مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۲۰–۴۰

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2025.48072.2316

یک روش عددی موثر برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با مشتق تعدیل شده کاپوتو

محمدحسین حیدری [1] * ، **رضوان زارعی** [2]

[1,2] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۰۷
دبیر مسئول: سهراب عفتی

چکیده: در این مقاله، یک رده مهم از معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با مشتق کسری تعدیل شده کاپوتو معرفی می‌گردد. برای حل این معادلات، یک روش عددی بر اساس چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان پیشنهاد گردید. به‌منظور پیاده سازی این روش، یک فرمول صریح برای محاسبه ماتریس عملگر انتگرال کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل متناظر با این چندجمله‌ای‌ها به‌دست آمده است. در روش پیشنهادی، با تقریب عبارت کسری مساله برحسب چندجمله‌ای‌های بیان شده، به کارگیری ماتریس عملگر انتگرال کسری این چندجمله‌ای‌ها و با استفاده از روش هم‌محلی، حل معادله مورد مطالعه به حل یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل می‌شود. با حل این دستگاه، یک جواب تقریبی برای معادله تحت بررسی به‌دست می‌آید. به منظور بررسی دقت و کارایی روش پیشنهاد شده، چند مثال عددی مورد مطالعه قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان، ماتریس عملگر انتگرال کسری، مشتق کسری تعدیل شده.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، حسابان کسری توجه زیادی از پژوهشگران در رشته‌های مختلف علوم و مهندسی را به خود جلب کرده است. مزیت اصلی حسابان کسری، توانایی مشتقات و انتگرال‌های کسری در به تصویر کشیدن ویژگی‌های غیرمحلی می‌باشد که امکان درک عمیق‌تری از سیستم‌های پیچیده را فراهم می‌کند. معادلات انتگرال، دیفرانسیل و دیفرانسیل-انتگرال کسری کاربردهای متنوعی در مدل‌سازی مسایل علمی پیدا کرده‌اند. برخی از کاربردهای معادلات

* محمدحسین حیدری
رایانامه: heydari@sutech.ac.ir (M. H. Heydari), rz.zarei@sutech.ac.ir (R. zarei),

دیفرانسیل-انتگرال کسری شامل مدل‌سازی انتقال حرارت در مواد با خواص فراکتالی [۵]، دینامیک راکتورهای هسته‌ای [۴]، امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های دی‌الکتریک [۹] و قطبش دی‌الکتریکی [۲۰] است. این کاربردها تنوع این معادلات را در پردازش پدیده‌های پیچیده در زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی نشان می‌دهند.
در سال‌های اخیر، تلاش‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با در نظر گرفتن مشتق‌های کسری و توابع پایه‌ای مختلف صورت گرفته است. نویسندگان در [۷]، یک روش هم‌محلی عددی بر اساس توابع کلاهی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با مشتق کاپوتو-هادامارد پیشنهاد می‌دهند. یک روش موجک بر اساس موجک کاردینال چبیشف توسعه یافته در [۸] برای حل یک دسته از معادلات دیفرانسیل- انتگرال کسری شامل مشتق ψ- کاپوتو ارایه شده است. نویسندگان در [۳]، یک روش عددی بر اساس چندجمله‌ای‌های برنشتاین [†] کسری برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با مشتق کاپوتو پیشنهاد می‌دهند. با به‌کارگیری روش ترکیبی بر اساس روش حداقل مربعات و چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر در [۱۰]، به حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری پرداخته شده است. با در نظر گرفتن روش توابع کلاهی درجه چهار در [۲۳]، یک روش عددی جدید برای حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری پیشنهاد شده است. در مقاله [۲۵]، نویسنده با به‌کارگیری روش چندجمله‌ای‌های بل [‡] به حل و بررسی یک دسته از معادلات دیفرانسیل- انتگرال کسری شامل مشتق ψ- کاپوتو پرداخته است. نویسندگان در [۱]، یک روش توابع بلاک پالس برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با مشتق آتانگانا-بالینو پیشنهاد می‌دهند. در تحقیق [۲۶]، با به‌کار گیری روش هم‌محلی موجک‌های هان یک روش عددی جدید برای حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری پیشنهاد شده است.
با توجه به اینکه مطالعه خیلی کمی بر روی موضوع معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با مشتق تعدیل شده کاپوتو و روش‌های عددی آنها انجام شده است، در این مقاله یک رده مهمی از این نوع معادلات را معرفی و یک روش عددی مناسب برای حل آنها ارایه می‌دهیم.
بنابراین معادلات دیفرانسیل-انتگرال غیرخطی به فرم

$$\begin{cases} {}_0^C\mathbf{D}_x^{\alpha,\lambda}u(t) = f(x) + \displaystyle\int_0^x k\left(x,s,u(s)\right)ds, \quad m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{Z}^+, \\ \dfrac{d^k}{dx^k}\left(e^{\lambda x}u(x)\right)\Big|_{x=0} = a_k \quad k=0,1,\ldots,\hat{m}-1. \end{cases} \tag{۱.۱}$$

را روی دامنه $[0,X]$ در معرفی می کنیم به طوری که k تابعی پیوسته روی دامنه تعریفش باشد. در این‌جا $f\in L^2([0,X])$ تابعی معلوم و a_k ها اعدادی ثابت می‌باشند.
امروزه از چندجمله‌ای‌های متعامد به عنوان توابع پایه‌ای مناسب برای حل مسایل کسری استفاده می‌شود. این توابع دارای دو ویژگی مهم، دقت طیفی و حجم محاسباتی کم می‌باشند. ماتریس‌های مشتق معمولی و کسری برای چندجمله‌ای‌های متعامد را به راحتی می‌توان به‌دست آورد که در روش‌های عددی با جایگزینی در مساله اصلی، سیستمی شامل معادلات جبری به‌دست می‌آید که به‌راحتی قابل حل است. چند جمله‌ای‌های متعامد به دو گروه جمله‌ای‌های پیوسته و گسسته طبقه‌بندی می‌شوند. با این حال، ما می‌توانیم یک تابع معین را بر حسب جمله‌ای‌های پیوسته یا گسسته تقریب بزنیم، تفاوت قابل توجهی در یافتن ضرایب هر بسط وجود دارد. ضرایب در یک بسط با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد پیوسته با انتگرال‌گیری محاسبه می‌شوند، در حالی‌که این ضرایب با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد گسسته با یک سری متناهی محاسبه می‌شوند. از چندجمله‌ای‌های گسسته می‌توان به چند جمله‌ای‌های گسسته لژاندر، چبیشف، هان و غیره نام برد. در این مقاله، از چندجمله‌ای‌های گسسته انتقال‌یافته هان به عنوان توابع پایه‌ای استفاده می‌شود.
هدف ارایه یک روش عددی موثر برای حل این رده از معادلات دیفرانسیل-انتگرال می‌باشد. یکی از استراتژی‌های رایج که می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری استفاده کرد، در نظر گرفتن یک بسط سری متناهی (با ضرایب مجهول) بر اساس توابع پایه‌ای برای حل مساله و سپس یافتن ضرایب بسط است. یک خانواده مناسب از توابع پایه‌ای که در این زمینه مفید است، چندجمله‌ای‌های گسسته هستند. این انتخاب به دلیل آن است که محاسبات مربوط به جملات غیرخطی در این حالت کمتر است و ضرایب بسط تابع معلوم مساله نیز به‌سادگی با محاسبه یک سری

[†] Bernstein
[‡] Bell

متناهی به‌دست می‌آید. علاوه بر این، در بسیاری از موارد، روش‌های عددی مبتنی بر این چندجمله‌ای‌ها دارای دقت طیفی (نمایی) هستند. در این مقاله از چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان به منظور توسعه یک روش عددی برای حل مساله (۱.۱) استفاده می‌شود. ساختار و چارچوب کلی این مقاله به این شرح است: در بخش ۲ مقدماتی از حسابان کسری بیان می‌گردد. در بخش ۳ وجود و یکتایی یک جواب منحصر بفرد برای مساله بیان شده در رابطه (۱.۱)، بررسی می‌شود. در بخش ۴ به معرفی چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان پرداخته می‌شود. در بخش ۵ ماتریس عملگر انتگرال کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل این چندجمله‌ای‌ها محاسبه می‌شود. بخش ۶ به توصیف روش پیشنهاد شده می‌پردازد. در بخش ۷ به بیان همگرایی روش ارایه شده پرداخته می‌شود. دقت و کارآیی روش پیشنهادی با ذکر چند مثال عددی در بخش ۸ بررسی می‌شود. در نهایت بخش ۹ مقاله با نتیجه‌گیری خاتمه می‌یابد.

۲ مقدماتی از حسابان کسری

در این بخش، به معرفی تعدادی از تعاریف اولیه مربوط به حسابان کسری می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲. ([۱۸]) تابع u را روی بازه $[a,b] \subset \mathbb{R}$ به طور مطلق پیوسته گویند هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ چنان یافت شود که برای هر مجموعه متناهی از زیر بازه‌های دو به دو بدون اشتراک $[a_k, b_k] \subset [a,b]$ اگر $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ باشد، آنگاه نامساوی $\sum_{k=1}^{n} |u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon$ برقرار باشد. فضای توابع به‌طور مطلق پیوسته روی بازه $[a,b]$ را با $AC([a,b])$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۲. ([۱۸]) فرض کنید $[a,b] \subset \mathbb{R}$. فضای $AC^n([a,b])$ شامل تمام توابع u است که دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه $n-1$ روی $[a,b]$ بوده و مشتق مرتبه $(n-1)$ام آن‌ها به‌طور مطلق پیوسته باشد. به‌عبارت دیگر داریم

$$AC^n([a,b]) = \left\{ u : [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} u(x) \in AC([a,b]) \right\}.$$

تعریف ۳.۲. ([۲۴]) فرض کنید $u \in AC([a,b])$ باشد. در این صورت عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$ {}^{RL}_{a}I^{\alpha}_{x} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} u(s) ds, \tag{۱.۲}$$

که در آن $\Gamma(.)$ تابع گاما می‌باشد.

