مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۱–۱۹

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.47336.2286

متغیر تصادفی فازی دوبعدی

بنیتا دولت‌زاده [(۱)] [۱] ، علیرضا عرب‌پور [(۱)] ، ماشاالله ماشین‌چی [(۱)] و ایوب شیخی [(۱)]

[(۱)] بخش آمار، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

دبیر مسئول: حمزه ترابی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۰۱

چکیده: در این مقاله قصد داریم با توجه به تعریف متغیر تصادفی فازی براساس ابتدا و انتهاهای α-برش‌های یک مجموعه محدب فازی و با استفاده از مفهوم اندازه‌پذیری، تعریفی را برای متغیر تصادفی فازی توام بیان کنیم و تابع عضویت متغیرهای تصادفی فازی دوبعدی را با استفاده از توابع عضویت مربوط به دو متغیر تصادفی فازی به دست آوریم. درنهایت نیز برای درک بهتر مفاهیم و مطالب ذکرشده، مثال‌هایی را در پایان هر بخش بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: فضای اندازه، α-برش، تابع عضویت، متغیر تصادفی فازی، متغیر تصادفی فازی توام.

رده‌بندی ریاضی: 03E72، 54A40، 62A86.

۱ مقدمه

به‌دلیل اهمیت متغیر تصادفی فازی در زمینه‌های مختلف علمی، افراد بسیاری از این مفهوم در مقالات خود استفاده کردند که به اختصار به تحقیقات برخی از این افراد می‌پردازیم. کواکرناک [۸]، در مقاله‌ی خود به تعریف متغیر تصادفی فازی و بیان چندین قضیه درباره‌ی متغیرهای تصادفی فازی مستقل مربوط پرداخته است. پوری و رالسکو [۱۶]، در این مقاله متغیر تصادفی فازی و امید ریاضی آن را تعریف کردند. لی و همکارانش [۹]، در مقاله‌ی خود به تعریف متغیر تصادفی فازی و توزیع آن پرداخته‌اند. لی و همکارانش [۱۱، ۱۲]، در یکی از مقالات خود استقلال متغیرهای تصادفی فازی را با استفاده از مفهوم تابع توزیع حاشیه‌ای تعریف و برخی از ویژگی‌های متغیرهای تصادفی فازی مستقل را مورد بحث قرار دادند. سپس کاربرد آن را در بهینه‌سازی تصادفی فازی مطرح کردند. همچنین در مقاله‌ی دیگری به تعریف متغیر تصادفی فازی، امیدریاضی آن و برخی از ویژگی‌های آن پرداخته‌اند. شاپیرو [۱۹]، در مقاله‌ی خود درباره‌ی دو مفهوم تصادفی بودن

[۱] نویسنده مسئول مقاله (B. Dowlatzadeh) mahramaneh_90@yahoo.com

و فازی بودن و اینکه چقدر این دو مفهوم به یکدیگر نزدیک و مکمل یکدیگر هستند، پرداخته‌اند. لازم به‌ذکر است که برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توان به منابع [۱–۳، ۵، ۷، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۱] نیز مراجعه کنید.

ما در این مقاله تعریف متغیر تصادفی فازی را با استفاده از متغیر تصادفی بودن ابتدا و انتهای α-برش‌ها در حالت یک بعدی بیان می‌کنیم که این موضوع نیازمند داشتن آگاهی نسبی در زمینه‌ی مباحث مربوط به آنالیز ریاضی می‌باشد. سپس تعریف ذکرشده برای متغیر تصادفی فازی در حالت یک‌بعدی را به حالت چندبعدی، در حالت خاص در این مقاله برای حالت دوبعدی، بررسی می‌کنیم. برای این‌منظور در بخش دوم مقدماتی درباره‌ی σ-میدان‌ها و مفاهیم مورد نیاز در زمینه‌ی فازی بیان می‌شوند. در بخش سوم تعاریف درباره‌ی اندازه‌پذیری، متغیر تصادفی بودن در حالت یک بعدی و چند بعدی مطرح و با توجه به آنها تعریف متغیر تصادفی فازی در حالت یک بعدی ارائه و تعریف برای مقایسه‌ی دو نقطه در فضا بیان می‌شوند. همچنین برای درک بهتر مفاهیم مطرح شده چندین مثال ارائه می‌شوند. در فصل آخر نیز پس از بیان چندین تعریف و قضیه‌ی کاربردی در زمینه‌ی فازی باتوجه‌به α-برش‌ها، تعریف متغیر تصادفی فازی دو بعدی بیان و یک مثال نیز ارائه می‌شود.

۲ مفاهیم مقدماتی

در این بخش به بیان مقدماتی درباره‌ی مفاهیم فازی می‌پردازیم، سپس مطالبی را درباره‌ی اندازه‌پذیری بیان می‌کنیم. این مطالب جز اساسی‌ترین مفاهیم فازی و آنالیز هستند. ابتدا مفاهیم مربوط به فازی را در قالب چندین تعریف و قضیه مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. مجموعه‌ی $\tilde{A}$ را روی مجموعه‌ی U مجموعه‌ای فازی می‌گویند که توسط یک تابع $\tilde{A} : U \to [۰, ۱]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر $u \in U$ مقدار $\tilde{A}(u)$، میزان عضویت u در مجموعه‌ی $\tilde{A}$ است [۱۴].

تعریف ۲.۲. مجموعه عناصری از $\mathcal{F}(U) = \left\{\tilde{A} | \tilde{A} : U \to [۰, ۱]\right\}$ را که درجه‌ی عضویت آنها در مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ دست‌کم به بزرگی $\alpha \in (۰, ۱]$ باشد، α-برش $\tilde{A}$ نامیده می‌شوند. به‌عبارت دیگر [۱۴]

$$\tilde{A}[\alpha] = \left\{u \in U : \tilde{A}(x) \geq \alpha\right\}.$$

قضیه ۳.۲. اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو کمیت فازی با تکیه‌گاه کراندار و α-برش‌های بسته باشند، آنگاه برای هر رابطه‌ی دوتایی پیوسته‌ی روی R که با نماد $\circ$ آن را نمایش می‌دهیم، $(\tilde{A} \circ \tilde{B})[\alpha] = \tilde{A}[\alpha] \circ \tilde{B}[\alpha]$ [۱۴].

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۱۴] مراجعه کنید. □

نتیجه ۴.۲. اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو کمیت فازی با تکیه‌گاه کراندار و α-برش‌های بسته باشند، آنگاه [۱۴]

۱) $(\tilde{A} + \tilde{B})[\alpha] = \tilde{A}[\alpha] + \tilde{B}[\alpha]$

۲) $(\tilde{A} - \tilde{B})[\alpha] = \tilde{A}[\alpha] - \tilde{B}[\alpha]$

۳) $(\tilde{A}.\tilde{B})[\alpha] = \tilde{A}[\alpha].\tilde{B}[\alpha]$.

تعریف ۵.۲. کمیت فازی $\tilde{A} = (a, b, c)_T$ یک عدد فازی مثلثی است که مقادیر تابع عضویت آن برای هر $a < b < c$ دلخواه به‌صورت زیر است [۱۴]

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c, \\ ۰ & a \in \mathbb{R} - [a, c]. \end{cases}$$

اکنون به یادآوری چندین تعریف درباره‌ی σ-میدان فضاها و توابع اندازه‌پذیر می‌پردازیم که در ادامه مقاله از این مطالب استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۶.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های فضای Ω باشد. حال اگر شرایط زیر برقرار باشند، $\mathcal{A}$ یک σ-میدان است [۲]

۱) $\Omega \in \mathcal{A}$

۲) اگر $A \in \mathcal{A}$، آنگاه $A^c \in \mathcal{A}$

۳) اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

۴) اگر $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

تعریف ۷.۲. اگر $\mathcal{A}$ یک σ-میدان روی Ω باشد، در این حالت فضای $(\Omega, \mathcal{A})$ را یک فضای اندازه‌پذیر می‌نامند و عضوهای $\mathcal{A}$ مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر هستند [۲].

قضیه ۸.۲. اگر f و g دو تابع اندازه‌پذیر و متناهی روی مجموعه‌ی Ω باشند، آنگاه

۱) برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ تابع $af + bg$ روی Ω اندازه‌پذیر است

۲) تابع $f.g$ روی Ω اندازه‌پذیر است.

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات آن به مرجع [۲] مراجعه کنید. □

نتیجه ۹.۲. اگر f تابعی پیوسته و حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}$ و g تابعی اندازه‌پذیر و حقیقی مقدار روی Ω باشد، آنگاه هر ترکیبی دلخواه از این دو تابع به صورت $f(g)$ تابعی اندازه‌پذیر روی Ω است.

