مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۴۱–۶۲

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.49176.2354

برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس داده‌های رکوردی

عادله فلاح تلوکی [۱] [۱]

[۱] گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
دبیر مسئول: غلامرضا محتشمی برزادران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۱۸

چکیده: در این مقاله، مسأله برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس داده‌های رکوردی مورد مطالعه قرار می‌گیرند. برآوردیابی و پیش‌بینی برای توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس رویکردهای کلاسیک و بیزی می‌باشد. برآوردیابی و پیش‌بینی بیزی بر اساس تابع زیان متقارن مربع خطا و تابع زیان نامتقارن لاینکس صورت می‌پذیرد. از آن جایی که به نظر می‌رسد انتگرال‌های مرتبط با برآوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی دارای فرم‌های بسته نیستند، از الگوریتم متروپلیس–هستینگز و تقریب لیندلی برای تقریب این انتگرال‌ها استفاده می‌شود. یک مطالعه شبیه‌سازی و یک مثال کاربردی برای ارزیابی و مقایسه عملکرد روش‌های مختلف برآورد و پیش‌بینی ارائه می‌گردد. نتایج شبیه‌سازی بیانگر این موضوع هستند که برآوردگرهای بیز به‌دست آمده تحت توزیع پیشین آگاهی‌بخش بهتر از برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردگرهای گشتاوری عمل می‌کند. همچنین، فواصل اطمینان بیزی کمترین میانگین طول فواصل اطمینان را نسبت به دیگر فواصل اطمینان دارند. در میان پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی و کلاسیک، پیش‌بینی‌کننده نااریب و پیش‌بینی‌کننده بیزی با توزیع پیشین آگاهی‌بخش به‌ترتیب عملکرد بهتری را نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های دیگر دارند. همچنین، فواصل پیش‌بینی HCD و فواصل پیش‌بینی محوری به‌ترتیب کمترین میانگین طول فواصل پیش‌بینی را نسبت به فواصل پیش‌بینی بیزی دارا هستند.

واژه‌های کلیدی: توزیع لیندلی اصلاح شده، داده‌های رکوردی، برآورد، پیش‌بینی، الگوریتم متروپلیس–هستینگز، تقریب لیندلی.

رده‌بندی ریاضی: 62F10; 62F15; 62N05

۱ مقدمه

امروزه داده‌های رکوردی در اکثر شاخه‌های علمی نظیر اقتصاد، هواشناسی، زلزله‌نگاری، مهندسی، پزشکی، کنترل کیفیت، آب شناسی، قابلیت اطمینان، تحلیل داده‌های طول عمر، استخراج نفت و معادن، هوا و فضا و غیره کاربرد فراوانی دارند. اهمیت کاربردی رکوردها بیشتر به این خاطر است که با داشتن مقادیر رکوردی مشاهدات می‌توان به استنباط درباره پارامترهای توزیع مشاهدات و نیز پیش‌بینی زمان و مقدار رکورد

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(A. Fallah) adelehfallah@pnu.ac.ir

بعدی اقدام نمود. به‌عنوان مثال می‌توان زمان و شدت زلزله بعدی را در یک محل خاص بر اساس اطلاعاتی که از زلزله‌های مخرب قبل وجود دارد، پیش‌بینی کرد. چندلر [۹] مطالعه آماری روی نظریه رکوردها را شروع و بسیاری از خواص اساسی آن را پایه‌ریزی کرد.

در دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_m; m \geq ۱\}$ مشاهده X_j رکورد بالا نامیده می‌شود اگر از تمام مشاهدات ما قبل خود بزرگتر باشد. به عبارت دیگر m -امین رکورد بالا به‌صورت $X_{U(m)}$ تعریف می‌شود که در آن $U(۱) = ۱$ (با احتمال ۱) و برای $m \geq ۲$ $U(m) = \min\{j : X_j > X_{U(m-۱)}\}$. محققان بسیاری به مسأله استنباط آماری و پیش‌بینی بر اساس رکوردها پرداخته‌اند. برای اطلاع بیشتر درباره تحقیقات انجام شده می‌توان به آرنولد و همکاران [۳]، آرنولد و پرس [۴]، رکب و همکاران [۲۲]، ساینگ و همکاران [۲۶]، اصغرزاده و همکاران [۵] و احسن الله [۱] مراجعه کرد.

چسنیو و همکاران [۱۱]، یک خانواده کلی از توزیع لیندلی اصلاح شده را معرفی نمودند که تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی آن به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{۱+\theta}\big[x(\theta\omega(x) - \omega(x)) + ۱ - \omega(x) + \theta\big]e^{-\theta x}, x > ۰, \theta > ۰,$$

$$F(x;\theta) = ۱ - \big[۱ + \frac{\theta x}{۱+\theta}\omega(x)\big]e^{-\theta x}, x > ۰, \theta > ۰.$$

برای حالت $\omega(x) = ۰$ توزیع فوق همان توزیع نمایی با پارامتر θ و با تابع نرخ خطر $h(x) = \theta$ است. برای حالت $\omega(x) = ۱$، توزیع فوق همان توزیع لیندلی با پارامتر θ است که اولین بار توسط لیندلی [۲۰]، به عنوان یک توزیع مفید برای تجزیه و تحلیل داده‌های طول عمر به ویژه در مدل‌سازی قابلیت اعتماد تنش- مقاومت مورد استفاده قرار گرفت. همچنین، گایتانی و همکاران [۱۶] بیان کردند که توزیع لیندلی مدل بهتری نسبت به مدل مبتنی بر توزیع نمایی است. تابع نرخ خطر این توزیع $h(x) = \frac{\theta^۲(۱+x)}{\theta+۱+\theta x}$، که در x افزایشی و برای هر $x > ۰$ تابع $h(x) \leq \theta$ است. برای حالت $\omega(x) = e^{-\theta x}$ توزیع فوق، توزیع لیندلی اصلاح شده (ML)[۲] با پارامتر θ است که اخیراً به عنوان یک توزیع طول عمر مورد توجه قرار گرفته است. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع لیندلی اصلاح شده به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta}{۱+\theta}e^{-۲\theta x}[(۱+\theta)e^{\theta x} + ۲\theta x - ۱], x > ۰, \theta > ۰, \qquad (۱.۱)$$

$$F(x;\theta) = ۱ - \big[۱ + \frac{\theta x}{۱+\theta}e^{-\theta x}\big]e^{-\theta x}, x > ۰, \theta > ۰. \qquad (۲.۱)$$

همچنین، تابع نرخ خطر این توزیع به‌صورت

$$h(x;\theta) = \frac{\theta(\theta x - ۱)}{(۱+\theta)e^{-\theta x} + \theta x} + \theta, x > ۰.$$

است. تابع نرخ خطر توزیع لیندلی اصلاح شده ثابت و یکنواخت نیست. اگر $x_.$ یک نقطه بحرانی منحصر به فردی از $h(x)$ را نشان دهد آنگاه $h(x)$ در بازه $(۰, x_.]$ افزایشی و در بازه $(x_., +\infty)$ کاهشی است. همچنین، برای $x \geq ۱/\theta$ تابع نرخ خطر $h(x) \geq \theta$ و برای $x \in (۰, ۱/\theta]$ تابع نرخ خطر $h(x) \leq \theta$ است. با استفاده از ویژگی‌های تابع نرخ خطر می‌توان گفت که توزیع لیندلی اصلاح شده یک توزیع جایگزین یک پارامتری برای توزیع‌های نمایی و لیندلی است [۱۱]. همچنین، چسنیو و همکاران [۱۱]، نشان دادند که تابع احتمال توزیع لیندلی اصلاح شده را می‌توان به‌صورت ترکیبی از توزیع نمایی و گاما بازنویسی کرد

$$f(x) = f_۱(x) + \frac{۱}{۲(۱+\theta)}\big[f_۲(x) - f_۳(x)\big],$$

که $f_۱(x)$، $f_۲(x)$ و $f_۳(x)$ به‌ترتیب توابع چگالی احتمال توزیع‌های نمایی با پارامتر ۲θ، نمایی با پارامتر θ و گاما با پارامترهای $(۲, ۲\theta)$ هستند. برای اطلاع بیشتر از تحقیقات انجام شده در زمینه خانواده از توزیع لیندلی می‌توان به اصغرزاده و همکاران [۶]، زاکرزاده و دولتی [۲۹]، کریشنا و کومار [۱۸]، گایتانی و همکاران [۱۵]، چسنیو و همکاران [۱۳]، خوارزمی و همکاران [۱۷]، آلوتایبی و همکاران [۲] و چسنیو و همکاران [۱۲] مراجعه کرد.

[2] Modified Lindely distribution

در این مقاله، برآوردیابی با روش‌های ماکسیمم درستنمایی، گشتاوری و بیزی بر اساس دو تابع زیان متقارن و نامتقارن صورت می‌پذیرد. فواصل اطمینان مختلفی از جمله، فواصل اطمینان بر اساس توزیع مجانبی برآورد ماکسیمم درستنمایی، فواصل اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی ماکسیمم، فواصل اطمینان محوری و فواصل اطمینان بیزی برای پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای مختلفی از جمله پیش‌بینی‌کننده ماکسیمم درستنمایی (MLP)[۳]، پیش‌بینی‌کننده ناریب (BUP)[۴]، پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی (CMP)[۵] و پیش‌بینی‌کننده بیزی برای رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n, n > m$ بر اساس مشاهدات رکوردی محاسبه می‌شوند. همچنین، فواصل پیش‌بینی مختلفی برای رکورد بالای مشاهده نشده Z ارائه می‌شوند.

مطالب این مقاله به‌صورت زیر تدوین شده است. در بخش ۲، برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد گشتاوری و برآورد بیز برای پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده محاسبه می‌شوند. برای برآوردیابی بیزی از دو تابع زیان متقارن و نامتقارن بهره می‌گیریم. از آن جا که به نظر می‌رسد انتگرال‌های مربوط به برآوردهای بیزی دارای فرم بسته‌ای نیستند، برای محاسبه برآوردهای بیزی، روش زنجیر مارکوف مونت کارلو (MCMC)[۶] و روش تقریب لیندلی را برای تقریب این انتگرال‌ها پیشنهاد می‌کنیم. در بخش ۳، فواصل اطمینان مختلفی برای پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده به‌دست آورده می‌شود. در بخش‌های ۴ و ۵ پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای مختلفی برای رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n, n > m$ بر اساس مشاهدات رکوردی محاسبه می‌شوند. در بخش ۶، یک مطالعه شبیه‌سازی برای مقایسه و بررسی رفتار برآوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای ارائه می‌گردد. در بخش ۷، یک مثال کاربردی برای تشریح روش‌های برآورد و پیش‌بینی استفاده می‌گردد. در نهایت، بحث و نتیجه‌گیری به‌ترتیب در بخش ۸ آمده است.