تعریف ۴.۲. ([۱۹]) فرض کنید $u \in AC([a,b])$، $\alpha > 0$ و $\lambda \geq 0$. در این‌صورت عملگر انتگرال کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} {}^{RL}_{a}I^{\alpha,\lambda}_{x} u(x) &= e^{-\lambda x} \, {}^{RL}_{a}I^{\alpha}_{x} \left(e^{\lambda x} u(x) \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x e^{-\lambda(x-s)} (x-s)^{\alpha-1} u(s) ds. \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

تعریف ۵.۲. ([۱۲، ۲۸]) فرض کنید $n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{Z}^+$، $u \in AC^n([a,b])$ و $\lambda \geq 0$. در این صورت عملگر مشتق کسری تعدیل شده کاپوتو از مرتبه α به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} {}^{C}_{a}D^{\alpha,\lambda}_{x} u(x) &= e^{-\lambda x} \, {}^{C}_{a}D^{\alpha}_{x} \left(e^{\lambda x} u(x) \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-s)^{n-1-\alpha} \frac{d^n}{ds^n} \left(e^{\lambda s} (u(s)) \right) ds. \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

خاصیت ۶.۲. ([۱۲، ۱۶، ۲۴]) فرض کنید $u \in AC^n([a,b])$ و $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}^+$. در این‌صورت روابط زیر بین مشتق کسری تعدیل شده کاپوتو و انتگرال کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل برقرار است

$$ {}^{RL}_{a}I_x^{\alpha,\lambda}\left({}^{C}_{a}D_x^{\alpha,\lambda}u\left(x\right)\right) = u(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}(x-a)^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(e^{\lambda x}u(x))\Big|_{x=a}\right], \qquad (۴.۲) $$

و

$$ {}^{C}_{a}D_x^{\alpha,\lambda}\left({}^{RL}_{a}I_x^{\alpha,\lambda}u\left(x\right)\right) = u(x). \qquad (۵.۲) $$

۳ وجود و یکتایی جواب

در این بخش به بررسی وجود و یکتایی یک جواب یکتا برای معادله دیفرانسیل-انتگرال بیان شده در رابطه (۱.۱)، می پردازیم. ابتدا برخی از مقدمات لازم در این زمینه را معرفی می‌کنیم.

لم ۱.۳. فرض کنید $u : [0,X] \to \mathbb{R}$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت انتگرال کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ تابع u در رابطه زیر صدق می‌کند

$$ \left\| {}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}u\left(x\right)\right\|_\infty \leq \frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|u\right\|_\infty \triangleq M_1\left\|u\right\|_\infty. $$

اثبات. به توجه به تعریف انتگرال کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل، داریم

$$ \begin{aligned} \left| {}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}u\left(x\right)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-\lambda(x-s)}(x-s)^{\alpha-1}u(s)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-\lambda(x-s)}(x-s)^{\alpha-1}\left|u\right|ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-\lambda(x-s)}(x-s)^{\alpha-1}\left\|u\right\|_\infty ds \\ &= \frac{\left\|u\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x e^{-\lambda(x-s)}(x-s)^{\alpha-1}ds. \end{aligned} $$

هم‌چنین با توجه به این‌که $e^{-\lambda(x-s)}$ تابعی نزولی است، از رابطه بالا به‌دست می‌آوریم

$$ \begin{aligned} \left| {}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}u\left(x\right)\right| &\leq \frac{\left\|u\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}ds \\ &= \frac{\left\|u\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left(-\frac{1}{\alpha}(x-s)^\alpha\right)_0^x \\ &= \frac{\left\|u\right\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\alpha}x^\alpha \\ &\leq \frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|u\right\|_\infty. \end{aligned} $$

بنابراین از رابطه فوق نتیجه می‌شود

$$ \left\| {}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}u\left(x\right)\right\|_\infty \leq \frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left\|u\right\|_\infty \triangleq M_1\left\|u\right\|_\infty. $$

□

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

فرض ۲.۳. فرض کنید که تابع پیوسته $k : [0,X]\times[0,X]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در شرط لیپ‌شیتز

$$|k(x,s,u)-k(z,y,g)|\le M_2\,|u-g|\,,\ \forall x,s,z,y\in[0,X],\ u,g\in\mathbb{R}, \tag{۱.۳}$$

صدق می‌کند جایی که M_2 یک عدد ثابت مثبت می‌باشد.

تذکر ۳.۳. بدون از دست دادن کلیات، مساله بیان شده در رابطه (۱.۱) را می‌توان به‌فرم معادل زیر بازنویسی کرد

$$u(x)=\tilde{f}(x)+{}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}\left(\int_0^x k(x,s,u(s))ds\right), \tag{۲.۳}$$

که در آن

$$\tilde{f}(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{a_k}{k!}e^{-\lambda x}x^k+{}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}f(x).$$

معادله انتگرال (۲.۳) را می‌توان به صورت مساله نقطه ثابت $u=\mathcal{A}u$ در نظر گرفت که در آن عملگر $\mathcal{A}:C([0,X])\longrightarrow\mathbb{R}$ برای هر $u\in C([0,X])$ و $x\in([0,X])$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{A}u(x)=\tilde{f}(x)+{}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}\left(\int_0^x k(x,s,u(s))ds\right).$$

بنابراین، هدف به دست آوردن یک نقطه ثابت $u\in C([0,X])$ برای عملگر بالا است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید تابع $k\in C\left([0,X]^2\times\mathbb{R}\right)$ در شرط لیپ‌شیتز (۱.۳) صدق کند. اگر $\frac{M_2}{\Gamma(\alpha+1)}X^\alpha<\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه معادله انتگرال (۲.۳) دارای جواب یکتا است.

اثبات. فرض کنید $\tilde{r}\le 2\left(\|\tilde{f}\|_\infty+\frac{\varrho}{\Gamma(\alpha+1)}X^\alpha\right)$ جایی که $\varrho=\|k(x,s,0)\|_\infty$ است. ثابت می‌کنیم $\mathcal{A}\mathbf{B}_{\tilde{r}}\subset\mathbf{B}_{\tilde{r}}$، جایی که $\mathbf{B}_{\tilde{r}}\equiv\{\tilde{v}\in C\left([0,X]\right):\|\tilde{v}\|_\infty\le\tilde{r}\}$. اکنون فرض کنید $\tilde{v}\in\mathbf{B}_{\tilde{r}}$ باشد. داریم

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}\tilde{v}(x)|&\le|\tilde{f}(x)|+\frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x|k(x,s,\tilde{v}(s))|ds\\
&\le|\tilde{f}(x)|+\frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x\left(|k(x,s,\tilde{v}(s))-k(x,s,0)|+|k(x,s,0)|\right)ds\\
&\le\|\tilde{f}\|_\infty+\frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(M_2\|\tilde{v}\|_\infty+\varrho\right)\\
&\le\|\tilde{f}\|_\infty+\frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}(M_2\tilde{r}+\varrho).
\end{aligned}$$

از رابطه بالا به‌دست می‌آوریم

$$\|\mathcal{A}v\|_\infty<\tilde{r}.$$

بنابراین طبق قضیه نگاشت انقباضی مساله دارای حداقل یک جواب است. اکنون نشان می‌دهیم که این مساله دارای یک جواب یکتا است. برای این منظور فرض کنید که $\tilde{v},\tilde{w}\in C\left([0,X]\right)$ و $x\in[0,X]$ باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}\tilde{v}(x)-\mathcal{A}\tilde{w}(x)|&\le\frac{X^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x|k(x,s,\tilde{v}(s))-k(x,s,\tilde{w}(s))|ds\\
&\le\frac{M_2}{\Gamma(\alpha+1)}X^\alpha\|\tilde{v}-\tilde{w}\|_\infty.
\end{aligned}$$

بنابراین از نتیجه بالا به‌دست می‌آوریم

$$\|\mathcal{A}\tilde{v}(x) - \mathcal{A}\tilde{w}(x)\|_\infty \leq \frac{M_2}{\Gamma(\alpha+1)} X^\alpha \|\tilde{v} - \tilde{w}\|_\infty.$$

با توجه به این که $\frac{M_2}{\Gamma(\alpha+1)} X^\alpha < \frac{1}{2}$ است، اثبات ادعای بیان شده با استفاده از اصل نگاشت انقباضی کامل می‌شود. یعنی مساله دارای یک جواب یکتا است. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

۴ چندجمله‌ای متعامد هان

در این بخش ابتدا به معرفی چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان پرداخته می‌شود. سپس ماتریس عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل این چندجمله‌ای‌ها محاسبه می‌شود. در پایان نیز با استفاده از این ماتریس، ماتریس عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل تعدیل شده بدست می‌آید.