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات به مرجع [۲] مراجعه کنید. □

۳ متغیر تصادفی فازی

در این بخش تعریف متغیر تصادفی فازی را با استفاده از ابتدا و انتهاهای α-برش‌های یک مجموعه‌ی فازی که خودشان متغیر تصادفی هستند، مطرح می‌کنیم و برای درک بهتر این تعریف به بیان چندین مثال می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا تعریف متغیر تصادفی را براساس توابع اندازه‌پذیر برای حالت nبعدی و سپس در حالت خاص برای حالت یک‌بعدی بیان می‌کنیم. همچنین چون متغیر تصادفی فازی را روی فضای محدب فازی تعریف می‌کنیم، به همین دلیل ذکر تعاریفی از محدب فازی بودن برای حالت nبعدی و سپس برای حالت یک‌بعدی ضروری است.

تعریف ۱.۳. مجموعه‌ی $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ را مجموعه‌ی حاصل ضرب nتا مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ درنظر می‌گیریم که در آن مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ نیز مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. فرض کنید $\underline{X} = (X_1, \ldots X_n) : \Omega^n \to \mathbb{R}^n$ یک تابع روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega^n, \mathcal{A})$ است. اگر برای هر $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ رابطه‌ی

$$\underline{X}^{-1}((-\infty, a_1], \ldots, (-\infty, a_n]) = \{\underline{\omega} \in \Omega^n : \underline{X}(\underline{\omega}) \preceq \underline{a}\} \in \mathcal{A}$$

برقرار باشد، آنگاه تابع $\underline{X}$ اندازه‌پذیر است. در این صورت $\underline{X}$ یک متغیر تصادفی توام است [۴].

تعریف ۲.۳. تابع $X : \Omega \to \mathbb{R}$ را یک تابع روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{A})$ درنظر بگیرید. اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$ رابطه‌ی

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{A}$$

برقرار باشد، تابع X اندازه‌پذیر است. درنتیجه X یک متغیر تصادفی است.

تعریف ۳.۳. اگر برای هر $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \underline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ و $\lambda \in [0, 1]$نامساوی

$$\tilde{A}(\lambda \underline{x} + (1 - \lambda)\underline{y}) \geq min\left\{\tilde{A}(\underline{x}), \tilde{A}(\underline{y})\right\} \ ; \ \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

برقرار باشد، آنگاه مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را در $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ محدب فازی گویند.
حال اگر $n = 1$، در این حالت برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $\lambda \in [0, 1]$، مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ محدب فازی است اگر

$$\tilde{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq min\left\{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)\right\} \ ; \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۴.۳. فرض کنید $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$، $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ و $S^n \in \mathbb{R}^n$ بطوریکه S^n محدب باشد. رابطه‌ی $\preceq$ را روی $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود که آن را با نماد $(\mathbb{R}^n, \preceq)$ نمایش می‌دهند:

۱) اگر $d(\underline{x}, \underline{\circ}) \leq d(\underline{y}, \underline{\circ})$، آنگاه $\underline{x} \preceq \underline{y}$

۲) اگر $d(\underline{x}, \underline{\circ}) = d(\underline{y}, \underline{\circ})$، آنگاه $\underline{x} \equiv \underline{y}$

منظور از d در تعریف ۴.۳، همان فاصله‌ی اقلیدسی $\underline{x}$ تا $\underline{\circ}$ است بطوریکه تمام مولفه‌های $\underline{x}$ نامنفی هستند و $\underline{\circ}$ بردار nبعدی صفر است.

اگر $\underline{x} \in S^n$ و دست‌کم یکی از مولفه‌های $\underline{x}$ منفی باشد، آنگاه باید نقطه‌ی $\underline{x}$ را به نقطه‌ی $\underline{x}' = (x_1', \ldots x_n')$ انتقال دهیم و بعد فاصله‌ی اقلیدسی $\underline{x}'$ را تا $\underline{\circ}$ بدست آوریم. نحوه‌ی انتقال نقطه‌ی $\underline{x}$ به صورت زیر است

$$x_i' = x_i - min\left\{min\left\{x_i : \text{امین مولفه‌ی } i \text{، } x_i \text{ است } \partial S^n\right\}, \circ\right\}$$

که در آن ∂S^n نقاط مرزی S^n هستند.

برای درک بهتر مفهوم انتقال نقاط، مثالی را در زیر بیان می‌کنیم.

مثال ۵.۳. فرض کنید فضای S^3 مکعب مستطیل باشد که رئوس آن $(4, -3, 1)$، $(4, -2, 1)$، $(4, -2, 2)$، $(4, -3, 2)$، $(-1, -3, 1)$، $(-1, -2, 1)$، $(-1, -2, 2)$ و $(-1, -3, 2)$ هستند. حال چون حداقل یکی از نقاط این مکعب‌مستطیل دارای حداقل یک مولفه‌ی منفی است، به همین دلیل کل مکعب‌مستطیل را به ناحیه‌ی اول مختصات انتقال می‌دهیم به‌گونه‌ای که تمام نقاط این مکعب‌مستطیل به‌صورت زیر به نقاط $\underline{x}' = (x_1', x_2', x_3')$ انتقال پیدا کنند.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - min\left\{min\left\{x_1 : \text{اولین مولفه‌ی } \partial S^3 \text{ است}\right\}, x_1\right\}, \circ\} \\ &= x_1 - min\{1, \circ\} = x_1 - (\circ) = x_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2 - min\left\{min\left\{x_2 : \text{دومین مولفه‌ی } \partial S^3 \text{ است}\right\}, x_2\right\}, \circ\} \\ &= x_2 - min\{-3, \circ\} = x_2 - (-3) = x_2 + 3 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} x_3' &= x_3 - min\left\{min\left\{x_3 : \text{سومین مولفه‌ی } \partial S^3 \text{ است}\right\}, x_3\right\}, \circ\} \\ &= x_3 - min\{-1, \circ\} = x_3 - (-1) = x_3 + 1. \end{aligned}$$

تعریف ۶.۳. فضای $(\mathbb{R}^n, \preceq)$ را برای $n \geq 2$ درنظر بگیرید. اگر S^n در شرایط تعریف ۴.۳ صدق کند، کمینه و بیشینه برای S^n به‌صورن زیر تعریف می‌شود

$$inf\ S^n = inf\left\{\underline{x} \in S^n : \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)\right\} = \underline{x}_L$$

و

$$sup\ S^n = sup\left\{\underline{x} \in S^n : \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)\right\} = \underline{x}_U$$

که در آن‌ها $\underline{x}_L$ و $\underline{x}_U$ برای هر $\underline{x} \in S^n$ به‌صورت $d(\underline{x}_L, \underline{\circ}) \leq d(\underline{x}, \underline{\circ})$ و $d(\underline{x}, \underline{\circ}) \leq d(\underline{x}_U, \underline{\circ})$ تعریف می‌شوند.

لازم به ذکر است که اگر $n = 1$ باشد، آنگاه $(\mathbb{R}^n, \preceq)$ به $(\mathbb{R}, \leq)$ تبدیل می‌شود که $\leq$ همان رابطه‌ی نامساوی معمولی است و فضای S نیز بازه است که در بازه‌ها همواره کمینه و بیشینه آن‌ها به‌ترتیب نقاط ابتدایی و انتهایی بازه‌ها هستند.

اکنون که تمام مفاهیم لازم برای ورود به تعریف متغیر تصادفی فازی را بیان کردیم، به تعریف متغیر تصادفی فازی می‌پردازیم.

تعریف ۷.۳. فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{A})$ را درنظر بگیرید، تابع $\tilde{X} : \Omega \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ را روی این فضا تعریف می‌کنیم که در آن $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n) = \{\tilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : \tilde{A}$ محدب فازی است$\}$ و توابع $\tilde{X}_{L,\alpha}, \tilde{X}_{U,\alpha} : \Omega \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{X}_{L,\alpha}(\omega) = inf\left(\tilde{X}(\omega)[\alpha]\right) = inf\left\{x \in \mathbb{R} : \tilde{X}(\omega)(x) \geq \alpha\right\}$$

همچنین

$$\tilde{X}_{U,\alpha}(\omega) = sup\left(\tilde{X}(\omega)[\alpha]\right) = sup\left\{x \in \mathbb{R} : \tilde{X}(\omega)(x) \geq \alpha\right\}.$$

اگر دو تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ و $\tilde{X}_{U,\alpha}$ به‌ازای‌هر $\alpha \in (۰, ۱]$ روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{A})$ متغیر تصادفی باشند $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است.

برتری این تعریف نسبت‌به سایر تعاریف ذکرشده در زمینه‌ی متغیر تصادفی فازی این است که فضایی که متغیر تصادفی فازی روی آن تعریف شده‌است، فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{A})$ می‌باشد. همچنین برای اثبات متغیر تصادفی فازی بودن یک تابع، تنها کافی است اندازه‌پذیری یا متغیر تصادفی بودن $\tilde{X}_{L,\alpha}$ و $\tilde{X}_{U,\alpha}$ بررسی شوند.
برای درک بهتر مفهوم تعریف متغیر تصادفی فازی، در زیر مثال‌هایی ارائه شده‌است.

