مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۳، ص ۱۳۷–۱۴۸

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.50768.2422

زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال در حلقه‌های غیردوطرفه

سیدجمال هاشمی‌زاده درفولی [۱] [۱] و فاطمه حسن‌زاده [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دبیر مسئول: امید علی شهنی کرمزاده

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۸/۲۸

چکیده: این مقاله به بررسی زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال در حلقه‌های غیردوطرفه و ویژگی‌های آنها می‌پردازد. در ابتدا، تعریف و ویژگی‌های زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال ارائه می‌شود و پس از آن رفتار این زیرحلقه‌ها، با این فرض که معکوس‌نگه‌دار باشند، در ue–حلقه‌ها بررسی می‌گردد و نشان داده می‌شود که چگونه ویژگی‌هایی از این زیرحلقه‌ها به حلقه اصلی منتقل می‌شود. سپس، حلقه‌های شدیداً دوطرفه، که در آنها هر عضو یا مرکزی است یا معکوس‌پذیر، بررسی می‌شوند. با در نظر گرفتن حلقه‌های تعویض‌پذیر و حلقه‌های تقسیم به‌عنوان مثال‌های بدیهی از این حلقه‌ها، یک نمونه غیربدیهی ارائه می‌شود. سرانجام نشان داده می‌شود که در حالت غیربدیهی، این حلقه‌ها موضعی هستند و ایده‌آل ماکسیمال یکتای آنها پوچ‌ساز مجموعه عناصر جابجاگر جمعی حلقه است و علاوه بر این ثابت می‌شود که حلقه خارج‌قسمتی حاصل از این ایده‌آل ماکسیمال یک میدان است.

واژه‌های کلیدی: حلقه دوطرفه، حلقه شدیداً دوطرفه، زیرحلقه معکوس‌نگه‌دار، ue–حلقه.

رده‌بندی ریاضی: 16D25; 16L30; 16U60;16P20

۱ مقدمه

در این مقاله، فرض بر این است که همه حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یک‌دار بوده و در هیچ‌یک، تساوی $۰ = ۱$ برقرار نیست. مفهوم زیرحلقه‌ی ماکسیمال در حلقه‌های جابجایی، ابتدا توسط گیلمر در [۹] معرفی شد. او در این پژوهش به بررسی دامنه‌هایی با زیرحلقه‌ی مینیمال یکتا پرداخته است. در سال ۱۹۰۵، شور در [۱۸] قضیه‌ای کلیدی ارائه کرد که توجه ریاضی‌دانان را به زیرحلقه‌های جابجایی ماکسیمال جلب نمود. این قضیه بیان می‌کند که بُعدِ یک زیرحلقه‌ی جابجایی ماکسیمال در حلقه ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان اعداد مختلط حداکثر برابر $۱ + [\frac{n^۲}{۴}]$ است. لم زورن، وجود زیرحلقه‌های جابجایی ماکسیمال در یک حلقه‌ی جابجایی را تضمین نمی‌کند. با وجود این، مطالعاتی که

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(F. Hassanzadeh) h-hassanzade@stu.scu.ac.ir, (J. Hashemi) jhashemi@scu.ac.ir

توسط کرم‌زاده و آذرنگ انجام شده، نشان می‌دهد که اکثر حلقه‌های جابجایی دارای زیرحلقه‌ی ماکسیمال جابجایی هستند ([۱]، [۲]، [۳]، [۴] و [۵]). برخلاف حلقه‌های جابجایی، در یک حلقه‌ی ناجابجایی، زیرحلقه‌ی ماکسیمال جابجایی همواره وجود دارد. خواص و ویژگی‌های این زیرحلقه‌ها توسط کرم‌زاده و نظری در مرجع [۱۵] بیان شده است.

منظور از زیرحلقه‌ی ماکسیمال، زیرحلقه‌ای است که در مجموعه زیرحلقه‌های سره، نسبت به رابطه شمول ماکسیمال باشد. همچنین، منظور از زیرحلقه‌ی جابجایی ماکسیمال، زیرحلقه‌ای است که در مجموعه زیرحلقه‌های جابجایی سره، نسبت به رابطه شمول، ماکسیمال باشد. توجه داشته باشیم هرگاه R یک حلقه جابجایی باشد، به این دلیل که تمامی زیرحلقه‌های سره جابجایی خواهند بود، دو مفهوم زیرحلقه‌ی ماکسیمال و زیرحلقه‌ی جابجایی ماکسیمال بر هم منطبق خواهند شد. حلقه‌ی R را دوطرفه راست گوییم هرگاه هر ایده‌آل راست آن دوطرفه باشد، و به‌طور مشابه، دوطرفه چپ گوییم هرگاه هر ایده‌آل چپ آن دوطرفه باشد. حلقه‌ی R را دوطرفه گوییم هرگاه دوطرفه راست و چپ باشد. هرگاه R یک حلقه‌ی دوطرفه ناجابجایی باشد، علاوه بر دو مفهوم زیرحلقه جابجایی ماکسیمال که وجود آن بنا بر لم زورن ثابت می‌شود و زیرحلقه ماکسیمال، مفهوم زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال نیز قابل طرح است. منظور از زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکیسمال، زیرحلقه‌ای است که در بین زیرحلقه‌های دوطرفه سره، ماکسیمال باشد. در مورد وجود یا عدم وجود زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال در حلقه‌های دوطرفه، وضعیت دقیقاً مانند حالت جابجایی است. بنابراین، زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال در دو دسته از حلقه‌ها باید مورد مطالعه قرار گیرند: (۱) در حالتی که R یک حلقه دوطرفه باشد، که این حالت دقیقاً مانند حالت جابجایی است؛ (۲) حلقه‌های ناجابجایی غیردوطرفه، که وضعیت در این حالت مانند وجود زیرحلقه‌های ماکسیمال جابجایی در حلقه‌های ناجابجایی است. هدف ما در این مقاله، بررسی حالت دوم است.

ما در هنگام مطالعه بر روی اعضای حلقه‌های دوطرفه، به یک نوع حلقه‌ی دوطرفه خاص (حلقه‌ای که هر عضوش مرکزی یا معکوس‌پذیر است) برخورد کردیم که آن را شدیداً دوطرفه نامیدیم. در واقع، حلقه‌های شدیداً دوطرفه را می‌توان تعمیمی از دو ساختار شناخته‌شده‌ی حلقه‌های دوطرفه و حلقه‌های دوطرفه قوی دانست؛ حلقه‌هایی که در آنها ضرب هر دو ایده‌آل دل‌خواه جابجاپذیر است (یعنی برای هر دو ایده‌آل I و J از R، تساوی $IJ = JI$ برقرار باشد). برای اطلاعات بیشتر در مورد حلقه‌های دوطرفه، خواننده را به [۶، ۱۲، ۲۰] ارجاع می‌دهیم.

