مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۶۳–۷۳

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.49672.2373

بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای خانواده‌ای از عملگرها

سیده راضیه پارسا[(۱)] و میثم اسدی‌پور[(۲)][۱] و حمید رضایی[(۳)]

[(۱),(۲),(۳)] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

دبیر مسئول: محمد اسماعیل سامعی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۰۲

چکیده: در این پژوهش دو موضوع اصلی در نظریهٔ عملگرها بررسی می‌شود. ابتدا عملگرهای ترایای توپولوژیک و عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی در فضای باناخ دلخواه X را مقایسه می‌کنیم. سپس بردارهای ابردوری موضعی مشترک را برای خانواده‌ای از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی معرفی می‌کنیم. همچنین، چند تفاوت ساختاری میان مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک و مجموعه بردارهای ابردوری مشترک را ارائه می‌کنیم. درواقع با بررسی مثال‌های مختلف، نشان داده‌ایم که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک ممکن است در برخی موارد تهی، در برخی موارد چگال و در مواردی دیگر حتی تفکیک‌ناپذیر باشد. این موارد بیانگر تفاوت رفتار مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک و مجموعه بردارهای ابردوری مشترک در نظریه‌ی عملگرهاست.

واژه‌های کلیدی: عملگر ابردوری، عملگر ابردوری موضعی، بردار ابردوری موضعی مشترک.

رده‌بندی ریاضی: 37B99 ;47A16

۱ مقدمه

اگرچه عملگر انتقال به عقب وزن‌دار (که به عملگر رولویچ نیز معروف است) از اولین عملگرهای ابردوری بود که در دهه ۱۹۶۰ کشف شد [۱۷]، اما اعتقاد بر این است که سیستم‌های دینامیک خطی با رساله دکتری کیتای در دانشگاه تورنتو [۱۶] متولد شد که مسیر تحقیقات ریاضی در این شاخه از نظریه عملگرها را تعیین کرد. درواقع شاخه پرطرفدار دینامیک خطی به بررسی نحوه تکرار تبدیل‌های خطی می‌پردازد و از این منظر، پدیده‌های جدیدی از جمله مدارهای چگال عملگرهای خطی که به مفهوم ابردوری اشاره دارند، مورد توجه محققین واقع شده‌اند و می‌توان ادعا کرد که مفهوم ابردوری

[۱] نویسنده مسئول مقاله
rezaei@yu.ac.ir, (M. Asadipour) asadipour.mey@gmail.com, (S. R. Parsa) razieh0parsa@gmail.com
(H. Rezaei)

از تأثیرگذارترین مفاهیم در پیشرفت شاخه دینامیک خطی محسوب می‌شود. برای توضیح دقیق‌تر در این زمینه، مفهوم ترایای توپولوژیک و ارتباط آن با ابردوری بودن یک عملگر را در ادامه ارائه خواهیم داد و سپس به معرفی و بررسی مفهوم ترایای توپولوژیک موضعی می‌پردازیم تا زمینه برای شرح هدف و انگیزه ارائه این مقاله فراهم گردد.

۱.۱ ترایای توپولوژیک

فرض کنیم X یک فضای باناخ تفکیک‌پذیر و T معرف یک عملگر خطی کران‌دار روی فضای X است. در این‌صورت اگر به‌ازای هر دو زیرمجموعه باز دلخواه U و V از X، عدد صحیح نامنفی n وجود داشته باشد، بطوری‌که اشتراک $T^n(U)\cap V$ ناتهی باشد، آنگاه T یک عملگر ترایای توپولوژیک است. به‌وضوح در صورت معکوس‌پذیری، عملگر T ترایای توپولوژیک است اگر و فقط اگر T^{-1} ترایای توپولوژیک باشد. از طرفی بر اساس تفکیک‌پذیر بودن X، می‌توان به‌راحتی ثابت کرد که T ترایای توپولوژیک است اگر و فقط اگر به‌ازای حداقل یک بردار $x\in X$

$$\overline{\mathrm{orb}(T,x)} := \overline{\{T^k x; k=0,1,2,...\}} = X, [6].$$

در صورت وجود بردار $x\in X$ با ویژگی بالا برای عملگر T، بردار x را یک بردار ابردوری برای عملگر T گوئیم و همچنین عملگر T را ابردوری می‌نامیم. همان‌طور که از تعریف عملگر ابردوری مشاهده می‌گردد، وجود عملگر ابردوری T روی فضای باناخ X، تفکیک‌پذیر بودن X را نتیجه می‌دهد و از طرفی ثابت شده‌است که X تفکیک‌پذیر است اگر و فقط اگر عملگر ابردوری T روی فضای X وجود داشته باشد [۳]. در ادامه برای رعایت اختصار در نگارش، از نماد $HC(T)$ برای معرفی مجموعه بردارهای ابردوری عملگر T استفاده خواهیم کرد. برای مشاهده توضیحات عمیق‌تر می‌توان به [۶] مراجعه کرد.