۲ برآوردیابی پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده

۱.۲ برآوردیابی ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $Y_۱ = X_{U(۱)} = y_۱, \ldots, Y_m = X_{U(m)} = y_m$ نخستین m رکورد بالا در نمونه تصادفی از جامعه با تابع توزیع $F(x;\theta)$ و تابع چگالی $f(x;\theta)$ باشند، در آن صورت بر اساس مشاهدات رکوردی $\mathbf{y} = (y_۱, \ldots, y_m)$ تابع درستنمایی به‌صورت

$$L(\mathbf{y}|\theta) = f(y_m;\theta)\prod_{i=۱}^{m-۱}\frac{f(y_i;\theta)}{۱-F(y_i;\theta)}, y_۱ < y_۲ < \ldots < y_m. \qquad (۱.۲)$$

تعریف می‌شود [۳]. با توجه به روابط (۱.۱)، (۲.۱) و (۱.۲)، تابع درستنمایی به‌صورت

$$L(\mathbf{y}|\theta) = \frac{\theta^m}{(۱+\theta)}e^{-\theta\left[۲y_m+\sum_{i=۱}^{m-۱}y_i\right]}\prod_{i=۱}^{m}\left[(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱\right]\prod_{i=۱}^{m-۱}\frac{۱}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}}, \qquad (۲.۲)$$

محاسبه شده، که در آن $y_۱, \ldots, y_m$ نمونه‌های رکوردی مشاهده شده هستند. لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از

$$\ln L(\mathbf{y}|\theta) = m\ln\theta - \ln(۱+\theta) - \theta\left[۲y_m+\sum_{i=۱}^{m-۱}y_i\right] + \sum_{i=۱}^{m}\ln\left[(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱\right]$$
$$-\sum_{i=۱}^{m-۱}\ln\left[۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}\right]. \qquad (۳.۲)$$

با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به پارامتر θ، معادله درستنمایی به‌صورت

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial\theta} = \frac{m}{\theta} - \frac{۱}{۱+\theta} - ۲y_m - \sum_{i=۱}^{m-۱}y_i + \sum_{i=۱}^{m}\frac{e^{\theta y_i}[۱+(۱+\theta)y_i]+۲y_i}{(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱}$$
$$-\sum_{i=۱}^{m-۱}\frac{۱+y_i e^{-\theta y_i}[۱-\theta y_i]}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}} = ۰, \qquad (۴.۲)$$

[3] Maximum Likelihood Predictor
[4] Best Unbiased Predictor
[5] Conditional Median Predictor
[6] Markov Chain Monte Carlo

حاصل می‌شود. با ماکسیمم سازی لگاریتم تابع درستنمایی یا با حل معادله (۴.۲) به روش‌های عددی مانند نیوتن رافسون و تکراری نقطه ثابت می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE)[۷] پارامتر θ یعنی $\hat{\theta}$، را محاسبه کرد. در روش تکراری نقطه ثابت، $g(\theta)$ به‌صورت

$$g(\theta)=\frac{m}{\frac{۱}{۱+\theta}+۲y_m+\sum_{i=۱}^{m-۱}y_i-\sum_{i=۱}^{m}\left\{\frac{e^{\theta y_i}[۱+(۱+\theta)y_i]+۲y_i}{(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱}\right\}+\sum_{i=۱}^{m-۱}\left\{\frac{۱+y_ie^{-\theta y_i}[۱-\theta y_i]}{۱+\theta+\theta y_ie^{-\theta y_i}}\right\}},$$

تعریف می‌شود. برای اینکه نشان دهیم برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ وجود دارد توابع $\phi_۱(\theta)$ و $\phi_۲(\theta)$ به‌صورت $\phi_۱(\theta)=g(\theta)$ و $\phi_۲(\theta)=\theta$ معرفی شده‌اند. در آن صورت،

$$\lim_{\theta\to ۰}\phi_۱(\theta)=۰,\ \lim_{\theta\to+\infty}\phi_۱(\theta)=\frac{m}{y_m}>۰.$$

این به نوبه خود نشان می‌دهد که $\phi_۱(\theta)$ از صفر در صفر شروع و به یک مقدار مثبت افزایش می‌یابد. همچنین، برای θ های بزرگ تابع $\phi_۱(\theta)$ مقادیر متناهی را می‌پذیرد و هنگامی که $\theta\to+\infty$ میل کند تابع $\phi_۲(\theta)$ به ∞ میل خواهد کرد. بنابراین، معادله $g(\theta)=\theta$ دارای یک ریشه حقیقی است. برای حل معادله $g(\theta)=\theta$، ابتدا $\theta^{(۰)}$ به عنوان مقدار اولیه برای پارامتر θ در نظر گرفته می‌شود تا تقریب‌های پی در پی برای پارامتر θ به‌صورت $\theta^{(۱)}=g(\theta^{(۰)}),\theta^{(۲)}=g(\theta^{(۱)}),\ldots,\theta^{(j+۱)}=g(\theta^{(j)})$ به‌دست آید. اگر $|\theta^{(j+۱)}-\theta^{(j)}|<\epsilon$، آنگاه فرآیند تکرار در مرحله jام پایان می‌پذیرد که در آن ϵ مقدار بسیار کوچکی است. بعد از مرحله jام برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ به‌صورت $\hat{\theta}=\theta^{(j)}$ به‌دست آورده می‌شود. همچنین، با توجه به لگاریتم تابع درستنمایی رابطه (۳.۲)، اطلاع فیشر به‌صورت

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^۲\ln L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial\theta^۲}=&\frac{m}{\theta^۲}-\frac{۱}{(۱+\theta)^۲}-\sum_{i=۱}^{m}\left(\frac{y_ie^{\theta y_i}[۲+y_i(۱+\theta)]}{(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱}\right)\\&+\sum_{i=۱}^{m}\left[\frac{e^{\theta y_i}[۱+y_i(۱+\theta)]+۲y_i}{(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱}\right]^۲+\sum_{i=۱}^{m-۱}\left(\frac{y_i^۲e^{-\theta y_i}(-۲+y_i\theta)}{۱+\theta+\theta y_ie^{-\theta y_i}}\right)\\&-\sum_{i=۱}^{m-۱}\left[\frac{۱+y_ie^{-\theta y_i}(۱-y_i\theta)}{۱+\theta+\theta y_ie^{-\theta y_i}}\right]^۲,\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید.

۲.۲ برآوردیابی به روش گشتاوری

متغیر تصادفی V_i به‌صورت $V_i=-\ln[۱-F(X_i)]$ تعریف می‌شود. در آن صورت $V_i^*\overset{d}{=}-\ln[۱-F(Y_i)]$، که $\mathbf{Y}=(Y_۱,\ldots,Y_m)$ داده‌های رکوردی از توزیعی با تابع توزیع $F(x;\theta)$ و V_i^* یک نمونه رکوردی بالا از توزیع نمایی استاندارد هستند. تحت تبدیلات

$$\begin{cases}R_۱=V_۱^*\\R_۲=V_۲^*-V_۱^*\\\vdots\\R_m=V_m^*-V_{m-۱}^*.\end{cases}$$

می‌توان نشان داد که $R_۱,R_۲,\ldots,R_m$ متغیرهای مستقل و همتوزیع با توزیع نمایی استاندارد می‌باشند. برای اطلاع از جزئیات بیشتر به آرنولد و همکاران [۳] مراجعه شود. با توجه به رابطه (۲.۱) متغیر تصادفی V_i^* به‌صورت $V_i^*=\theta Y_i-\ln\left(۱+\frac{\theta Y_i}{۱+\theta}e^{-\theta Y_i}\right)$ تعریف می‌شود و

$$S=S(\theta;\mathbf{Y})=\sum_{i=۱}^{m}V_i^*=\sum_{i=۱}^{m}\left\{\theta Y_i-\ln\left(۱+\frac{\theta Y_i}{۱+\theta}e^{-\theta Y_i}\right)\right\}.$$

[7] Maximum Likelihood Estimator

بنابراین، S را می‌توان به‌صورت مجموع وزنی R_i، $S=\sum_{i=۱}^{m}(m-i+۱)R_i$ در نظر گرفت که در آن R_i متغیرهای مستقل و همتوزیع با توزیع نمایی استاندارد می‌باشند. در نتیجه،

$$E(S)=\sum_{i=۱}^{m}(m-i+۱)=\frac{m(m+۱)}{۲},$$

و

$$Var(S)=\sum_{i=۱}^{m}(m-i+۱)^{۲}=\frac{m(m+۱)(۲m+۱)}{۶}.$$

با استفاده از نامساوی مارکف، برای هر $\epsilon>۰$ و $m\to\infty$ داریم:

$$Pr\left(\left|\frac{S}{\frac{m(m+۱)}{۲}}-۱\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{۱}{\varepsilon^{۲}}Var\left(\frac{S}{\frac{m(m+۱)}{۲}}\right)=\frac{۲m+۱}{m(m+۱)\varepsilon^{۲}}\to۰,$$

لذا احتمال فوق، زمانی که m به سمت بینهایت میل می‌کند به صفر همگرا است. در نتیجه

$$\frac{S}{\frac{m(m+۱)}{۲}}=\frac{\sum_{i=۱}^{m}\left\{\theta Y_i-\ln\left(۱+\frac{\theta Y_i}{۱+\theta}e^{-\theta Y_i}\right)\right\}}{\frac{m(m+۱)}{۲}}\xrightarrow{p}۱.$$

بنابراین، برآورد گشتاوری[8] (MBE) پارامتر θ از حل معادله غیر خطی

$$\sum_{i=۱}^{m}\left\{\theta Y_i-\ln\left(۱+\frac{\theta Y_i}{۱+\theta}e^{-\theta Y_i}\right)\right\}-\frac{m(m+۱)}{۲}=۰, \tag{۵.۲}$$

به‌دست می‌آید. برای حل معادله غیر خطی از دستور uniroot() در نرم افزار R استفاده شده است.