۱.۴ چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان

چندجمله‌ای‌های هان[§] دسته‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که توسط ولفگانگ هان[¶] معرفی شده‌اند [۲۲]. در ادامه به معرفی این چندجمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌های مرتبط با آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴. ([۲]) نماد پوکهامر[‖] $(\varpi)_k$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}&(\varpi)_0 = 1,\\ &(\varpi)_k = \varpi\,(\varpi+1)\,(\varpi+2)\ldots(\varpi+k-1), \quad k \in \mathbb{N},\ \varpi \in \mathbb{C},\ \Re(\varpi) > 0.\end{aligned}$$

تعریف ۲.۴. ([۲]) اعداد استرلینگ** نوع اول به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$S_k^{(i)} = \sum_{r=0}^{k-i} (-1)^r \binom{k+r-1}{k+r-i} \binom{2k-i}{k-r-i} s_{k+r-i}^{(r)}, \quad k,i,r \in \mathbb{N},$$

که در آن $s_k^{(i)}$ اعداد استرلینگ نوع دوم می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$s_k^{(i)} = \frac{1}{i!} \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} (i-r)^k.$$

تعریف ۳.۴. ([۱۱]) فرض کنید $a, b > -1$ اعدادی حقیقی و $M \in \mathbb{Z}^+$ است. چندجمله‌ای هان $h_i(x,a,b,M)$ از درجه i برای $i = 0,1,\ldots,M$ روی بازه $[0,M]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h_i(x,a,b,M) = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-i)_k (i+a+b+1)_k (-x)_k}{(a+1)_k (-M)_k k!}. \tag{۱.۴}$$

خاصیت ۴.۴. ([۱۱]) چندجمله‌ای‌های هان نسبت به ضرب داخلی گسسته زیر متعامد می‌باشند

$$< u, v >= \sum_{k=0}^{M} u(k) v(k) w(k),$$

[§] Hahn
[¶] Wolfgang Hahn
[‖] Pochhammer
** Stirling

که در آن تابع وزن $w(k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$w(k) = \binom{a+k}{k}\binom{M+b-k}{M-k}.$$

تذکر ۵.۴. ([۶]) توجه داشته باشید که عدد $(-x)_k$ در رابطه (۱.۴) را می‌توان به صورت زیر نیز محاسبه کرد

$$(-x)_k = (-1)^k \sum_{n=0}^{k} S_k^{(n)} x^n.$$

نتیجه ۶.۴. طبق تعریف ۳.۴ و تذکر ۵.۴، داریم

$$h_i(x,a,b,M) = \sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}(-1)^k \frac{(-i)_k(i+a+b+1)_k}{(a+1)_k(-M)_k k!} S_k^{(n)} x^n.$$

تعریف ۷.۴. ([۶، ۲۲]) با انتقال بازه $[-1,1]$ به $[0,X]$، چندجمله‌ای‌های انتقال‌یافته هان به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\bar{h}_i(x,a,b,M) = \sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}(-1)^k \frac{(-i)_k(i+a+b+1)_k}{(a+1)_k(-M)_k k!} \left(\frac{M}{X}\right)^n S_k^{(n)} x^n,$$

برای $i = 0, 1, \ldots, M$.

تعریف ۸.۴. ([۶]) چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان روی بازه $[0,X]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} h_i^*(x,a,b,M) &= \frac{1}{\sqrt{\mu(i,a,b,M)}} \sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}(-1)^k \frac{(-i)_k(i+a+b+1)_k}{(a+1)_k(-M)_k k!} \left(\frac{M}{X}\right)^n S_k^{(n)} x^n \\ &\triangleq \sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k} b_{i,k,n} x^n,\ i = 0,1,\ldots,M, \end{aligned} \tag{۲.۴}$$

که در آن

$$\mu(i,a,b,M) = \frac{(-1)^i (i+a+b+1)_{M+1}(b+1)_i i!}{(2i+a+b+1)(a+1)_i(-M)_i M!},$$

و

$$b_{i,k,n} = \frac{1}{\sqrt{\mu(i,a,b,M)}}(-1)^k \frac{(-i)_k(i+a+b+1)_k}{(a+1)_k(-M)_k k!} \left(\frac{M}{X}\right)^n S_k^{(n)}.$$

هر تابع $u \in L_w^2([0,X])$ را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان به صورت زیر تقریب زد

$$u(x) \simeq \sum_{i=0}^{M} u_i h_i^*(x,a,b,M), \tag{۳.۴}$$

که در آن

$$u_i = \sum_{r=0}^{M} u\left(\frac{X}{M}r\right) h_i^*\left(\frac{X}{M}r,a,b,M\right) w(r).$$

توجه داشته باشید که رابطه (۳.۴) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نیز نوشت

$$u(x) \simeq U^T H_M^{(X)}(x),$$

که در آن

$$U = [u_0, u_1, \ldots, u_M]^T,$$

و

$$H_M^{(X)}(x) = [h_0^*(x,a,b,M), h_1^*(x,a,b,M), \ldots, h_M^*(x,a,b,M)]^T. \quad (۴.۴)$$

به‌طور مشابه هر تابع $u(x,s) \in L_w^2([0,X]^2)$ را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان به صورت زیر تقریب زد

$$\begin{aligned} u(x,s) &\simeq \sum_{i=0}^{M}\sum_{j=0}^{M} \hat{u}_{ij} h_i^*(x,a,b,M) h_j^*(s,a,b,N) \\ &\triangleq \left(H_M^{(X)}(x)\right)^T \hat{U} H_M^{(X)}(s), \end{aligned}$$

که $\hat{U} = [\hat{u}_{ij}]$ یک ماتریس $(M+1)\times(M+1)$ بعدی با درایه‌های زیر می‌باشد

$$\hat{u}_{ij} = \sum_{r=0}^{M}\sum_{l=0}^{M} u\left(\frac{X}{M}r, \frac{X}{M}l\right) h_i^*\left(\frac{X}{M}r, a, b, M\right) h_j^*\left(\frac{X}{M}l, a, b, M\right) w(r)w(l),$$

برای $i,j = 0,1,\ldots,M$.

۵ ماتریس عملگر انتگرال کسری

در این بخش، روش محاسبه ماتریس‌های عملگرهای انتگرال کسری ریمان-لیوویل و ریمان-لیوویل تعدیل شده برای چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان، توضیح داده می‌شود. این ماتریس‌ها محاسبات مربوط به روش‌های پیشنهادی بر اساس این چندجمله‌ای‌ها را برای حل معادلات مورد بررسی کاهش می‌دهند.

قضیه ۱.۵. فرض کنید $\alpha > 0$ یک عدد حقیقی معین باشد. در این صورت انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه α از بردار $H_M^{(X)}(x)$، تعریف شده در رابطه (۴.۴)، به صورت زیر قابل بیان می‌باشد

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha} H_M^{(X)}(x) \simeq \mathbf{P}_M^{(\alpha)} H_M^{(X)}(x) \quad (۱.۵)$$

که در آن $\mathbf{P}_M^{(\alpha)} = [p_{ij}^{(\alpha)}]$ و

$$p_{ij}^{(\alpha)} = \sum_{r=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k} \frac{n!\, b_{i,k,n}}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{X}{M}r\right)^{n+\alpha}\right) h_j^*\left(\frac{X}{M}r, a, b, M\right) w(r),$$

برای $i,j = 0,1,\ldots,M$.

اثبات. با توجه به رابطه (۲.۴) و خاصیت ۶.۲، به‌دست می‌آوریم

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha} h_i^*(x,a,b,M) = \sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k} \frac{n!\, b_{i,k,n}}{\Gamma(n+\alpha+1)} x^{n+\alpha}. \quad (۲.۵)$$

بنابراین از رابطه بالا و تعریف بردار $H_M^{(X)}(x)$، داریم

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha} H_M^{(X)}(x) = \left[{}_a^{RL}I_x^{\alpha} h_0^*(x,a,b,M), {}_a^{RL}I_x^{\alpha} h_1^*(x,a,b,M), \ldots, {}_a^{RL}I_x^{\alpha} h_M^*(x,a,b,M)\right]^T.$$

مولفه‌های بردار بالا را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان به صورت زیر تقریب زد

$$ {}_{a}^{RL}I_{x}^{\alpha}h_{i}^{*}\left(x,a,b,M\right)\simeq\sum_{j=o}^{M}p_{ij}^{(\alpha)}h_{j}^{*}\left(x,a,b,M\right), $$

که در آن

$$ p_{ij}^{(\alpha)}=\sum_{r=0}^{M}\left({}_{a}^{RL}I_{x}^{\alpha}h_{i}^{*}\left(x,a,b,M\right)\right)\Big|_{x=\frac{X}{M}r}h_{j}^{*}\left(\frac{X}{M}r,a,b,M\right)w\left(r\right). $$

طبق نتیجه به‌دست آمده از رابطه بالا و در نظر گرفتن رابطه (۲.۵)، داریم

$$ p_{ij}^{(\alpha)}=\sum_{r=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}\frac{n!b_{i,k,n}}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{X}{M}r\right)^{n+\alpha}\right)h_{j}^{*}\left(\frac{X}{M}r,a,b,M\right)w\left(r\right). $$

بنابراین داریم

$$ {}_{a}^{RL}I_{x}^{\alpha}H_{M}^{(X)}(x)\simeq\begin{bmatrix}p_{00}^{(\alpha)} & p_{01}^{(\alpha)} & \cdots & p_{0M-1}^{(\alpha)} & p_{0M}^{(\alpha)}\\ p_{10}^{(\alpha)} & p_{11}^{(\alpha)} & \cdots & p_{1M-1}^{(\alpha)} & p_{1M}^{(\alpha)}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ p_{M0}^{(\alpha)} & p_{M1}^{(\alpha)} & \cdots & p_{MM-1}^{(\alpha)} & p_{MM}^{(\alpha)}\end{bmatrix}H_{M}^{(X)}(x)\triangleq\mathbf{P}_{M}^{(\alpha)}H_{M}^{(X)}(x). $$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

ماتریس $\mathbf{P}_{M}^{(\alpha)}$ را ماتریس عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه α چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان می‌نامیم.