۲.۱ ترایای توپولوژیک موضعی

همانگونه که در بخش قبل توضیح داده شد، مطالعه عملگرهای ابردوری به معنی نادیده گرفتن فضاهای باناخ تفکیک‌ناپذیر است و برخلاف عملگر ابردوری، ممکن است روی برخی فضاهای باناخ تفکیک‌ناپذیر، عملگرهای ترایای توپولوژیک وجود داشته باشد [۱۰]، اما ثابت شده است که روی فضای باناخ تفکیک‌ناپذیر $\ell^\infty(\mathbb{N})$، هیچ عملگر ترایای توپولوژیکی وجود ندارد [۹]. بنابراین توضیحات و در راستای مطالعه عملگرهای ترایای توپولوژیک، عملگر ترایای توپولوژیک موضعی یا عملگر رده J در [۱۳] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است. در واقع عملگر $T\in B(X)$ ترایای توپولوژیک موضعی در بردار ناصفر $x\in X$ است، هرگاه به‌ازای دو زیرمجموعه باز دلخواه V و U از X که $x\in U$ و هر عدد $N\in\mathbb{N}$، عدد صحیح $n>N$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اشتراک $T^n(U)\cap V$ ناتهی باشد. به‌وضوح هر عملگر ترایای توپولوژیک روی یک فضای تفکیک‌پذیر X، یک عملگر ترایای توپولوژیک موضعی است. مشابه تعریف عملگرهای ابردوری، می‌توان یک عملگر ترایای توپولوژیک را براساس زیرمجموعه‌ای از بردارهای فضای X معرفی کرد. برای این منظور ابتدا به‌ازای هر بردار $x\in X$ زیرمجموعه $J_T(x)$ از فضای X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J_T(x)=\left\{ y\in X \;\middle|\; \begin{array}{l} (1)\ \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X. \\ (2)\ \exists\{k_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}\ :\ \forall n\in\mathbb{N},\ k_n<k_{n+1} \\ (3)\ x_n\to x,\quad T^{k_n}x_n\to y. \end{array} \right\}.$$

سپس عملگر $T\in X$ ابردوری موضعی است هرگاه بردار ناصفر $x\in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $J_T(x)=X$. می‌توان به‌راحتی مشاهده کرد که عملگر T ابردوری موضعی است اگر و فقط اگر T ترایای توپولوژیک موضعی باشد [۴]. برای رعایت اختصار در نگارش، از نماد J_T برای معرفی مجموعه بردارهای ابردوری موضعی عملگر T استفاده خواهیم کرد. بیان این نکته حائز اهمیت است که با فرض تفکیک‌پذیر بودن فضای باناخ X، برای عملگر $T\in B(X)$، دو مجموعه $HC(T)$ و J_T یا هر دو در X چگال هستند و یا هر دو چگال نمی‌باشند و از طرفی به‌ازای عملگر انتقال به عقب $B:\ell^\infty(\mathbb{N})\longrightarrow\ell^\infty(\mathbb{N})$ با وجود تهی بودن $HC(\lambda B)$ به‌ازای اعداد مختلط $|\lambda|>1$، مجموعه $J_{\lambda B}$ ناتهی است [۱۳]. برای آشنایی بیشتر با مفهوم عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی می‌توان مقالات [۴]، [۵]، [۱۲]، [۱۳] و [۱۹] را مشاهده کرد.

در ادامه این مقاله، در بخش ۲ چند تفاوت بین عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی و عملگرهای ابردوری ارائه خواهیم داد تا بر اساس مطالعه این تفاوت‌ها، خواننده با تعریف عملگر رده J بیشتر آشنا شود. سپس در بخش پایانی بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای خانواده‌ای از عملگرها را برای اولین بار معرفی می‌کنیم. توضیح مختصر این‌که، پیامد مستقیم قضیه رسته‌ای بئر این است که هرگاه دو، سه یا حتی تعداد شمارایی از عملگرهای ابردوری روی یک فضای باناخ تفکیک‌پذیر داشته باشیم، بردارهایی وجود دارند که به‌طور همزمان برای همه این عملگرها ابردوری هستند. چنین بردارهایی را بردارهای ابردوری مشترک می‌نامند. اما مسئله زمانی جالب می‌شود که خانواده‌های شمارش‌ناپذیر از عملگرها را در نظر بگیریم. در مرجع [۱] نشان داده شده است که برخی از خانواده‌های شمارش‌ناپذیر نیز بردارهای ابردوری مشترک ندارند و از طرفی در مرجع [۱۱] ناتهی بودن مجموعه بردارهای ابردوری مشترک برای برخی خانواده‌های شمارش‌ناپذیر اثبات شده است. مراجعه به [۷]، [۸] و [۱۸] برای شناخت و درک بهتر موضوعات در این زمینه می‌تواند مفید باشد. با کسب انگیزه براساس این توضیحات، ما در بخش ۳ بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای خانواده‌ای از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی را معرفی خواهیم کرد و با ارائه چند قضیه و مثال تفاوت میان بردارهای ابردوری موضعی مشترک و بردارهای ابردوری مشترک را شرح خواهیم داد. لازم به ذکر است که در این مقاله نماد I معرف عملگر همانی روی فضای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است.

۲ بررسی برخی تفاوت‌های میان عملگرهای ابردوری و عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی

در مقدمه توضیح داده شد که هر عملگر ابردوری $T \in B(X)$، یک عملگر ترایای توپولوژیک موضعی است و بنابراین ارائه تفاوت‌های میان این دو رده از عملگرها از اهمیت بالایی برخوردار است.