مثال ۸.۳. اگر $\tilde{X} : \Omega_x \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ که در آن $\Omega_x = \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}, \omega_{۳x}\}$، $\tilde{X}(\omega_{۱x}) = \tilde{X}(\omega_{۲x}) = (۴, ۵, ۶)$ و $\tilde{X}(\omega_{۳x}) = (۶, ۷, ۸)$ باشند، برای نشان دادن اینکه تابع $\tilde{X}$ ذکرشده متغیر تصادفی فازی است، باید نشان داد که دو تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ و $\tilde{X}_{U,\alpha}$ متغیر تصادفی هستند که باتوجه‌به تعریف ۲.۳ باید اندازه‌پذیری این دو تابع را بررسی کرد. برای این منظور ابتدا توابع عضویت برای هریک از این دو عدد فازی مثلثی بیان می‌شود

$$\tilde{X}(\omega_{۱x}) = \tilde{X}(\omega_{۲x}) = \begin{cases} x - ۴ & ۴ \leq x \leq ۵, \\ ۶ - x & ۵ \leq x \leq ۶, \end{cases}$$

همچنین

$$\tilde{X}(\omega_{۳x}) = \begin{cases} x - ۶ & ۶ \leq x \leq ۷, \\ ۸ - x & ۷ \leq x \leq ۸. \end{cases}$$

حال باتوجه‌به این توابع عضویت، α-برش‌های آنها به‌صورت زیر هستند

$$\tilde{X}(\omega_{۱x})[\alpha] = \tilde{X}(\omega_{۲x})[\alpha] = [\alpha + ۴, ۶ - \alpha], \quad \tilde{X}(\omega_{۳x})[\alpha] = [\alpha + ۶, ۸ - \alpha]$$

زیرا با استفاده از تعریف ۲.۲ برای هریک از $\tilde{X}(\omega_{ix})$ برای $i = ۱, ۲, ۳$، می‌توان گفت

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega_{۱x})[\alpha] = \tilde{X}(\omega_{۲x})[\alpha] &= \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}(\omega_{۱x}) \geq \alpha\right\} = \{\omega_x \in \Omega_x : x - ۴ \geq \alpha \text{ و } ۶ - x \geq \alpha\} \\ &= \{\omega_x \in \Omega_x : \alpha + ۴ \leq x \leq ۶ - \alpha\} = [\alpha + ۴, ۶ - \alpha] \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega_{۳x})[\alpha] &= \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}(\omega_{۳x}) \geq \alpha\right\} = \{\omega_x \in \Omega_x : x - ۶ \geq \alpha \text{ و } ۸ - x \geq \alpha\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \alpha + ۶ \leq x \leq ۸ - \alpha\} = [\alpha + ۶, ۸ - \alpha] \end{aligned}$$

چون α-برش‌ها بازه هستند، پس $\tilde{X}_{L,\alpha}$ و $\tilde{X}_{U,\alpha}$ به‌ازای‌هر $\omega_x \in \Omega_x$ به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \begin{cases} \alpha + ۴ & \omega_x = \omega_{۱x}, \omega_{۲x}, \\ \alpha + ۶ & \omega_x = \omega_{۳x}, \end{cases}$$

همچنین

$$\tilde{X}_{U,\alpha}(\omega_x) = \begin{cases} ۶ - \alpha & \omega_x = \omega_{۱x}, \omega_{۲x}, \\ ۸ - \alpha & \omega_x = \omega_{۳x}. \end{cases}$$

اکنون دو σ-میدان $\mathcal{A}_۱$ و $\mathcal{A}_۲$ روی Ω_x به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathcal{A}_۱ = \{\varnothing, \Omega_x, \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\}, \{\omega_{۳x}\}\}$$

و

$$\mathcal{A}_۲ = \{\varnothing, \Omega_x, \{\omega_{۱x}\}, \{\omega_{۲x}, \omega_{۳x}\}\}$$

دراین حالت باتوجه‌به تعریف ۲.۳ می‌توان اندازه‌پذیری تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ را نسبت‌به $\mathcal{A}_۱$ به‌صورت زیر بررسی کرد:

گام اول: $a < \alpha + ۴$

$$\left(\tilde{X}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty\,,\,a]) = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) \leq a\ ;\ a < \alpha + ۴\right\} = \varnothing \in \mathcal{A}_۱.$$

گام دوم: $a = \alpha + ۴$

$$\left(\tilde{X}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty\,,\,a]) = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) \leq a\right\} = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < \alpha + ۴ \text{ یا } \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \alpha + ۴\right\} = \varnothing \cup \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} = \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} \in \mathcal{A}_۱.$$

گام سوم: $\alpha + ۴ < a < \alpha + ۶$

$$\left(\tilde{X}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty\,,\,a]) = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) \leq a\right\} = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < \alpha + ۴ \text{ یا } \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \alpha + ۴ \text{یا} \alpha + ۴ < \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < a\right\} = \varnothing \cup \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} \cup \varnothing = \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} \in \mathcal{A}_۱.$$

گام چهارم: $a = \alpha + ۶$

$$\left(\tilde{X}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty\,,\,a]) = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) \leq a\right\} = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < \alpha + ۴ \text{ یا } \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \alpha + ۴ \text{ یا } \alpha + ۴ < \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < \alpha + ۶ \text{ یا } \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \alpha + ۶\right\}$$
$$= \varnothing \cup \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} \cup \varnothing \cup \{\omega_{۳x}\} = \Omega_x \in \mathcal{A}_۱.$$

گام پنجم: $\alpha + ۶ < a$

$$\left(\tilde{X}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty\,,\,a]) = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) \leq a\right\} = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < \alpha + ۴ \text{ یا } \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \alpha + ۴ \text{ یا } \alpha + ۴ < \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < \alpha + ۶ \text{ یا } \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \alpha + ۶ \text{ یا}$$
$$\alpha + ۶ < \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < a\right\} = \varnothing \cup \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} \cup \varnothing \cup \{\omega_{۳x}\} \cup \varnothing = \Omega_x \in \mathcal{A}_۱.$$

بنابراین تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ نسبت‌به $\mathcal{A}_۱$ اندازه‌پذیر است و به‌طریق مشابه می‌توان اندازه‌پذیری تابع $\tilde{X}_{U,\alpha}$ را نیز نسبت‌به $\mathcal{A}_۱$ بررسی کرد. بنابراین دو تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ و $\tilde{X}_{U,\alpha}$ متغیر تصادفی هستند. درنتیجه باتوجه‌به تعریف ۶.۳، تابع $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است.حال برای بررسی اندازه‌پذیر نبودن تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ نسبت‌به $\mathcal{A}_۲$ می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:

گام اول: $a < \alpha + ۴$

$$\left(\tilde{X}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty\,,\,a]) = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) \leq a\ ;\ a < \alpha + ۴\right\} = \varnothing \in \mathcal{A}_۲.$$

گام دوم: $a = \alpha + ۴$

$$\left(\tilde{X}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty\,,\,a]) = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) \leq a\right\} = \left\{\omega_x \in \Omega_x : \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) < \alpha + ۴ \text{ یا } \tilde{X}_{L,\alpha}(\omega_x) = \alpha + ۴\right\} = \varnothing \cup \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} = \{\omega_{۱x}, \omega_{۲x}\} \notin \mathcal{A}_۲.$$

بنابراین تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ نسبت‌به $\mathcal{A}_۲$ اندازه‌پذیر نیست و به‌طریق مشابه می‌توان اندازه‌پذیر نبودن تابع $\tilde{X}_{U,\alpha}$ را نیز نسبت‌به $\mathcal{A}_۱$ بررسی کرد. درنتیجه دو تابع $\tilde{X}_{L,\alpha}$ و $\tilde{X}_{U,\alpha}$ متغیر تصادفی نیستند و به‌همین دلیل $\tilde{X}$ متغیر تصادفی فازی نیست.

۴ متغیر تصادفی فازی دوبعدی

در این بخش باتوجه‌به α-برش‌های دو متغیر تصادفی فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ متغیر تصادفی فازی توام تعریف می‌شود. سپس تابع عضویت متغیر تصادفی فازی توام نیز با استفاده از ضرب توابع عضویت هر یک از این دو متغیر تصادفی فازی بدست می‌آید. برای این منظور ابتدا اساسی‌ترین تعریف و قضیه در حالت ۲ بعدی ارائه می‌شود.