ما نمادهای $\mathrm{U}(R)$، $\mathrm{Cen}(R)$ را به‌ترتیب برای مجموعه اعضای معکوس‌پذیر و اعضای مرکزی حلقه‌ی R به‌کار می‌بریم. همچنین، منظور از نماد $\mathrm{Soc}(R_R)$ $\mathrm{Soc}({}_RR)$)، جمع همه‌ی ایده‌آل‌های راست (چپ) مینیمال حلقه R و $\mathrm{Nil}_*(R)$ رادیکال پوچ حلقه می‌باشد. چنان‌چه $X \subseteq R$، از نمادهای $\mathrm{l}(X)$، $\mathrm{r}(X)$ به‌ترتیب برای نمایش پوچ‌ساز چپ و راست X در حلقه‌ی R استفاده می‌کنیم. در حالت خاص $X = \{a\}$، پوچ‌ساز چپ و راست X را به‌ترتیب با نمادهای $\mathrm{l}(a)$ و $\mathrm{r}(a)$ نمایش می‌دهیم. ایده‌آل چپ I در حلقه‌ی R که با هر ایده‌آل چپ ناصفر R اشتراک ناصفر داشته باشد، یک ایده‌آل چپ اساسی نامیده می‌شود. ایده‌آل راست اساسی به‌طور مشابه تعریف می‌گردد. مجموعه $\mathrm{Z}_l(R)$ $(\mathrm{Z}_r(R))$ را مجموعه همه عضوهای حلقه R می‌گیریم که پوچ‌ساز چپ (راست) آنها یک ایده‌آل چپ (راست) اساسی باشد. در واقع، $\mathrm{Z}_l(R)$ و $\mathrm{Z}_r(R)$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R هستند که به‌ترتیب ایده‌آل تکین چپ و ایده‌آل تکین راست حلقه R نامیده می‌شوند. چنان‌چه $\mathrm{Z}_l(R) = R$، حلقه‌ی R را یک حلقه تکین چپ و در صورتی‌که $\mathrm{Z}_l(R) = 0$، آن را یک حلقه ناتکین چپ می‌نامند. حلقه تکین راست و ناتکین راست به‌طور مشابه تعریف می‌شوند. حلقه‌ی R را موضعی می‌نامند هرگاه دارای یک ایده‌آل چپ ماکسیمال یکتا باشد. در [۱۷، قضیه ۱۹.۱]، ثابت شده است حلقه R موضعی است اگر و تنها اگر دارای یک ایده‌آل راست ماکسیمال باشد و یا به‌طور معادل، اگر و تنها اگر $R \setminus \mathrm{U}(R)$ با عمل ضرب حلقه، یک گروه تشکیل دهد. حلقه‌ی R را کاهش‌یافته می‌نامند هرگاه فاقد عضو پوچ‌توان ناصفر باشد، و حلقه‌ای را که هیچ ایده‌آل چپ پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد نیم‌اول می‌گویند. برای هر دو عضو x و y در حلقه‌ی R، عبارت $xy - yx$ را جابجاگر جمعی x و y می‌نامند. خاطر نشان می‌شود که هرآنچه در مورد حلقه‌ها مورد نیاز است، در [۱۶، ۱۷] آمده و خواننده می‌تواند برای دیدن جزئیات بیشتر این منابع را بنگرد.

۲ زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال

در این بخش، به بررسی زیرحلقه‌های ماکسیمال دوطرفه در حلقه‌های غیردوطرفه پرداخته می‌شود. زیرحلقه‌های ماکسیمال دوطرفه، به‌عنوان زیرحلقه‌هایی که در مجموعه زیرحلقه‌های دوطرفه سره نسبت به رابطه شمول ماکسیمال هستند، نقش مهمی در تحلیل ساختار جبری حلقه‌ها ایفا می‌کنند. ابتدا، تعریف دقیق این زیرحلقه‌ها ارائه شده و ویژگی‌های اساسی آنها بررسی می‌شود. سپس، با استفاده از مثال‌های بدیهی و غیربدیهی، خواص این زیرحلقه‌ها روشن‌تر می‌گردد. در ادامه، ارتباط بین زیرحلقه‌های ماکسیمال دوطرفه و خواص جبری حلقه اصلی، از جمله موضعی بودن و نوتری بودن، تحلیل می‌شود. همچنین، با بهره‌گیری از ابزارهایی مانند لم زورن، وجود این زیرحلقه‌ها در حلقه‌های غیردوطرفه اثبات شده و نتایجی درباره ساختار آنها ارائه می‌شود.

تعریف **۱.۲**. فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیرحلقه سره S از R را زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال گوییم هرگاه بین R و S زیرحلقه‌ی دوطرفه دیگری موجود نباشد.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم R یک حلقه تقسیم و $\triangle = \{(a, a) : a \in R\}$ باشد. از آن‌جایی که $M = 0$ ایده‌آل ماکسیمال R است، پس بنا بر [۱، قضیه ۲.۲]، $\triangle$ زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال $R \times R$ است.

در زیر یک مثال غیربدیهی از زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال از یک حلقه‌ی دوطرفه را بیان می‌کنیم.

مثال **۲.۲**. فرض کنیم R یک حلقه تقسیم باشد. حلقه‌ی T را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} : a, b \in R \right\}$$

T یک حلقه دوطرفه است (لم ۱.۲ از مرجع [۸]). در این‌صورت به‌سادگی می‌توان دید که

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : b \in R \right\}$$

یک ایده‌آل ماکسیمال در T است. پس طبق [۱، قضیه ۲.۲]،

$$R' = diag(T \times T) + M \times M = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a & x \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & y \\ 0 & a \end{bmatrix} \right) : a, x, y \in R \right\}$$

یک زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال از $T \times T$ است.

در گزاره زیر نشان می‌دهیم اجتماع هر زنجیر دل‌خواه از زیرحلقه‌های دوطرفه یک حلقه، خود زیرحلقه‌ای دوطرفه خواهد بود.

گزاره **۳.۲**. اگر $\{R_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر دل‌خواه از زیرحلقه‌های دوطرفه یک حلقه باشد، آن‌گاه $\bigcup_{i \in I} R_i$ نیز یک زیرحلقه‌ی دوطرفه است.

اثبات. ابتدا یادآوری می‌کنیم که یک حلقه‌ی R دوطرفه است اگر و تنها اگر برای هر $a \in R$، داشته باشیم $aR = Ra$. به‌طور معادل، R دوطرفه است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in R$، عناصر $a', b' \in R$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $ab = b'a = a'b$. اکنون فرض کنیم $a, b \in \bigcup_{i \in I} R_i$ دو عضو دل‌خواه باشند. آن‌گاه اندیس‌های n و k در I وجود دارند که $a \in R_n$ و $b \in R_k$. چون $\{R_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر است، بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $a, b \in R_k$. از طرفی R_k یک حلقه دوطرفه است، پس عناصر a', b' در R_k و در نتیجه در $\bigcup_{i \in I} R_i$ وجود دارند به‌طوری‌که $ab = b'a = a'b$. بنابراین $\bigcup_{i \in I} R_i$ دوطرفه است. □

نتیجه **۴.۲**. هر حلقه غیردوطرفه دارای زیرحلقه دوطرفه (نه لزوماً جابجایی) ماکسیمال است.

ملاحظه‌ی زیر نشان می‌دهد هر زیرحلقه دوطرفه از یک حلقه غیردوطرفه، در یک زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال قرار دارد.

ملاحظه **۵.۲**. فرض کنیم R یک حلقه‌ی غیردوطرفه باشد. در این‌صورت برای هر زیرحلقه‌ی دوطرفه D از R، زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال S موجود است که $D \subseteq S$.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه‌ی غیردوطرفه و D یک زیرحلقه دوطرفه از R باشد. مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Sigma = \{L : D \subseteq L, \ L \text{دوطرفه}\}$$

از آن‌جا که $D \in \Sigma$، داریم $\Sigma \neq \emptyset$. چون اجتماع هر زنجیر دل‌خواه از زیرحلقه‌های دوطرفه، یک زیرحلقه دوطرفه خواهد بود، با استفاده از لم زورن، مجموعه Σ عضوی ماکسیمال مانند S خواهد داشت. □

لم **۶.۲**. اگر R یک حلقه غیردوطرفه باشد، آن‌گاه هر عضو دل‌خواه $r \in R$ در یک زیرحلقه دوطرفه (نه لزوماً جابجایی) ماکسیمال از R قرار دارد.

اثبات. فرض کنیم $r \in R$ و C مرکز حلقه R باشد. در این‌صورت، $C[r]$ یک زیرحلقه‌ی دوطرفه از R است که شامل r می‌باشد. بنا بر ملاحظه‌ی ۵.۲، زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال S از R وجود دارد به‌طوری‌که $C[r] \subseteq S$، و در نتیجه $r \in S$. □

گزاره زیر نشان می‌دهد چگونه موضعی بودن زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال، به حلقه اصلی سرایت پیدا می‌کند.