◄ برای شناخت اساسی‌ترین تفاوت این دو رده از عملگرها باید به تفکیک‌پذیری فضای زمینه X در مطالعه مفهوم ابردوری بودن توجه ویژه داشت. در واقع در مقاله [۳] نشان داده شده‌است که فضای باناخ با بعد نامتناهی X تفکیک‌پذیر است اگر و فقط اگر عملگر ابردوری $T \in B(X)$ وجود داشته باشد. این مطلب در واقع به معنی نادیده گرفتن فضاهای باناخ تفکیک‌ناپذیر در مطالعه سیستم‌های دینامیکی می‌باشد. به‌عبارت دیگر روی فضاهای باناخ تفکیک‌ناپذیر $\ell^\infty(\mathbb{N})$ و $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ هیچ عملگر ابردوری وجود ندارد. از طرفی با وجود معادل بودن ابردوری بودن و ترایای توپولوژیک بودن روی فضاهای باناخ تفکیک‌پذیر، برخی فضاهای تفکیک‌ناپذیر وجود دارند که روی آنها عملگرهای ترایای توپولوژیک وجود دارد [۱۰]. با این وجود در [۹] ثابت شده‌است که هیچ عملگر ترایای توولوژیکی روی $\ell^\infty(\mathbb{N})$ و $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ وجود ندارد، در نتیجه بررسی وجود یا عدم وجود عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی روی این دو فضا، حائز اهمیت است. در گزاره ۲.۵ از [۱۳] وجود عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی روی $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ثابت شده‌است و بنابراین اساسی‌ترین تفاوت میان این دو رده از عملگرها ارائه شده‌است. همچنین در [۱۲] عملگرهای انتقال به عقب وزن‌دار روی $\ell^\infty(\mathbb{N})$ و $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که شرط لازم و کافی برای ترایای توپولوژیک موضعی بودن این عملگرها روی $\ell^\infty(\mathbb{N})$ به‌صورت زیر ارائه شده‌است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم B_ω معرف عملگر انتقال به عقب وزن‌دار با دنباله وزن $\omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ روی فضای $\ell^\infty(\mathbb{N})$ است. در این‌صورت عملگر B_ω ترایای توپولوژیک موضعی است اگر و فقط اگر

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\inf_{j\geq 0} \prod_{i=1}^{n} \omega_{i+j}\right) = +\infty.$$

همچنین در [۱۲] ثابت شده‌است که اگر در قضیه ۱.۲ فضای $\ell^\infty(\mathbb{N})$ با $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ جایگزین گردد، آنگاه B_ω ترایای توپولوژیک موضعی نیست.

◄ تفاوت دیگر که می‌توان معرفی کرد این است که اگر عملگر $T \in B(X)$ ابردوری باشد آنگاه به شرط معکوس‌پذیر بودن آن، T^{-1} نیز ابردوری است و این مطلب به‌راحتی از تعریف ترایای توپولوژیک حاصل می‌شود اما با فرض معکوس‌پذیری و ابردوری بودن عملگر $T \in B(X)$، می‌توان نشان داد که عملگر $T \oplus 2I$ روی $X \oplus \mathbb{C}$

ترایای توپولوژیک موضعی است زیرا برای بررسی ترایای توپولوژیک موضعی بودن عملگر $T \oplus ۲I$ می‌توان فرض کرد $x \in HC(T)$، $y \in X$ و $z \in \mathbb{C}$ دلخواه باشند. در این‌صورت دنباله اکیداً صعودی $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری‌که $T^{m_n}x \longrightarrow y$. اکنون به‌ازای دنباله

$$\{x_n := x \oplus \frac{z}{۲^{m_n}}\}_{n\in\mathbb{N}},$$

داریم

$$x_n \longrightarrow x \oplus ۰, \quad (T \oplus ۲I)^{m_n}x_n \longrightarrow y \oplus z,$$

و یا به‌عبارت دیگر $J_{T\oplus ۲I}(x \oplus ۰) = X \oplus \mathbb{C}$ و به‌دلیل اینکه بردار x ابردوری و به‌ویژه ناصفر است در نتیجه $T \oplus ۲I$ ترایای توپولوژیک موضعی است. از طرفی معکوس این عملگر یعنی $T^{-۱} \oplus \frac{۱}{۲}I$ ترایای توپولوژیک موضعی نیست [۱۳].

◄ تفاوت دیگر میان ترایای توپولوژیک موضعی و ابردوری بودن منبعث از تفاوت میان مدار یک بردار $x \in X$ تحت عملگر $T \in B(X)$ یعنی $\mathrm{orb(T,x)}$ و مجموعه $J_T(x)$ است. این موضوع قابل توجه است که همواره $\mathrm{orb(T,}۰\mathrm{)} = \{۰\}$، اما می‌توان عملگر $T \in B(X)$ را چنان تعریف کرد که $J_T(۰) = X$. یک نمونه از این عملگرها را می‌توان در مثال ۲.۲ مشاهده کرد.

مثال ۲.۲. فرض کنیم T عملگر انتقال به عقب روی فضای باناخ $\ell^\infty(\mathbb{N})$ است. در این‌صورت به‌ازای هر بردار $y = (y_۱, y_۲, ...) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ دنباله‌های $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ و $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را به‌صورت

$$\omega_n := \big(\underbrace{۰, \cdots, ۰}_{n-\text{مرتبه}}, \frac{y_۱}{۲^n}, \frac{y_۲}{۲^n}, \cdots\big), \quad x_n := (۰, ۰, \cdots)$$

در نظر گرفته و داریم

$$(۲T)^n x_n \longrightarrow ۰, \quad \omega_n \longrightarrow ۰, \quad (۲T)^n \omega_n \longrightarrow y.$$

بنابراین با فرض $Y = \ell^\infty(\mathbb{N})$، محک معرفی شده در [۴] تساوی $J_{۲T}(۰) = \ell^\infty(\mathbb{N})$ را نتیجه می‌دهد.