تعاریف مختلفی از متغیر تصادفی فازی توأم در مقالات علمی ارائه شده‌اند که هر یک بر اساس حوزه‌ی کاری پژوهشگران تنظیم شده‌اند. به‌عنوان مثال، حسامیان و چاچی [۶] که بر روی توابع مفصل کار کرده‌اند، تعریف خود را بر اساس تابع مفصل فازی مطرح کرده‌اند. آن‌ها با استفاده از تابع توزیع تجمعی فازی توأم، وابستگی میان دو متغیر تصادفی فازی را بررسی کرده‌اند.

از سوی دیگر، لیو [۱۰] در نظریه‌ی عدم قطعیت، متغیرهای تصادفی فازی را به‌عنوان متغیرهایی با توزیع احتمال فازی تعریف کرده است. بر همین اساس، متغیر تصادفی فازی توأم، یک تابع احتمال فازی وابسته به دو متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود.

نلسن [۱۳] نیز از مفهوم تابع مفصل برای مدل‌سازی وابستگی میان متغیرهای تصادفی فازی بهره برده است. در این رویکرد، وابستگی میان متغیرهای تصادفی فازی با استفاده از تابع مفصل فازی امکان‌پذیر شده است.

پنگ و لیو [۱۵] معتقد بودند که متغیر تصادفی فازی توأم را می‌توان با استفاده از تابع عضویت توأم مدل‌سازی کرد. این تابع، ابزاری برای تحلیل وابستگی میان دو متغیر تصادفی فازی به شمار می‌رود.

در این مقاله، به‌منظور سهولت محاسبات و اجتناب از استفاده از تابع کاپولا، تعریفی جدید برای متغیر تصادفی فازی و متغیر تصادفی فازی توأم ارائه شده است. این تعریف مبتنی بر α-برش‌ها بوده و از ابتدا و انتهای α-برش‌ها برای تعیین ویژگی‌های متغیر تصادفی فازی توأم بهره گرفته‌شده‌است.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو متغیر تصادفی فازی تعریف شده روی $\mathcal{F}_C(\mathbb{R})$، همچنین α-برش‌های آنها یعنی $\tilde{A}[\alpha]$ و $\tilde{B}[\alpha]$ بازه‌هایی روی $\mathbb{R}$ باشند. دراین‌صورت تابع $\tilde{C} = \tilde{A} \times \tilde{B} : \mathbb{R}^۲ \to [۰,\ ۱]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$\tilde{C}(x,\,y) = (\tilde{A} \times \tilde{B})(x,\,y) = sup\{\alpha \in [۰,\ ۱] : (x,\,y) \in \tilde{A}[\alpha] \times \tilde{B}[\alpha]\}$$

قضیه ۲.۴. فرض کنید تابع $\tilde{C}$ در تعریف ۱.۴ صدق کند. دراین‌صورت $\tilde{C}$ یک مجموعه‌ی فازی یکتا روی $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^۲)$ با α-برش‌های زیر است [۱]:

$$\tilde{C}[\alpha] = \tilde{A}[\alpha] \times \tilde{B}[\alpha] \quad ; \quad \alpha \in [۰,\ ۱].$$

اثبات. باتوجه‌به قضیه‌ی ۴.۳ در مرجع [۱۴]، فرض کنید $C = [۰,\ ۱]$، $U = \mathbb{R}^۲$ و $D \in \mathcal{P}(U)$ باشند که رابطه‌ی ترتیبی تعریف شده بر روی $\mathcal{P}(U)$ به‌صورت $\subseteq$ است. حال تابع $g : [۰,\ ۱] \to \mathcal{P}(u)$ را به‌صورت $g(\alpha) = \tilde{C}[\alpha] =$

$\tilde{A}[\alpha] \times \tilde{B}[\alpha]$ تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت $\forall \alpha \in [0, 1]$،

$$\begin{aligned} g\left(\bigvee D\right) &= \tilde{C}\left[\bigvee D\right] = \tilde{A}\left[\bigvee D\right] \times \tilde{B}\left[\bigvee D\right] \\ &= \left(\bigcap_{\alpha \in D} \tilde{A}[\alpha]\right) \times \left(\bigcap_{\alpha \in D} \tilde{B}[\alpha]\right) \\ &= \bigcap_{\alpha \in D} (\tilde{A}[\alpha] \times \tilde{B}[\alpha]) = \bigcap_{\alpha \in D} \tilde{C}[\alpha] = \bigcap_{\alpha \in D} g(\alpha) \end{aligned}$$

که در آن $g\left(\bigvee D\right) = g\left(\bigvee_{\alpha \in D} d\right) = \bigcap_{\alpha \in D} g(\alpha)$. درنتیجه یک مجموعه‌ی فازی منحصربه‌فرد $\tilde{C} \in \mathcal{F}(U)$ را داریم بطوریکه α-برش‌های آن به‌ازای‌هر $\alpha \in [0, 1]$ به‌صورت $\tilde{C}[\alpha] = \tilde{A}[\alpha] \times \tilde{B}[\alpha]$ هستند و روی $\mathbb{R}^2$ مجموعه‌های محدب فازی هستند. □

اکنون تعریفی را برای متغیر تصادفی فازی توام روی فضای اندازه‌پذیر دوبعدی معرفی می‌کنیم. برای این منظور ابتدا به تعریف فضای اندازه‌پذیر دوبعدی می‌پردازیم.

تعریف ۳.۴. دو متغیر تصادفی فازی $\tilde{X} : \Omega_x \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ و $\tilde{Y} : \Omega_y \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ را به‌ترتیب روی دو فضای اندازه‌پذیر $(\Omega_x, \mathcal{A}_x)$ و $(\Omega_y, \mathcal{A}_y)$ درنظر بگیرید. تابع $\tilde{Z} = \tilde{X} \times \tilde{Y} : \Omega_z = \Omega_x \times \Omega_y \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{Z}(\omega_z) = \tilde{Z}((\omega_x, \omega_y)) = \left(\tilde{X} \times \tilde{Y}\right)(\omega_x, \omega_y)$$

که در آن $\Omega_z = \Omega_x \times \Omega_y = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) : \omega_x \in \Omega_x, \omega_y \in \Omega_y\}$ و فضای $(\Omega_z, \mathcal{A}_z)$ یک فضای دوبعدی اندازه‌پذیر است.

تعریف ۴.۴. فضای اندازه‌پذیر دوبعدی $(\Omega_z, \mathcal{A}_z)$ را درنظر بگیرید و $\tilde{Z}$ به‌گونه‌ای تعریفمی‌شود که در تعریف ۳.۴ صدق کند. دراین‌صورت $\tilde{Z}$ متغیر تصادفی فازی توام است اگر دو تابع $\tilde{Z}_{L,\alpha}, \tilde{Z}_{U,\alpha} : \Omega_z \to \mathbb{R}$ که به‌ازای‌هر $\alpha \in (0, 1]$ و $i = 1, 2, \ldots, n_{\Omega_z}$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}(\omega_z) = inf\left\{\tilde{Z}(\omega_{iz})[\alpha]\right\} \quad , \quad \tilde{Z}_{U,\alpha}(\omega_z) = sup\left\{\tilde{Z}(\omega_{iz})[\alpha]\right\}$$

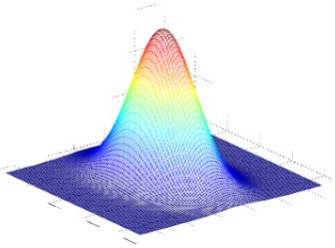
روی $(\Omega_z, \mathcal{A}_z)$ متغیر تصادفی فازی باشند.

برخی از ویژگی‌های متغیر تصادفی فازی توام تبدیل متغیر تصادفی فازی دوبعدی به متغیر تصادفی فازی یک بعدی است. بدین‌صورتکه اگر متغیر تصادفی فازی دوبعدی شامل اعداد فازی مثلثی برای هر بعد باشد، در این حالت تصویر عدد فازی دوبعدی به‌صورت هرم درمی‌آید که می‌توان آن را روی دو محور x و y به‌صورت دو عدد فازی مثلثی تصویر کرد. ازطرفی α-برش‌های متغیرهای تصادفی فازی دوبعدی در این حالت مستطیل‌های تودرتو می‌باشند که اگر آنها را روی هم بگذاریم، به همان هرم می‌رسیم. همچنین اگر متغیر تصادفی فازی دوبعدی شامل اعداد نرمال برای هر بعد باشد، در این حالت تصویر عدد فازی دوبعدی به‌صورت ناقوس کلیسا درمی‌آید که می‌توان آن را روی دو محور x و y به‌صورت دو عدد نرمال تصویر کرد. ازطرفی α-برش‌های متغیرهای تصادفی فازی دوبعدی در این حالت دوایر تودرتو می‌باشند که اگر آنها را روی هم بگذاریم، به همان ناقوس می‌رسیم.

در زیر مثالی برای واضح شدن مفهوم متغیر تصادفی فازی توام بیان می‌کنیم.