۳.۲ برآوردیابی بیزی

برای برآوردیابی بیزی نقطه‌ای از تابع زیان مربع خطا (SEL)[9] به‌صورت $L_۱(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^{۲}$ استفاده می‌شود، که در آن δ برآوردگر پارامتر θ است. تابع زیان مربع خطا یک تابع زیان متقارن است که بیش برآوردی و کم برآوردی را به یک اندازه نشان می‌دهد. همچنین، از تابع زیان نامتقارن نمایی–خطی یا لاینکس (LINEX)[10] به‌صورت

$$L_۲(\theta,\delta)=e^{c(\delta-\theta)}-c(\delta-\theta)-۱,\quad c\neq۰,$$

استفاده می‌شود که در آن c پارامتر شکل است [۲۸]. تابع زیان لاینکس، یک تابع زیان نامتقارن است و زمانی که c به سمت صفر میل کند این تابع زیان تبدیل به تابع زیان متقارن مربع خطا می‌شود. برای $c>۰$، تابع زیان لاینکس بیش برآوردی را بیشتر از کم برآوردی و برای $c<۰$، کم برآوردی را بیشتر از بیش برآوردی نشان می‌دهد. برآورد بیز پارامتر θ تحت تابع زیان لاینکس به‌صورت $\hat{\theta}_{BL}=-\frac{۱}{c}\ln E(e^{-c\theta}|y)$ به‌دست می‌آید [۳۰]. برای برآوردیابی بیزی پارامتر θ توزیع پیشین گاما با تابع چگالی احتمال

$$\pi(\theta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-۱}e^{-\beta\theta},\theta>۰, \tag{۶.۲}$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن α و β مقادیر ثابت و معلوم هستند. توزیع پیشین گاما یک توزیع انعطاف‌پذیر است، زیرا با انتخاب مقادیر مناسبی از α و β توزیع پیشین آگاهی‌بخش و توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش حاصل می‌شود. با استفاده از تابع درستنمایی (۲.۲) و چگالی پیشین (۶.۲)، تابع چگالی پسین θ به‌صورت

$$\pi(\theta|\mathbf{y})=\frac{\theta^{m+\alpha-۱}e^{-\theta\left[۲y_m+\sum_{i=۱}^{m-۱}y_i+\beta\right]}}{K(۱+\theta)}\prod_{i=۱}^{m}\left[(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱\right]\prod_{i=۱}^{m-۱}\frac{۱}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}}, \tag{۷.۲}$$

[8] Moment-Based Estimation
[9] Squared Error Loss
[10] Linear-Exponential Loss Function

به‌دست می‌آید. که در آن

$$K=\int_{۰}^{\infty}\frac{\theta^{m+\alpha-۱}e^{-\theta\left[۲y_m+\sum_{i=۱}^{m-۱}y_i+\beta\right]}}{(۱+\theta)}\prod_{i=۱}^{m}\left[(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱\right]\prod_{i=۱}^{m-۱}\frac{۱}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}}d\theta.$$

برآوردهای بیز پارامتر θ تحت تابع‌های زیان مربع خطا و لاینکس به شرط وجود به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\hat{\theta}_{BS}=E(\theta|\mathbf{y})=\int_{۰}^{\infty}\frac{\theta^{m+\alpha}e^{-\theta\left[۲y_m+\sum_{i=۱}^{m-۱}y_i+\beta\right]}}{K(۱+\theta)}\prod_{i=۱}^{m}\left[(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱\right]\times\prod_{i=۱}^{m-۱}\frac{۱}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}}d\theta, \tag{۸.۲}$$

$$\hat{\theta}_{BL}=-\frac{۱}{c}\ln E(e^{-c\theta}|\mathbf{y})=-\frac{۱}{c}\ln\Big\{\int_{۰}^{\infty}\frac{\theta^{m+\alpha-۱}e^{-\theta\left[۲y_m+\sum_{i=۱}^{m-۱}y_i+\beta+c\right]}}{K(۱+\theta)}\times\prod_{i=۱}^{m}\left[(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱\right]\prod_{i=۱}^{m-۱}\frac{۱}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}}d\theta\Big\}. \tag{۹.۲}$$

با توجه به فرم تابع چگالی پسین، انتگرال‌های داده شده در روابط (۸.۲) و (۹.۲) به‌صورت ساده و صریح به‌دست آورده نمی‌شوند. بنابراین، برای برآوردهای بیزی از روش MCMC و روش تقریب لیندلی استفاده می‌شوند.

۱.۳.۲ روش زنجیر مارکوف مونت کارلو

از آنجایی که تابع چگالی پسین فرم شناخته شده‌ای ندارد، لذا نمونه‌گیری از این چگالی پسین به سادگی امکان‌پذیر نخواهد بود. به همین دلیل از روش زنجیر مارکوف مونت کارلو و استفاده از الگوریتم متروپلیس–هستینگز با توزیع پیشنهادی نرمال به منظور تولید نمونه از (۷.۲) استفاده می‌شود [۲۴]. الگوریتم متروپولیس–هستینگز برای تولید نمونه‌ها به‌صورت زیر بیان می‌شود.

۱. مقدار اولیه $\theta^{(۰)}$ را برای پارامتر θ در نظر می‌گیریم. برای شروع الگوریتم، مقدار اولیه را می‌توان برآورد ماکسیمم درستنمایی در نظر گرفت. قرار دهید $j=۱$.

۲. با استفاده از الگوریتم متروپلیس–هستینگز، $\theta^{(j)}$ را از $\pi(\theta^{(j-۱)}|\mathbf{y})$ با توزیع پیشنهادی $N(\theta^{(j-۱)},S_\theta^۲)$ تولید می‌کنیم، که $S_\theta^۲$ معکوس اطلاع فیشر می‌باشد. قرار دهید $j=j+۱$.

۳. گام دوم را N بار تکرار می‌کنیم تا نمونه‌های مونت کارلو زنجیر مارکوفی (MCMC) $\theta_۱,\ldots,\theta_N$ را تولید کنیم.

برآوردهای بیز تقریبی پارامتر θ تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ترتیب به‌صورت

$$\widehat{\theta}_{BS}=\frac{۱}{N-M}\sum_{j=M+۱}^{N}\theta_j,$$

$$\widehat{\theta}_{BL}=-\frac{۱}{c}\ln\left(\frac{۱}{N-M}\sum_{j=M+۱}^{N}e^{-c\theta_j}\right),$$

به‌دست می‌آیند، که M تعداد θ های سوخته است.

۲.۳.۲ روش تقریب لیندلی

لیندلی [۲۱] روشی را برای تقریب نسبت دو انتگرال پیشنهاد کرد که از این روش برای محاسبه تقریبی برآوردهای بیز استفاده می‌شود. تقریب لیندلی در حالت تک پارامتری برای تابعی از پارامتر، یعنی $U(\theta)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E(U(\theta)|\mathbf{y}) = U(\theta) + \frac{1}{2}\left[U_2 + 2U_1\rho_1\right][\sigma(\theta)]^2 + \frac{1}{2}l_3U_1[\sigma(\theta)]^4, \qquad (10.2)$$

که در آن $\ln L(\mathbf{y}|\theta)$ لگاریتم تابع درستنمایی، $l_i = \frac{\partial^i}{\partial\theta^i}\ln L(\mathbf{y}|\theta)$ به ازای $i = 1, 2, 3$، $\pi(\theta)$ توزیع پیشین، $\rho(\theta)$ لگاریتم تابع چگالی پیشین $\rho(\theta) = \ln\pi(\theta)$، $\rho_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}\rho(\theta)$ و $[\sigma(\theta)]^2$ معکوس اطلاع فیشر در نقطه برآورد ماکسیمم درستنمایی هستند. همچنین، تحت تابع زیان مربع خطا $U(\theta) = \theta$ و تحت تابع زیان لاینکس $U(\theta) = e^{-c\theta}$ می‌باشند که $U_j = \frac{\partial^j}{\partial\theta^j}U(\theta)$ برای $j = 1, 2$. با توجه به رابطه (۱۰.۲)، برآوردهای بیز تقریبی به روش لیندلی برای پارامتر θ تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ترتیب به‌صورت

$$\widehat{\theta}_{BLS} = \hat{\theta} + \left(\frac{\alpha-1}{\hat{\theta}} - \beta\right)\sigma^2(\hat{\theta}) + \frac{1}{2}l_3(\hat{\theta})\sigma^4(\hat{\theta}),$$

و

$$\widehat{\theta}_{BLL} = \hat{\theta} - \frac{1}{c}\ln\left\{1 + \left[\frac{c^2}{2} - c\left(\frac{\alpha-1}{\hat{\theta}} - \beta\right)\right]\sigma^2(\hat{\theta}) - \frac{c}{2}l_3(\hat{\theta})\sigma^4(\hat{\theta})\right\},$$

به‌دست می‌آیند [۶]، که در آن $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ،

$$\begin{aligned} l_3 = \frac{\partial^3\ln L(\mathbf{y}|\theta)}{\partial\theta^3} &= \frac{2m}{\theta^3} - \frac{2}{(1+\theta)^3} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{y_i^2e^{\theta y_i}[3+y_i(1+\theta)]}{(1+\theta)e^{\theta y_i}+2\theta y_i-1}\right) \\ &+ 2\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{e^{\theta y_i}[1+y_i(1+\theta)]+2y_i}{(1+\theta)e^{\theta y_i}+2\theta y_i-1}\right]^3 - \sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{y_i^3e^{-\theta y_i}(3-y_i\theta)}{1+\theta+\theta y_ie^{-\theta y_i}}\right) \\ &- 3\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(y_ie^{\theta y_i}[2+y_i(1+\theta)]\right)\left(e^{\theta y_i}[1+y_i(1+\theta)]+2y_i\right)}{\left[(1+\theta)e^{\theta y_i}+2\theta y_i-1\right]^2} \\ &+ 3\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\left(y_i^2e^{-\theta y_i}[-2+y_i\theta]\right)\left(1+y_ie^{-\theta y_i}[1-y_i\theta]\right)}{(1+\theta+\theta y_ie^{-\theta y_i})^2} - 2\sum_{i=1}^{m-1}\left[\frac{1+y_ie^{-\theta y_i}[1-y_i\theta]}{1+\theta+\theta y_ie^{-\theta y_i}}\right]^3, \end{aligned}$$

و $\rho_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}\rho(\theta) = \frac{\alpha-1}{\theta} - \beta$ هستند.