قضیه ۲.۵. برای بردار $H_{M}^{(X)}(x)$ تعریف شده در رابطه (۴.۴) و عدد حقیقی $\lambda\geqslant 0$، روابط زیر برقرار است

$$ e^{\lambda x}H_{M}^{(X)}(x)\simeq\mathbf{Q}_{M}^{(\lambda)}H_{M}^{(X)}(x), \tag{۳.۵} $$

و

$$ e^{-\lambda x}H_{M}^{(X)}(x)\simeq\mathbf{K}_{M}^{(\lambda)}H_{M}^{(X)}(x), \tag{۴.۵} $$

که در آن $\mathbf{Q}_{M}^{(\lambda)}=[q_{ij}^{(\lambda)}]$ و $\mathbf{K}_{M}^{(\lambda)}=[k_{ij}^{(\lambda)}]$ به طوری‌که

$$ q_{ij}^{(\lambda)}=\sum_{r=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}b_{i,k,n}e^{\lambda\frac{X}{M}r}\left(\frac{X}{M}r\right)^{n}\right)h_{j}^{*}\left(\frac{X}{M}r,a,b,M\right)w\left(r\right), $$

و

$$ k_{ij}^{(\lambda)}=\sum_{r=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}b_{i,k,n}e^{-\lambda\frac{X}{M}r}\left(\frac{X}{M}r\right)^{n}\right)h_{j}^{*}\left(\frac{X}{M}r,a,b,M\right)w\left(r\right), $$

برای $i,j=0,1,\ldots,M$.

اثبات. طبق رابطه (۲.۴)، داریم

$$ e^{\lambda x}h_{i}^{*}\left(x,a,b,M\right)=\sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}b_{i,k,n}e^{\lambda x}x^{n}, $$

و در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$e^{\lambda x}H_M^{(X)}(x)=\left[e^{\lambda x}h_0^*\left(x,a,b,M\right),e^{\lambda x}h_1^*\left(x,a,b,M\right),\ldots,e^{\lambda x}h_M^*\left(x,a,b,M\right)\right]^T.$$

مولفه‌های بردار بالا را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان به صورت زیر تقریب زد

$$e^{\lambda x}h_i^*\left(x,a,b,M\right)\simeq\sum_{j=0}^{M}q_{ij}^{(\lambda)}h_j^*\left(x,a,b,M\right),$$

که در آن

$$\begin{aligned}q_{ij}^{(\lambda)}&=\sum_{r=0}^{M}\left(e^{\lambda x}h_i^*\left(x,a,b,M\right)\right)\Big|_{x=\frac{X}{M}r}h_j^*\left(\frac{X}{M}r,a,b,M\right)w\left(r\right)\\&=\sum_{r=0}^{M}\left(\sum_{k=0}^{i}\sum_{n=0}^{k}b_{i,k,n}e^{\lambda\frac{X}{M}r}\left(\frac{X}{M}r\right)^n\right)h_j^*\left(\frac{X}{M}r,a,b,M\right)w\left(r\right).\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$e^{\lambda x}H_M^{(X)}(x)\simeq\begin{bmatrix}q_{00}^{(\alpha)}&q_{01}^{(\alpha)}&\cdots&q_{0M-1}^{(\alpha)}&q_{0M}^{(\alpha)}\\q_{10}^{(\alpha)}&q_{11}^{(\alpha)}&\cdots&q_{1M-1}^{(\alpha)}&q_{1M}^{(\alpha)}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\q_{M0}^{(\alpha)}&q_{M1}^{(\alpha)}&\cdots&q_{MM-1}^{(\alpha)}&q_{MM}^{(\alpha)}\end{bmatrix}H_M^{(X)}(x)\triangleq\mathbf{Q}_M^{(\lambda)}H_M^{(X)}(x).$$

روند اثبات مربوط به ماتریس $\mathbf{K}_M^{(\lambda)}$ به طور مشابه بالا است. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۳.۵. فرض کنید $\alpha>0$ و $\lambda\geq 0$ اعداد حقیقی باشند و $H_M^{(X)}(x)$ بردار تعریف شده در رابطه (۴.۴) باشد. در این صورت انتگرال کسری ریمان-لیوویل تعدیل شده از مرتبه α از بردار $H_M^{(X)}(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha,\lambda}H_M^{(X)}(x)\simeq\mathbf{S}_M^{(\alpha,\lambda)}H_M^{(X)}(x),\qquad(۵.۵)$$

که در آن $\mathbf{S}_M^{(\alpha,\lambda)}$ یک ماتریس مربعی از مرتبه $(M+1)\times(M+1)$ می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mathbf{S}_M^{(\alpha,\lambda)}=\mathbf{Q}_M^{(\lambda)}\mathbf{P}_M^{(\alpha)}\mathbf{K}_M^{(\lambda)},\qquad(۶.۵)$$

به طوری‌که ماتریس‌های $\mathbf{P}_M^{(\alpha)}$، $\mathbf{Q}_M^{(\lambda)}$ و $\mathbf{K}_M^{(\lambda)}$ در قضایای ۱.۵ و ۲.۵ معرفی شده‌اند.

اثبات. طبق تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل تعدیل شده، داریم

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha,\lambda}H_M^{(X)}(x)=e^{-\lambda x}\,{}_a^{RL}I_x^{\alpha}(e^{\lambda x}H_M^{(X)}(x)),$$

که با استفاده از قضیه ۲.۵، داریم

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha,\lambda}H_M^{(X)}(x)\simeq\mathbf{Q}_M^{(\lambda)}e^{-\lambda x}\,{}_a^{RL}I_x^{\alpha}H_M^{(X)}(x),$$

علاوه بر این با اعمال قضیه ۱.۵، رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha,\lambda}H_M^{(X)}(x)\simeq\mathbf{Q}_M^{(\lambda)}\mathbf{P}_M^{(\alpha)}e^{-\lambda x}H_M^{(X)}(x).$$

در نهایت، طبق نتیجه به‌دست آمده از رابطه بالا و قضیه ۲.۵، داریم

$${}_a^{RL}I_x^{\alpha,\lambda}H_M^{(X)}(x)\simeq\mathbf{Q}_M^{(\lambda)}\mathbf{P}_M^{(\alpha)}\mathbf{K}_M^{(\lambda)}H_M^{(X)}(x)\triangleq\mathbf{S}_M^{(\alpha,\lambda)}H_M^{(X)}(x).$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

۶ توصیف روش

در این بخش، با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان یک روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل-انتگرال تعریف شده در رابطه (۱.۱) پیشنهاد می‌دهیم. برای این منظور ابتدا عبارت کسری موجود در این معادله را به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$ {}_0^C D_x^{\alpha,\lambda} u(x) \simeq \sum_{i=0}^{M} u_i h_i^*(x,a,b,M) \triangleq U^T H_M^{(X)}(x), \tag{۱.۶} $$

که در آن

$$ U = [u_0, u_1, \ldots, u_M]^T, $$

بردار ضرایب مجهول و $H_M^{(X)}(x)$ بردار تعریف شده در رابطه (۴.۴) می‌باشد. با انتگرال‌گیری کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل از رابطه (۱.۶) و استفاده از قضیه ۳.۵، رابطه زیر حاصل می‌شود

$$ u(x) \simeq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{k!} e^{-\lambda x} x^k + U^T \mathbf{S}_M^{(\alpha,\lambda)} H_M^{(X)}(x). \tag{۲.۶} $$

سری متناهی در رابطه بالا را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان به صورت زیر تقریب زد

$$ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{k!} e^{-\lambda x} x^k \simeq \sum_{i=0}^{M} v_i h_i^*(x,a,b,M) \triangleq V^T H_M^{(X)}(x), \tag{۳.۶} $$

که در آن

$$ V = [v_0, v_1, \ldots, v_M]^T, $$

برداری معلوم با مولفه‌های زیر به ازای $i = 0, 1, \ldots, M$ می‌باشد

$$ v_i = \sum_{r=0}^{M} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{k!} e^{-\lambda x} x^k \right) \Big|_{x=\frac{X}{M}r} h_i^* \left(\frac{X}{M} r, a, b, M \right) w(r). \tag{۴.۶} $$

با جایگذاری رابطه (۳.۶) در رابطه (۲.۶)، به‌دست می‌آوریم

$$ u(x) \simeq V^T H_M^{(X)}(x) + U^T \mathbf{S}_M^{(\alpha,\lambda)} H_M^{(X)}(x) \triangleq \widetilde{U}^T H_M^{(X)}(x), \tag{۵.۶} $$

که در آن

$$ \widetilde{U} = [\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1 \ldots, \widetilde{u}_M]^T. $$

هم‌چنین تابع $f(x)$ بیان شده در رابطه (۱.۱) را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان به صورت زیر تقریب زد

$$ f(x) \simeq \sum_{i=0}^{M} f_i h_i^*(x,a,b,M) \triangleq F^T H_M^{(X)}(x), \tag{۶.۶} $$

که در آن

$$ F = [f_0, f_1, \ldots, f_M]^T, $$

برداری معلوم با مولفه‌های زیر می‌باشد

$$ f_i = \sum_{r=0}^{M} f\left(\frac{X}{M} r \right) h_i^* \left(\frac{X}{M} r, a, b, M \right) w(r), \quad i = 0, 1, \ldots, M. $$

با جایگذاری روابط (۱.۶)، (۵.۶) و (۶.۶) در رابطه (۱.۱)، به‌دست می‌آوریم

$$U^T H_M^{(X)}(x) \simeq F^T H_M^{(X)}(x) + \int_0^x k\left(x, s, \widetilde{U}^T H_M^{(X)}(s)\right) ds \tag{۷.۶}$$

$$\simeq F^T H_M^{(X)}(x) + \frac{x}{2}\sum_{j=1}^{N} \omega_j k\left(x, z_j, \widetilde{U}^T H_M^{(X)}(z_j)\right), \tag{۸.۶}$$

که در آن z_j و ω_j به ترتیب نقاط گره‌ای و وزن‌های انتگرال‌گیری گاوس لژاندر متناظر با بازه $[0, X]$ می‌باشند. در حقیقت w_j ها همان وزن‌های روش‌های گاوس لژاندر در بازه $[-1, 1]$ می‌باشند و z_j ها نقاط گره‌ای انتقال‌داده شده به صورت $z_j = \frac{X}{2}(x_j + 1)$ می‌باشند به طوری که x_j ها ریشه‌های چندجمله‌ای درجه N لژاندر هستند. با توجه به رابطه بالا، تابع باقیمانده را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد

$$R(x) \triangleq \left(U^T - F^T\right) H_M^{(X)}(x) - \frac{x}{2}\sum_{j=1}^{N} \omega_j k\left(x, z_j, \widetilde{U}^T H_M^{(X)}(z_j)\right) \simeq 0. \tag{۹.۶}$$

با جایگذاری نقاط هم‌محلی $x_r = \frac{X}{M} r,\ r = 0, 1, \ldots, M$ در رابطه بالا یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی با $(M+1)$ معادله حاصل می‌شود که با حل آن مولفه‌های بردار U به‌دست می‌آیند. در نهایت با قرار دادن این بردار در رابطه (۵.۶) یک جواب تقریبی برای مساله به‌دست می‌آید.