مثال ۵.۴. فرض کنید $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ به‌ترتیب دو متغیر تصادفی فازی روی فضاهای $(\Omega_x, \mathcal{A}_x)$ و $(\Omega_y, \mathcal{A}_y)$ باشند به‌گونه‌ای که $\mathcal{A}_k$ برای $k = x, y$ مجموعه‌های توانی روی $\Omega_k = \{\omega_{1k}, \omega_{2k}\}$ و توابع عضویت آنها به‌صورت زیر است:

$$\tilde{K}(\omega_{1k})(k) = exp\left\{-(k-2)^2\right\} \quad 1 \leq k \leq 3$$



شکل ۱: تابع عضویت توام مثال ۵.۴

و

$$\tilde{K}(\omega_{۲k})(k) = exp\left\{-(k-۵)^{۲}\right\} \quad ۴ \leq k \leq ۶$$

نمای کلی شکل آنها به‌صورت زیر است همچنین α-برش‌های آنها نیز به‌صورت زیر هستند

$$\tilde{K}(\omega_k)[\alpha] = \begin{cases} \left[۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ + \sqrt{-ln\alpha}\right], & \omega_k = \omega_{۱k}, \\ \left[۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ + \sqrt{-ln\alpha}\right]. & \omega_k = \omega_{۲k}. \end{cases}$$

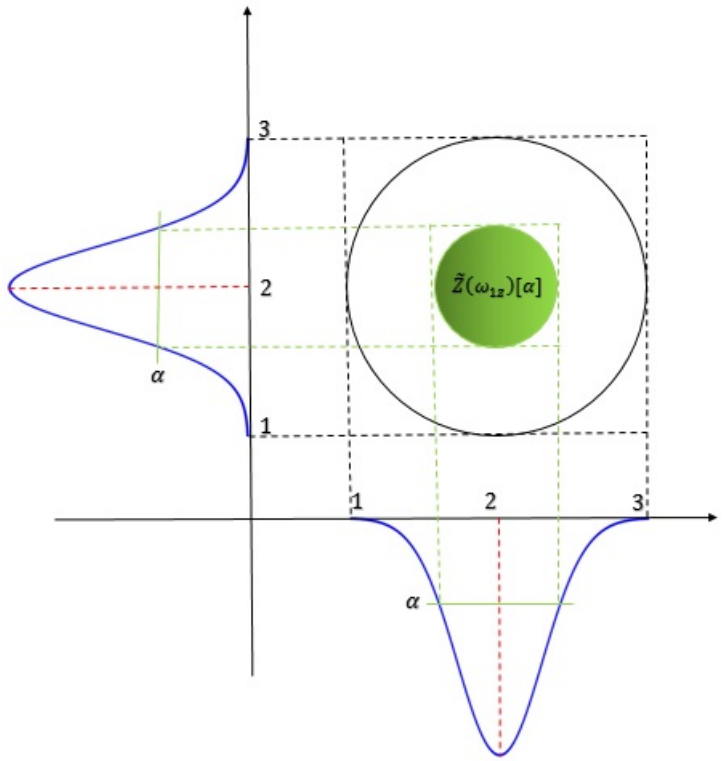
حال فرض کنید تابع $\tilde{Z} = \tilde{X} \times \tilde{Y} : \Omega_z \to \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega_z, \mathcal{A}_z)$ تعریف شود که $\Omega_z = \{(\omega_{ix}, \omega_{jy}) : \omega_{ix} \in \Omega_x,\ \omega_{jy} \in \Omega_y\ ;\ i, j = ۱, ۲\}$ و $\mathcal{A}_z$ یک σ-میدان تولیدشده با استفاده از حاصل ضرب $\mathcal{A}_x$ و $\mathcal{A}_y$ باشد. دراین‌حالت α-برش‌های $\tilde{Z}$ با استفاده از α-برش‌های $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\omega_{۱z})[\alpha] &= \left(\tilde{X} \times \tilde{Y}\right)(\omega_{۱x}, \omega_{۱y})[\alpha] = \left(\tilde{X}(\omega_{۱x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۱y})[\alpha]\right) \\ &= \tilde{X}(\omega_{۱x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۱y})[\alpha] \\ &= \left[۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ + \sqrt{-ln\alpha}\right] \times \left[۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ + \sqrt{-ln\alpha}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\omega_{۲z})[\alpha] &= \left(\tilde{X} \times \tilde{Y}\right)(\omega_{۱x}, \omega_{۲y})[\alpha] = \left(\tilde{X}(\omega_{۱x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۲y})[\alpha]\right) \\ &= \tilde{X}(\omega_{۱x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۲y})[\alpha] \\ &= \left[۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ + \sqrt{-ln\alpha}\right] \times \left[۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ + \sqrt{-ln\alpha}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\omega_{۳z})[\alpha] &= \left(\tilde{X} \times \tilde{Y}\right)(\omega_{۲x}, \omega_{۱y})[\alpha] = \left(\tilde{X}(\omega_{۲x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۱y})[\alpha]\right) \\ &= \tilde{X}(\omega_{۲x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۱y})[\alpha] \\ &= \left[۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ + \sqrt{-ln\alpha}\right] \times \left[۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ + \sqrt{-ln\alpha}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\omega_{۴z})[\alpha] &= \left(\tilde{X} \times \tilde{Y}\right)(\omega_{۲x}, \omega_{۲y})[\alpha] = \left(\tilde{X}(\omega_{۲x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۲y})[\alpha]\right) \\ &= \tilde{X}(\omega_{۲x})[\alpha] \times \tilde{Y}(\omega_{۲y})[\alpha] \end{aligned}$$



شکل ۲: α-برش $\tilde{Z}(\omega_{1z})$ مثال ۵.۴

$$= \left[۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ + \sqrt{-ln\alpha}\right] \times \left[۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ + \sqrt{-ln\alpha}\right],$$

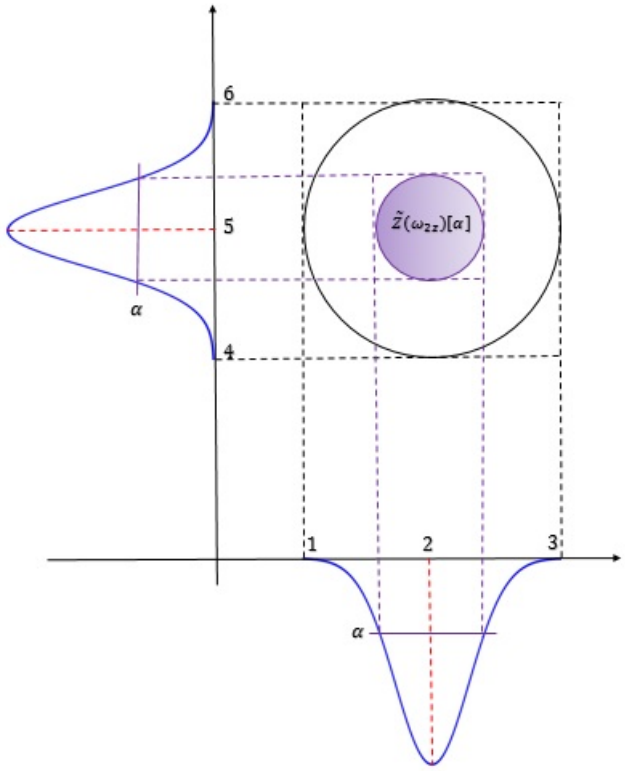
بنابراین باتوجه‌به تعریف ۴.۴، دو تابع $\tilde{Z}_{L,\alpha}$ و $\tilde{Z}_{U,\alpha}$ به‌صورت زیر هستند:

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}(\omega_z) = \begin{cases} (۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ - \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{1z} = (\omega_{1x},\ \omega_{1y}), \\ (۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ - \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{2z} = (\omega_{1x},\ \omega_{2y}), \\ (۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ - \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{3z} = (\omega_{2x},\ \omega_{1y}), \\ (۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ - \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{4z} = (\omega_{2x},\ \omega_{2y}), \end{cases}$$

و

$$\tilde{Z}_{U,\alpha}(\omega_z) = \begin{cases} (۲ + \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ + \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{1z} = (\omega_{1x},\ \omega_{1y}), \\ (۲ + \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ + \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{2z} = (\omega_{1x},\ \omega_{2y}), \\ (۵ + \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ + \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{3z} = (\omega_{2x},\ \omega_{1y}), \\ (۵ + \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ + \sqrt{-ln\alpha}) & \omega_{4z} = (\omega_{2x},\ \omega_{2y}). \end{cases}$$

باتوجه‌به اینکه می‌دانیم فاصله‌ی اقلیدوسی $(۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$ و $(۵ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$ باهم برابر و مساوی با $\sqrt{(۲ - \sqrt{-ln\alpha})^۲ + (۵ - \sqrt{-ln\alpha})^۲}$ است. پس طبق تعریف ۴.۳، $(۲ - \sqrt{-ln\alpha},\ ۵ -$



شکل ۳: α-برش $\tilde{Z}(\omega_{۲z})$ مثال ۵.۴

$(۲+\sqrt{-ln\alpha}, ۵+\sqrt{-ln\alpha}) \equiv (۵-\sqrt{-ln\alpha}, ۲-\sqrt{-ln\alpha})$. همچنین به‌دلیل اینکه فاصله‌ی اقلیدسی $\sqrt{(۲+\sqrt{-ln\alpha})^۲+(۵+\sqrt{-ln\alpha})^۲}$ و $(۵+\sqrt{-ln\alpha}, ۲+\sqrt{-ln\alpha})$ باهم برابر و مساوی با $\sqrt{-ln\alpha}$ است. پس طبق تعریف ۴.۳، $(۵+\sqrt{-ln\alpha}, ۲+\sqrt{-ln\alpha}) \equiv (۲+\sqrt{-ln\alpha}, ۵+\sqrt{-ln\alpha})$.