۳ فواصل اطمینان مختلف

۱.۳ فاصله اطمینان بر اساس توزیع مجانبی برآورد ماکسیمم درستنمایی

برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ یعنی $\hat{\theta}$، تحت شرایط مطلوب تیکو و آکایا [۲۷]، به‌طور مجانبی دارای توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس $\widehat{Var}(\hat{\theta}) = \left[-\frac{\partial^2\ln L(\mathbf{y},\theta)}{\partial\theta^2}|_{\theta=\hat{\theta}}\right]^{-1}$ می‌باشد. بنابراین کمیت محوری $(\hat{\theta}-\theta)/\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$ به‌طور مجانبی دارای توزیع نرمال استاندارد است. با استفاده از کمیت محوری فوق، فاصله اطمینان مجانبی $100(1-\gamma)\%$ برای پارامتر θ از رابطه $[\hat{\theta}_l, \hat{\theta}_u] = \hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\theta})}$ به‌دست آورده می‌شوند، که در آن z_q، چندک q- ام توزیع نرمال استاندارد است.

۲.۳ فاصله اطمینان بر اساس آزمون نسبت ماکسیمم درستنمایی

فاصله اطمینان براساس آزمون نسبت درستنمایی (LRT)[11]، اولین بار توسط لاولس [۱۹] برای به‌دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای توزیع گاما به کار گرفته شد. در ابتدا، آزمون فرضیه $H_0 : \theta = \theta_0$ را در مقابل $H_a : \theta \neq \theta_0$ در نظر بگیرید. آماره آزمون نسبت

[11] Likelihood Ratio Test

درستنمایی برای آزمون فرضیه فوق به‌صورت

$$\lambda(\mathbf{y}) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_\circ} L(\mathbf{y}|\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L(\mathbf{y}|\theta)} = \frac{L(\mathbf{y}|\theta_\circ)}{L(\mathbf{y}|\hat{\theta})}, \tag{۱.۳}$$

است، که در آن Θ فضای پارامتر، $\hat{\theta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی θ و $\Theta_\circ$ فضای پارامتر تحت فرض $H_\circ$ هستند. براساس روابط (۲.۲) و (۱.۳)، آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت

$$\lambda(\mathbf{y}) = \left(\frac{\theta_\circ}{\hat{\theta}}\right)^m \left(\frac{1+\hat{\theta}}{1+\theta_\circ}\right) e^{(\hat{\theta}-\theta_\circ)[2y_m - \sum_{i=1}^{m-1} y_i]} \prod_{i=1}^{m} \frac{(1+\theta_\circ)e^{\theta_\circ y_i} + 2\theta_\circ y_i - 1}{(1+\hat{\theta})e^{\hat{\theta} y_i} + 2\hat{\theta} y_i - 1}$$
$$\times \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1+\hat{\theta}+\hat{\theta} y_i e^{-\hat{\theta} y_i}}{1+\theta_\circ+\theta_\circ y_i e^{-\theta_\circ y_i}},$$

به‌دست می‌آید، که در آن $y_1, \ldots, y_m$ مقادیر مشاهده شده رکوردی هستند. بنابر خاصیت مجانبی آماره آزمون نسبت درستنمایی برای نمونه‌های بزرگ، تابع

$$-2\ln\lambda(\mathbf{Y}) = -2\Bigg[m\ln\left(\frac{\theta_\circ}{\hat{\theta}}\right) + \ln\left(\frac{1+\hat{\theta}}{1+\theta_\circ}\right) + (\hat{\theta}-\theta_\circ)[2Y_m - \sum_{i=1}^{m-1} Y_i]$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \ln\left(\frac{(1+\theta_\circ)e^{\theta_\circ Y_i} + 2\theta_\circ Y_i - 1}{(1+\hat{\theta})e^{\hat{\theta} Y_i} + 2\hat{\theta} Y_i - 1}\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \ln\left(\frac{1+\hat{\theta}+\hat{\theta} Y_i e^{-\hat{\theta} Y_i}}{1+\theta_\circ+\theta_\circ Y_i e^{-\theta_\circ Y_i}}\right)\Bigg],$$

در توزیع، همگرا به توزیع خی دو با یک درجه آزادی است [۸]. در آزمون نسبت درستنمایی فرض $H_\circ$ در سطح معنی داری γ رد می‌شود هرگاه $-2\ln\lambda(\mathbf{y}) > \chi^2_{1-\gamma}(1)$. بنابراین، بر اساس متمم ناحیه رد فرض $H_\circ$ فاصله اطمینان $(1-\gamma)\,\%$ به‌صورت

$$\psi(\theta) = \{\theta : -2\ln\lambda(\mathbf{y}) \le \chi^2_{1-\gamma}(1)\} = \{\theta : -2[\ln L(\mathbf{y}|\theta_\circ) - \ln L(\mathbf{y}|\hat{\theta})] \le \chi^2_{1-\gamma}(1)\}$$
$$= \{\theta : \ln L(\mathbf{y}|\theta_\circ) \ge \ln L(\mathbf{y}|\hat{\theta}) - \frac{1}{2}\chi^2_{1-\gamma}(1)\},$$

حاصل می‌شود. از آنجایی که $\ln L(\mathbf{y}|\theta)$ تابعی تک مدی است، بنابراین به ازای هر γ مشخص، $\psi(\theta)$ یک فاصله اطمینان یکتا خواهد بود.

۳.۳ فواصل اطمینان محوری

در زیربخش ۲.۲، نشان داده شد که تابع $S(\theta;\mathbf{Y})$ به‌صورت

$$S = S(\theta;\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{m} \left\{\theta Y_i - \ln\left(1 + \frac{\theta Y_i}{1+\theta} e^{-\theta Y_i}\right)\right\},$$

تعریف می‌شود. روس [۲۵] نشان داد که $S(\theta;\mathbf{Y})$ را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از W_i به‌صورت $S = \sum_{i=1}^{m} W_i$ نوشت که در آن W_i متغیرهای تصادفی مستقل با پارامتر $\lambda_i = \frac{1}{m-i+1}$ و تابع چگالی احتمال $f_S(t) = \sum_{i=1}^{m} C_{i,m}\lambda_i e^{-\lambda_i t}$ می‌باشند که در آن $C_{i,m} = \prod_{j=1, j\neq i}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i}$ است. لذا، $S(\theta;\mathbf{Y})$ یک کمیت محوری است و با استفاده از کمیت محوری فوق، فاصله اطمینان $(1-\gamma)100\,\%$ برای پارامتر θ از رابطه

$$Pr(S_{\gamma/2} < \sum_{i=1}^{m} \left(\theta Y_i - \ln\left(1 + \frac{\theta Y_i}{1+\theta} e^{-\theta Y_i}\right)\right) < S_{1-\gamma/2}) = 1-\gamma,$$

به‌دست می‌آید. در نتیجه، فاصله اطمینان $\gamma)\%\ ۱۰۰(۱-$ برای پارامتر θ عبارت است از (θ_L, θ_U)، که کران‌های پایین و بالای این فاصله به‌ترتیب از حل معادلات زیر

$$\sum_{i=۱}^{m}\left(\theta_L Y_i - \ln\left(۱+\frac{\theta_L Y_i}{۱+\theta_L}e^{-\theta_L Y_i}\right)\right) = S_{\gamma/۲},$$

$$\sum_{i=۱}^{m}\left(\theta_U Y_i - \ln\left(۱+\frac{\theta_U Y_i}{۱+\theta_U}e^{-\theta_U Y_i}\right)\right) = S_{۱-\gamma/۲},$$

به‌دست می‌آیند، که در آن $S_{\gamma/۲}$ و $S_{۱-\gamma/۲}$ به‌ترتیب چندک‌های بالا و پایین $\gamma/۲$ درصدی از کمیت محوری $S(\theta;\mathbf{Y})$ می‌باشند. برای مقادیر مختلفی از m، نقاط درصدی را برای فواصل اطمینان ۹۰ و ۹۵ درصد محاسبه نموده و مقادیر در جدول ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: نقاط درصدی ۹۰ و ۹۵ درصد از کمیت محوری $S(\theta;\mathbf{Y})$.

m	٪۲/۵	٪۵	٪۹۵	٪۹۷/۵	m	٪۲/۵	٪۵	٪۹۵	٪۹۷/۵
۲	۰٫۱۴۷۰	۰٫۲۸۹۸	۷٫۴۵۵۲	۸٫۸۹۱۵	۵	۳٫۱۶۵۷	۴٫۴۵۷۵	۲۸٫۸۸۸	۳۲٫۹۶۱۰
۳	۰٫۵۹۲۸	۱٫۲۴۳۶	۱۳٫۵۱۸۴	۱۵٫۵۲۰۶	۶	۵٫۰۹۹۸	۶٫۸۸۹۵	۳۹٫۳۴۸۸	۴۲٫۶۴۸۰
۴	۱٫۴۳۴۲	۲٫۵۹۴۶	۱۹٫۵۳۱۳	۲۱٫۹۶۶۰	۷	۸٫۰۳۸۹	۱۰٫۳۵۷۴	۴۹٫۰۳۵۹	۵۷٫۴۲۵۲

۴.۳ فواصل اطمینان بیزی

به کمک نمونه‌های تولید شده از الگوریتم متروپلیس–هستینگز $\theta_۱, \ldots, \theta_N$، می‌توان کوتاه‌ترین بازه‌های اطمینان را به روش چن وشائو [۱۰] به‌دست آورد. فرض کنید $\theta_{(۱)} < \ldots < \theta_{(N-M)}$ نمونه مرتب شده از $\{\theta_j; j = M+۱, \ldots, N\}$ است که بعد از حذف M مشاهده سوخته حاصل شده است. آنگاه کوتاه‌ترین بازه‌های اطمینان $\gamma)\%\ ۱۰۰(۱-$ برای θ با بالاترین چگالی پسین (HPD)[۱۲] به‌صورت $\left(\theta_{(j)}, \theta_{(j+[(N-M)(۱-\gamma)])}\right)$ است. که در آن پهنای فاصله‌ی j ام به‌صورت زیر انتخاب می‌شود

$$\theta_{(j+[(N-M)(۱-\gamma)])} - \theta_{(j)} = \min_{۱\le s\le k} \theta_{(s+[(N-M)(۱-\gamma)])} - \theta_{(s)}$$

که $k = N - M - [(N-M)(۱-\gamma)]$.

