزه، افق های جدیدی برای پژوهش و کاربردهای عملی در حوزه هایی مانند هواشناسی، اقتصاد و مهندسی می گشاید. به عنوان مثال، اگر بازه فعالیت زمانی روزانه از ساعت ۷ صبح تا ۱۷ بعدازظهر در نظر گرفته شود، با توجه به تغییرات قابل مشاهده در شدت ترافیک طی روزهای مختلف هفته و به ویژه روزهای پایانی آن، می توان این داده ها را به صورت داده های بازه‌ای–مقدار همبسته متناوب با دوره تناوب هفت مدلسازی و تحلیل کرد.
در این مقاله به معرفی فرآیندهای بازه‌ای–مقدار با همبستگی متناوب پرداخته، برآوردگر میانگین و کوواریانس آنها را معرفی کرده و خواص آنها را بررسی می‌کنیم. همچنین به کمک شبیه سازی عملکرد برآوردگرهای معرفی شده را نیز مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۲ مقدمات

در این بخش، برخی مفاهیم مرتبط با متغیرهای تصادفی بازه‌ای–مقدار را معرفی می‌کنیم. این مفاهیم پایه ای زمینه ساز تحلیل دقیق‌تر متغیرهای تصادفی بازه‌ای–مقدار و ارتباط آنها با فرایندهای تصادفی هستند. فرض کنید (Ω, A, P) یک فضای احتمال کامل باشد.

تعریف **۱.۲**. تابع بازه‌ای–مقدار $X : \Omega \to C(R)$ که در آن $X = [X_L, X_U]$ و $C(R)$ مجموعه تمام فواصل بسته روی R است، یک متغیر تصادفی بازه‌ای–مقدار نامیده می شود اگر $X_L : \Omega \to R$ و $X_U : \Omega \to R$ دو متغیر تصادفی حقیقی مقدار، $X_L \leq X_U$ باشد.

امید ریاضی X در صورت وجود به صورت زیر تعریف می‌شود:[۱]

$$EX = [EX_L, EX_U],$$

و واریانس متغیر تصادفی X بر اساس [۱۳] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Var(X) = Var(X_L) + Var(X_U).$$

اگر $Y = [Y_L, Y_U]$ یک متغیر تصادفی بازه‌ای–مقدار باشد، در این صورت کوواریانس بین X و Y به صورت زیر محاسبه می شود:

$$Cov(X, Y) = Cov(X_L, Y_L) + Cov(X_U, Y_U).$$

قضیه زیر خواص کوواریانس بین متغیرهای بازه‌ای–مقدار X, Y, Z را نشان می دهد.[۱۳]

قضیه **۲.۲**. اگر X، Y و Z متغیرهای تصادفی بازه‌ای–مقدار باشند، آنگاه:
۱) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$،
۲) $Cov(aX, Y) = Cov(X, aY) = aCov(X, Y)$ برای $a \geq 0$.
۳) $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$.

در ادامه فرض کنید فرایند بازه‌ای–مقدار $\{X_t, t \in Z\}$، $\cdots$، $X_1 = [X_{L_1}, X_{U_1}], X_2 = [X_{L_2}, X_{U_2}]$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی بازه‌ای–مقدار روی فضای احتمال (Ω, A, P) باشد.

تعریف **۳.۲**. فرآیند بازه‌ای-مقدار $\{X_t, t \in Z\}$ را ایستا گویند هرگاه:[۱۰]
۱) $\forall t \in Z \quad EX_t = A$ که در آن A بازه ثابت است.
۲) $\forall s,t,r \in Z, \quad Cov(X_{t+r}, X_{s+r}) = Cov(X_t, X_s)$.

تعریف **۴.۲**. فرآیند بازه‌ای-مقدار $\{X_t, t \in Z\}$ یک فرآیند همبسته متناوب با دوره تناوب $T > ۰$, است، هرگاه:
۱) $\forall t \in Z, \quad EX_t = E(X_{t+T})$،
۲) $\forall s,t \in Z, \quad Cov(X_t, X_s) = Cov(X_{t+T}, X_{s+T})$.