گزاره **۷.۲**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه باشد. اگر هر زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال از R موضعی باشد، آن‌گاه R نیز یک حلقه‌ی موضعی است.

اثبات. فرض کنیم هر زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال از R موضعی باشد، در این‌صورت با استفاده از لم ۶.۲، به‌ازای هر $r \in R$، زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال S شامل r وجود دارد. این مطلب نشان می‌دهد r یا $1 - r$ معکوس‌پذیر است، در نتیجه R نیز یک حلقه موضعی است. □

تذکر **۸.۲**. گزاره فوق بیان می‌کند هر حلقه غیردوطرفه که موضعی نباشد، حداقل دارای یک زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال است که موضعی نیست.

قضیه **۹.۲**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه و $\{R_i\}_{i\in I}$ مجموعه همه زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال R باشد. اگر $[R : \bigcap_{i\in I} R_i]$ متناهی باشد، آن‌گاه R دارای تعداد متناهی زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال است.

اثبات. فرض کنیم $[R : \bigcap_{i\in I} R_i]$ متناهی باشد. در این‌صورت، $\frac{R}{\bigcap_{i\in I} R_i}$ یک گروه متناهی است و در نتیجه، تعداد زیرگروه‌های $\frac{R}{\bigcap_{i\in I} R_i}$ متناهی است. از سوی دیگر، بدیهی است که این زیرگروه‌ها متناظر با زیرحلقه‌هایی هستند که بین R و $\bigcap_{i\in I} R_i$ قرار دارند؛ بنابراین، تعداد این زیرحلقه‌ها نیز متناهی است. □

نتیجه **۱۰.۲**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه و $\{R_i\}_{i\in I}$ مجموعه همه زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال R باشد. در این‌صورت اگر $[R : \bigcap_{i\in I} R_i]$ متناهی باشد، آن‌گاه R دارای شرط زنجیر افزایشی و کاهشی روی زیرحلقه‌های دوطرفه خود است.

در قضیه‌ی ۹.۲ نشان دادیم که اگر $[R : \bigcap_{i\in I} R_i]$ متناهی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی R تنها تعداد متناهی زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال دارد. اکنون پرسش طبیعی این است که آیا عکس این نتیجه نیز برقرار است؟ به بیان دیگر، اگر R دارای تعداد متناهی زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال باشد، آیا می‌توان درباری متناهی بودن اندیس $[R : \bigcap_{i\in I} R_i]$ نیز نتیجه‌ای به‌دست آورد؟
برای بررسی این موضوع، گزاره‌ی زیر را مطرح می‌کنیم.

گزاره **۱۱.۲**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه باشد. اگر تعداد زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال R متناهی باشد، آن‌گاه می‌توان R را به اجتماع تعداد کمتری از این زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال کاهش داد، به‌گونه‌ای‌که اندیس R در اشتراک این زیرحلقه‌ها متناهی باشد.

اثبات. فرض کنیم $R_1, R_2, \ldots, R_n$ زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال R باشند. بنابه ۶.۲، داریم: $R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$. از گزاره‌ی ۱۱.۲ نتیجه می‌شود: $R = \bigcup_{i=1}^{k} R_i$، به‌طوری‌که برای هر $1 \leq i \leq k$، اندیس $[R : R_i]$ متناهی است. در نتیجه $[R : \bigcap_{i=1}^{k} R_i]$ متناهی است. □

قضیه **۱۲.۲**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه، $\{S_i\}_{i\in I}$ مجموعه همه زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال R باشد. اگر $[R : \bigcap_{i\in I} S_i]$ متناهی باشد و هر زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال R نوتری باشد، در این‌صورت خود R نیز نوتری است.

اثبات. با توجه به قضیه ۹.۲، R دارای تعداد متناهی زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال است. پس فرض کنیم $\{S_1, \ldots, S_n\}$ مجموعه همه زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال R باشد. اکنون فرض کنیم I یک ایده‌آل چپ (راست) دل‌خواه R باشد. در این‌صورت خواهیم داشت $I = \bigcup_{i=1}^{n}(I \bigcap S_i)$. از آن‌جا که هر S_i نوتری و $I \cap S_i$ یک ایده‌آل S_i است، پس این ایده‌آل متناهی مولد است. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، A_i مجموعه مولد $I \cap S_i$ باشد، آن‌گاه به‌سادگی می‌توان دید که $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ یک مجوعه مولد I است. بنابراین، هر ایده‌آل چپ (راست) از R متناهی مولد و از این‌رو R یک حلقه نوتری چپ (راست) است. □

قضیه **۱۳.۲**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه، $\{S_i\}_{i\in I}$ مجموعه همه زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال R و $[R : \bigcap_{i\in I} S_i]$ متناهی باشد. در این‌صورت اگر هر زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال R آرتینی باشد، آن‌گاه R نیز آرتینی است.

اثبات. فرض کنیم $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ یک زنجیر نزولی از ایده‌آل‌های چپ (راست) از R باشد. با توجه به ۹.۲، فرض کنیم $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال از R باشد. در این حالت چون به ازای هر $1 \leq i \leq n$، S_i یک حلقه آرتینی است، برای هر $k_i \in \mathbb{N}$، $1 \leq i \leq n$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $m \geq k_i$، $S_i \cap I_m = S_i \cap I_{m+1}$. اکنون فرض کنیم $t = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. ادعا می‌کنیم $I_t = I_{t+1}$. برای این منظور، فرض کنیم $a \in I_t$، در این‌صورت زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال S_i وجود دارد به‌طوری‌که $a \in S_i$. اما با توجه به فرض در نظر گرفته شده، $S_i \cap I_t = S_i \cap I_{t+1}$. بنابراین $a \in I_{t+1}$ و کار تمام است. □

۳ زیرحلقه‌های دوطرفه معکوس‌نگه‌دار ماکسیمال در ue–حلقه‌ها

بسیاری از خواص شناخته‌شده‌ی حلقه‌های جابجایی، به‌طور طبیعی در حلقه‌های دوطرفه نیز برقرار می‌مانند؛ اما این تطابق، همواره کامل نیست. برای نمونه، در یک حلقه‌ی دوطرفه، یک مقسوم‌علیه‌ی صفر چپ، لزوماً مقسوم‌علیه‌ی صفر راست نخواهد بود. از این‌رو، این پرسش اساسی

مطرح می‌شود که: تحت چه شرایط یا قیودی می‌توان تضمین کرد که در یک حلقه‌ی دوطرفه، هر مقسوم‌علیه‌ی صفر چپ نیز مقسوم‌علیه‌ی صفر راست باشد؟

برای پاسخ به این پرسش، لازم است به دسته‌ای ویژه از حلقه‌ها موسوم به ue–حلقه‌ها توجه کنیم. بر اساس لم زورن، در هر حلقه‌ای که نیم‌ساده نباشد، وجود یک ایده‌آل اساسی سره‌ی چپ تضمین می‌شود. از این رو، مطالعه‌ی چنین حلقه‌هایی از دیدگاه ساختار ایده‌آل‌ها، حائز اهمیت است.

حلقه‌هایی از این نوع، نخستین‌بار توسط کرم‌زاده و دیگران در [۱۴] معرفی شدند. به‌طور دقیق، یک حلقه‌ی R را ue–حلقه‌ی راست می‌نامند، هرگاه R دقیقاً دارای یک ایده‌آل اساسی راست سره باشد؛ و uem–حلقه‌ی راست می‌خوانند، هرگاه R دارای تنها یک ایده‌آل اساسی راست ماکسیمال باشد. به‌طور مشابه، تعاریف ue–حلقه‌ی چپ و uem–حلقه‌ی چپ نیز با در نظر گرفتن ایده‌آل‌های چپ، به همان صورت ارائه می‌شوند. گزاره بعد، یک مشخصه‌سازی از ue–حلقه‌ها ارائه می‌دهد.