۴ پیش‌بینی کننده‌های نقطه‌ای

پیش‌بینی مقادیر رکوردهای آینده مسئله قابل توجهی است. پیش‌بینی نقطه‌ای و فاصله‌ای رکوردهای آینده با استفاده از داده‌های گذشته بر تحقیقات علمی از داده‌های رکوردشکنی تسلط یافته است. در این بخش، مسأله پیش‌بینی نقطه‌ای و فاصله‌ای برای رکورد بالای مشاهده نشده n–ام در آینده یعنی $Z = Y_n$ که $n > m$، بر اساس داده‌های رکوردی $\mathbf{Y} = (Y_۱, \ldots, Y_m)$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱.۴ پیش‌بینی کننده‌های کلاسیک

در این زیربخش، پیش‌بینی کننده‌های کلاسیک مختلفی از جمله، پیش‌بینی کننده ماکسیمم درستنمایی، پیش‌بینی کننده ناااریب و پیش‌بینی کننده میانه شرطی برای $Z = Y_n$ به‌دست آورده می‌شوند.

[12] Highest Posterior Density

۱.۱.۴ پیش‌بینی‌کننده ماکسیمم درستنمایی

تابع درستنمایی پیش‌بینی‌کننده Z و θ به‌صورت

$$L^*(z,\theta;\mathbf{y}) = f(z;\theta)\frac{[\ln(۱-F(y_m;\theta))-\ln(۱-F(z;\theta))]^{n-m-۱}}{\Gamma(n-m)}\prod_{i=۱}^{m}\frac{f(y_i;\theta)}{۱-F(y_i;\theta)}, z\geq y_m, \tag{۱.۴}$$

تعریف می‌شود که در آن $\mathbf{y}=(y_۱,\ldots,y_m)$ اولین m مشاهدات رکوردی می‌باشند [۷]. با توجه به روابط (۱.۱)، (۲.۱) و (۱.۴) تابع درستنمایی پیش‌بینی‌کننده Z و θ به‌صورت

$$\begin{aligned}L^*(z,\theta;\mathbf{y}) = &\frac{\theta^{m+۱}e^{-\theta(۲z+\sum_{i=۱}^{m}y_i)}}{(۱+\theta)\Gamma(n-m)}\left[\theta(z-y_m)+\ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta z e^{-\theta z}}\right)\right]^{n-m-۱}\\ &\times\left[(۱+\theta)e^{\theta z}+۲\theta z-۱\right]\prod_{i=۱}^{m}\frac{(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}},\end{aligned}$$

محاسبه می‌شود. لگاریتم تابع درستنمایی پیش‌بینی‌کننده Z و θ عبارت است از

$$\begin{aligned}\ln L^*(z,\theta;\mathbf{y}) = &(m+۱)\ln\theta-\ln(\theta+۱)-\ln\Gamma(n-m)-\theta[۲z+\sum_{i=۱}^{m}y_i]\\ &+(n-m-۱)\ln\left[\theta(z-y_m)+\ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta z e^{-\theta z}}\right)\right]\\ &+\ln\left[(۱+\theta)e^{\theta z}+۲\theta z-۱\right]+\sum_{i=۱}^{m}\ln\left(\frac{(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}}\right).\end{aligned}$$

با ماکسیمم کردن لگاریتم تابع درستنمایی پیش‌بینی‌کننده، برآورد درستنمایی ماکسیمم پیش‌گویانه[۱۳] (PMLE) پارامتر θ و پیش‌بینی‌کننده درستنمایی ماکسیمم (MLP) برای Z به‌دست می‌آید. برای حالت خاص $n=m+۱$، MLP از حل معادلات غیر خطی

$$\frac{\partial\ln L^*(z,\theta;\mathbf{y})}{\partial z} = -۲\theta+\frac{(۱+\theta)\theta e^{\theta z}+۲\theta}{(۱+\theta)e^{\theta z}+۲\theta z-۱}=۰,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln L^*(z,\theta;\mathbf{y})}{\partial\theta} = &\frac{m+۱}{\theta}-\frac{۱}{\theta+۱}-۲z-\sum_{i=۱}^{m}y_i+\frac{e^{\theta z}[۱+z(\theta+۱)]+۲z}{(۱+\theta)e^{\theta z}+۲\theta z-۱}\\ &+\sum_{i=۱}^{m}\frac{e^{\theta y_i}[۱+y_i(\theta+۱)]+۲y_i}{(۱+\theta)e^{\theta y_i}+۲\theta y_i-۱}-\sum_{i=۱}^{m}\frac{۱+y_i e^{-\theta y_i}[۱-\theta y_i]}{۱+\theta+\theta y_i e^{-\theta y_i}}=۰,\end{aligned}$$

به‌دست می‌آیند. برای انجام محاسبات از دستور optim() در نرم افزار R استفاده می‌شود.

۲.۱.۴ پیش‌بینی‌کننده ناریب

بر اساس خاصیت مارکفی آماره‌های رکوردی تابع چگالی شرطی Z به شرط $\mathbf{Y}=(Y_۱,\ldots,Y_m)$ برابر است با تابع چگالی Z به شرط Y_m [۳]. بنابراین، تابع چگالی شرطی Z به شرط Y_m به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(z|y_m;\theta) = \frac{[\ln(۱-F(y_m;\theta))-\ln(۱-F(z;\theta))]^{n-m-۱}}{\Gamma(n-m)}\frac{f(z;\theta)}{۱-F(y_m;\theta)}, z\geq y_m. \tag{۲.۴}$$

[13] Predictive Maximum Likelihood Estimator

با توجه به روابط (۱.۱)، (۲.۱) و (۲.۴) توزیع شرطی Z به شرط y_m عبارت است از

$$f_Z(z|y_m;\theta) = \frac{\left[\theta(z-y_m) + \ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta z e^{-\theta z}}\right)\right]^{n-m-۱}}{\Gamma(n-m)}\theta e^{-\theta(۲z-y_m)} \tag{۳.۴}$$

$$\times \frac{[(۱+\theta)e^{\theta z} + ۲\theta z - ۱]}{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}. \tag{۴.۴}$$

با استفاده از رابطه (۳.۴)، پیش‌بینی‌کننده ناریب (BUP) از رابطه زیر

$$\begin{aligned}\widehat{Z}_{BUP} &= E(Z|y_m) = \int_{y_m}^{\infty} z f_Z(z|y_m;\theta)dz \\ &= \frac{\theta e^{\theta y_m}}{\Gamma(n-m)[۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}]}\int_{y_m}^{\infty} z e^{-۲\theta z}[(۱+\theta)e^{\theta z} + ۲\theta z - ۱] \\ &\times \left[\theta(z-y_m) + \ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta z e^{-\theta z}}\right)\right]^{n-m-۱} dz,\end{aligned}$$

حاصل می‌شود. برای حالت خاص $n = m+۱$، BUP به‌صورت

$$\widehat{Z}_{BUP} = \frac{۴(۱+\theta)(۱+\theta y_m) + e^{-\theta y_m}(۴\theta^۲ y_m^۲ + ۲\theta y_m + ۱)}{۴\theta[۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}]},$$

به‌دست می‌آید. در صورت نامعلوم بودن پارامتر θ می‌توان از برآورد ماکسیمم درستنمایی استفاده کرد تا BUP تقریبی به‌دست آید.

۳.۱.۴ پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی

پیش‌بینی‌کننده میانه شرطی (CMP) از حل معادله

$$\widehat{Z}_{CMP} = \int_{y_m}^{CMP} f_Z(z|y_m;\theta)dz = \frac{۱}{۲},$$

به‌دست می‌آید. بنابراین،

$$\begin{aligned}&\frac{\theta e^{\theta y_m}}{\Gamma(n-m)[۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}]}\int_{y_m}^{CMP} e^{-۲\theta z}[(۱+\theta)e^{\theta z} + ۲\theta z - ۱] \\ &\times \left[\theta(z-y_m) + \ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta z e^{-\theta z}}\right)\right]^{n-m-۱} dz = \frac{۱}{۲}.\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $\theta(z-y_m) + \ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta z e^{-\theta z}}\right) = u \longrightarrow \frac{\theta e^{-\theta z}[(۱+\theta)e^{\theta z}+۲\theta z-۱]}{۱+\theta+\theta z e^{-\theta z}}dz = du$ و با توجه به $(۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m})e^{-\theta y_m} = (۱+\theta+\theta z e^{-\theta z})e^{-\theta z}e^{u}$ داریم

$$\int_{y_m}^{CMP} f_Z(z|y_m;\theta)dz = \int_{۰}^{\theta(CMP-y_m)+\ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta CMP e^{-\theta CMP}}\right)} \frac{u^{n-m-۱}}{\Gamma(n-m)}e^{-u}du = \frac{۱}{۲}.$$

اگر $M(n-m,۱)$ را میانه توزیع گاما با پارامترهای $n-m$ و ۱ در نظر بگیریم. در آن صورت، CMP برای Z از حل معادله غیر خطی

$$\theta(CMP-y_m) + \ln\left(\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta CMP e^{-\theta CMP}}\right) = M(n-m,۱),$$

به‌دست می‌آید. برای حالت خاص $n = m+۱$، CMP به‌صورت

$$\frac{(۱+\theta)[۱-e^{-\theta(CMP-y_m)}] + \theta\left[y_m e^{-\theta y_m} - CMP e^{-\theta(۲CMP-y_m)}\right]}{[۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}]} = \frac{۱}{۲},$$

به‌دست می‌آید. در صورت نامعلوم بودن پارامتر θ می‌توان از برآورد ماکسیمم درستنمایی استفاده کرد تا CMP تقریبی به‌دست آید.