مثال زیر یکی از روش های تولید فرایند بازه‌ای-مقدار همبسته متناوب را نشان می دهد.

مثال **۵.۲**. فرض کنید Y_t یک فرآیند ایستای بازه‌ای-مقدار و f_t یک دنباله از مقادیر مثبت و متناوب با دوره تناوب T باشد به طوری که $f_t = f_{t+T}$، آنگاه فرایند:

$$X_t = f_t Y_t,$$

یک فرآیند بازه‌ای-مقدار همبسته متناوب با دوره تناوب T خواهد بود.

۳ برآورد امید ریاضی μ_t

فرض کنید $X_۰, X_۱, \cdots, X_{NT-۱}$ یک نمونه تصادفی $m = NT$ تایی از فرآیند بازه‌ای-مقدار همبسته متناوب $\{X_t; t \in Z\}$ با دوره تناوب T و امید ریاضی μ_t باشد. آنگاه برآوردگر $\hat{\mu}_t$ برای پارامتر μ_t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\mu}_t = \bar{X}_t = \frac{۱}{N} \sum_{n=۰}^{N-۱} X_{t+nT}.$$

این برآوردگر یک برآوردگر ناریب برای μ_t است و قضیه زیر نشان می‌دهد که $\hat{\mu}_t$ یک برآوردگر سازگار برای μ_t است.

قضیه **۱.۳**. فرض کنید $\{X_t\}$ یک فرآیند بازه‌ای-مقدار همبسته متناوب و با دوره تناوب T باشد. اگر $\sum_{u=-\infty}^{\infty} \mid Cov(X_{t+uT}, X_t) \mid < \infty$ آنگاه $\hat{\mu}_t$ یک برآوردگر سازگار برای μ_t خواهد بود.

اثبات. واریانس $\hat{\mu}_t$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\mu}_t) &= Var(\frac{۱}{N} \sum_{n=۰}^{N-۱} X_{t+nT}) \\
&= Cov(\frac{۱}{N} \sum_{n=۰}^{N-۱} X_{t+nT}, \frac{۱}{N} \sum_{u=۰}^{N-۱} X_{t+uT}) \\
&= \frac{۱}{N^۲} \sum_{n=۰}^{N-۱} \sum_{u=۰}^{N-۱} Cov(X_{t+nT}, X_{t+uT}) \\
&= \frac{۱}{N^۲} \sum_{l=-N+۱}^{N-۱} \sum_{u=\max\{۰,-l\}}^{\min\{N-۱,N-l-۱\}} Cov(X_{t+lT}, X_t) \\
&= \frac{۱}{N^۲} \sum_{l=-N+۱}^{۰} (N+l-۱) Cov(X_{t+lT}, X_t) \\
&+ \frac{۱}{N^۲} \sum_{l=۱}^{N-۱} (N-l-۱) Cov(X_{t+lT}, X_t) \\
&= \frac{۱}{N^۲} \sum_{l=-N+۱}^{N-۱} (N- \mid l \mid -۱) Cov(X_{t+lT}, X_t),
\end{aligned}$$

وقتی N به سمت بینهایت میل کند، $Var(\hat{\mu}_t) \to ۰$ و لذا $\hat{\mu}_t$ یک برآوردگر سازگار برای μ_t خواهد بود. □

۴ برآورد تابع خودکوواریانس

تابع خودکوواریانس نمونه‌ای که برآوردگری برای تابع خودکوواریانس جامعه است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{R}(t+\tau,t) &= \frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N-۱}\Big[(X_{L_{t+\tau+kT}}-\hat{\mu}_{L_{t+\tau}})(X_{L_{t+kT}}-\hat{\mu}_{L_t})\\ &\qquad +(X_{U_{t+\tau+kT}}-\hat{\mu}_{U_{t+\tau}})(X_{U_{t+kT}}-\hat{\mu}_{U_t})\Big].\end{aligned}$$

قضیه زیر نشان می‌دهد که برآوردگر معرفی شده به طور مجانبی نااریب است.