گزاره **۱.۳**. ([۱۴، قضیه ۱۶]) حلقه R یک ue–حلقه راست است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:
(۱) R یک حلقه موضعی با یگانه ایده‌آل ماکسیمال M و $M^2 = 0$ است.
(۲) R یک uem–حلقه راست است به‌طوری‌که $\mathrm{Soc}(R_R)$ تنها ایده‌آل ماکسیمال از R است که جمعوندی از آن نیست.

گزاره بعد نشان می‌دهد در ue–حلقه‌ها چگونه هر مقسوم‌علیه صفر چپ یک مقسوم‌علیه صفر راست است.

گزاره **۲.۳**. فرض کنیم R یک ue–حلقه‌ی دوطرفه باشد. در این‌صورت، هر مقسوم‌علیه صفر چپ در R، مقسوم‌علیه صف راست نیز است.

اثبات. نخست توجه می‌کنیم اگر $\mathrm{J}(R) = 0$، آن‌گاه بنا بر [۱۴، قضیه ۱۸]، حلقه‌ی R منظم، و در نتیجه قویاً منظم است. می‌دانیم که در حلقه‌های قویاً منظم، هر مقسوم‌علیه صفر چپ، مقسوم‌علیه صفر راست نیز است. بنابراین بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $\mathrm{J}(R) \neq 0$.

اکنون نشان می‌دهیم اگر a یک مقسوم‌علیه صفر چپ باشد، در هر حالت گزاره ۱.۳، عنصر a مقسوم‌علیه صفر راست نیز است.

ابتدا فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی با یگانه ایده‌آل ماکسیمال M و شرط $M^2 = 0$ باشد. در این حالت، به‌سادگی می‌توان دید که حکم برقرار است.

در حالت دوم، فرض کنیم R یک uem–حلقه باشد و $M = \mathrm{Soc}(R_R)$ یگانه ایده‌آل ماکسیمال R باشد که جمعوند آن نیست. در این‌صورت، فرض کنیم N ایده‌آل ماکسیمالی باشد که $a \in N$. بدیهی است اگر N اساسی نباشد، آن‌گاه یک خودتوان مرکزی e وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $N = eR$. بنابراین خواهیم داشت $(1-e)a = 0$، که نشان می‌دهد a یک مقسوم‌علیه صفر راست است. اما اگر N ایده‌آل اساسی باشد، آن‌گاه $N = M$ و با توجه به اینکه $\mathrm{J}(R)M = 0$، حکم همچنان برقرار است. □

قضیه بعد که وجود یک زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال $T \subseteq R$ را در یک ue–حلقه راست موضعی با ساکل $S = \mathrm{Soc}(R_R)$ نشان می‌دهد به‌گونه‌ای‌که T ue–حلقه راست با ساکل S است، $T \cap \mathrm{U}(R) = \mathrm{U}(T)$، و $R_d \subseteq T$، در واقع صورت‌بندی ادعایی است که پیش‌تر در ملاحظه ۳۹ در مرجع [۱۴] بدون اثبات رسمی بیان شده است. در این ملاحظه، نویسندگان اشاره کرده‌اند که $R_d = \bigcap_{t\in S}\{r \in R : rt = tr\}$ در یک زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال ue–حلقه با ساکل S قرار دارد. ما این قضیه را به‌صورت صریح و با اثبات کامل ارائه کرده‌ایم تا بر اهمیت مطالعه زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال تأکید کنیم. این قضیه نشان می‌دهد که چنین زیرحلقه‌هایی به‌صورت طبیعی در ساختار ue–حلقه‌های موضعی وجود دارند و همان‌طور که قبلاً اشاره شد، نقش مهمی در درک خواص جبری این حلقه‌ها ایفا می‌کنند. یک سوال که به‌طور طبیعی در این رابطه وجود دارد این است که آیا می‌توان شرایطی را بررسی کرد که تحت آن R_d خود یک زیرحلقه ماکسیمال باشد.

گزاره **۳.۳**. فرض کنیم R یک ue–حلقه موضعی با ساکل راست $S = \mathrm{Soc}(R_R)$ باشد. آن‌گاه زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال $T \subseteq R$ وجود دارد به‌گونه‌ای که T یک ue–حلقه راست با ساکل راست S است، $T \cap \mathrm{U}(R) = \mathrm{U}(T)$، و $R_d \subseteq T$، که در آن $R_d = \bigcap_{t\in S}\{r \in R : rt = tr\}$.

اثبات. مجموعه $\mathcal{F}$ را به‌صورت مجموعه تمام زیرحلقه‌های دوطرفه $T \subseteq R$ تعریف می‌کنیم که: $R_d \subseteq T$ و T یک ue–حلقه راست با ساکل راست S است. طبق [۱۴، قضیه ۳۶]، $R_d \in \mathcal{F}$، و $\mathcal{F} \neq \emptyset$. اکنون فرض کنیم $\{T_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر در $\mathcal{F}$ باشد. در این‌صورت آشکار است که اگر قرار دهیم $T = \bigcup_{i\in I} T_i$، آن‌گاه $T \in \mathcal{F}$. بنابراین هر زنجیر صعودی در $\mathcal{C}$ کران بالا دارد. از لم زورن نتیجه می‌شود که $\mathcal{C}$ حداقل یک عنصر ماکسیمال دارد؛ این عنصر یک ue–زیرحلقه ماکسیمال است که R_d را شامل می‌شود و ساکل راست آن همان S است. □

در مرجع [۱۴]، قضیه ۳۶ نشان می‌دهد که اگر R یک ue–حلقه موضعی باشد، آن‌گاه آرتینی بودن R_d به حلقه اصلی سرایت پیدا می‌کند. همچنن در [۱۱]، نتیجه مهم متلیس در مورد اینکه مدول‌های متناهی نشانده شده روی حلقه‌های جابجایی نوتری، آرتینی هستند، به حلقه‌های دوطرفه تعمیم داده‌اند. با استفاده از این نتیجه نشان می‌دهیم که اگر R_d نوتری باشد، آن‌گاه R نیز نوتری است.

گزاره **۴.۳**. فرض کنیم R یک حلقه ue–حلقه موضعی باشد. اگر R_d نوتری باشد، آن‌گاه R نیز نوتری است.

اثبات. نوتری بودن R_d نشان می‌دهد $S = \mathrm{Soc}(R_d)$ با تولید متناهی است. بنابراین طبق ([۱۱] قضیه **۴.۲**)، می‌توان دریافت که R_d آرتینی است. از این‌رو بنا بر [۱۴، قضیه **۳۶**]، R آرتینی و در نتیجه نوتری است. □

گزاره **۵.۳**. فرض کنیم R یک ue–حلقه موضعی باشد. اگر R_d دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه R آرتینی است.

اثبات. R_d یک ue–حلقه و بنابراین یک لووی مدول است. اکنون با به‌کارگیری ([۱۳] گزاره **۲.۱**) خواهیم داشت R_d یک حلقه آرتینی و بنابراین R یک حلقه آرتینی است. □

ملاحظه **۶.۳**. اگر R_d دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه $S = \mathrm{Soc}(R_d)$ با تولید متناهی است.

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های زیرحلقه‌های ماکسیمال جابجایی در حلقه‌های ناجابجایی این است که معکوس هر عضوی از زیرحلقه، که در حلقه‌ی اصلی معکوس‌پذیر است، خود عضوی از همان زیرحلقه می‌باشد. در حقیقت، بر پایه‌ی این ویژگی، بسیاری از خصوصیات زیرحلقه ــ فارغ از هر ویژگی دیگر ــ از حلقه به زیرحلقه منتقل می‌شود ([۱۵] را ببینید).

تعریف **۷.۳**. فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیرحلقه‌ی آن باشد. زیرحلقه‌ی S را معکوس‌نگه‌دار می‌نامند، اگر برای هر $a \in S$، در صورتی که a در R معکوس‌پذیر باشد، معکوس آن نیز در S قرار داشته باشد.