علاوه‌بر تساوی $J_T(۰) = X$ برای یک عملگر $T \in B(X)$، می‌توان نتیجه‌ای قوی‌تر نیز در این رابطه به‌صورت زیر بیان کرد. بیان این مطلب ضرویست که، اگرچه اثبات‌های دو قضیه بعد را می‌توان در [۱۳] مشاهده کرد ولی همان‌طور که توضیح داده شد، به‌دلیل آشنایی بیشتر خواننده با این تفاوت‌ها، برخی اثبات‌ها را در این مقاله آورده‌ایم.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم $T \in B(X)$، در این‌صورت $J_T(۰) = X$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر $p \in \mathbb{N}$، $J_{T^p}(۰) = X$.

اثبات. ثابت خواهیم کرد که به‌ازای هر $p \in \mathbb{N}$، $J_{T^p}(۰) = J_T(۰)$ و برای این منظور به‌ازای عدد ثابت $p \in \mathbb{N}$ اگر $y \in J_T(۰)$ آنگاه دنباله‌های $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ وجود دارند بطوری‌که دنباله $\{k_n\}$ صعودی اکید است و

$$x_n \longrightarrow ۰, \quad T^{k_n}x_n \longrightarrow y. \tag{۱.۲}$$

اکنون با تقسیم همه جملات دنباله $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ بر عدد p دو دنباله $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ و $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{۰, ۱, ۲, ..., p-۱\}$ وجود دارند بطوری‌که دنباله $\{q_n\}$ صعودی اکید است و به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $k_n = pq_n + r_n$. بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که عدد $r \in \{۰, ۱, ۲, ..., p-۱\}$ وجود دارد بطوری‌که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $k_n = pq_n + r$ و در نتیجه از (۱.۲) داریم:

$$T^r x_n \longrightarrow ۰, \quad (T^p)^{q_n}(T^r x_n) \longrightarrow y.$$

و این به‌معنی $y \in J_{T^p}(۰)$ است و بنابراین $J_T(۰) \subseteq J_{T^p}(۰)$. به‌دلیل اینکه به‌ازای هر $z \in X$، $J_{T^p}(z) \subseteq J_T(z)$ در نتیجه $J_T(۰) = J_{T^p}(۰)$ و اثبات کامل است. □

◄ در ادامه برای بررسی آخرین تفاوت بین این دو رده از عملگرها، مجدداً توجه خود را به تفاوت میان مجموعه‌های $\mathrm{orb}(T,x)$ و $J_T(x)$ معطوف خواهیم کرد. در صورتی‌که بردار $x \in X$ یک بردار ناصفر دوره‌ای برای عملگر $T \in B(X)$ باشد یعنی به‌ازای عدد $m \in \mathbb{N}$ تساوی $T^m x = x$ آنگاه مجموعه $\mathrm{orb}(T,x)$ متناهی است و در نتیجه $x \notin HC(T)$. اما در صورت تضمین حداقل یکی از دو شرط ترایای توپولوژیک موضعی بودن عملگر T یا $J_T(\circ) = X$ می‌توان نتیجه گرفت که عملگر T در بردار ناصفر $x \in X$ ترایای توپولوژیک موضعی است.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم بردار ناصفر $x \in X$ یک بردار دوره‌ای برای عملگر $T \in B(X)$ است. در این‌صورت موارد زیر معادل هستند:
الف) T ترایای توپولوژیک موضعی است.
ب) $J_T(\circ) = X$.
پ) $J_T(x) = X$.

اثبات. فرض کنیم T ترایای توپولوژیک موضعی است و بنابراین بردار ناصفر $z \in X$ وجود دارد بطوری‌که $J_T(z) = X$. بنابر لم ۲.۱۱ مقاله [۱۳] به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ تساوی $J_T(\lambda z) = X$ و در نتیجه گزاره (ب) از (الف) حاصل می‌شود. اگر $J_T(\circ) = X$ و به‌ازای عدد $m \in \mathbb{N}$، $T^m x = x$ آنگاه بنابر قضیه ۳.۲ تساوی $J_{T^m}(\circ) = X$ حاصل می‌شود و در نتیجه برای هر بردار $\omega \in X$، دنباله‌های $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ و $\{x_n\} \subset X$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$x_n \longrightarrow \circ, \quad T^{mk_n} x_n \longrightarrow \omega - x, \quad k_n < k_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین

$$\tilde{x}_n := x_n + x \longrightarrow x, \quad T^{mk_n}\tilde{x}_n \longrightarrow \omega,$$

یا به‌عبارت دیگر $J_T(x) = X$ و در نتیجه (پ) از (ب) حاصل می‌شود. به‌دلیل ناصفر بودن بردار x، نتیجه گرفتن (الف) از (پ) واضح و اثبات کامل است.

□

در پایان این بخش، قضیه‌ای را ارائه می‌دهیم که در ارائه مثال ۵.۳ بسیار حائز اهمیت است و از بیان اثبات آن به دلیل شباهت با اثبات قضیه قبل صرف‌نظر خواهیم کرد.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم هسته عملگر $T \in B(X)$ نابدیهی است. در این صورت موارد زیر معادل هستند:

الف) T ترایای توپولوژیک موضعی است.

ب) $J_T(\circ) = X$.

پ) $\ker(T) = \{x \in X;\ Tx = \circ\} \subseteq J_T$.