۲.۴ پیش‌بینی‌کننده بیزی

تابع چگالی احتمال پیش‌بینی‌کننده بیزی برای $z \geq y_m$ عبارت است از

$$f_1(z|y_m;\theta) = \int_0^\infty f_Z(z|y_m;\theta)\pi(\theta|\mathbf{y})d\theta. \tag{۵.۴}$$

پیش‌بینی‌های بیزی Z تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ترتیب در صورت وجود به‌صورت

$$Z_{Bs} = \int_{y_m}^\infty z f_1(z|y_m;\theta)dz = \int_0^\infty I_1(y_m;\theta)\pi(\theta|\mathbf{y})d\theta, \tag{۶.۴}$$

$$Z_{BL} = \frac{-1}{c}\ln\left[\int_{y_m}^\infty e^{-cz} f_1(z|y_m;\theta)dz\right] = \frac{-1}{c}\ln\left[\int_0^\infty I_2(y_m;\theta)\pi(\theta|\mathbf{y})d\theta\right], \tag{۷.۴}$$

به‌دست می‌آیند، که

$$I_1(y_m;\theta) = \int_{y_m}^\infty z f_Z(z|y_m;\theta)dz,$$
$$I_2(y_m;\theta) = \int_{y_m}^\infty e^{-cz} f_Z(z|y_m;\theta)dz.$$

به دلیل پیچیدگی تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی $f_1(z|y_m;\theta)$، پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی در روابط (۶.۴) و (۷.۴) به‌صورت ساده و صریح به‌دست آورده نمی‌شوند. بنابراین، برای برآورد تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی $f_1(z|y_m;\theta)$ از الگوریتم متروپلیس-هستینگز که در زیر بخش ۱.۳.۲ بیان شده، استفاده شده است. بر اساس نمونه‌های تولید شده از الگوریتم متروپلیس-هستینگز $\{\theta_j; j = M+1,\ldots,N\}$ برآورد تابع چگالی پیش‌بینی‌کننده بیزی $f_1(z|y_m;\theta)$، به‌صورت

$$\widehat{f}_1(z|y_m;\theta) = \frac{1}{N-M}\sum_{j=M+1}^{N} f(z|y_m;\theta), \tag{۸.۴}$$

به‌دست می‌آید که M تعداد تکرارهای دوره سوخت است. با استفاده از روابط (۶.۴)، (۷.۴) و (۸.۴)، پیش‌بینی‌کننده بیز تقریبی برای Z تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ترتیب به‌صورت

$$\widehat{Z}_{Bs} = \int_{y_m}^\infty z\widehat{f}_1(z|y_m;\theta)dz = \frac{1}{N-M}\sum_{j=M+1}^{N} I_1(y_m;\theta_j),$$

$$\widehat{Z}_{BL} = \frac{-1}{c}\ln\left[\int_{y_m}^\infty e^{-cz}\widehat{f}_1(z|y_m;\theta)dz\right] = \frac{-1}{c}\ln\left[\frac{1}{N-M}\sum_{j=M+1}^{N} I_2(y_m;\theta_j)\right],$$

محاسبه می‌شوند. برای حالت خاص $n = m+1$، پیش‌بینی‌کننده بیزی برای Z تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ترتیب به‌صورت

$$\widehat{Z}_{Bs} = \frac{1}{N-M}\sum_{j=M+1}^{N}\frac{4(1+\theta_j)(1+\theta_j y_m) + e^{-\theta_j y_m}(4\theta_j^2 y_m^2 + 2\theta_j y_m + 1)}{4\theta_j(1+\theta_j+\theta_j y_m e^{-\theta_j y_m})},$$

$$\widehat{Z}_{BL} = \frac{-1}{c}\ln\left\{\frac{1}{N-M}\sum_{j=M+1}^{N}\frac{\theta_j e^{-cy_m}}{(1+\theta_j+\theta_j y_m e^{-\theta_j y_m})}\right.$$
$$\left.\times\left[\left(\frac{1+\theta_j}{c+\theta_j}\right) + \frac{e^{-\theta_j y_m}[2\theta_j y_m(c+2\theta_j) - c]}{(c+2\theta_j)^2}\right]\right\},$$

به‌دست می‌آیند.

۵ فواصل پیش‌بینی

۱.۵ فاصله پیش‌بینی با روش محوری

با توجه به تابع چگالی Z به شرط y_m رابطه (۳.۴)، واضح است که متغیر تصادفی

$$U = \ln[۱ - F(y_m;\theta)] - \ln[۱ - F(Z;\theta)] = \left[\theta(Z - y_m) + \ln\left(\frac{۱ + \theta + \theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱ + \theta + \theta Z e^{-\theta Z}}\right)\right],$$

دارای توزیع گاما با پارامترهای $n - m$ و ۱ و تابع چگالی $g_U(z) = \frac{۱}{(n-m-۱)!} z^{n-m-۱} e^{-z}$ می‌باشد. لذا، $۲U$ دارای توزیع کای دو با $۲(n - m)$ درجه آزادی و یک کمیت محوری برای Z است و با استفاده از آن یک فاصله پیش‌بینی $\gamma)۱۰۰(۱ - \gamma)$ برای Z از رابطه $\Pr\left(\chi^۲_{\gamma/۲,۲(n-m)} < ۲U < \chi^۲_{۱-\gamma/۲,۲(n-m)} | Y_m = y_m\right) = ۱ - \gamma$ به‌دست می‌آید، که $L^*_۱$ و $U^*_۱$ کران‌های پایین و بالای این فاصله هستند و به‌ترتیب از حل معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$۲\theta(L^*_۱ - y_m) + ۲\ln\left(\frac{۱ + \theta + \theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱ + \theta + \theta L^*_۱ e^{-\theta L^*_۱}}\right) = \chi^۲_{\gamma/۲,۲(n-m)},$$

$$۲\theta(U^*_۱ - y_m) + ۲\ln\left(\frac{۱ + \theta + \theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱ + \theta + \theta U^*_۱ e^{-\theta U^*_۱}}\right) = \chi^۲_{۱-\gamma/۲,۲(n-m)}.$$

۲.۵ فاصله پیش‌بینی بالاترین چگالی شرطی

فاصله $[w_۱, w_۲]$ یک فاصله پیش‌بینی بالاترین چگالی شرطی[۱۴] (HCD) در سطح $(۱ - \gamma)$ برای U با تابع چگالی $g_U(z) = \frac{۱}{(n-m-۱)!} z^{n-m-۱} e^{-z}$ است هرگاه

$$[w_۱, w_۲] = \{w : w \in [۰, \infty], g_U(w) \geqslant k\} \subset [۰, \infty]; (۰ < \gamma < ۱)$$

و برای بعضی $k > ۰$ داشته باشیم:

$$\int_{w_۱}^{w_۲} g_U(w)dw = ۱ - \gamma.$$

اگر $n > m + ۱$ باشد آنگاه تابع $g_U(w)$ یک تابع تک مدی است و حداکثر مقدار این تابع در $\nu = n - m - ۱ \in (۰, \infty)$ به‌دست می‌آید. بنابراین روش HCD، مستلزم یافتن دو نقطه $(۰ < \gamma, \gamma_۱ < ۱) w_۱ = w_{\gamma_۱} \leqslant \nu \leqslant w_۲ = w_{۱-\gamma+\gamma_۱}$ تحت عنوان صدکهای $(\gamma_۱)$ درصد و $(۱ - \gamma + \gamma_۱)$ درصد هستند که به ترتیب در روابط

$$\int_{w_۱}^{w_۲} g_U(w)dw = ۱ - \gamma, g_U(w_۱) = g_U(w_۲). \tag{۱.۵}$$

صدق می‌کند کسلا و برگر [۸]. همچنین، روابط (۱.۵) را می‌توان به‌صورت $\gamma_{w_۲}(n - m, ۱) - \gamma_{w_۱}(n - m, ۱) = ۱ - \gamma$ و $\left(\frac{w_۱}{w_۲}\right)^{n-m-۱} = e^{-(w_۲ - w_۱)}$ باز نویسی کرد که در آن $\Gamma(a, t) = \frac{۱}{\Gamma(a)} \int_t^\infty x^{a-۱} e^{-x} dx$ تابع گامای ناقص است. فاصله پیش‌بینی $\gamma)۱۰۰(۱ - \gamma)$ برای Z بر اساس روش HCD، عبارت است از $(L^*_۲, U^*_۲)$، که کران‌های پایین و بالای آن به‌ترتیب از حل معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$\frac{۱ + \theta + \theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱ + \theta + \theta L^*_۲ e^{-\theta L^*_۲}} = e^{w_۲ - \theta(L^*_۲ - y_m)},$$

[14] Highest Posterior Density

$$\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta U_۲^* e^{-\theta U_۲^*}} = e^{w_۱-\theta(U_۲^*-y_m)}.$$

برای حالت خاص $n = m+۱$، با توجه به اینکه تابع $g_U(w)$ یک تابع کاهشی است و $g_U(۰) = ۱$ و $g_U(\infty) = ۰$، فاصله $[۰, w_۲]$ یک فاصله پیش‌بینی HCD، در سطح $(۱-\gamma)$ است هرگاه $\int_۰^{w_۲} g_U(w)dw = ۱-\gamma$ و $w_۲ = -\log(\gamma)$. بنابراین، فاصله پیش‌بینی $٪\,(۱-\gamma)۱۰۰$ برای Z عبارت است از $(L_۳^*, U_۳^*)$ که $L_۳^* = Y_m$ و $U_۳^*$ از حل معادله

$$\frac{۱+\theta+\theta y_m e^{-\theta y_m}}{۱+\theta+\theta U_۳^* e^{-\theta U_۳^*}} = \frac{e^{-\theta(U_۳^*-y_m)}}{\gamma},$$

به‌دست می‌آید. در صورت نامعلوم بودن پارامتر θ می‌توان از برآورد ماکسیمم درستنمایی به جای آن استفاده نمود تا فاصله پیش‌بینی تقریبی برای Z به‌دست آید.