۷ همگرایی

در این بخش یک کران بالا برای خطای حاصل از روش عددی ارایه شده در بخش قبل، به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱.۷. فرض کنید $\Lambda_M = span\{h_0^*(x,a,b,M), h_1^*(x,a,b,M), \ldots, h_M^*(x,a,b,M)\}$ و $u \in C^{M+1}[0, X]$. اگر $\bar{u}(x) = \sum_{i=0}^{M} u_i h_i^*(x,a,b,M)$ بهترین تقریب تابع u در فضای Λ_M باشد، آنگاه داریم

$$\|u(x) - \bar{u}(x)\|_\infty \leq \frac{X^{M+1}}{(M+1)!} \left\|u^{(M+1)}(\bar{x})\right\|_\infty.$$

اثبات. از آن‌جا که مجموعه $\{1, x, x^2, \ldots, x^M\}$ یک پایه برای فضای چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان از درجه M تشکیل می‌دهد، می‌توان نوشت

$$u_0(x) = u(0) + xu'(0) + \frac{x^2}{2!}u''(0) + \ldots + \frac{x^M}{M!}u^{(M)}(0).$$

بر اساس بسط تیلور، یک عدد $\bar{x} \in [0, X]$ وجود دارد به طوری که

$$|u(x) - u_0(x)| = \left|\frac{x^{M+1}}{(M+1)!}u^{(M+1)}(\bar{x})\right|.$$

چون $\bar{u}(x)$ بهترین تقریب تابع u در فضای Λ_M می‌باشد در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\|u(x) - \bar{u}(x)\|_\infty &\leq \|u(x) - u_0(x)\|_\infty \\ &= \left\|\frac{x^{M+1}}{(M+1)!}u^{(M+1)}(\bar{x})\right\|_\infty \\ &\leq \frac{X^{M+1}}{(M+1)!}\left\|u^{(M+1)}(\bar{x})\right\|_\infty.\end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

فرض ۲.۷. فرض کنید

$$r(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{e^{-\lambda x}x^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(e^{\lambda x}u(x))\Big|_{x=0}\right],$$

و $\bar{r}(x)=\sum_{i=0}^{M} r_i h_i^*(x,a,b,M)$ تقریبی از $r(x)$ برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان باشد.

فرض ۳.۷. فرض کنید $f\in C^{M+1}([0,X])$ و $\bar{f}(x)=\sum_{i=0}^{M} f_i h_i^*(x,a,b,M)$ تقریبی از $f(x)$ برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان باشد.

فرض ۴.۷. فرض کنید $v(x)=x$ و $\bar{v}(x)=\sum_{i=0}^{M} v_i h_i^*(x,a,b,M)$ تقریبی از $v(x)$ برحسب چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال یافته هان باشد.

فرض ۵.۷. فرض کنید $XM_2<1$ باشد که در آن M_2 قبلاً در فرض ۲.۳ معرفی شده است.

قضیه ۶.۷. فرض کنید $u\in C^{M+1}([0,X])$ جواب دقیق و $\hat{u}$ جواب تقریبی معادله دیفرانسیل-انتگرال کسری بیان شده در رابطه (۱.۱) باشد. علاوه بر این فرض کنید که فرضیات ۲.۳-۵.۷ برقرار باشد. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\|u(x)-\hat{u}(x)\|_\infty &\le \frac{X^{M+1}}{(M+1)!}\underbrace{\frac{\|r^{(M+1)}\|_\infty+\|f^{(M+1)}\|_\infty}{1-XM_2}}_{M_3}\\ &\triangleq \frac{M_3X^{M+1}}{(M+1)!}.\end{aligned}$$

اثبات. با انتگرال‌گیری کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل از طرفین رابطه (۱.۱)، داریم

$$u(x)=r(x)+{}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}\left(f(x)+\int_0^x k(x,s,u(s))ds\right). \tag{۱.۷}$$

علاوه‌براین رابطه زیر برای $\hat{u}(x)$ برقرار است

$$\hat{u}(x)=\bar{r}(x)+{}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}\left(\bar{f}(x)+\int_0^x k\left(\bar{v}(x),\bar{v}(s),\hat{u}(s)\right)ds\right). \tag{۲.۷}$$

از روابط (۱.۷) و (۲.۷)، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}u(x)-\hat{u}(x)=r(x)-\bar{r}(x)+{}^{RL}_{0}I_x^{\alpha,\lambda}\Big(&f(x)-\bar{f}(x)\\&+\int_0^x\Big[k\left(x,s,u(s)\right)-k\left(\bar{v}(x),\bar{v}(s),u(s)\right)\Big]ds\Big)\end{aligned}$$

با توجه به نتیجه بالا، لم ۱.۳، فرض ۲.۳ و قضیه ۱.۷ داریم

$$\begin{aligned}\|u(x)-\hat{u}(x)\|_\infty \le{}& \|r(x)-\bar{r}(x)\|_\infty\\&+M_1\Big(\left\|f(x)-\bar{f}(x)\right\|_\infty+XM_2\left\|u(x)-\hat{u}(x)\right\|_\infty\Big).\end{aligned}$$

از نتیجه بالا، روابط زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\|u(x)-\hat{u}(x)\|_\infty &\le \frac{1}{1-XM_2}\left(\|r(x)-\bar{r}(x)\|_\infty + M_1\left\|f(x)-\bar{f}(x)\right\|_\infty\right)\\ &\le \frac{1}{1-XM_2}\underbrace{\left(\frac{X^{M+1}}{(M+1)!}\left\|r^{(M+1)}\right\|_\infty + \frac{X^{M+1}}{(M+1)!}\left\|f^{(M+1)}\right\|_\infty\right)}_{M_3}\\ &\triangleq \frac{M_3X^{M+1}}{(M+1)!}.\end{aligned}$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

۸ مثال‌های عددی

در این بخش برای نشان دادن صحت و کارایی روش پیشنهاد شده، چند مثال عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به منظور بررسی میزان دقت نتایج از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

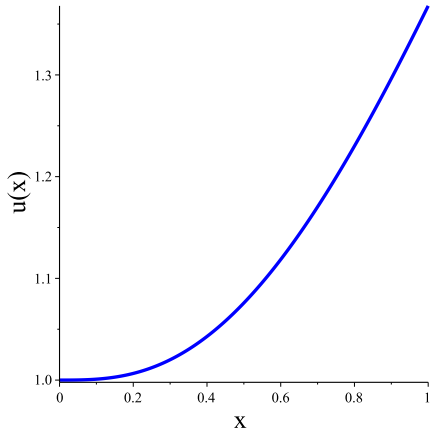
$$e_u = \left(\int_0^X \left(u(x)-\tilde{u}_M(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (۱.۸)$$

که در آن u و $\tilde{u}_M$ به ترتیب جواب‌های دقیق و تقریبی هستند. برنامه‌های مربوط به مثال‌های این بخش با نرم‌افزار Maple با کامپیوتر شخصی دارای مشخصات 8 گیگابایت حافظه داخلی و پردازشگر 3 هسته‌ای اجرا شده است.