۳ بردارهای ابردوری موضعی مشترک

در این بخش بردارهای ابردوری موضعی مشترک بین خانواده‌ای از توابع را تعریف می‌کنیم و با توجه به تعریف بردارهای ابردوری مشترک، برخی تفاوت‌ها و شباهت‌ها را ارائه می‌دهیم. برای ایجاد انگیزه، ابتدا به‌طور مختصر بردارهای ابردوری مشترک را باید مورد بررسی قرار دهیم.
به دلیل اینکه برای عملگرهای ابردوری، روی فضای باناخ X، مجموعه بردارهای ابردوری برای یک عملگر ابردوری $T \in B(X)$ یک زیرمجموعه G_δ چگال از X می‌باشد در نتیجه اعضای خانواده شمارا از عملگرهای ابردوری روی X، دارای بردار ابردوری مشترک هستند به این‌صورت که هرگاه $\Gamma = \{T_i\}_{i\in A} \subset B(X)$ و A مجموعه‌ای شمارا باشد آنگاه ناتهی بودن مجموعه $\bigcap_{i\in A} HC(T_i)$ از قضیه رسته‌ای بئر نتیجه می‌شود. البته قضیه رسته‌ای بئر علاوه‌بر ناتهی بودن اشتراک اخیر، چگال بودن آن را نیز نتیجه می‌دهد و بنابراین مسئله مهم این است که در حالت ناشمارا بودن مجموعه A، آیا بردار ابردوری مشترک برای Γ وجود دارد؟ این سؤال ابتدا در [۱۴] مطرح شد و سپس در [۱۱] مثال زیر به‌عنوان یک پاسخ مثبت به این سؤال ارائه گردید.

مثال ۱.۳. فرض کنیم B عملگر انتقال به عقب روی فضای باناخ $\ell^P(\mathbb{N})$ و $1 \leq P < \infty$ است. در این‌صورت برای خانواده $\Gamma = \{T_\lambda := \lambda B\}_{|\lambda|>1}$ مجموعه $\bigcap_{|\lambda|>1} HC(T_\lambda)$ یک زیرمجموعه G_δ -چگال از $\ell^P(\mathbb{N})$ است.

و از طرفی نویسندگان مقاله [۱] به مطالعه در زمینه بردارهای ابردوری مشترک پرداخته و مثال زیر را به‌عنوان یک پاسخ منفی به سؤال بالا ارائه داده‌اند.

مثال ۲.۳. فرض کنیم B عملگر انتقال به عقب روی فضای $\ell^2(\mathbb{N})$ است. در این‌صورت برای خانواده

$$\Gamma = \{T_{\lambda,\mu} := \lambda B \oplus \mu B\}_{\lambda,\mu\in(0,+\infty)},$$

از عملگرهای ابردوری روی $\ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$، مجموعه

$$\bigcap_{\lambda,\mu\in(0,+\infty)} HC(T_{\lambda,\mu})$$

تهی است.

برای مطالعه بیشتر در زمینه بردار ابردوری مشترک می‌توان به [۷]، [۸]، [۱۱] و [۱۸] مراجعه کرد. با توجه به مباحث مطرح‌شده، ضرورت تعریف و تحلیل بردارهای ابردوری موضعی مشترک به‌وضوح قابل درک است، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم $\Gamma = \{T_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی روی فضای باناخ X است. در این‌صورت بردار $x \in X$ را یک بردار ابردوری موضعی مشترک برای Γ گوئیم هرگاه به ازای هر $i \in I$

$$x \in \{z \in X \setminus \{0\}; J_{T_i}(z) = X\} := J_\Gamma.$$

با توجه به اینکه هر عملگر ابردوری روی فضای باناخ X، یک عملگر ترایای توپولوژیک موضعی است بنابراین ارائه مثال درباره وجود یا عدم وجود بردار ابردوری موضعی مشترک برای عملگرهای ناابردوری که ترایای توپولوژیک موضعی هستند، دارای اهمیت است و بنابراین در ادامه توجه خود را به این عملگرها معطوف خواهیم کرد. در اولین مثال این بخش، ناتهی بودن مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای عملگرهای ناابردوری که ترایای توپولوژیک موضعی هستند را نشان خواهیم داد.

مثال ۴.۳. فرض کنیم B عملگر شیفت به‌عقب روی فضای تفکیک‌ناپذیر $\ell^\infty(\mathbb{N})$ است. در این‌صورت بنابر گزاره ۲.۵ از [۱۳] به‌ازای هر عدد مختلط λ با شرط $|\lambda| > 1$

$$J_{\lambda B} = \{x \in \ell^\infty(\mathbb{N}); J_{\lambda B}(x) = \ell^\infty(\mathbb{N})\} = C_0(\mathbb{N}).$$

در نتیجه برای خانواده $\Gamma = \{T_\lambda := \lambda B\}_{|\lambda|>1}$ تساوی $\bigcap_{|\lambda|>1} J_{T_\lambda} = C_0(\mathbb{N})$.

در واقع مثال بالا به‌دلیل تفکیک‌ناپذیر بودن $\ell^\infty(\mathbb{N})$، خانواده‌ای از عملگرهای ناابردوری که ترایای توپولوژیک موضعی هستند را معرفی می‌کند که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک آنها با وجود نامتناهی بودن در $\ell^\infty(\mathbb{N})$، چگال نیست و از طرفی بنابر لم الکساندروف [۲]، این مجموعه یک زیرمجموعه G_δ از $\ell^\infty(\mathbb{N})$ نمی‌باشد، بنابراین اگر شرط $|\lambda| > 1$ را در این مثال با مجموعه $A = \{\lambda \in Q|\lambda > 1\}$ جایگزین نمائیم آنگاه مثالی از یک خانواده شمارای نامتناهی از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری حاصل خواهد شد که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک آن خانواده علیرغم ناتهی بودن یک زیرمجموعه G_δ چگال در $\ell^\infty(\mathbb{N})$ نیست که این یک ویژگی متفاوت با ویژگی مجموعه بردارهای ابردوری مشترک خانواده‌ای شمارا از عملگرهای ابردوری توضیح داده شده در ابتدای این بخش است.
با توجه به توضیحات بالا و اینکه C_0 یک مجموعه تفکیک‌پذیر است، این سؤال مطرح است که آیا می‌توان خانواده نامتناهی Γ از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری را معرفی کرد که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای Γ یک مجموعه تفکیک‌ناپذیر باشد؟
مثال زیر پاسخی مثبت به این سؤال ارائه می‌کند.