۳.۵ فاصله پیش‌بینی بیزی

فاصله پیش‌بینی بیزی (BPI)[۱۵] $٪\,(۱-\gamma)۱۰۰$ برای Z عبارت است از $(L(y_m), U(y_m))$ که مقادیر $L(y_m)$ و $U(y_m)$ کران‌های پایین و بالای فاصله پیش‌بینی بیزی به‌ترتیب از حل معادلات زیر به‌دست می‌آیند.

$$\Pr(Z > L(y_m)|y_m) = \int_{L(y_m)}^{\infty} f_۱(z|y_m;\theta)dz = ۱-\frac{\gamma}{۲},$$
$$\Pr(Z > U(y_m)|y_m) = \int_{U(y_m)}^{\infty} f_۱(z|y_m;\theta)dz = \frac{\gamma}{۲}.$$

با استفاده از نمونه‌های تولید شده توسط الگوریتم متروپلیس–هستینگز و برآورد تابع چگالی پیش‌بینی بیزی $f_۱(z|y_m;\theta)$ رابطه (۸.۴)، کران‌های پایین و بالای فاصله پیش‌بینی به‌ترتیب از حل معادلات

$$\frac{۱}{N-M}\sum_{j=M+۱}^{N}\int_{L(y_m)}^{\infty} f(z|y_m;\theta_j)dz = ۱-\frac{\gamma}{۲},$$
$$\frac{۱}{N-M}\sum_{j=M+۱}^{N}\int_{U(y_m)}^{\infty} f(z|y_m;\theta_j)dz = \frac{\gamma}{۲},$$

به‌دست می‌آیند.

۶ مطالعه شبیه سازی

در این بخش، یک مطالعه شبیه‌سازی به منظور مقایسه و بررسی عملکرد برآوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای کلاسیک و بیزی پیشنهاد شده در این مقاله ارائه می‌گردد. در این شبیه‌سازی $\theta = ۰/۵$ برای مقدار واقعی پارامتر در نظر گرفته می‌شود. تعداد رکوردهای بالا نیز $m = ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ در نظر گرفته شده‌اند و رکورد n–ام یعنی $Z = Y_n$ که $n > m$ است، پیش‌بینی می‌گردد. در راستای برآوردیابی و پیش‌بینی بیزی برای توزیع پیشین دو توزیع در نظر گرفته شده‌اند:

توزیع پیشین۱: $\alpha = \beta = ۰/۰۰۰۱$، توزیع پیشین۲: $\alpha = ۲, \beta = ۴$.

همانطور که مشاهده می‌شود توزیع پیشین ۱ یک توزیع تقریبا ناآگاهی‌بخش و توزیع پیشین ۲ یک توزیع آگاهی‌بخش هستند. الگوریتم شبیه‌سازی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

۱. m رکورد بالا را از توزیع لیندلی اصلاح شده تولید نمایید.

[15] Bayesian prediction interval

۲. برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد گشتاوری و برآوردهای نقطه‌ای بیز تقریبی برای پارامتر تحت تابع‌های زیان توان دوم خطا و لاینکس به کمک دو روش متروپلیس–هستینگز و روش تقریب لیندلی محاسبه نمایید.

۳. پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی و کلاسیک برای رکورد n –ام را تحت تابع‌های زیان توان دوم خطا و لاینکس به کمک روش متروپلیس–هستینگز محاسبه نمایید.

۴. فواصل اطمینان ۹۵ درصد برای پارامتر و فواصل پیش‌بینی ۹۵ درصد برای رکورد n –ام را به‌دست آورید.

۵. گام‌های اول تا سوم را $N^* = ۱۰۰۰$ بار تکرار نمایید سپس ریسک‌های برآورد شده برآوردگرها و پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای را تحت تابع زیان توان دوم خطا و تابع زیان لاینکس به‌دست آورید. همچنین، احتمال پوشش (CP)[۱۶] و متوسط‌های طول فاصله (AW)[۱۷] را برای فواصل اطمینان و فواصل پیش‌بینی بیابید.

ریسک برآورد شده (ER)[۱۸] برآوردگرها تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس به‌ترتیب

$$ER_S(\hat{\theta}) = \frac{۱}{N^*}\sum_{i=۱}^{N^*}(\hat{\theta}_i - \theta)^۲,$$
$$ER_L(\hat{\theta}) = \frac{۱}{N^*}\sum_{i=۱}^{N^*}\left(e^{c(\hat{\theta}_i-\theta)} - c(\hat{\theta}_i - \theta) - ۱\right).$$

محاسبه می‌شوند که در آن $\hat{\theta}_i$ برآورد به‌دست آمده برای θ، در تکرار i امین شبیه‌سازی است. به‌طور مشابه می‌توان ER ها را برای پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای نیز محاسبه نمود. نتایج عددی شبیه‌سازی برای برآوردگرهای نقطه‌ای در جدول ۲ ارائه شده است. لازم به ذکر است که برای برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردگرهای گشتاوری هر دو نوع ریسک برآورد شده یعنی ER_S و ER_L با $c = ۰/۵$ محاسبه شده‌اند، اما در رابطه با برآوردگرهای بیز تقریبی تنها ریسک برآورد شده متناظر با تابع زیان مربوطه محاسبه شده است. نتایج عددی برای فواصل اطمینان پارامتر در جدول ۳ گزارش شده است. جدول‌های ۴ و ۵ در بردارنده نتایج به‌ترتیب برای پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای هستند. توجه شود که برای پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک تنها ریسک برآورد شده ER_S محاسبه شده و برای پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی تنها ریسک برآورد شده متناظر با تابع زیان مربوطه محاسبه شده است.

در جدول ۲ مشاهده می‌شود که تحت توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش (توزیع پیشین ۱) و توزیع پیشین آگاهی‌بخش (توزیع پیشین ۲)، برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی به‌دست آمده توسط روش تقریب لیندلی عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای نقطه‌ای بیز تقریبی متناظر به‌دست آمده توسط روش متروپلیس–هستینگز دارند. در جدول ۲ ملاحظه می‌شود که در همه موارد برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین۲ بهتر از برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردگرهای گشتاوری متناظرشان عمل کرده‌اند زیرا برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۲، ER های کوچک‌تری دارند . همچنین، تحت توزیع پیشین ۱، ER_L های برآوردگرهای بیز تقریبی کمتر از ER برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و ER_S برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی کمتر از ER های برآوردگرهای بیز تقریبی می‌باشند. ER های برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۱ بیشتر از ER های متناظر برآوردگرهای بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۲ بیشتر هستند. همچنین، در همه موارد ER های برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی کمتر از ER های متناظر با برآوردگرهای گشتاوری می‌باشند و این نشان می‌دهد که برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی بهتر از برآوردگرهای گشتاوری متناظرشان عمل کرده‌اند .

با توجه به جدول ۳ و با مقایسه فواصل اطمینان مختلف، ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد رکوردها میانگین طول فواصل اطمینان کاهش می‌یابد. میانگین طول فواصل اطمینان بیزی کمتر از میانگین طول فواصل اطمینان مجانبی، فواصل اطمینان بر اساس آزمون نسبت درستنمایی و فواصل اطمینان محوری است. میانگین طول فواصل اطمینان بیزی به‌دست آمده از توزیع پیشین آگاهی‌بخش کمتر از میانگین طول فواصل اطمینان بیزی به‌دست آمده از توزیع پیشین ناآگاهی‌بخش است. فواصل اطمینان بیزی و فواصل اطمینان بر اساس توزیع مجانبی برآورد درستنمایی ماکزیمم به‌ترتیب کمترین میانگین طول فواصل اطمینان را دارا هستند.

با توجه به جدول ۴ مشاهده می‌شود که در میان پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای کلاسیک، ER_S های پیش‌بینی‌کننده ناریب کمتر از ER_S پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک دیگر هستند. ER های پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۲ کمتر از ER های متناظر پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی تحت توزیع پیشین ۱ می‌باشد. با مقایسه پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک و پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی مشاهده می‌شود که پیش‌بینی‌کننده ناریب و پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی با توزیع پیشین آگاهی‌بخش نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های دیگر

[16] Coverage Probability
[17] Average Width
[18] Estimated Risk

به‌ترتیب عملکرد بهتری دارند. همچنین، پیش‌بینی‌کننده ماکسیمم درستنمایی در همه موارد نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های دیگر عملکرد خوبی ندارد.

با توجه به جدول ۵ و با مقایسه فواصل پیش‌بینی مختلف، ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد رکوردها، میانگین طول فواصل پیش‌بینی کاهش می‌یابد. میانگین طول فواصل پیش‌بینی بیزی به‌دست آمده از توزیع پیشین ۲ کمتر از میانگین طول فواصل پیش‌بینی بیزی به‌دست آمده از توزیع پیشین ۱ می‌باشد. همچنین، فواصل پیش‌بینی HCD و فواصل پیش‌بینی محوری به‌ترتیب کمترین میانگین طول فواصل پیش‌بینی را نسبت به فواصل پیش‌بینی بیزی دارا هستند.