قضیه **۱.۴**. اگر $\sum_{U=-\infty}^{\infty} \mid Cov(X_{t+UT},X_{t+\tau}) \mid <\infty$ آنگاه به ازای هر t,τ، $\hat{R}(t+\tau,t)$ برای $Cov(X_{t+\tau},X_t)$ به طور مجانبی نااریب است.

اثبات.

$$\begin{aligned}E\hat{R}(t+\tau,t) &= E(\frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N-۱}[(X_{L_{t+\tau+kT}}-\hat{\mu}_{L_{t+\tau}})(X_{L_{t+kT}}-\hat{\mu}_{L_t})\\ &+ (X_{U_{t+\tau+kT}}-\hat{\mu}_{U_{t+\tau}})(X_{U_{t+kT}}-\hat{\mu}_{U_t})])\\ &= Cov(X_{L_{t+\tau}},X_{L_t})-\frac{۱}{N^۲}\sum_{p=-N+۱}^{N-۱}(N-|p|)cov(X_{L_{t+\tau}},X_{L_{t+pT}})\\ &+ Cov(X_{U_{t+\tau}},X_{U_t})-\frac{۱}{N^۲}\sum_{p=-N+۱}^{N-۱}(N-|p|)Cov(X_{U_{t+\tau}},X_{U_{t+pT}})\\ &= Cov(X_{t+\tau},X_t)-\frac{۱}{N^۲}\sum_{p=-N+۱}^{N-۱}(N-|p|)Cov(X_{t+\tau},X_{t+pT}),\end{aligned}$$

وقتی N به سمت بینهایت میل کند، نتیجه حاصل می شود.

□

فرضیات زیر برای بررسی سازگاری مجانبی برآوردگر خودکوواریانس مورد نیاز است.

(الف) X دارای گشتاور چهارم متناهی است.

(ب)

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\ &\frac{۱}{N^۲}\sum_{j=۰}^{N-۱}\sum_{k=۰}^{N-۱}E[(X_{L_{t+\tau+jT}}-\mu_{L_{t+\tau}})(X_{L_{t+jT}}-\mu_{L_t})Cov(X_{L_{t+\tau}},X_{L_t})\\ \times\ &[(X_{L_{t+\tau+kT}}-\mu_{L_{t+\tau}})(X_{L_{t+kT}}-\mu_{L_t})-Cov(X_{L_{t+\tau}},X_{L_t})]=۰.\end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\ &\frac{۱}{N^۲}\sum_{j=۰}^{N-۱}\sum_{k=۰}^{N-۱}E[(X_{U_{t+\tau+jT}}-\mu_{U_{t+\tau}})(X_{U_{t+jT}}-\mu_{U_t})-Cov(X_{U_{t+\tau}},X_{U_t})]\\ \times\ &[(X_{U_{t+\tau+kT}}-\mu_{U_{t+\tau}})(X_{U_{t+kT}}-\mu_{U_t})-Cov(X_{U_{t+\tau}},X_{U_t})]=۰.\end{aligned}$$

قضیه **۲.۴**. تحت فرضیات (الف) و (ب) و (ج)، $\hat{R}(t+\tau,t)$ برآوردگری سازگار برای $Cov(X_{t+\tau},t)$ خواهد بود.

اثبات. با استفاده از ملاحظه (۱۱.۹) از هرد و میامی[۶] می توان نشان داد:

$$\frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N-۱}(X_{L_{t+\tau+kT}}-\hat{\mu}_{L_{t+\tau}})(X_{L_{t+kT}}-\hat{\mu}_{L_t}),$$

برآوردگری سازگار برای $Cov(X_{L_{t+\tau}},X_{L_t})$ و

$$\frac{۱}{N}\sum_{k=۰}^{N-۱}(X_{U_{t+\tau+kT}}-\hat{\mu}_{U_{t+\tau}})(X_{U_{t+kT}}-\hat{\mu}_{U_t}),$$

برآوردگری سازگار برای $Cov(X_{U_{t+\tau}},X_{U_t})$ خواهد بود و لذا نتیجه حاصل می‌شود.