بنابراین باتوجه‌به تعریف ۱.۴، می‌توان گفت $\tilde{Z}_{L,\alpha}$ و $\tilde{Z}_{U,\alpha}$ متغیر تصادفی توام هستند. برای اثبات این مطلب بطور نمونه فقط به اثبات متغیر تصادفی توام بودن $\tilde{Z}_{L,\alpha}$ می‌پردازیم.برای این منظور کافی است اندازه‌پذیری تابع $\tilde{Z}_{L,\alpha}$ را روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega_z, \mathcal{A}_z)$ با استفاده از شکل ۶ بررسی کنیم.

$$۱)\ \forall (a, b) \in A_۱\ ;\ A_۱ = \{(x, y) : x, y \geq ۰\ ,$$

$$d(۰, (x, y)) < d(۰, (۲-\sqrt{-ln\alpha}, ۲-\sqrt{-ln\alpha}))\}$$

گام اول: $(a, b) \prec (۲-\sqrt{-ln\alpha}, ۲-\sqrt{-ln\alpha})$

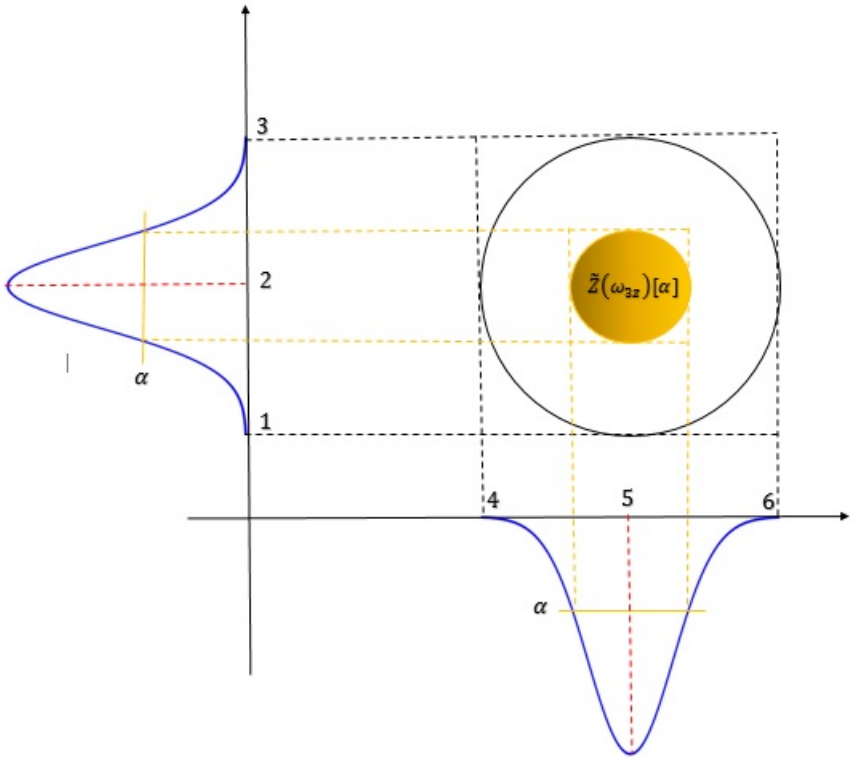
$$\left(\tilde{Z}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty, a], (-\infty, b]) = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \preceq (a, b)\ ;\ (a, b) \prec (\alpha+۱, \alpha+۱)\Big\} = \varnothing \in \mathcal{A}_z.$$

گام دوم: $(a, b) \equiv (۲-\sqrt{-ln\alpha}, ۲-\sqrt{-ln\alpha})$

$$\left(\tilde{Z}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty, a], (-\infty, b]) = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \preceq (a, b)\Big\} = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$



شکل ۴: α-برش $\tilde{Z}(\omega_{3z})$ مثال ۵.۴

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})\Big\}$$

$$= \varnothing \cup \{(\omega_{1x}, \omega_{1y})\} = \{(\omega_{1x}, \omega_{1y})\} \in \mathcal{A}_z.$$

$$۲) \forall (a, b) \in A_۲ \equiv A_۳ \; ; \; A_۲ = \{(x, y) : x, y \geq ۰ \; ,$$

$$d(\underline{۰}, (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})) < d(\underline{۰}, (x, y))$$

$$< d(\underline{۰}, (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}))\}.$$

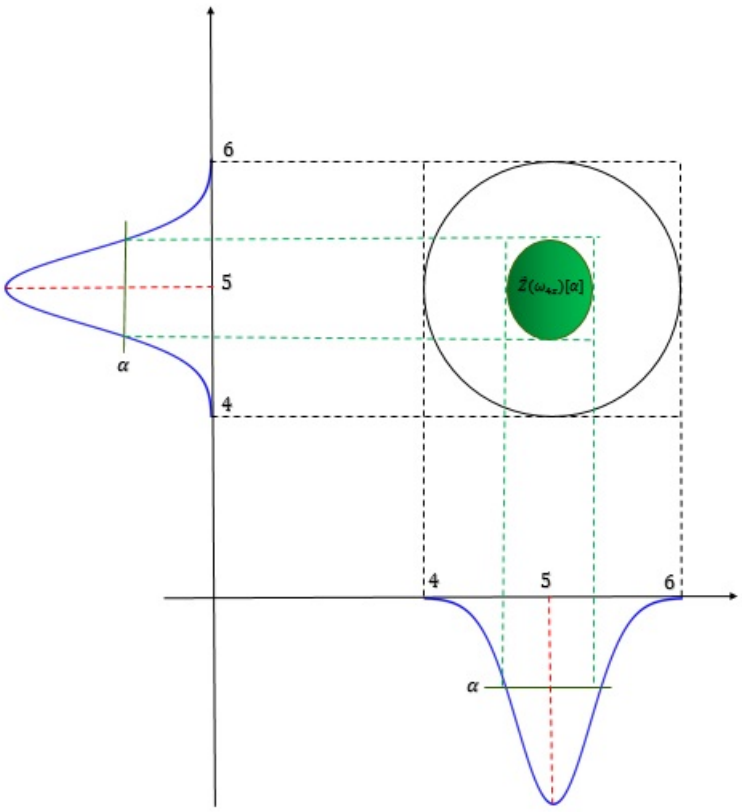
گام اول:

$$(۲-\sqrt{-ln\alpha}, ۲-\sqrt{-ln\alpha}) \prec (a, b) \prec (۲-\sqrt{-ln\alpha}, ۵-\sqrt{-ln\alpha}) \equiv (۵-\sqrt{-ln\alpha}, ۲-\sqrt{-ln\alpha})$$

$$\left(\tilde{Z}_{L,\alpha}\right)^{-۱} ((-\infty, a], (-\infty, b]) = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \preceq (a, b)\} = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا



شکل ۵: α-برش $\tilde{Z}(\omega_{۴z})$ مثال ۵.۴

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$(۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (a, b)\}$$

$$= \varnothing \cup \{(\omega_{۱x}, \omega_{۱y})\} \cup \varnothing = \{(\omega_{۱x}, \omega_{۱y})\} \in \mathcal{A}_z.$$

گام دوم: $(a, b) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}) \equiv (۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$

$$\left(\tilde{Z}_{L,\alpha}\right)^{-۱}((-\infty, a], (-\infty, b]) = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \preceq (a, b)\} = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

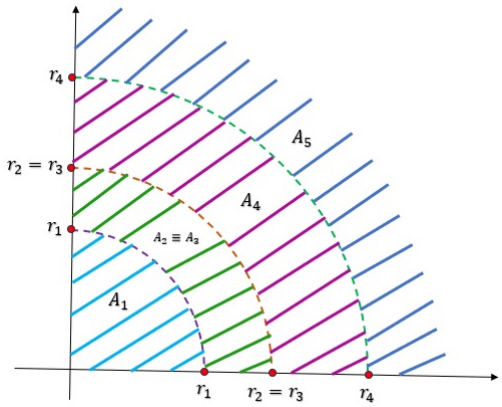
$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$(۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})\}$$

$$= \varnothing \cup \{(\omega_{۱x}, \omega_{۱y})\} \cup \{(\omega_{۱x}, \omega_{۲y}), (\omega_{۲x}, \omega_{۱y})\}$$