مثال ۵.۳. فرض کنیم $S : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{N}) \oplus \ell^\infty(\mathbb{N})$ یک ایزومورفیسم دلخواه و R معرف عملگر

$$R\colon \ell^\infty(\mathbb{N}) \oplus \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{N}), \quad R(a \oplus b) = a$$

است. اگر B عملگر انتقال به عقب روی فضای $\ell^\infty(\mathbb{N})$ باشد آنگاه خانواده

$$\Gamma = \{T_\lambda := \lambda BoRoS\}_{\lambda \in U}, \quad U = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > \|S^{-1}\|\}$$

مثالی از یک خانواده نامتناهی از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری است که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای اعضای این خانواده یک مجموعه تفکیک‌ناپذیر است.

در قدم اول نشان می‌دهیم که به‌ازای هر عدد $\lambda \in U$ عملگر T_λ ترایای توپولوژیک موضعی است. برای این منظور از قضیه ۵.۲ استفاده خواهیم کرد. ابتدا توجه داریم که

$$E := S^{-1}(\{0\} \oplus \ell^\infty(\mathbb{N})),$$

یک زیرمجموعه ناتهی تفکیک‌ناپذیر از $\ell^\infty(\mathbb{N})$ است زیرا S ایزومورفیسم و $\{0\} \oplus \ell^\infty(\mathbb{N})$ یک مجموعه ناتهی تفکیک‌ناپذیر است. به ویژه E مجموعه تک‌عضوی $\{0\}$ نیست و اگر $z \in E\backslash\{0\}$ آنگاه بردار ناصفر $\tilde{z}_2 \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ وجود دارد بطوری‌که $Sz = 0 \oplus \tilde{z}_2$ و در نتیجه $T_\lambda z = 0$ یا به عبارتی

$$\{0\} \neq E \subseteq \ker(T_\lambda). \tag{۱.۳}$$

در قدم دوم نشان خواهیم داد که $J_{T_\lambda}(0) = X$. برای این منظور فرض کنیم به‌ازای بردار دلخواه $y \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ بردار $x^{(1)} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ به‌صورت زیر تعریف شده‌است

$$x^{(1)} := \frac{1}{\lambda}(0, y_1, y_2, ...).$$

در این‌صورت

$$\lambda B x^{(1)} = y, \quad R(x^{(1)} \oplus 0) = x^{(1)}$$

و

$$\|x^{(1)} \oplus 0\|_{\ell^\infty(\mathbb{N}) \oplus \ell^\infty(\mathbb{N})} = \|x^{(1)}\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})} = \frac{1}{|\lambda|}\|y\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}.$$

در نتیجه بردار $z^{(1)} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ وجود دارد به‌طوری‌که $Sz^{(1)} = x^{(1)} \oplus 0$ یا $T_\lambda z^{(1)} = y$ و با فرض

$$r := \frac{1}{|\lambda|}\|S^{-1}\|$$

داریم

$$\|z^{(1)}\| = \|S^{-1}(x^{(1)} \oplus 0)\| \leq \|S^{-1}\|\|x^{(1)} \oplus 0\| = \|S^{-1}\|\|x^{(1)}\| = r\|y\|. \tag{۲.۳}$$

و به‌طور مشابه اگر بردارهای $z^{(2)}, z^{(3)}, ..., z^{(n-1)} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ با ویژگی‌های مطلوب وجود داشته باشد آنگاه به‌ازای بردار

$$x^{(n)} := \frac{1}{\lambda}(0, z_1^{(n-1)}, z_2^{(n-1)}, ...)$$

داریم

$$\lambda B x^{(n)} = z^{(n-1)}, \quad R(x^{(n)} \oplus 0) = x^{(n)}, \quad \|x^{(n)} \oplus 0\| = \|x^{(n)}\| = \frac{1}{|\lambda|}\|z^{(n-1)}\|. \tag{۳.۳}$$

اکنون ایزومورفیسم بودن S، وجود بردار $z^{(n)} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ را نتیجه می‌دهد به‌طوری‌که

$$Sz^{(n)} = x^{(n)} \oplus \circ. \tag{۴.۳}$$

و بنابر (۳.۳) و (۲.۳) نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\|z^{(n)}\| \leq \|S^{-1}\|\|x^{(n)}\| = \|S^{-1}\|\frac{1}{|\lambda|}\|z^{(n-1)}\| = r\|z^{(n-1)}\| \leq r^n\|y\|. \tag{۵.۳}$$

از طرفی به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ از (۴.۳) تساوی $T_\lambda z^{(n)} = z^{(n-1)}$ حاصل می‌شود و در نتیجه از $r < 1$ و (۵.۳) داریم

$$z^{(n)} \longrightarrow \circ, \quad T_\lambda^n z^{(n)} \longrightarrow y,$$

یا به‌طور نمادین $J_{T_\lambda}(\circ) = X$ و براساس (۱.۳) و قضیه ۵.۲ داریم

$$E\backslash\{\circ\} \subseteq \ker(T_\lambda) \setminus \{\circ\} \subseteq J_{T_\lambda}.$$

در پایان لازم است تأکید کنیم که مجموعه $E \setminus \{\circ\} \subseteq \bigcap_{\lambda \in U} J_{T_\lambda}$ و در نتیجه مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای اعضای خانواده Γ بنابر توضیحات ابتدای اثبات، تفکیک‌ناپذیر است.