□

۵ شبیه سازی

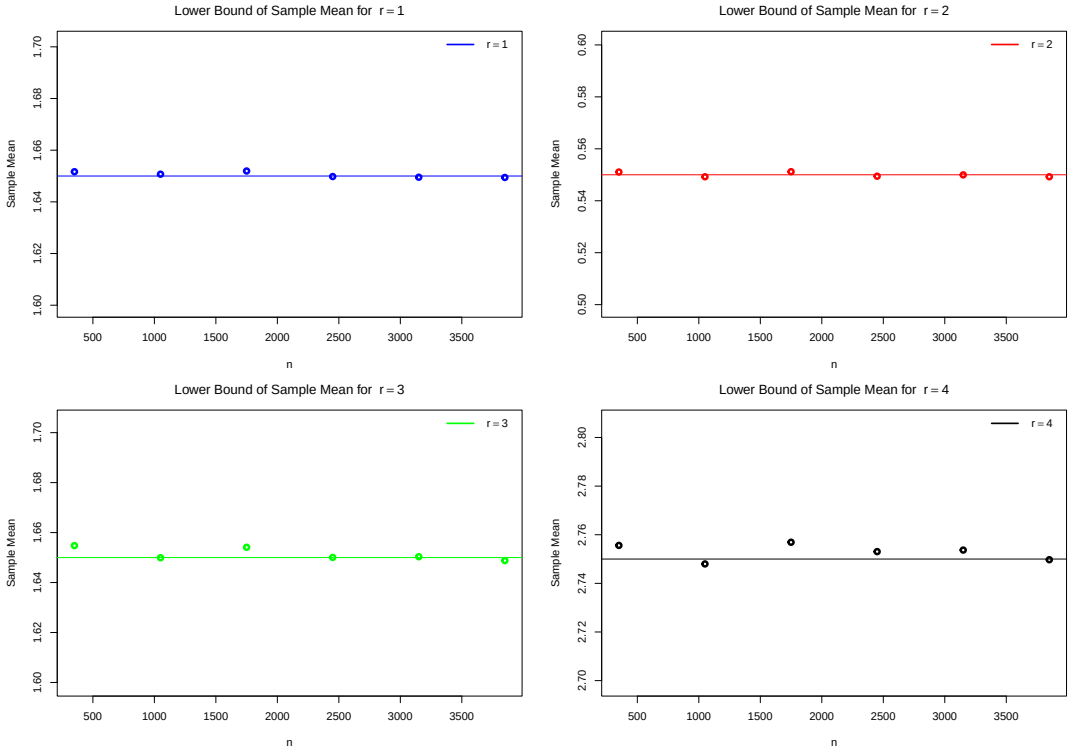
به منظور بررسی عملکرد برآوردگرهای معرفی شده در بخش های قبل از مدل معرفی شده در مثال۵.۲ استفاده شده و شبیه سازی انجام گردیده است. ابتدا داده ها از مدل اتورگرسیو بازه‌ای-مقدار مرتبه یک که توسط وانگ در سال ۲۰۱۶ به صورت زیر معرفی شده است تولید شده‌اند.