در مرجع [۱۹] به‌طور مفصل درباره زیرحلقه‌های معکوس‌نگه‌دار پژوهش شده و مثال‌های متعددی ارائه گردیده است. در ادامه، یکی از این مثال‌ها را بررسی می‌کنیم.

مثال **۸.۳**. اگر R یک حلقه و S یک زیرحلقه قویاً منظم از R باشد، آن‌گاه S معکوس‌نگه‌دار است.

اثبات. فرض می‌کنیم $x \in S$ عنصری معکوس‌پذیر در R باشد. براساس تعریف عنصری چون $y \in S$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $x = x^۲y$. از این تساوی می‌توان نوشت $x(۱ - xy) = ۰$. از آن‌جا که x معکوس‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم $(۱ - xy) = ۰$، و در نتیجه $x^{-۱} = y \in S$. □

گزاره بعد، تحت شرایطی، عکس نتیجه فوق را بیان می‌کند. پیش از بیان آن، یادآوری می‌کنیم که حلقه R منظم‌یکه (حلقه‌ی R منظم‌یکه نامیده می‌شود هرگاه برای هر عنصر متعلق به R، عنصر معکوس‌پذیر $u \in R$ موجود باشد به‌طوری‌که $a = aua$) است اگر و تنها اگر برای هر $a \in R$، عناصر خودتوان e و وارون‌پذیر u در R موجود باشند به‌طوری‌که $a = u + e$ و $Ra \cap Re = ۰$. برای مشاهده‌ی اثبات این مطلب می‌توان [۷، قضیه ۱] را نگریست. همچنین به این دلیل که خودتوان‌های یک حلقه کاهش‌یافته مرکزی هستند، به‌سادگی نتیجه می‌شود که هر حلقه منظم فون نیومان کاهش‌یافته، یک حلقه‌ی قویاً منظم است.

گزاره **۹.۳**. اگر R یک حلقه قویاً منظم باشد، آن‌گاه هر زیرحلقه معکوس‌نگه‌دار R که شامل مرکز حلقه نیز باشد، قویاً منظم است.

اثبات. فرض کنیم R قویاً منظم و $a \in S$ عنصری دل‌خواه باشد. در این‌صورت عناصر خودتوان e و معکوس‌پذیر u در R وجود دارند به‌طوری‌که $a = e + u$ و $eR \cap aR = ۰$. از آن‌جا که حلقه‌های قویاً منظم کاهش‌یافته و در حلقه‌های کاهش‌یافته خودتوان‌ها در مرکز حلقه قرار دارند، نتیجه می‌گیریم $e \in S$. همچنین براساس تعریف زیرحلقه‌های معکوس‌نگه‌دار، چون u معکوس‌پذیر است، پس $u^{-۱} \in S$. اکنون از تساوی $aS \cap eS = ۰$ نتیجه می‌شود که S یک حلقه قویاً منظم است. □

در ادامه نتایجی را درباره زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال معکوس‌نگه‌دار حلقه، بیان می‌کنیم.

گزاره **۱۰.۳**. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت برای هر زیرحلقه معکوس‌نگه‌دار S از R، $\mathrm{J}(R) \cap S \subseteq \mathrm{J}(S)$. به‌ویژه اگر R یک حلقه‌ی موضعی با یگانه ایده‌آل ماکسیمال M باشد، آن‌گاه هر زیرحلقه معکوس‌نگه‌دار S از R نیز موضعی با یگانه ایده‌آل ماکسیمال $S \cap M$ است.

اثبات. فرض کنیم $x \in \mathrm{J}(R) \cap S$ عضوی دل‌خواه باشد. در این‌صورت، برای هر $s \in S$، $۱ - sx$ در R معکوس‌پذیر است. از آن‌جا که $(۱ - sx)^{-۱} \in S$)، نتیجه می‌گیریم $x \in \mathrm{J}(S)$ بنابراین حکم مورد نظر حاصل می‌شود. اکنون فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی و S زیرحلقه‌ای از آن باشد. با توجه به اینکه $\mathrm{U}(S) = \mathrm{U}(R) \cap S$، موضعی بودن S بدیهی است. □

ملاحظه **۱۱.۳**. آشکار است که اگر S یک حلقه‌ی دوطرفه باشد، آن‌گاه $\mathrm{Nil}_*(S)$ با مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی S، یعنی $\mathrm{Nil}(S)$، برابر است. با توجه به این نکته، بدیهی است که اگر S یک زیرحلقه‌ی دوطرفه‌ی R باشد، آن‌گاه $\mathrm{Nil}_*(R) \cap S \subseteq \mathrm{Nil}(S)$.

با توجه به گزاره‌ی ۱۰.۳ و ملاحظه‌ی ۱۱.۳ نتیجه‌ی زیر برقرار است.

گزاره **۱۲.۳**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه باشد و همه زیرحلقه‌های دوطرفه ماکسیمال از R، معکوس‌نگه‌دار باشند. در این‌صورت، R یک حلقه موضعی است به‌طوری‌که تنها ایده‌آل ماکسیمال آن از عناصر پوچ‌توان تشکیل شده است اگر و تنها اگر هر زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال R تنها یک ایده‌آل اول داشته باشد.

گزاره **۱۳.۳**. فرض کنیم R یک حلقه موضعی با ایده‌آل ماکسیمال یکتای M باشد. اگر S یک زیرحلقه‌ی معکوس‌نگه‌دار R باشد، آن‌گاه $S \cap \mathrm{Soc}({}_RR) \subseteq \mathrm{Soc}({}_SS)$. همچنین اگر $M^2 = 0$، آن‌گاه S یک حلقه تقسیم است، یا $S \cap \mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Soc}({}_SS)$.

اثبات. اگر $M = 0$، آن‌گاه حکم برقرار است. بنابراین فرض کنیم $M \neq 0$. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که $S \cap M = 0$. با توجه به فرض و گزاره‌ی ۱۰.۳، چون S یک حلقه موضعی با یگانه ایده‌آل ماکسیمال $S \cap M$ است نتیجه می‌شود $S \cap \mathrm{Soc}({}_RR) = 0$ و در نتیجه، حکم برقرار است. اکنون فرض کنیم $S \cap M \neq 0$ و $0 \neq x \in S \cap \mathrm{Soc}({}_RR)$ عضوی دل‌خواه باشد. از آن‌جا که $M\mathrm{Soc}({}_RR) = 0$، نتیجه می‌شود $(S \cap M)x = 0$). بنابراین Sx یک ایده‌آل مینیمال چپ در S است و در نتیجه $x \in \mathrm{Soc}({}_SS)$. اکنون اگر $M^2 = 0$، آن‌گاه $M = \mathrm{Soc}({}_RR)$. در این حالت با توجه به بخش نخست اثبات، اگر $S \cap M = 0$، آن‌گاه S حلقه‌ی تقسیم است؛ و اگر $S \cap M \neq 0$، آن‌گاه $S \cap \mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Soc}({}_SS)$. □

گزاره **۱۴.۳**. فرض کنیم R یک ue–حلقه چپ باشد، به‌طوری‌که هیچ خودتوان نابدیهی نداشته باشد. در این‌صورت، هر زیرحلقه‌ی دوطرفه و معکوس‌نگه‌دار R، یا یک حلقه تقسیم است، یا یک ue–حلقه.