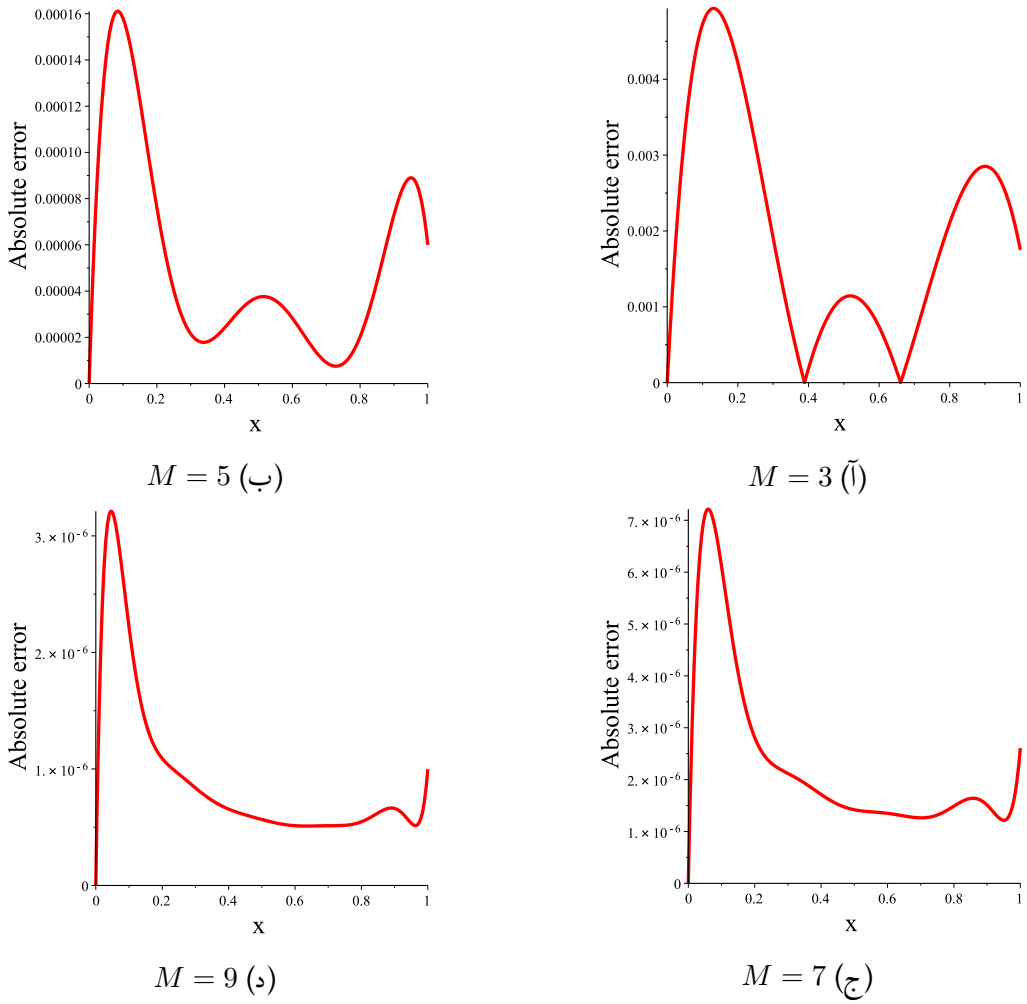
مثال ۱.۸. معادله دیفرانسیل-انتگرال کسری بیان شده در رابطه (۱.۱) را با $0 < \alpha \le 1$ و $k(x,s,u(s)) = xe^{\lambda s}s\,u(s)^2$ در بازه $[0,1]$ در نظر بگیرید به‌طوری‌که جواب دقیق آن $u(x) = e^{-\lambda x}x^2 + 1$ باشد. یادآوری می‌کنیم که تابع $f(x)$ و شرط اولیه مورد نیاز مساله به کمک جواب دقیق مساله محاسبه می‌شوند. نتایج عددی به ازای $\lambda = \frac{1}{2}$ و $\lambda = 1$ و چند مقدار a، b، α و M در جدول ۱ گزارش شده است. از روی این جدول دیده می‌شود که انتخاب‌های مختلف a و b تاثیری در نتایج به‌دست آمده برای این مثال ندارد. جواب تقریبی بدست آمده به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، $M = 11$ و $\lambda = 1$ در شکل ۱ نمایش داده شده است. نمودارهای خطای مطلق به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، $\lambda = 1$ و چند مقدار M در شکل ۲ نشان داده شده است. نتایج حاصل، نشان دهنده کارآمدی و دقت بالای روش پیشنهاد شده است.

جدول ۱: نتایج به‌دست آمده برای e_u در مثال ۱.۸، به ازای مقادیری از α، a، b و M به ازای $\lambda = \frac{1}{2}$ و $\lambda = 1$.

	$\lambda = 1/2$								
	$a=b=0$			$a=1,b=2$			$a=b=2$		
M	$\alpha=1/4$	$\alpha=1/2$	$\alpha=3/4$	$\alpha=1/4$	$\alpha=1/2$	$\alpha=3/4$	$\alpha=1/4$	$\alpha=1/2$	$\alpha=3/4$
۳	2.4337×10^{-3}	2.5485×10^{-3}	2.4499×10^{-3}	2.4337×10^{-3}	2.5485×10^{-3}	2.4499×10^{-3}	2.4337×10^{-3}	2.5485×10^{-3}	2.4499×10^{-3}
۵	2.0849×10^{-4}	5.2788×10^{-5}	6.3134×10^{-5}	2.0849×10^{-4}	5.2788×10^{-5}	6.3134×10^{-5}	2.0849×10^{-4}	5.2788×10^{-5}	6.3134×10^{-5}
۷	2.9469×10^{-6}	9.8380×10^{-6}	1.3506×10^{-5}	2.9469×10^{-6}	2.9469×10^{-6}	1.3506×10^{-5}	2.9469×10^{-6}	2.9469×10^{-6}	1.3506×10^{-5}
۹	8.6603×10^{-7}	308225×10^{-6}	4.5741×10^{-6}	8.6603×10^{-7}	308225×10^{-6}	4.5741×10^{-6}	8.6603×10^{-7}	308225×10^{-6}	4.5741×10^{-6}
۱۱	3.3473×10^{-7}	1.2435×10^{-6}	1.9546×10^{-6}	3.3473×10^{-7}	1.2435×10^{-6}	1.9546×10^{-6}	3.3473×10^{-7}	1.2435×10^{-6}	1.9546×10^{-6}
	$\lambda = 1$								
	$a=b=0$			$a=1,b=2$			$a=b=2$		
M	$\alpha=1/4$	$\alpha=1/2$	$\alpha=3/4$	$\alpha=1/4$	$\alpha=1/2$	$\alpha=3/4$	$\alpha=1/4$	$\alpha=1/2$	$\alpha=3/4$
۳	2.4480×10^{-3}	2.4798×10^{-3}	2.3627×10^{-3}	2.4480×10^{-3}	2.4798×10^{-3}	2.3627×10^{-3}	2.4480×10^{-3}	2.4798×10^{-3}	2.3627×10^{-3}
۵	4.6306×10^{-5}	6.7882×10^{-5}	7.3158×10^{-5}	4.6306×10^{-5}	6.7882×10^{-5}	7.3158×10^{-5}	4.6306×10^{-5}	6.7882×10^{-5}	7.3158×10^{-5}
۷	2.7905×10^{-6}	8.8581×10^{-6}	1.6396×10^{-5}	2.7905×10^{-6}	8.8581×10^{-6}	1.6396×10^{-5}	2.7905×10^{-6}	8.8581×10^{-6}	1.6396×10^{-5}
۹	8.0446×10^{-7}	2.7853×10^{-6}	3.9478×10^{-6}	8.0446×10^{-7}	2.7853×10^{-6}	3.9478×10^{-6}	8.0446×10^{-7}	2.7853×10^{-6}	3.9478×10^{-6}
۱۱	3.1405×10^{-7}	1.1339×10^{-6}	1.6949×10^{-6}	3.1405×10^{-7}	1.1339×10^{-6}	1.6949×10^{-6}	3.1405×10^{-7}	1.1339×10^{-6}	1.6949×10^{-6}



شکل ۱: نمودار جواب تقریبی $u(x)$ به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، $\lambda = 1$ و $M = 11$ در مثال ۱.۸.



$M = 3$ (آ) $M = 5$ (ب)

$M = 7$ (ج) $M = 9$ (د)

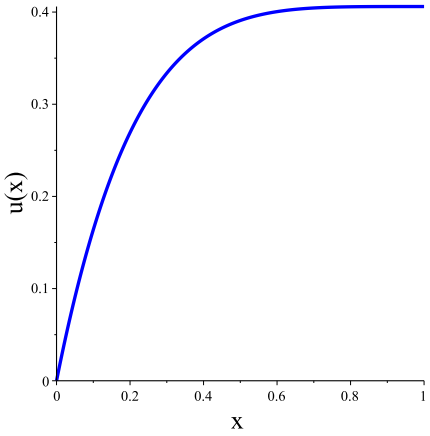
شکل ۲: نمودارهای تابع خطای مطلق به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$، $\lambda = 1$ و چند مقدار M در مثال ۱.۸.

مثال ۲.۸. معادله دیفرانسیل-انتگرال کسری بیان شده در رابطه (۱.۱) را با $1 < \alpha \leq 2$ و $k(x, s, u(s)) = s\, e^{-u(s)}$ در بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرید به طوری که جواب دقیق آن $u(x) = e^{-\lambda x}\,(x^4 + 2x)$ باشد. تابع $f(x)$ و شرایط اولیه به کمک این جواب دقیق قابل محاسبه می‌باشند. نتایج عددی به ازای چند مقدار λ، α و M در جدول ۲ گزارش شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده در این جدول، مشاهده می‌شود که با افزایش

تعداد پایه‌ها دقت نتایج افزایش می‌یابد. نتایج حاصل به ازای $\alpha = \frac{5}{4}$، $\lambda = 2$ و چند مقدار M در شکل‌های ۳ و ۴ نشان داده شده است. نتایج به‌دست آمده آشکارا نشان دهنده کارایی و دقت بالای روش ارایه شده است.

جدول ۲: نتایج به‌دست آمده برای e_u در مثال ۲.۸، به ازای مقادیری از α، λ و M.

	$\lambda = 1/2$			$\lambda = 1$			$\lambda = 2$		
M	$\alpha = 5/4$	$\alpha = 3/2$	$\alpha = 7/4$	$\alpha = 5/4$	$\alpha = 3/2$	$\alpha = 7/4$	$\alpha = 5/4$	$\alpha = 3/2$	$\alpha = 7/4$
۴	4.5364×10^{-4}	5.5250×10^{-4}	5.6941×10^{-4}	2.5913×10^{-4}	3.2918×10^{-4}	3.3763×10^{-4}	8.9014×10^{-4}	8.9083×10^{-4}	8.7885×10^{-4}
۶	1.6721×10^{-5}	4.0096×10^{-5}	4.9530×10^{-5}	1.5097×10^{-5}	3.1359×10^{-5}	3.7574×10^{-5}	1.5606×10^{-5}	2.2290×10^{-5}	2.4927×10^{-5}
۸	3.6333×10^{-6}	1.001×10^{-5}	1.4024×10^{-5}	2.8193×10^{-6}	7.4489×10^{-6}	1.0118×10^{-5}	1.8858×10^{-6}	4.5393×10^{-6}	5.7653×10^{-6}
۱۰	1.1657×10^{-6}	3.5327×10^{-6}	5.4118×10^{-6}	9.0548×10^{-7}	2.6281×10^{-6}	3.9072×10^{-6}	6.0256×10^{-7}	1.5983×10^{-6}	2.2112×10^{-6}
۱۲	4.6908×10^{-7}	1.5274×10^{-6}	2.5118×10^{-6}	3.6468×10^{-7}	1.1383×10^{-6}	1.8153×10^{-6}	2.4358×10^{-7}	6.9411×10^{-7}	1.0299×10^{-6}
۱۵	1.6315×10^{-7}	5.7105×10^{-7}	1.0095×10^{-6}	1.2628×10^{-7}	4.2501×10^{-7}	7.2963×10^{-7}	8.3567×10^{-8}	2.5811×10^{-7}	4.1372×10^{-7}
۲۲	2.5894×10^{-8}	1.0391×10^{-7}	2.1017×10^{-7}	2.0068×10^{-8}	8.3154×10^{-8}	1.3521×10^{-7}	1.3322×10^{-8}	5.721×10^{-8}	8.6574×10^{-8}



شکل ۳: نمودار جواب تقریبی $u(x)$ به ازای $\alpha = \frac{5}{4}$، $\lambda = 2$ و $M = 12$ در مثال ۲.۸.