شکل ۶: نواحی اثبات اندازه‌پذیری مثال ۵.۴

$$= \{(\omega_{1x}, \omega_{1y}), (\omega_{1x}, \omega_{2y}), (\omega_{2x}, \omega_{1y})\} \in \mathcal{A}_z.$$

۳) $\forall (a, b) \in A_4 \; ; \; A_4 = \{(x, y) : x, y \geq 0 \; ,$

$$d(\underline{0}, (2 - \sqrt{-ln\alpha}, 5 - \sqrt{-ln\alpha})) < d(\underline{0}, (x, y)) < d(\underline{0}, (5 - \sqrt{-ln\alpha}, 5 - \sqrt{-ln\alpha}))\}.$$

گام اول:

$$(2-\sqrt{-ln\alpha}, 5-\sqrt{-ln\alpha}) \equiv (5-\sqrt{-ln\alpha}, 2-\sqrt{-ln\alpha}) \prec (a, b) \prec (5-\sqrt{-ln\alpha}, 5-\sqrt{-ln\alpha})$$

$$\left(\tilde{Z}_{L,\alpha}\right)^{-1}((-\infty, a], (-\infty, b]) = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \preceq (a, b)\} = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (2 - \sqrt{-ln\alpha}, 2 - \sqrt{-ln\alpha}) \text{ یا}$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (2 - \sqrt{-ln\alpha}, 2 - \sqrt{-ln\alpha}) \text{ یا}$$

$$(2 - \sqrt{-ln\alpha}, 2 - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (2 - \sqrt{-ln\alpha}, 5 - \sqrt{-ln\alpha}) \text{ یا}$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (2 - \sqrt{-ln\alpha}, 5 - \sqrt{-ln\alpha}) \text{ یا}$$

$$(2 - \sqrt{-ln\alpha}, 5 - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (a, b)\}$$

$$= \varnothing \cup \{(\omega_{1x}, \omega_{1y})\} \cup \{(\omega_{1x}, \omega_{2y}), (\omega_{2x}, \omega_{1y})\} \cup \varnothing$$

$$= \{(\omega_{1x}, \omega_{1y}), (\omega_{1x}, \omega_{2y}), (\omega_{2x}, \omega_{1y})\} \in \mathcal{A}_z.$$

گام دوم: $(a, b) \equiv (5 - \sqrt{-ln\alpha}, 5 - \sqrt{-ln\alpha})$

$$\left(\tilde{Z}_{L,\alpha}\right)^{-1}((-\infty, a], (-\infty, b]) = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \preceq (a, b)\} = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$(۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$(۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})\}$$

$$= \varnothing \cup \{(\omega_{۱x}, \omega_{۱y})\} \cup \{(\omega_{۱x}, \omega_{۲y}), (\omega_{۲x}, \omega_{۱y})\} \cup \varnothing \cup \{(\omega_{۲x}, \omega_{۲y})\}$$

$$= \{(\omega_{۱x}, \omega_{۱y}), (\omega_{۱x}, \omega_{۲y}), (\omega_{۲x}, \omega_{۱y}), (\omega_{۲x}, \omega_{۲y})\} = \Omega_z \in \mathcal{A}_z.$$

$$۴) \forall (a, b) \in A_۴ \; ; \; A_۴ = \{(x, y) : x, y \geq ۰ \; ,$$

$$d(\underline{۰}, (۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})) < d(\underline{۰}, (x, y))\}\}.$$

گام اول: $(۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec (a, b)$

$$\left(\tilde{Z}_{L,\alpha}\right)^{-۱} ((-\infty, a], (-\infty, b]) = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \preceq (a, b)\} = \{\omega_z = (\omega_x, \omega_y) \in \Omega_z :$$

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$(۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا

$$(۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec$$

$$(۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$$ یا$\tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \equiv (۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha})$ یا

$$(۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}) \prec \tilde{Z}_{L,\alpha}((\omega_x, \omega_y)) \prec (a, b)\}$$

$$= \varnothing \cup \{(\omega_{۱x}, \omega_{۱y})\} \cup \{(\omega_{۱x}, \omega_{۲y}), (\omega_{۲x}, \omega_{۱y})\} \cup \varnothing \cup \{(\omega_{۲x}, \omega_{۲y})\} \cup \varnothing$$

$$= \{(\omega_{۱x}, \omega_{۱y}), (\omega_{۱x}, \omega_{۲y}), (\omega_{۲x}, \omega_{۱y}), (\omega_{۲x}, \omega_{۲y})\} = \Omega_z \in \mathcal{A}_z.$$

لازم به‌ذکر است که در شکل ۶، مقدار $r_۱ = d(\underline{۰}, (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۲ - \sqrt{-ln\alpha}))$، مقادیر $r_۲$ و $r_۳$ باهم برابر و برابر با $d(\underline{۰}, (۲ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}))$ و مقدار $r_۴ = d(\underline{۰}, (۵ - \sqrt{-ln\alpha}, ۵ - \sqrt{-ln\alpha}))$ هستند. همچنین بطور مشابه نیز می‌توان اندازه‌پذیری $\tilde{Z}_{U,\alpha}$ را همانند $\tilde{Z}_{L,\alpha}$ بررسی کرد.

اکنون با استفاده از حاصل ضرب توابع عضویت متغیرهای تصادفی فازی $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ می‌توان تابع عضویت $\tilde{Z}$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}(\omega_{۱z})(z) &= \left(\tilde{X}\times\tilde{Y}\right)((\omega_{۱x},\omega_{۱y}))((x,y)) = \tilde{X}(\omega_{۱x})(x)\times\tilde{Y}(\omega_{۱y})(y)\\
&= exp\left\{-(x-۲)^۲+(y-۲)^۲\right\} \quad (x,y)\in[۱,۳]\times[۱,۳],\\
\tilde{Z}(\omega_{۲z})(z) &= \left(\tilde{X}\times\tilde{Y}\right)((\omega_{۱x},\omega_{۲y}))((x,y)) = \tilde{X}(\omega_{۱x})(x)\times\tilde{Y}(\omega_{۲y})(y)\\
&= exp\left\{-(x-۲)^۲+(y-۵)^۲\right\} \quad (x,y)\in[۱,۳]\times[۴,۶],\\
\tilde{Z}(\omega_{۳z})(z) &= \left(\tilde{X}\times\tilde{Y}\right)((\omega_{۲x},\omega_{۱y}))((x,y)) = \tilde{X}(\omega_{۲x})(x)\times\tilde{Y}(\omega_{۱y})(y)\\
&= exp\left\{-(x-۵)^۲+(y-۲)^۲\right\} \quad (x,y)\in[۴,۶]\times[۱,۳],\\
\tilde{Z}(\omega_{۴z})(z) &= \left(\tilde{X}\times\tilde{Y}\right)((\omega_{۲x},\omega_{۲y}))((x,y)) = \tilde{X}(\omega_{۲x})(x)\times\tilde{Y}(\omega_{۲y})(y)\\
&= exp\left\{-(x-۵)^۲+(y-۵)^۲\right\} \quad (x,y)\in[۴,۶]\times[۴,۶].
\end{aligned}$$

مثال ۶.۴. یک شرکت دولتی مقرر کرده‌است که اگر کارمندان این شرکت تا ۷۰ ساعت اضافه‌کاری بایستند، به اندازه‌ی $\tilde{۵}+i$ دلار و اگر بیشتر از ۷۰ ساعت اضافه‌کاری بایستند، به‌اندازه‌ی $\tilde{۶}+i$ دلار اضافه‌حقوق دریافت می‌کنند. همچنین اگر کارمندان تا ۷۰ ساعت در ماه کار کرده‌باشند، $\tilde{۵}+i$ دلار و اگر بیشتر از ۷۰ ساعت در ماه کار کرده‌باشند دراین $\tilde{۶}+i$ دلار پاداش می‌گیرند. در این حالت مشابه مثال ۵.۴، به راحتی می‌توان نشان داد که تابع اضافه‌حقوق کارمندان این شرکت که تابعی از دو متغیر تصادفی فازی ذکر شده‌است، تحت σ-میدان $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ که در آن

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{\varnothing,\Omega,\{\omega\in\Omega:\omega=i\ ;\ i=۱,۲,\cdots ۷۰\}\\
&\quad ,\{\omega\in\Omega:\omega=i\ ;\ i=۷۱,۷۲,\cdots\}\},
\end{aligned}$$