اثبات. فرض کنیم R یک ue–حلقه چپ باشد. در این‌صورت، R همچنین یک uem–حلقه چپ است و بنابراین همه ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال R، به جز یکی، توسط یک عضو خودتوان تولید می‌شوند. در واقع، آن ایده‌آل استثناء ساکل حلقه است و تنها ایده‌آل ماکسیمال حلقه نیز محسوب می‌شود. اکنون فرض کنیم R یک ue–حلقه بدون خودتوان نابدیهی و S یک زیرحلقه‌ی دوطرفه از R باشد. در این‌صورت، R دارای یک ایده‌آل چپ ماکسیمال مانند M است که یا $M^2 = 0$ است، یا $N = \mathrm{Soc}({}_RR)$ تنها ایده‌آل چپ ماکسیمال R می‌باشد. در حالت دوم، از آن‌جا که $\mathrm{J}(R)\mathrm{Soc}({}_RR) = 0$، داریم $N^2 = 0$. بنابراین، M تنها ایده‌آل چپ ماکسیمال R است و در نتیجه R یک حلقه موضعی است. طبق نتیجه‌ی ۱۰.۳، S نیز یک حلقه موضعی با یگانه ایده‌آل ماکسیمال $S \cap M$ است. اگر $S \cap M = 0$، آن‌گاه S یک حلقه تقسیم است. اما اگر $S \cap M \neq 0$، آن‌گاه $(S \cap M)^2 = 0$)، و در این حالت نیز S یک ue–حلقه است. □

گزاره **۱۵.۳**. فرض کنیم R یک حلقه غیردوطرفه باشد. اگر هر زیرحلقه دوطرفه ماکسیمال از R یا یک حلقه تقسیم یا یک ue–حلقه‌ی بدون خودتوان نابدیهی باشد، آن‌گاه R یک حلقه موضعی است که یگانه ایده‌آل ماکسیمال آن از عناصر پوچ‌توان تشکیل شده است.

اثبات. با توجه به گزاره‌ی پیشین، مشاهده می‌شود که هر زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال R یک حلقه موضعی است، به‌گونه‌ای که توان دوم ایده‌آل ماکسیمال یکتای آن صفر است. بنابراین، طبق گزاره‌ی ۷.۲، R یک حلقه موضعی است. اکنون فرض کنیم $r \in R$ یک عضو معکوس‌ناپذیر باشد. در این‌صورت، با استفاده از لم ۶.۲، یک زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال S با یگانه ایده‌آل ماکسیمال M وجود دارد، به‌طوری‌که $r \in M$. از آن‌جا که $M^2 = 0$، نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید. □

نتیجه **۱۶.۳**. فرض کنیم R یک حلقه ناجابجایی باشد که هیچ عضو خودتوان نابدیهی ندارد و هر زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال آن معکوس‌نگه‌دار است. در این‌صورت، R یک حلقه تقسیم یا یک ue–حلقه چپ است اگر و تنها اگر برای هر زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال S از R، یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. S یک حلقه تقسیم است.

۲. S یک ue–حلقه است، به‌گونه‌ای‌که $S \cap \mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Soc}(S)$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم R یک حلقه تقسیم باشد. معکوس‌نگه‌دار بودن هر S ایجاب می‌کند که S نیز یک حلقه تقسیم باشد. اکنون فرض کنیم R یک ue–حلقه چپ بدون خودتوان نابدیهی باشد. با استدلال مشابه آنچه در ۱۴.۳ آمده است، R یک حلقه موضعی است که توان دوم ایده‌آل ماکسیمال آن صفر است. بنابراین، طبق ۱۳.۳، قسمت اول قضیه برقرار است.

اکنون فرض کنیم S یک حلقه تقسیم باشد. در این‌صورت، بدیهی است که R نیز یک حلقه تقسیم است، زیرا برای هر $r \in R$، یک زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال S از R وجود دارد که $r \in S$. حال فرض کنیم S یک ue–حلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال از R باشد که حلقه تقسیم نیست. نشان می‌دهیم که R یک ue–حلقه چپ است. آشکار است که $N = \mathrm{Soc}(S)$ تنها ایده‌آل ماکسیمال S است و $N = \mathrm{Soc}(S) = S \cap \mathrm{Soc}({}_RR)$. بنابراین، طبق ۱۵.۳، R یک حلقه موضعی است. اگر M تنها ایده‌آل ماکسیمال R باشد، آن‌گاه طبق گزاره‌ی ۱۰.۳، داریم $N = S \cap M = S \cap \mathrm{Soc}({}_RR)$. ادعا می‌کنیم که $M = \mathrm{Soc}({}_RR)$. در این‌صورت، $M^2 = 0$ و بنابراین R یک ue–حلقه چپ است و نتیجه‌ی مورد نظر حاصل می‌شود. برای اثبات ادعا، کافی است نشان دهیم $M \subseteq \mathrm{Soc}({}_RR)$. برای این منظور، فرض کنیم $0 \neq x \in M$ و T یک زیرحلقه‌ی دوطرفه ماکسیمال از R باشد که شامل x است. در نتیجه، $x \in M \cap T$ و بنابراین T نمی‌تواند یک حلقه تقسیم باشد. از این‌رو، با توجه به فرض، T یک ue–حلقه چپ است. طبق آنچه در بالا اثبات شد، $T \cap M = T \cap \mathrm{Soc}({}_RR)$، و در نتیجه $x \in \mathrm{Soc}({}_RR)$. ادامه‌ی اثبات با استفاده از ۱۴.۳ برقرار است. □

۴ حلقه‌های شدیداً دوطرفه

در بررسی ساختار حلقه‌ها، توجه به عناصر ویژه‌ی آنها همواره نقشی اساسی در درک ماهیت و ویژگی‌های جبری این ساختارها داشته است. از جمله عناصر خاص در یک حلقه می‌توان به عناصر مرکزی، عناصر معکوس‌پذیر، مقسوم‌علیه‌های صفر، عناصر خودتوان و موارد مشابه اشاره کرد. در واقع، بر پایه‌ی رفتار این عناصر، کلاس‌های گوناگونی از حلقه‌ها معرفی شده‌اند که هر یک سهم قابل‌توجهی در گسترش نظریه‌ی حلقه‌ها داشته‌اند. به‌عنوان نمونه می‌توان به حلقه‌های کوهن (حلقه‌هایی که هر عضوشان مقسوم‌علیه صفر یا معکوس‌پذیر است) و حلقه‌های پاک (حلقه‌هایی که هر عضو آنها را می‌توان به‌صورت مجموع یک خودتوان و یک معکوس‌پذیر نوشت) اشاره کرد. در این مقاله، ما به معرفی کلاس جدیدی از حلقه‌ها می‌پردازیم که در آنها هر عضو یا مرکزی است یا معکوس‌پذیر، و این حلقه‌ها را حلقه‌های شدیداً دوطرفه می‌نامیم. بدیهی است که حلقه‌های تقسیم و حلقه‌های جابجایی نمونه‌های ابتدایی از این کلاس محسوب می‌شوند که در این مطالعه به‌عنوان حالت‌های بدیهی در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف **۱.۴**. حلقه R را شدیداً دوطرفه می‌نامیم، اگر هر عضو آن یا در مرکز حلقه باشد یا معکوس‌پذیر.

مثال زیر یک نمونه غیربدیهی از حلقه‌های شدیداً دوطرفه ارائه می‌دهد.