$$X_t = A + \alpha X_{t-۱} + \epsilon_t,$$

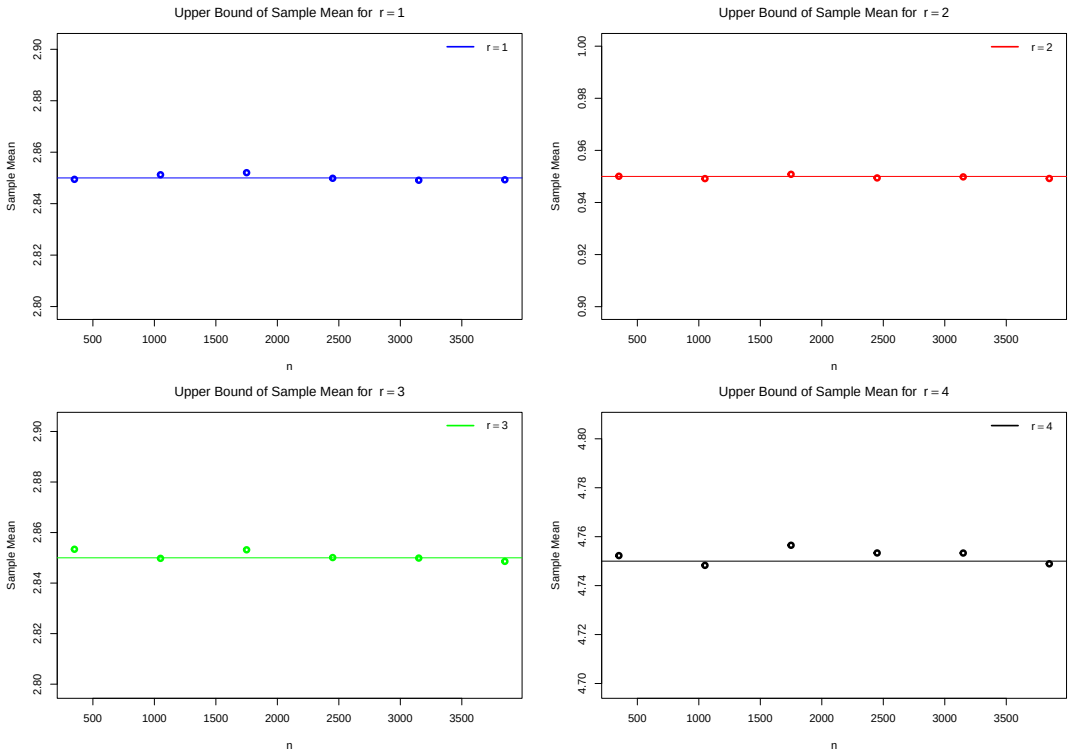
که در آن $A = [۰/۲۷, ۰/۳۳]$, $\alpha = ۰/۶$ و ϵ_t متغیرهای تصادفی مستقل بازه‌ای-مقدار با توزیع مرکز $N(۰, ۰/۶)$ و طول نمائی با پارامتر ۲۰ است.
از تابع متناوب زیر برای ساخت فرایند بازه‌ای-مقدار همبسته متناوب استفاده شده است:

$$f_t = ۳ + ۲\cos(\frac{\pi t}{۲}).$$

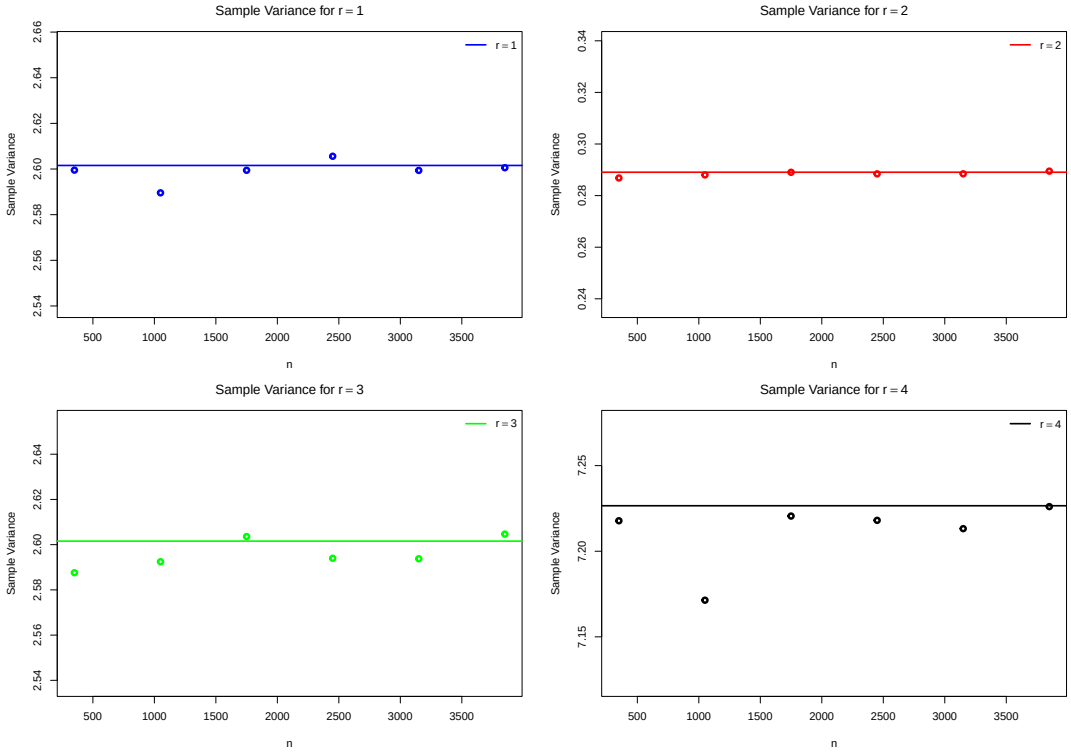
فرایند شبیه سازی برای نمونه هایی به حجم $n = ۱۰۰, ۵۰۰, ۱۰۰۰, \ldots, ۱۰۰۰۰$ انجام شده است. برای هر حجم نمونه ۱۰۰۰ تکرار برای اطمینان از استواری برآوردگرها انجام شده و در هر تکرار میانگین و واریانس برای مشاهدات بازه‌ای-مقدار محاسبه شده اند.
میانگین و واریانس در حجم نمونه های متفاوت در نمودارهای ۱ و ۲ و ۳ نمایش داده شده است. بررسی نمودارهای مربوط به میانگین و واریانس نشان می دهد که برآوردهای ارائه شده از دقت مناسبی برخوردار بوده اند. با بررسی نمودار ۴ مشاهده می شود که با افزایش حجم نمونه MSE کاهش می یابد، به عبارتی برآوردگر حاصل از نمونه به مقدار واقعی پارامتر نزدیک می شود.



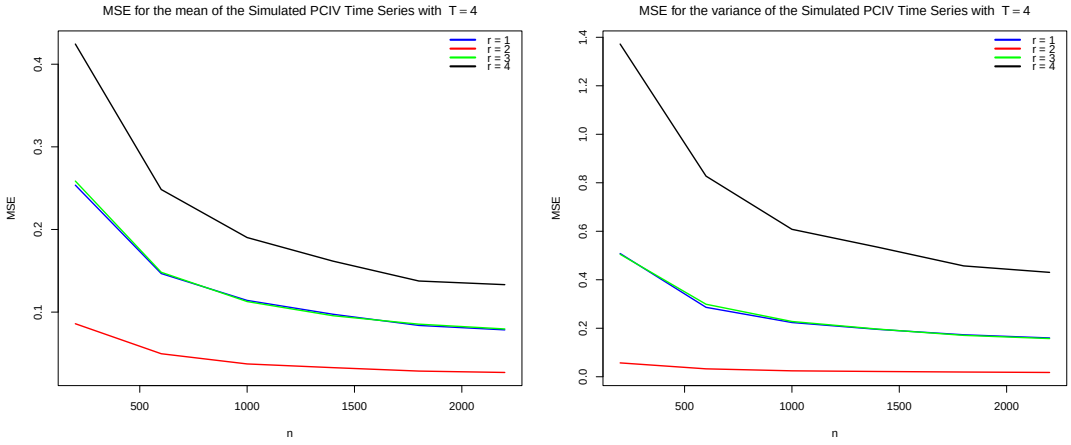
شکل ۱: برآورد کران پائین میانگین در حجم نمونه های متفاوت (نقاط، مقادیر برآوردشده و خط پیوسته مقدار واقعی کران پائین میانگین است.)



شکل ۲: برآورد کران بالای میانگین در حجم نمونه های متفاوت (نقاط، مقادیر برآوردشده و خط پیوسته مقدار واقعی کران بالای میانگین است.)



شکل ۳: برآورد واریانس در حجم نمونه های متفاوت (نقاط، مقادیر برآوردشده و خط پیوسته مقدار واقعی واریانس است.)