است، متغیر تصادفی فازی دوبعدی می‌باشد. اکنون می‌توان به روش شبیه‌سازی از بین اعداد ۱ تا ۲۰۰ دوسری نمونه تصادفی ۲۰ تایی تولید کرد و تابع توزیع تجربی که برآوردی برای تابع توزیع تجمعی است را برای مقادیر ذکرشده در زیر بدست آورد و آن را رسم کرد

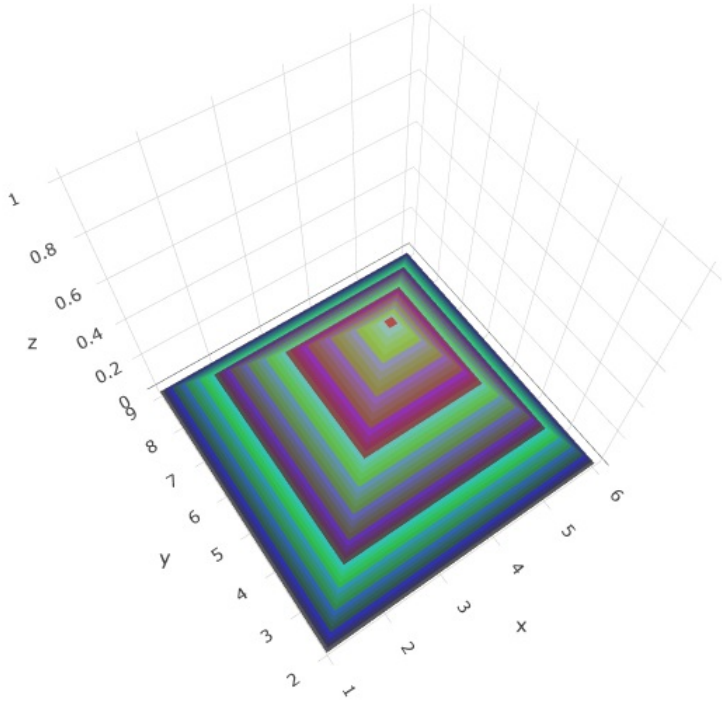
$$u = ۱۹۵,۱۴۷۶,۸۲۵,۴۹۰,۱۹۹۹,۵۱۲,۷۲۵,۶۲۴,۱۰۰۰,۸۷۴$$
$$v = ۹۰,۱۳۶۹,۵۷۲,۳۹۶,۱۴۵۲,۱۲۵,۸۱۵,۳۵۱,۱۲۰۰,۷۲۰$$

مقادیر تابع توزیع تجربی توام برای دو بردار u و v به‌صورت زیر است

۰/۰۰ ۱/۰۰ ۰/۴۰ ۰/۲۰ ۱/۰۰ ۰/۰۵ ۰/۵۰ ۰/۱۵ ۰/۹۰ ۰/۵۰

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله تلاش براین بود تا متغیر تصادفی فازی دوبعدی با استفاده از دو متغیر تصادفی فازی تعریف شود. برای این منظور به تعریف اندازه‌پذیری چندبعدی نیاز داشتیم که آن در ابتدای امر تعریف شد. سپس α-برش‌ها و تابع عضویت آن متغیر تصادفی فازی دوبعدی را با استفاده از α-برش‌ها و توابع عضویت مربوط به آن دو متغیر تصادفی فازی محاسبه و برای درک هرچه بهتر مطالب، چندین مثال ذکر شد. لازم‌به ذکر است که می‌توان خواص و ویژگی‌های متغیر تصادفی فازی دوبعدی را باتوجه‌به تعریف مطرح‌شده در این مقاله بررسی کرد که به‌دلیل زیاد شدن حجم مطالب این مقاله، انجام این‌کار در پژوهشی دیگر توسط نویسندگان همین مقاله، درحال انجام است.



شکل ۷: تابع توزیع تجربی توام ۶.۴

فهرست منابع

[۱] دولت‌زاده، بنیتا، عرب‌پور، علیرضا، ماشین‌چی، ماشاالله و شیخی، ایوب ۱۴۰۰. متغیرهای تصادفی توام فازی وابسته براساس α-بدبینانه. اندیشه آماری، ۲۶(۲)، صص. ۸۱ - ۸۷.

[2] Billingsley, P., 1986. Probability and Measure. *(second edition),The University of Chicago, Copyright by John Wiley & Sons, Inc*.

[3] Fuente, De. la., Alonso, M. and Pedro, T., 2021. Jointly Measurability of Mappings Induced by a Fuzzy Random Variable. *Fuzzy Sets and Systems*, 26)2,(pp.92-104. doi: 10.1016/j.fss.2020.10.007

[4] Gut, A., 2013. Probability: A Graduate Course. *Springer Texts in Statistics*. doi: 10.1007/978-1-4614-4708-5

[5] Gil, M. A., Lopez Diaz, M. and Ralescu, D. A., 2006. Overview on the Development of Fuzzy Random Variables. *Fuzzy Set and Systems*, 157)19,(pp.2546-2557. doi: 10.1016/j.fss.2006.05.002

[6] Hesamian, G. and Chachi, J., 2017. On similarity measures for fuzzy sets with applications to pattern recognition, decision making, clustering, and approximate reasoning *13th Iranian Statistics Conference Shahid Bahonar University of Kerman*, pp.167-173. www.jus.org.uk

[7] Kratschmer, V., 2001. A unified approach to fuzzy random variables. *Fuzzy Sets and Systems, © 2001 Elsevier Science*, 123, pp.1-9. doi: 10.1016/S0165-0114)00(00038-5

[8] Kwakernaak, H., 1978. Fuzzy Random Variabhs-I. Definitions and Theorems. *Information Sciences*, 15, pp.1-29. doi: 10.1016/0020-0255)78(90019-1

[9] Li, X. and Liu, B., 2006. New independence definition of fuzzy random variable and random fuzzy variable. *World Journal of Modelling and Simulation*, 2)5,(pp.338-342.

[10] Liu, B., 2003. Uncertainty Theory. *Springer Uncertainty Research*, Fourth Edition. http://orsc.edu.cn/liu

[11] Liu, Y. K. and Gao, J. 2007. The Independence of Fuzzy Variable with Applications to Fuzzy Random Optimization *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, pp.1-20. doi: 10.1142/S021848850700456X

[12] Liu, Y. K. and Liu, B., 2003. Fuzzy Random Variables: A Scalar Expected Value Operator. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, pp.143-160. doi: 10.1023/A:1023447217758

[13] Nelsen, R. B. 2006. An Introduction to Copulas. *Springer Series in Statistics* , Second Edition. doi: 10.1007/0-387-28678-0

[14] Nguyen, H. T., Walker, C. L. and Walker, E. A. A First Course in Fuzzy Logic. *(fourth edition), Chapman & Hall, Springer, Berlin Heidelberg, NewYork*. https://lccn.loc.gov/2018037949

[15] Peng, J., Liu, B, 2004. Some properties of optimistic and pessimistic values of fuzzy variables. *International Conference on Fuzzy Systems*. doi: 10.1109/FUZZY.2004.1375493

[16] Puri, M. L. and Ralescu, D. A., 1986. Fuzzy Random Variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications Information Sciences*, 114, pp.409-422. doi: 10.1016/0022-247X(86(90093-4

[17] Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M., 2010. Real Analysis, *fourth edition*.

[18] Shams, M. and Hesamian, Gh., 2018. Sign Test for Fuzzy Random Variables. *Journal of Algorithms and Computation*, 2)50,(pp.121-139. http://jac.ut.ac.ir

[19] Shapiro, A. F., 2009. Fuzzy random variables. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44, pp.307-314. doi: 10.1016/j.insmatheco.2008.05.008

[20] Viertl, R., 2011. Statistical Methods for Fuzzy Data. *A John Wiley and Sons, Ltd., Publication*. doi: 10.1002/9780470974414

[21] Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8)3,(pp.338-353. doi: 10.1016/S0019-9958)65(90241-X

Two-dimensional Fuzzy Random Variable

Benita Dowlatzadeh[(1)] [2] Alireza Arabpour[(1)], Mashallah Mashinchi[(1)] and Ayyub Sheikhi[(1)]

[(1)] Department of Statistics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran

Communicated by: Hamzeh Torabi

Received: 4 July 2024 Accepted: 22 November 2025

Abstract: In this article, we intend to give a definition for fuzzy random variable according to the definition of fuzzy random variable based on the beginning and end of α-cuts of a fuzzy convex set and using the concept of measurability, and the membership function of two-dimensional fuzzy random variables. Using the membership functions related to two random variables, we obtain two-dimensional fuzzy random variables. Finally, for a better understanding of the mentioned concepts and materials, we give examples at the end of each section.

Keywords: Measurable space, α-cut, Membership function,Fuzzy random variable, Jointly fuzzy random variable.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (B. Dowlatzadeh) mahramaneh_90@yahoo.com