مثال **۲.۴**. فرض کنیم K یک میدان دل‌خواه، s,t دو مجهول و $T=K(s,t)$ میدان کسرهای حلقه چندجمله‌ای‌ها بر حسب s و t با ضرایب در میدان K باشد. قرار می‌دهیم

$$R=\left\{\begin{bmatrix} a & a_s & b\\ ۰ & a & a_t\\ ۰ & ۰ & a\end{bmatrix} : a,b\in T\right\}$$

که در آن a_s و a_t به ترتیب مشتق جزیی a نسبت به s و t هستند. R با جمع و ضرب ماتریس‌ها یک حلقه شدیداً دوطرفه است.
در ابتدا توجه داریم که حلقه فوق جابجایی نیست، زیرا

$$\begin{bmatrix} s & ۱ & ۰\\ ۰ & s & ۰\\ ۰ & ۰ & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & ۰ & ۰\\ ۰ & t & ۱\\ ۰ & ۰ & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} st & t & ۱\\ ۰ & st & s\\ ۰ & ۰ & st\end{bmatrix}$$

اما

$$\begin{bmatrix} t & ۰ & ۰\\ ۰ & t & ۱\\ ۰ & ۰ & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & ۱ & ۰\\ ۰ & s & ۰\\ ۰ & ۰ & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} st & t & ۰\\ ۰ & st & s\\ ۰ & ۰ & st\end{bmatrix}$$

حلقه تقسیم هم نیست، زیرا

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

اکنون فرض کنیم $\begin{bmatrix} a & a_s & b\\ ۰ & a & a_t\\ ۰ & ۰ & a\end{bmatrix}$ یک عضو دل‌خواه در R باشد. روشن است که اگر a ناصفر باشد، آن‌گاه $\begin{bmatrix} a & a_s & b\\ ۰ & a & a_t\\ ۰ & ۰ & a\end{bmatrix}$ یک عضو معکوس‌پذیر در R و معکوس آن برابر است با $\begin{bmatrix} a^{-۱} & -a_sa^{-۲} & (a)^{-۳}(a_sa_t-ba)\\ ۰ & a^{-۱} & -a_ta^{-۲}\\ ۰ & ۰ & a^{-۱}\end{bmatrix}$. از آن‌جا که برای هر عضو معکوس‌ناپذیر $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & b\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ داریم

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & b\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & c_s & d\\ ۰ & c & c_t\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & bc\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c & c_s & d\\ ۰ & c & c_t\\ ۰ & ۰ & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & b\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم R یک حلقه شدیداً دوطرفه نابدیهی است.

ملاحظه **۳.۴**. حلقه‌های شدیداً دوطرفه نابدیهی می‌توانند در مطالعه جبرهای C^* مفید باشند. به‌عنوان مثال، زیرحلقه‌های ماتریسی مانند مثال ۲.۴، شباهت‌هایی به جبرهای عملگر روی فضاهای هیلبرت دارند، جایی که عناصر مرکزی و معکوس‌پذیر نقش کلیدی در این ساختار جبری ایفا می‌کنند. بررسی این ارتباط می‌تواند دیدگاه‌های جدیدی در نظریه جبرهای ناجابجایی ارائه دهد.

قضیه زیر نشان می‌دهد که حلقه‌های شدیداً دوطرفه نابدیهی، حلقه‌هایی موضعی هستند.

قضیه **۴.۴**. هر حلقه‌ی شدیداً دوطرفه ناجابجایی یک حلقه موضعی است.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه‌ی ناجابجایی باشد، u و v دو عنصر معکوس‌پذیر و x یک عنصر معکوس‌ناپذیر در R باشند. چون x معکوس‌ناپذیر و حلقه شدیداً دوطرفه است، x لزوماً در مرکز حلقه قرار دارد. همچنین، حاصل‌ضرب‌های xu و xv نیز معکوس‌ناپذیر هستند. بنابراین، این دو عنصر نیز، به دلیل معکوس‌ناپذیر بودن، در مرکز حلقه قرار دارند. اکنون داریم

$$x(uv) = (xu)v = v(xu) = (vx)u = (xv)u = x(vu)$$

و در نتیجه $x(vu - uv) = 0$. این تساوی نشان می‌دهد که مجموعه عناصر معکوس‌ناپذیر حلقه R، پوچ‌ساز مجموعه جابجاگرهای آن است. بنابراین، مجموعه عناصر معکوس‌ناپذیر R یک ایده‌آل تشکیل می‌دهد و در نتیجه R یک حلقه‌ی موضعی است. □

ملاحظه **۵.۴**. تصویر همریخت هر حلقه شدیداً دوطرفه، یک حلقه شدیداً دوطرفه است.

گزاره **۶.۴**. فرض کنیم R یک حلقه شدیداً دوطرفه نابدیهی باشد، در این‌صورت $\frac{R}{M}$ یک میدان است.

اثبات. کافی است نشان دهیم $\frac{R}{M}$ یک حلقه‌ی جابجایی است. پس برای هر دو عضو a و b در R باید نشان دهیم $ab - ba \in M$. اگر چنین نباشد، آن‌گاه اثبات قضیه ۴.۴، نشان می‌دهد $M(ab - ba) = 0$ و چون بنا به فرض خلف $ab - ba$ یک عضو معکوس‌پذیر است، نتیجه می‌شود که $M = 0$. پس R یک حلقه تقسیم است و این یک تناقض است. □

ملاحظه **۷.۴**. فرض کنیم R یک حلقه شدیداً دوطرفه باشد و $C = \mathrm{Cen}(R)$. در این‌صورت R کاهش‌یافته است اگر و تنها اگر C کاهش‌یافته باشد.

گزاره **۸.۴**. فرض کنیم R یک حلقه شدیداً دوطرفه کاهش‌یافته باشد که حلقه تقسیم نیست. در این‌صورت R یک حلقه جابجایی است.

اثبات. اگر R جابجایی نباشد، آن‌گاه $u, v \in R$ موجودند که $uv - vu \neq 0$. با فرض $C = \mathrm{Cen}(R)$ قرار می‌دهیم:

$$E = \{c \in C : uc \in C\}$$

آشکار است که E یک ایده‌آل سره و ناصفر C است. ادعا می‌کنیم اگر $x \in C$ موجود باشد که $xE = 0$، آن‌گاه $x = 0$. دو حالت در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض کنیم $ux = 0$. در این حالت به‌دلیل معکوس‌پذیر بودن u به این نتیجه می‌رسیم که $x = 0$. اکنون فرض کنیم $ux \neq 0$. در این حالت ux یک عضو مرکزی است و از این‌رو با توجه به تعریف E خواهیم داشت $x \in E$. پس $x^2 = 0$ که در این‌صورت فرض کاهش‌یافته بودن حلقه ایجاب می‌کند که $x = 0$. بنابراین در هر حالت ادعای مورد اشاره برقرار است. حال چون هر عضو معکوس‌ناپذیر متعلق به پوچ‌ساز مجموعه جابجاگرها است، خواهیم داشت $(uv - vu)E = 0$ و لذا $uv - vu$ یک عضو معکوس‌پذیر است. اما در این‌صورت به‌دست می‌آوریم $E = 0$ که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف نادرست بوده و نتیجه می‌گیریم R یک حلقه‌ی جابجایی است. □

نتیجه **۹.۴**. اگر R یک حلقه شدیداً دوطرفه نابدیهی باشد، آن‌گاه R یک حلقه‌ی کاهش‌یافته نیست.

مطابق با [۱۰، تمرین ZA۵]، اگر N یک ایده‌آل پوچ‌توان در حلقه R باشد، آن‌گاه $\mathrm{l}(N)$ یک ایده‌آل راست اساسی در R است. لم زیر در واقع حالت ویژه‌ای از این تمرین است که برای سهولت مطالعه‌ی خواننده، اثبات آن را در ادامه می‌آوریم.

لم **۱۰.۴**. اگر R یک حلقه دوطرفه و $a \in R$ یک عضو پوچ‌توان باشد، آن‌گاه $\mathrm{l}(a)$ یک ایده‌آل اساسی است.

اثبات. فرض کنیم J یک ایده‌آل دل‌خواه و ناصفر در حلقه R باشد. k را کوچک‌ترین عدد طبیعی انتخاب می‌کنیم با این ویژگی که $Ja^k = 0$. در این‌صورت $Ja^{k-1} \neq 0$ و چون $Ja^{k-1} \subseteq \mathrm{l}(a) \cap J$، پس $\mathrm{l}(a) \cap J \neq 0$. بنابراین $\mathrm{l}(a)$ یک ایده‌آل اساسی R است. □

گزاره **۱۱.۴**. فرض کنیم R یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه ناتکین باشد که حلقه تقسیم نیست، در این‌صورت R یک حلقه جابجایی کاهش‌یافته است.