شکل ۴: میانگین مربع خطا برای برآورد میانگین و واریانس

فهرست منابع

[1] Aumann, R. J., 1965. Integrals of set-valued functions. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications, 12*, pp.1-12. https://doi.org/10.1016/0022-247X(65)90049-1

[2] Buansing, T., Golan. A. and Ullah, A., 2020, An information-theoretic approach for forecasting interval-valued SP500 daily returns. *International Journal of Forecasting, 12*(1), pp. 1-14. https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2019.09.003

[3] Brito, P., 2014. Symbolic data analysis: Another look at the interaction of data mining and statistics. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery, 4*, pp.281-295. https://doi.org/10.1002/widm.1133.

[4] Beyaztas, U., Shang, H. L., and Abdel-Salam, A. S. G., 2020. Functional linear models for interval-valued data. *Communications in Statistics - Simulation and Computation, 51*(7), pp. 3513–3532. https://doi.org/10.1080/03610918.2020.1714662

[5] Gonzalez-Rivera, G. and Lin, W., 2013. Constrained Regression for Interval valued data. *Journal of Business and Economic Statistics, 21*(4), pp. 473-490. https://doi.org/10.1080/07350015.2013.818004

[6] Hurd H. L. and Miamee A., 2007. Periodically correlated random sequences. Spectral theory and practice. Wiley,Hoboken.

[7] Ji, A., Cao, Y., Zhang, J., and Li, Q. 2024. SVR-based method for fixed effects interval-valued panel models. *Communications in Statistics - Theory and Methods, 54*(8), pp. 2393–2411. https://doi.org/10.1080/03610926.2024.2369315

[8] Lin, W. and Gonzalez-Rivera, G., 2016. Interval-valued time series models: Estimation based on order statistics exploring the Agriculture Marketing Service data. *Computational Statistics and Data Analysis, 100*, pp. 694-711. doi.org:10.1016/j.csda.2015.07.008

[9] Neto, E., Cordeiro, G., and Carvalho, F., 2011. Bivariate symbolic regression models for interval-valued variables. *Journal of Statistical Computation and Simulation, 81*(11), pp. 1727-1744. doi:10.1080/00949655.2010.500470

[10] Wang, X., Zhang, Z. and Li, S., 2016. Set-valued and interval-valued stationary time series. *Journal of Multivariate Analysis, 145*, pp.208-223. https://doi.org/ 10.1016/j.jmva.2015.12.010

[11] Workman, A., and Song, J. J., 2023. Spatial analysis for interval-valued data. *Journal of Applied Statistics, 51*(10), pp. 1946–1960. https://doi.org/10.1080/02664763.2023.2249636

[12] Yang, Z., Lin,D. and Zhang, A., 2019. Interval-valued data prediction via regularized artificial neural network. *Neurocomputing, 331*, pp.336-345. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.11.063

[13] Yang, X., and Li, S., 2005. The D_p-Metric space of set-valued random variables and its application to covariances. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 1*, pp.73-82. https://doi.org/10.1007/11425-005-0007-4

[14] Zhang, J., and Ji, J., 2024. Locally linear method for fixed effects panel interval-valued data model, *Knowledge-Based Systems, 300*, https://doi.org/10.1016/j.knosys.2024.112226.

Periodically correlated Interval valued Processes

M. Hashemi[(1)] [2] and Z. Sajjadnia[(2)]

[(1)] Department of Statistics, Khansar Campus, University of Isfahan , Isfahan, Iran
[(2)] Department of Statistics, Shiraz University, Shiraz, Iran

Communicated by: Gholamali Parham

Received: 24 November 2024 Accepted: 15 November 2025

Abstract: This paper introduces alternating correlated interval processes. The estimation of their mean and autocovariance is presented, and their asymptotic behavior is examined. Furthermore, through simulation, the behavior of the mean and autocovariance estimates is studied, and the results are analyzed and evaluated.

Keywords: Periodically correlated processes, interval valud random variable, autocovariance.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (M. Hashemi) m.hashemi.t@khc.ui.ac.ir, (Z. Sajjadnia) sajjadnia@shirazu.ac.ir