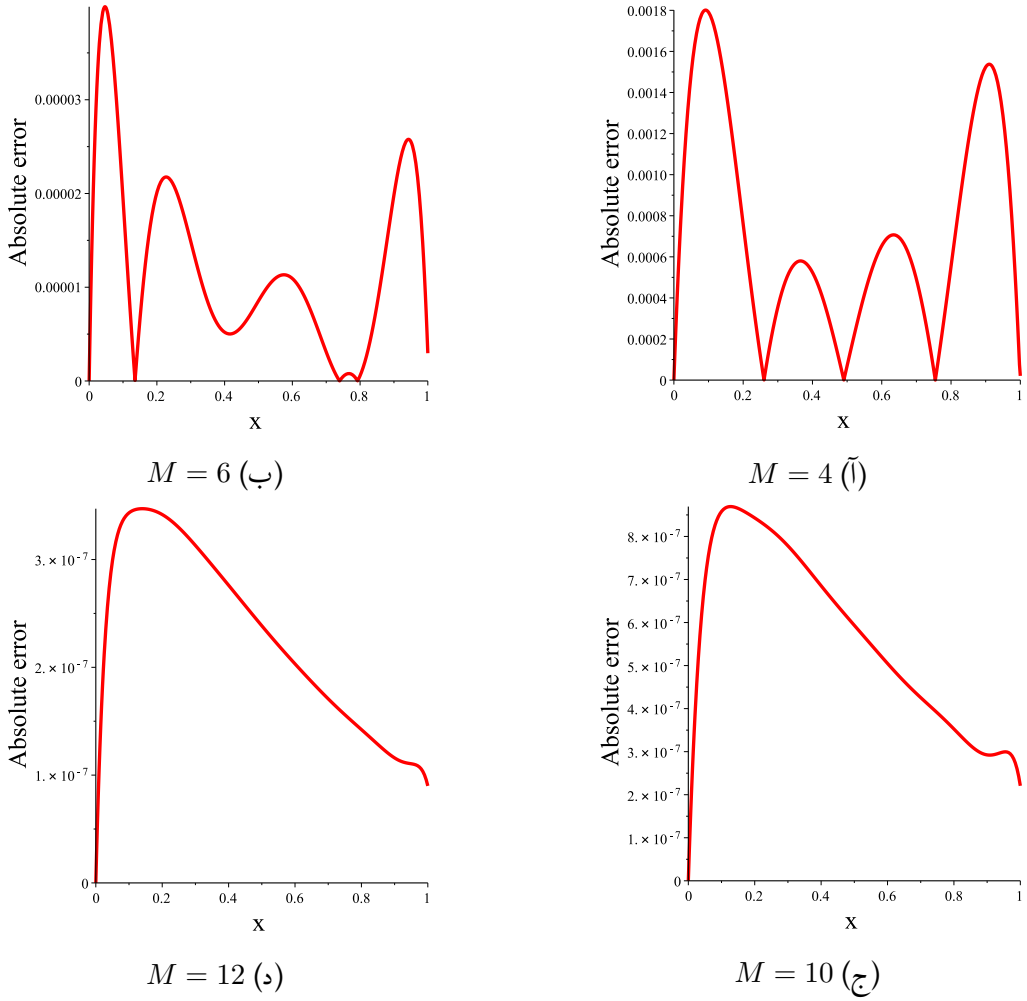
مثال ۳.۸. معادله دیفرانسیل-انتگرال کسری بیان شده در رابطه (۱.۱) را با $2 < \alpha \leq 3$ و $k(x, s, u(s)) = \sin(u(s))\, e^{-\lambda x}$ در بازه $[0, 2]$ در نظر بگیرید به طوری که جواب دقیق آن $u(x) = e^{-\lambda x}(x^{\frac{7}{2}} + x^2)$ باشد. تابع $f(x)$ و مقدار اولیه با استفاده از این جواب دقیق محاسبه می‌شوند. نتایج عددی به ازای چند مقدار λ، α و M در جدول ۳ گزارش شده است. در این جدول مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد پایه‌ها دقت جواب‌های به‌دست آمده افزایش می‌یابد. نتایج حاصل به ازای $\alpha = \frac{9}{4}$، $\lambda = \frac{1}{2}$ و چند مقدار M در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. نتایج به‌دست آمده مناسب بودن روش ارایه شده برای حل این مساله و دقت بالای نتایج را تایید می‌کند.

جدول ۳: نتایج به‌دست آمده برای e_u در مثال ۳.۸، به ازای مقادیری از α، λ و M.

	$\lambda = 1/2$			$\lambda = 1$			$\lambda = 2$		
M	$\alpha = 9/4$	$\alpha = 5/2$	$\alpha = 11/4$	$\alpha = 9/4$	$\alpha = 5/2$	$\alpha = 11/4$	$\alpha = 9/4$	$\alpha = 5/2$	$\alpha = 11/4$
۵	9.2461×10^{-3}	1.0483×10^{-3}	3.4870×10^{-2}	4.4801×10^{-3}	5.6264×10^{-4}	1.6556×10^{-2}	1.5860×10^{-3}	4.8325×10^{-4}	4.5615×10^{-3}
۷	3.4601×10^{-3}	8.7720×10^{-4}	1.7452×10^{-2}	1.7608×10^{-3}	1.3782×10^{-4}	8.2696×10^{-3}	6.1654×10^{-4}	1.8055×10^{-4}	2.3350×10^{-3}
۹	1.7118×10^{-3}	1.4237×10^{-5}	$1/0356 \times 10^{-2}$	8.6580×10^{-4}	1.9260×10^{-5}	4.9235×10^{-3}	2.9546×10^{-4}	3.8184×10^{-5}	1.4005×10^{-3}
۱۱	9.8047×10^{-4}	3.9718×10^{-6}	6.8083×10^{-3}	4.9637×10^{-4}	4.7062×10^{-6}	3.2432×10^{-3}	1.6878×10^{-4}	7.5299×10^{-6}	9.2924×10^{-4}
۱۳	6.1771×10^{-4}	1.4605×10^{-6}	4.7983×10^{-3}	3.1315×10^{-4}	1.6410×10^{-6}	2.2888×10^{-3}	1.0691×10^{-6}	2.1990×10^{-6}	6.5897×10^{-4}

۹ نتیجه‌گیری

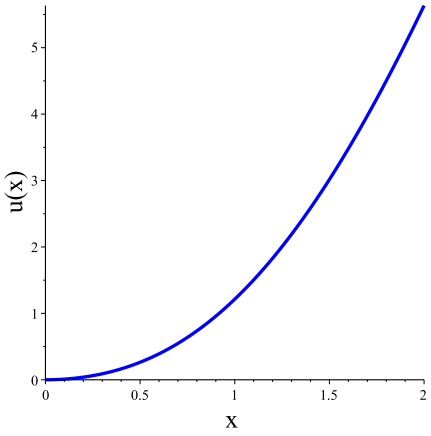
در این مقاله، یک رده جدیدی از معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری با مشتق تعدیل شده کاپوتو معرفی گردید. برای حل این معادلات، یک روش عددی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های متعامد یکه انتقال‌یافته هان ارایه پیشنهاد گردید. برای پیاده‌سازی کردن روش، در ابتدا ماتریس عملگر کسری تعدیل شده ریمان-لیوویل چند جمله‌ای‌های معرفی شده به‌دست