اثبات. با توجه به گزاره‌ی ۸.۴، کافی است نشان دهیم R یک حلقه‌ی کاهش‌یافته است. فرض کنیم a یک عضو پوچ‌توان در حلقه R باشد. اگر $a \neq 0$، لم قبل نشان می‌دهد $\mathrm{l}(a)$ یک ایده‌آل اساسی است و در نتیجه $a \in \mathrm{Z}(R)$. بنابراین $\mathrm{Z}(R) \neq 0$، که این تناقض است. □

گزاره‌ی بعد نشان می‌دهد که اگر مجموعه عناصر معکوس‌پذیر یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه متناهی باشد، آن حلقه جابجایی است.

قضیه **۱۲.۴**. فرض کنیم R یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه با تعداد متناهی عنصر معکوس‌پذیر باشد. در این‌صورت، R یک حلقه‌ی جابجایی است.

اثبات. اگر R یک حلقه‌ی تقسیم باشد، آن‌گاه R بنا بر قضیه‌ی کوچک ودربورن یک میدان است و بنابراین جابجایی می‌باشد. بنابراین، در ادامه فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی تقسیم نباشد و نشان می‌دهیم R یک حلقه‌ی جابجایی است. به فرض خلف، فرض کنیم R جابجایی نباشد. در این‌صورت، R یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه‌ی نابدیهی است. پس بنا بر گزاره‌ی ۶.۴، R یک حلقه‌ی موضعی با یگانه ایده‌آل ماکسیمال M است. از این‌رو، بنا بر فرض، R/M یک میدان متناهی و در نتیجه گروه ضربی $(R/M)^* = R/M \setminus \{0\}$ یک گروه دوری است. فرض کنیم $(R/M)^* = \langle u + M \rangle$. ادعا می‌کنیم که $R = C[u]$، که در آن C مرکز حلقه است. برای اثبات این ادعا، فرض کنیم $x \in R \setminus M$ یک عنصر دل‌خواه باشد. در این‌صورت، عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که

$$x + M = (u + M)^n = u^n + M.$$

بنابراین $x - u^n \in M$. از آن‌جایی که $M \subseteq C$، داریم $x - u^n \in C$. به‌عبارت دیگر، می‌توان x را به‌صورت

$$x = u^n + c$$

نوشت، که در آن $c \in C$. از آن‌جایی که $u^n + c \in C[u]$، نتیجه می‌شود که $x \in C[u]$. بنابراین، هر $x \in R$ در $C[u]$ قرار دارد، یعنی $R \subseteq C[u]$. از طرفی، چون $C[u] \subseteq R$، داریم $R = C[u]$. این نشان می‌دهد که R یک حلقه جابجایی است، زیرا $C[u]$ آشکارا یک حلقه جابجایی است؛ و این با فرض اینکه R یک حلقه‌ی شدیداً دوطرفه‌ی نابدیهی است، تناقض دارد. □

توجه می‌کنیم که بخش نخست اثبات قضیه، حالت حلقه‌های تقسیم را به قضیه‌ی کوچک ودربورن تقلیل می‌دهد. از این جهت، می‌توان نتیجه‌ی بالا را گسترشی طبیعی از قضیه‌ی ودربورن برای کلاس بزرگ‌تری از حلقه‌ها دانست؛ زیرا شرط متناهی بودن گروه عناصر معکوس‌پذیر در هر دو نتیجه نقش اساسی ایفا می‌کند.

نتیجه **۱۳.۴**. هیچ حلقه‌ی شدیداً دوطرفه‌ی نابدیهی وجود ندارد که مجموعه‌ی عناصر معکوس‌پذیر آن متناهی باشد.

فهرست منابع

[1] Azarang, A., 2009. On maximal subrings. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 32(1), 107–118.

[2] Azarang, A., 2010. Non-quasi duo rings have maximal subrings. *International Mathematical Forum*, 5(20), 979–994.

[3] Azarang, A. and Karamzadeh, O.A.S., 2010. On the existence of maximal subrings in commutative artinian rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 9(5), 771–778. doi:10.1142/s0219498810004208

[4] Azarang, A. and Karamzadeh, O.A.S., 2012. On maximal subrings of commutative rings. *Algebra Colloquium*, 19(Spec. 1), 1125–1138. doi:10.1142/s1005386712000909

[5] Azarang, A. and Karamzadeh, O.A.S., 2012. Most commutative rings have maximal subrings. *Algebra Colloquium*, 19(Spec. 1), 1139–1154. doi:10.1142/s1005386712000910

[6] Brungs, H.H., 1975. Three questions on duo rings. *Pacific Journal of Mathematics*, 58(2), 345–349. doi:10.2140/pjm.1975.58.345

[7] Camillo, V.P. and Khurana, D., 2001. A characterization of unit-regular rings. *Communications in Algebra*, 29(5), 2293–2295. doi:10.1081/agb-100002185

[8] Chen, H., Lee, Y. and Piao, Z., 2021. Structures related to right duo factor rings. *Kyungpook Mathematical Journal*, 61(1), 11–21. doi:10.5666/KMJ.2021.61.1.11

[9] Gilmer, R. and Heinzer, W.J., 1967. Intersections of quotient rings of an integral domain. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 7(2), 133–150. doi:10.1215/kjm/1250524273

[10] Goodearl, K.R. and Warfield, R.B., 2004. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University Press.

[11] Hashemi, J., Karamzadeh, O.A.S. and Shirali, N., 2009. Rings over which the Krull dimension and the Noetherian dimension of all modules coincide. *Communications in Algebra*, 37(2), 650–662. doi:10.1080/00927870802254835

[12] Karamzadeh, O.A.S., 1982. On duo rings. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 9, 143–148.

[13] Karamzadeh, O.A.S. and Sajedi Nejad, A.R., 2002. On the Loewy length and the Noetherian dimension of Artinian modules. *Communications in Algebra*, 30(3), 1077–1084. doi:10.1081/agb-120004863

[14] Karamzadeh, O.A.S., Motamedi, M. and Shahrtash, S.M., 2004. On rings with a unique proper essential right ideal. *Fundamenta Mathematicae*, 183(3), 229–244. doi:10.4064/fm183-3-3

[15] Karamzadeh, O.A.S. and Nazari, N., 2018. On maximal commutative subrings of non-commutative rings. *Communications in Algebra*, 46(12), 5083–5115. doi:10.1080/00927872.2018.1424862

[16] Lam, T.Y., 1999. *Lectures on Modules and Rings*. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag.

[17] Lam, T.Y. 2001., *A First Course in Noncommutative Rings*, New York: Springer-Verlag.

[18] Schur, J. 1905., Zur theorie der vertauschbaren matrizen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 130, 66–76. doi:10.1515/crll.1905.130.66

[19] Szigeti, J. and van Wyk, L., 2007. Subrings which are closed with respect to taking the inverse. *Journal of Algebra*, 318(2), 1068–1076. doi:10.1016/j.jalgebra.2007.08.017

[20] Thierrin, G., 1960. On duo rings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 3(2), 167–172. doi:10.4153/cmb-1960-021-7

Maximal duo subrings in non-duo rings

J. Hashemi[(1)] [2] and F. Hassanzadeh[(2)]

[(1)] Department of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

[(2)] Department of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Communicated by: Omid Ali Shehni Karamzadeh

Received: 5 October 2025 Accepted: 19 November 2025

Abstract: In this paper, we study maximal duo subrings in non-duo rings and investigate their structural properties. First, the definition and properties of maximal duo subrings are presented. Assuming, that these subrings are inverse-closed, their behavior in ue-rings is studied, and it is shown how certain properties of these subrings are transferred to the original ring. Furthermore, extremely duo rings, in which every element is either central or invertible, are introduced. Considering commutative rings and division rings as trivial examples of these rings, a nontrivial example is also constructed. It is shown that, in the non-trivial case, such rings are local, with the unique maximal ideal being the annihilator of the set of additive commutators of the ring. Moreover, it is proved that the quotient ring modulo this maximal ideal is a field.

Keywords: duo ring, extremely duo ring, inverse-closed subring, ue-ring.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author

E-mail addresses: (J. Hashemi) jhashemi@scu.ac.ir, (F. Hassanzadeh) h-hassanzade@stu.scu.ac.ir