در پایان این مقاله با ارائه دو مثال نشان خواهیم داد که خانواده‌ای از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری وجود دارد بطوری‌که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای اعضای آن خانواده یک مجموعه تهی است و همچنین خانواده‌ای از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری وجود دارد بطوری‌که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای اعضای آن خانواده یک مجموعه G_δ-چگال در فضای زمینه‌ای X است. برای این منظور از مثال‌های ۱.۳ و ۲.۳ استفاده خواهیم کرد. قبل از ارائه مثال‌های موردنظر، ابتدا مثال زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم.

مثال ۶.۳. فرض کنیم اعداد $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ چنان انتخاب شده‌اند که

$$\circ < |\alpha| < 1 < \|\tilde{T}\| < |\beta|$$

و عملگر $\tilde{T} \in B(X)$ ابردوری است. براساس قضیه ۲.۵ از [۱۵] عملگر $T := (\frac{\beta}{\alpha})I \oplus \tilde{T}$ روی فضای باناخ $\mathbb{C} \oplus X$ ابردوری نیست. اکنون بنابر ابردوری بودن $\tilde{T}$، اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $\omega \in X$ و $y \in HC((\tilde{T}))$ آنگاه دنباله اکیداً صعودی $\{k_n\} \subset \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\tilde{T}^{k_n} y \longrightarrow \omega$. در نتیجه

$$x_n := \left(\frac{\alpha^{k_n}\lambda}{\beta^{k_n}} \oplus y\right) \longrightarrow \circ \oplus y, \qquad T^{k_n}x_n \longrightarrow \lambda \oplus \omega,$$

یا به‌عبارتی $J_T(\circ \oplus y) = \mathbb{C} \oplus X$.

مثال ۷.۳. (الف) فرض کنیم به‌ازای هر عدد مختلط λ که $|\lambda| > 1$ عملگر T_λ همان عملگر عضو خانواده Γ در مثال ۱.۳ است. در این‌صورت به‌ازای اعداد مختلط α, β با شرط

$$\circ < |\alpha| < 1 < \|T_\lambda\| < |\beta|,$$

خانواده

$$\tilde{\Gamma} := \{\tilde{T}_\lambda := \frac{\beta}{\alpha}I \oplus T_\lambda; T_\lambda \in \Gamma\}$$

شامل عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری است (مثال ۶.۳).
(ب) فرض کنیم به‌ازای هر دو عدد حقیقی $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$ عملگر $T_{\lambda,\mu}$ همان عضو Γ در مثال ۲.۳ است. در این‌صورت به‌ازای اعداد مختلط α, β با شرط

$$0 < |\alpha| < 1 < \|T_{\lambda,\mu}\| < |\beta|,$$

خانواده

$$\hat{\Gamma} := \{\hat{T}_{\lambda,\mu} := \frac{\beta}{\alpha} I \oplus T_{\lambda,\mu}; T_{\lambda,\mu} \in \Gamma\}$$

شامل عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری است (مثال ۶.۳).

اکنون توضیحات مثال ۶.۳ نشان می‌دهد که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک در خانواده‌های $\hat{\Gamma}$ و $\tilde{\Gamma}$ به‌ترتیب زیرمجموعه‌هایی تهی و G_δ–چگال از فضای زمینه X مربوط به خود آن خانواده است.

۴ نتیجه‌گیری

مطالعه مثال‌های بخش ۳ نشان داد که مفهوم بردارهای ابردوری موضعی مشترک در مقایسه با بردارهای ابردوری مشترک، دارای ساختاری متفاوت و وابسته به ویژگی‌های خانواده عملگرهای موردنظر است. در مثال ۱.۳، چگال بودن مجموعه بردارهای ابردوری مشترک برای خانواده‌ای ناشمارا از عملگرهای ابردوری تأیید شد درحالی که مثال ۲.۳ نشان داد که ممکن است مجموعه بردارهای ابردوری مشترک برای خانواده‌ای ناشمارا از عملگرهای ابردوری، تهی باشد. در مثال ۷.۳ تایید شد که مشابه دو مثال ۱.۳ و ۲.۳ می‌توان خانواده‌های ناشمارا $\hat{\Gamma}$ و $\tilde{\Gamma}$ از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری را ارائه داد به‌طوری‌که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای $\hat{\Gamma}$ و $\tilde{\Gamma}$ به‌ترتیب زیرمجموعه‌های تهی و G_δ–چگال از فضای زمینه مربوط به خود آن خانواده باشند. همچنین به وسیله مثال ۴.۳ شرح داده شده است که چگونه می‌توان یک مثال از خانواده‌ای نامتناهی شمارا از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری ارائه داد به‌طوری‌که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک آن خانواده، علیرغم ناتهی بودن بودن یک زیرمجموعه G_δ–چگال در فضای زمینه نباشد و به این ترتیب در مقایسه با مجموعه بردارهای ابردوری مشترک برای خانواده‌ای شمارا از عملگرهای ابردوری، یک ویژگی متفاوت معرفی شده است. این تفاوت بنیادی در مثال ۵.۳ نیز برجسته شده است، جایی که مجموعه بردارهای ابردوری موضعی مشترک برای خانواده‌ای نامتناهی از عملگرهای ترایای توپولوژیک موضعی ناابردوری، یک زیرمجموعه تفکیک‌ناپذیر از فضای زمینه‌ای X است، درحالی که مجموعه بردارهای ابردوری مشترک برای خانواده‌ای نامتناهی از عملگرهای ابردوری درصورت ناتهی بودن، همواره تفکیک‌پذیر است.