(آ) $M = 4$ (ب) $M = 6$

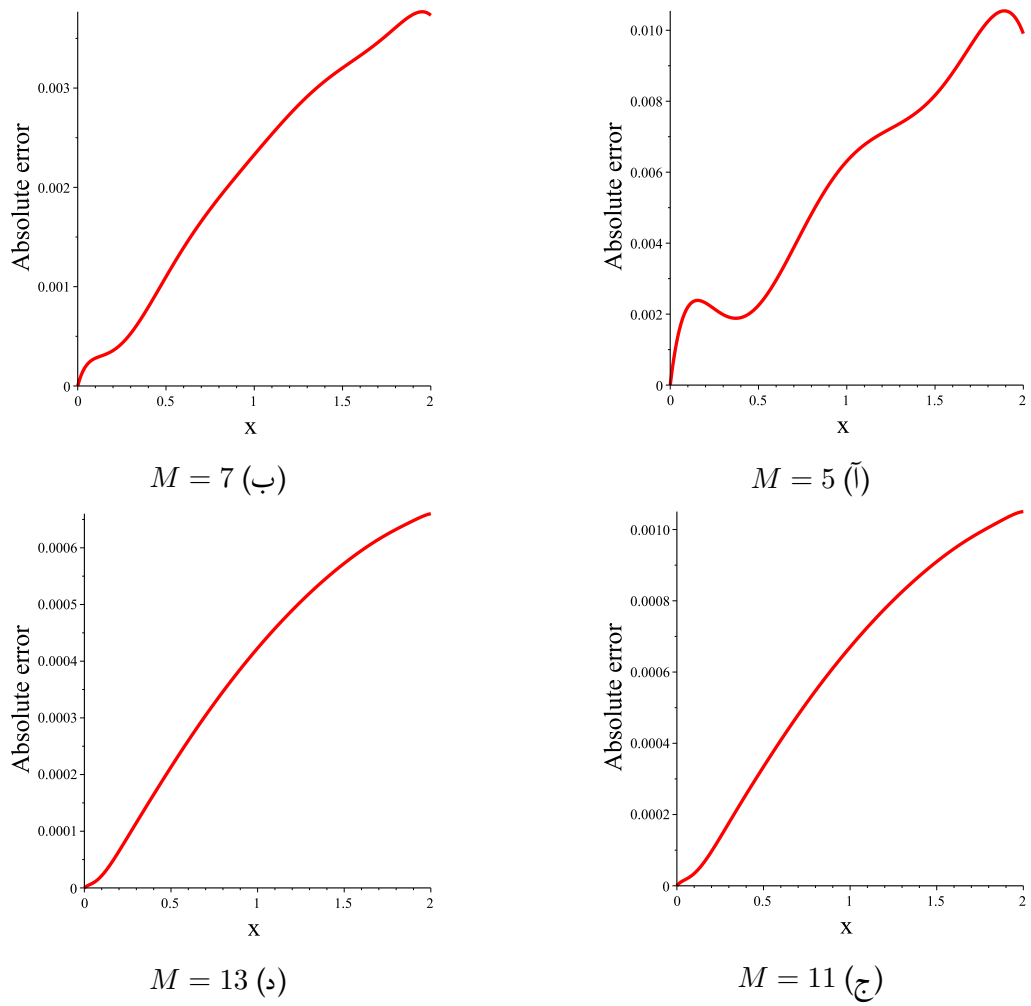
(ج) $M = 10$ (د) $M = 12$

شکل ۴: نمودارهای تابع خطای مطلق به ازای $\alpha = \frac{5}{4}$، $\lambda = 2$ و چند مقدار M در مثال ۲.۸.



شکل ۵: نمودار جواب تقریبی $u(x)$ به ازای $\alpha = \frac{9}{4}$، $\lambda = \frac{1}{2}$ و $M = 13$ در مثال ۳.۸.

آمد و در روش مورد نظر به‌کار گرفته شد. در روش پیشنهادی با بسط عبارت کسری مساله بر حسب توابع پایه‌ای معرفی شده، به‌کارگیری ماتریس عملگر انتگرال کسری بیان شده، استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس-لژاندر و روش هم‌محلی، حل مساله مورد بررسی به حل یک دستگاه از معادلات جبری غیرخطی تبدیل شد. با حل این دستگاه و به‌دست آمدن ضرایب بسط، یک جواب تقریبی برای مساله اصلی به‌دست آمد. در پایان نیز با ارایه چند مثال عددی،



$M = 5$ (آ) $M = 7$ (ب)

$M = 11$ (ج) $M = 13$ (د)

شکل ۶: نمودارهای تابع خطای مطلق به ازای $\alpha = \frac{9}{4}$، $\lambda = \frac{1}{2}$ و چند مقدار M در مثال ۳.۸.

دقت و کارایی روش پیشنهادی بررسی شد. نتایج به‌دست آمده نشان دهنده قابلیت بالای روش ارایه شده برای حل این گونه مسایل می‌باشد. در ضمن نتایج گزارش شده به‌وسیله جداول و نمودارها نشان می‌دهند که با افزایش تعدادتوابع پایه‌ای در حل مساله مورد بررسی دقت نتایج بهتر می‌شود.

فهرست منابع

[1] Abdelhaq L., Syam S. M. and Syam M. I., An efficient numerical method for two-dimensional fractional integro-differential equations with modified Atangana–Baleanu fractional derivative using operational matrix approach, *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*,**11**, (2024).

[2] Abramowitz M. and Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (1972).

[3] Alshbool M. H. T., Mohammad M., Isik O. and Hashim I., Fractional Bernstein operational matrices for solving integro-differential equations involved by Caputo fractional derivative, *Results in Applied Mathematics*, **14** (2022).

[4] Espinosa-Paredes G., Polo-Labarrios M.A., Espinosa-Martinez E.G. and del Valle-Gallegos

E.,Fractional neutron point kinetics equations for nuclear reactor dynamics,*Annals of Nuclear Energy*,**38**(2-3),307-330(2011).

[5] Failla G. and Zingales M.,Advanced materials modelling via fractional calculus: challenges and perspectives,*Philosophical Transactions of the Royal Society A*,**378**(2172),20200050(2020).

[6] Heydari M. H. and Avazzadeh Z., Numerical study of non-singular variable-order time fractional coupled Burger's equations by using the Hahn polynomial, *Engineering with Computers*, **38**(1) 101-110 (2022) .

[7] Heydari, M. H. and Navari, J. and Hosseininia, M. and Razzaghi, M., A numerical method based on the hat functions to solve a category of nonlinear fractional integro-differential equations involving Caputo-Hadamard derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 116506 (2025) .

[8] Heydari M. H. and Razzaghi M., *Mathematics and Computers in Simulation*, **217** 97–108 (2024) .

[9] Hussain A., Naqvi S. A., Illahi A.and Naqvi Q. A.,"Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media",*Theoretical and Mathematical Physics*,**158**,355-359(2009).

[10] Jia Y., Xu M., Lin Y. and Jiang D., An efficient technique based on least-squares method for fractional integro-differential equations, *Alexandria Engineering Journal*, **64** 97-105 (2023).

[11] Karlin S., The Hahn polynomials, formulas and an application, *Scripta Mathematica*, **26** 33-46 (1961).

[12] Kilbas A.A., Marichev O.I. and Samko S.G., Fractional integrals and derivatives (theory and applications), (1993).

[13] Kohler-Rieper F., Rohl C.H.and De Micheli E.,A novel deterministic forecast model for the Covid-19 epidemic based on a single ordinary integro-differential equation,*The European Physical Journal Plus*, **135** (7) 599 (2020).

[14] Lakshmikantham.V.,*Theory of integro-differential equations*,**1**,CRC press,1995.

[15] Levin J.J. and Nohel J.A.,On a system of integrodifferential equations occurring in reactor dynamics,*Journal of Mathematics and Mechanics*, 347-368 (1960).

[16] Li C. and Deng W., Remarks on fractional derivatives. Applied mathematics and computation,**187** (2) 777-784 (2007).

[17] Li C., and Zeng F., Finite difference methods for fractional differential equations, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **22** (4) 1230014 (2012).

[18] Li C. and Cai M., *Theory and numerical approximations of fractional ntegrals and derivatives*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.

[19] Li C., Deng W. and Zhao L., Well-posedness and numerical algorithm for the tempered fractional ordinary differential equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **24** (4) 1989–2015 (2019).

[20] Maslovskaya A. and Moroz L.,Time-fractional Landau–Khalatnikov model applied to numerical simulation of polarization switching in ferroelectrics,*Nonlinear Dynamics*,**11**(5),4543-4557(2023).

[21] Mohammadi F., A discrete orthogonal polynomials approach for fractional optimal control problems with time delay, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, **9**(2) 49-75 (2019).

[22] Mohammadi F., A discrete orthogonal polynomials approach for fractional optimal control problems with time delay, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, **9** (2) 49-75 (2019).

[23] Mohammed J.K. and Khudair A., Numerical solution of fractional integro-differential equations via fourth-degree hat functions, *Iraqi Journal for Computer Science and Mathematics*, **4** (2) 10-30 (2023).

[24] Podlubny I., *Fractional Differential Equations*, (1998).

[25] Rahimkhani P., A numerical method for Ψ-fractional integro-differential equations by Bell polynomials, *Applied Numerical Mathematics* , (2024).

[26] Rahimkhani P, and Ordokhani Y., Hahn wavelets collocation method combined with Laplace transform method for solving fractional integro-differential equations, *Mathematical Sciences*, **18** (3) 463-477 (2024).

[27] Riahi Beni M., Legendre wavelet method combined with the Gauss quadrature rule for numerical solution of fractional integro-differential equations, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, **12** (1) 229-249 (2022).

[28] Tatar, N.e., The decay rate for a fractional differential equation, *Journal of mathematical analysis and applications*, **295** (2) 304-314 (2004).

[29] TeBeest K.G.,Classroom Note: Numerical and analytical solutions of Volterra's population model, *SIAM review*, **39** (3) 484-493 (1997).

An Effective Numerical Method for Solving Fractional Integro-Differential Equations with the Caputo Tempered Derivative

Mohammad Hossein Heydari[1] [††] **, R. Zarei**[2]

[1,2] Department of Mathematics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran.

Received: 29 September 2024 Accepted: 28 December 2025

Communicated by: Sohrab Efati

Abstract: In this paper, we introduce an important class of fractional integral-differential equations with tempered Caputo fractional derivatives. To solve these equations, we propose a numerical method based on the orthonormal shifted Hahn polynomials. To implement this method, we derive an explicit formula for calculating the Riemann-Liouville tempered fractional integral operator matrix corresponding to these polynomials. In the proposed method, by approximating the fractional term of the problem using the aforementioned polynomials and their fractional integral operator matrix, and by employing the collocation method, the solution of the expressed problem is transformed into the solution of a system of algebraic equations. By solving this system, we obtain an approximate solution for the equation under consideration. To verify the accuracy and efficiency of the proposed method, we examine several numerical examples.

Keywords: Orthonormal shifted Hahn polynomials, Fractional integral operational matrix, Tempered fractional derivative.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[††]Mohammad Hossein Heydari

E-mail addresses: heydari@sutech.ac.ir (M. H. Heydari), rz.zarei@sutech.ac.ir (R. Zarei).