فهرست منابع

[1] Abakumov, E. and Gordon, J., 2003. Common hypercyclic vectors for multiples of backward shift. *J. Funct. Anal., 200*, pp. 494-504. doi:10.1016/S0022-1236(02)00030-7

[2] Aliprantis, C. D. and Border, K. C., 2006. Infinite dimensional analysis: A hitchhiker's guide. *Springer, Berlin*. doi:10.1007/3-540-29587-9

[3] Ansari, S. I., 1997. Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces. *J. Funct. Anal., 148*, pp. 384-390. doi:10.1006/jfan.1996.3093

[4] Asadipour, M. and Yousefi, B., 2019. On some properties of J-class operators. *Commun. Korean Math. Soc., 34(1)*, pp. 145-154. doi:10.4134/CKMS.c170178

[5] Asadipour, M., 2022. *Local Subspace Transitivity Criterion*. Khayyam Journal of Mathematics, 8(1), pp. 33-41. doi:10.22034/kjm.2021.257086.2061

[6] Bayart, F. and Matheron, E., 2009. Dynamics of Linear Operators. *Cambridge University Press, Cambridge*. doi:10.1017/CBO9780511581113

[7] Bayart, F., 2004. Common hypercyclic vectors for composition operators. *J. Operator Theory, 52*, pp. 353-370. doi:Not available

[8] Bayart, F. and Matheron, E., 2007. How to get common universal vectors. *Indiana Univ. Math. J., 56*, pp. 553-580. doi:10.1512/iumj.2007.56.2863

[9] Bermúdez, T. and Kalton, N. J., 2002. The range of operators on von Neumann algebras. *Proc. Amer. Math. Soc., 130*, pp. 1447-1455. doi:10.1090/S0002-9939-01-06292-X

[10] Bonet, J., Frerick, L., Peris, A. and Wengenroth, J., 2005. Transitive and hypercyclic operators on locally convex spaces. *Bull. London Math. Soc., 37*, pp. 254-264. doi:10.1112/S0024609304003698

[11] Costakis, G. and Sambarino, M., 2004. Genericity of wild holomorphic functions and common hypercyclic vectors. *Adv. Math., 182*, pp. 278-306. doi:10.1016/S0001-8708(03)00079-3

[12] Costakis, G. and Manoussos, A., 2008. J-class weighted shifts on the space of bounded sequences of complex numbers. *Integral Equations Operator Theory, 62*, pp. 149-158. doi:10.1007/s00020-008-1621-6

[13] Costakis, G. and Manoussos, A., 2009. J-class operators and hypercyclicity. *J. Operator Theory, 61(1)*, pp. 81-94. doi:10.48550/arXiv.0704.3354

[14] Godefroy, G. and Shapiro, J. H., 1991. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal., 98*, pp. 229-269. doi:10.1016/0022-1236(91)90078-J

[15] González, M., León-Saavedra, F. and Montes-Rodríguez, A., 2005. Semi-Fredholm theory: hypercyclic and supercyclic subspaces. *Proc. London Math. Soc., 91(1)*, pp. 169-189. doi:10.1112/S0024611500012454

[16] Kitai, C., 1982. Invariant closed sets for linear operators. *Ph.D. Thesis, University of Toronto*, Toronto. doi:Not available

[17] Rolewicz, S., 1969. On orbits of elements. *Studia Math.*, **32**, pp. 17-22. doi:Not available

[18] Shkarin, S., 2010. Remarks on common hypercyclic vectors. *J. Funct. Anal., 258*, pp. 132-160. doi:10.1016/j.jfa.2009.06.032

[19] Talebi, S., Yousefi, B. and Asadipour, M., 2015. Invertible Subspace-Hypercyclic Operators. *J. Math. Extension.*, 9(2), pp. 89-94. doi:Not available

Common Locally Hypercyclic Vectors for a Family of Operators

Seyede Razieh Parsa[(1)] and Meysam Asadipour[(2)] [2] and Hamid Rezaei[(3)]

[(1),(2),(3)] Department of Mathematics, College of Sciences, Yasouj University, Yasouj, Iran

Communicated by: Mohammadesmael Samei

Received: 15 May 2025 Accepted: 23 December 2025

Abstract: In this research, two main topics in operator theory are investigated. First, we compare topologically transitive operators and locally topologically transitive operators on an arbitrary Banach space X. Next, we introduce common locally hypercyclic vectors for a family of locally topologically transitive operators. Furthermore, we present several structural differences between the set of common locally hypercyclic vectors and the set of common hypercyclic vectors. Indeed, by examining various examples, we demonstrate that the set of common locally hypercyclic vectors may, in some cases, be empty; in others, dense; and in yet others, even non-separable. These cases highlight the distinct behavior of the set of common locally hypercyclic vectors compared to the set of common hypercyclic vectors in operator theory.

Keywords: Hypercyclic operator, locally hypercyclic operator, common locally hypercyclic vector.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author

E-mail addresses: (S. R. Parsa) razieh0parsa@gmail.com, (M. Asadipour) asadipour.mey@gmail.com, (H. Rezaei) rezaei@yu.ac.ir