جدول ۲: ER های برآوردگرهای بیز تقریبی و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی

					روش MCMC				روش تقریب لیندلی			
					توزیع پیشین ۱		توزیع پیشین ۲		توزیع پیشین ۱		توزیع پیشین ۲	
	$\widehat{\theta}_{MBE}$ $c=0.5$		$\widehat{\theta}_{MLE}$ $c=0.5$		θ_{BS}	θ_{BL} $c=0.5$	θ_{BS}	θ_{BL} $c=0.5$	θ_{BLS}	θ_{BLL} $c=0.5$	θ_{BLS}	θ_{BLL} $c=0.5$
m	ER_S	ER_L	ER_S	ER_L	ER_S	ER_L	ER_S	ER_L	ER_S	ER_L	ER_S	ER_L
۳	۰/۲۵۲۴	۰/۰۴۶۹	۰/۲۲۰۶	۰/۰۳۹۶	۰/۲۶۹۳	۰/۰۳۰۲	۰/۰۳۵۷	۰/۰۰۴۱	۰/۲۳۳۶	۰/۰۲۸۲	۰/۰۳۵۲	۰/۰۰۳۵
۴	۰/۱۳۵۲	۰/۰۲۹۹	۰/۱۳۴۵	۰/۰۲۰۹	۰/۱۵۰۱	۰/۰۱۷۵	۰/۰۳۲۸	۰/۰۰۳۸	۰/۱۴۱۰	۰/۰۱۶۹	۰/۰۳۱۳	۰/۰۰۲۴
۵	۰/۱۰۳۵	۰/۰۱۴۹	۰/۰۸۸۱	۰/۰۱۲۳	۰/۰۹۵۷	۰/۰۱۱۱	۰/۰۳۰۷	۰/۰۰۳۶	۰/۰۹۴۲	۰/۰۱۰۶	۰/۰۱۶۷	۰/۰۰۲۱
۶	۰/۰۹۸۶	۰/۰۱۴۰	۰/۰۸۳۸	۰/۰۱۲۰	۰/۰۹۴۲	۰/۰۱۱۰	۰/۰۲۹۸	۰/۰۰۳۵	۰/۰۹۱۷	۰/۰۱۰۳	۰/۰۱۴۸	۰/۰۰۱۶
۷	۰/۰۶۳۰	۰/۰۱۲۷	۰/۰۵۵۰	۰/۰۰۹۷	۰/۰۷۱۴	۰/۰۰۸۶	۰/۰۲۹۰	۰/۰۰۳۴	۰/۰۶۹۴	۰/۰۰۸۲	۰/۰۱۴۸	۰/۰۰۱۴

جدول ۳: طول و درصد پوشش فواصل اطمینان برای مقادیر مختلف رکوردی

m		MLE	LRT	pivot	HPD		m		MLE	LRT	pivot	HPD	
					توزیع پیشین ۱	توزیع پیشین ۲						توزیع پیشین ۱	توزیع پیشین ۲
۳	AW	۱/۲۹۶	۱/۳۹۰	۱/۵۷۴	۱/۲۸۷	۰/۸۷۱	۶	AW	۰/۹۱۴	۰/۹۲۰	۱/۰۲۵	۰/۸۸۳	۰/۷۱۹
	CP	۰/۹۱۶	۰/۹۵۴	۰/۹۷۴	۰/۹۵۲	۰/۹۸۴		CP	۰/۹۴۸	۰/۹۵۳	۰/۹۶۲	۰/۹۵۱	۰/۹۷۹
۴	AW	۱/۱۷۱	۱/۲۰۹	۱/۲۵۲	۱/۱۴۷	۰/۸۲۷	۷	AW	۰/۸۶۳	۰/۸۶۹	۰/۹۶۱	۰/۸۳۸	۰/۶۹۵
	CP	۰/۹۵۱	۰/۹۵۲	۰/۹۷۰	۰/۹۴۸	۰/۹۸۴		CP	۰/۹۶۲	۰/۹۵۱	۰/۹۷۰	۰/۹۵۵	۰/۹۷۸
۵	AW	۱/۰۱۹	۱/۰۳۱	۱/۱۵۹	۰/۹۸۳	۰/۷۶۴							
	CP	۰/۹۵۵	۰/۹۵۶	۰/۹۶۸	۰/۹۵۱	۰/۹۸۱							

جدول ۴: ER های پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای کلاسیک و بیزی برای $Z = Y_n$.

		پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک			پیش‌بینی‌کننده‌های بیزی			
					توزیع پیشین ۱		توزیع پیشین ۲	
m	n	MLP	BUP	CMP	Z_{Bs}	Z_{BL} $c=0.5$	Z_{Bs}	Z_{BL} $c=0.5$
		ER_S	ER_S	ER_S	ER_S	ER_L	ER_S	ER_L
۳	۴	۶/۶۲۷۵	۳/۳۵۷۶	۴/۱۳۳۹	۵/۲۲۴۳	۰/۳۴۶۸	۳/۷۴۸۴	۰/۳۳۶۴
	۵	۸/۳۲۲۱	۴/۳۹۲۱	۴/۹۳۱۰	۵/۳۶۶۹	۰/۶۴۵۶	۴/۶۲۸۷	۰/۶۱۲۷
۵	۶	۴/۳۲۸۳	۲/۵۱۸۳	۲/۸۰۴۰	۲/۸۶۲۸	۰/۲۷۷۳	۲/۵۳۹۱	۰/۲۷۳۱
	۷	۴/۷۷۸۴	۲/۷۸۸۲	۲/۸۴۰۵	۲/۹۳۰۶	۰/۵۲۷۳	۲/۸۳۵۱	۰/۵۰۱۶
۷	۸	۳/۴۲۲۸	۲/۱۲۵۴	۲/۵۹۵۲	۲/۶۲۰۳	۰/۲۱۸۵	۲/۴۳۴۴	۰/۲۱۴۱
	۹	۳/۵۹۳۱	۲/۲۳۳۴	۲/۶۳۳۸	۲/۶۶۷۳	۰/۲۲۳۵	۲/۴۴۸۹	۰/۲۲۵۳

۷ مثال کاربردی

مثال ۱.۷. داده‌ها میزان کل بارندگی سالانه (بر حسب اینچ) از سال ۲۰۰۶ تا ۲۰۲۴ است که در مرکز مدنی لس‌آنجلس [19] ثبت شده و از طریق وب‌سایت *www.laalmanac.com/weather/we08aa.phd* قابل دسترس است. داده‌ها عبارتند از:

۹/۶۵ ۸/۵۲ ۶/۰۸ ۵/۸۵ ۸/۶۹ ۲۰/۲۰ ۱۶/۳۶ ۹/۰۸ ۱۳/۵۳ ۳/۲۱
۸/۱۲ ۲۵/۱۹ ۲۸/۴۰ ۱۲/۴۰ ۵/۸۲ ۱۴/۸۶ ۱۸/۸۲ ۴/۷۹ ۱۹

[19] Los Angeles Civic Center

جدول ۵: طول و درصد پوشش فواصل اطمینان برای مقادیر مختلف رکوردی

		pivot	HCD	BPI	
				توزیع پیشین ۱	توزیع پیشین ۲
m	n	AW(CP)	AW(CP)	AW(CP)	AW(CP)
۳	۴	۷٫۲۷۲۰(۰٫۹۵۳)	۵٫۹۳۷۵(۰٫۹۵۳)	۱۰٫۵۳۲۶(۰٫۹۵۶)	۹٫۸۷۳۰(۰٫۹۶۳)
	۵	۱۰٫۳۸۱۸(۰٫۹۵۷)	۹٫۱۴۵۷(۰٫۹۵۵)	۱۱٫۴۳۶۱(۰٫۹۵۷)	۱۱٫۶۶۴۲(۰٫۹۶۰)
۵	۶	۷٫۰۷۶۹(۰٫۹۵۳)	۵٫۷۵۳۳(۰٫۹۵۳)	۷٫۴۰۴۷(۰٫۹۵۳)	۷٫۵۰۳۳(۰٫۹۶۰)
	۷	۷٫۱۶۱۵(۰٫۹۸۰)	۵٫۹۳۸۹(۰٫۹۵۰)	۹٫۳۵۲۱(۰٫۹۶۰)	۸٫۶۸۱۲(۰٫۹۸۰)
۷	۸	۴٫۹۳۰۲(۰٫۹۴۹)	۴٫۰۹۹۷(۰٫۹۴۶)	۵٫۳۹۰۳(۰٫۹۵۶)	۵٫۱۷۷۲(۰٫۹۶۳)
	۹	۵٫۵۶۶۴(۰٫۹۵۰)	۵٫۳۴۰۳(۰٫۹۱۰)	۸٫۱۸۵۴(۰٫۹۸۰)	۸٫۱۸۰۲(۰٫۹۸۰)

برای داده‌های فوق، مقادیر معیار اطلاعات آکایک *(AIC)*[20]، معیار اطلاعات بیزی *(BIC)*[21]، مقادیر آماره کلموگروف–اسمیرنوف *(K-S)*[22] و مقادیر p مربوطه به آن برای توزیع‌های لیندلی اصلاح شده، لیندلی، نمایی محاسبه شده‌اند. همچنین، پارامترهای مجهول مدل‌های مربوطه با روش حداکثر درستنمایی تخمین زده شده است. نتایج در جدول ۶ آورده شده است. جدول ۶ نشان می‌دهد که مقادیر *logL*-، *AIC*، *BIC* و آماره *K-S* برای توزیع لیندلی اصلاح شده نسبت به توزیع‌های لیندلی و نمایی کمترین مقدار به‌دست آمده است. همچنین، p–مقدار برای توزیع لیندلی اصلاح شده نسبت به توزیع‌های لیندلی و نمایی بیشترین مقدار محاسبه شده است. بنابراین، توزیع لیندلی اصلاح شده نسبت به توزیع‌های لیندلی و نمایی بهتر می‌کند. با توجه به جدول ۶ و با استفاده از آزمون کلموگروف– اسمیرنف، مناسب بودن توزیع لیندلی اصلاح شده با برآورد ماکسیم درستنمایی محاسبه شده $\hat{\theta} = ۰٫۰۹۴۶$ برای داده‌ها مورد بررسی قرار گرفت و مقدار آماره آزمون و p – مقدار متناظر با آن به‌ترتیب ۰٫۱۵۰۹ و ۰٫۷۴۴۱ به‌دست آمدند که نشان می‌دهد $ML(\hat{\theta})$ به خوبی به این داده‌ها برازش می‌شود. مقدارهای رکوردهای بالای مستخرج از داده‌های عبارتند از:

جدول ۶: مقادیر برآورد شده logL–، AIC، BIC، آماره K-S و p-مقدار

توزیع‌ها	$\hat{\theta}$	-logL	AIC	BIC	K-S	p-مقدار
لیندلی اصلاح شده	۰٫۰۹۴۶	۶۳٫۵۴۶	۱۲۹٫۰۹۲	۱۳۰٫۰۳۶	۰٫۱۵۰۹	۰٫۷۴۴۱
لیندلی	۰٫۱۴۸۹	۶۳٫۵۵۲	۱۲۹٫۱۰۴	۱۳۰٫۰۴۹	۰٫۱۵۷۳	۰٫۶۹۶۶
نمایی	۰٫۰۷۹۶	۶۹٫۶۲۹	۱۴۱٫۲۵۹	۱۴۲٫۲۰۴	۰٫۲۶۵۵	۰٫۱۱۴۴

۳٫۲۱ ۱۳٫۵۳ ۱۶٫۳۶ ۲۰٫۲۰ ۲۸٫۴۰

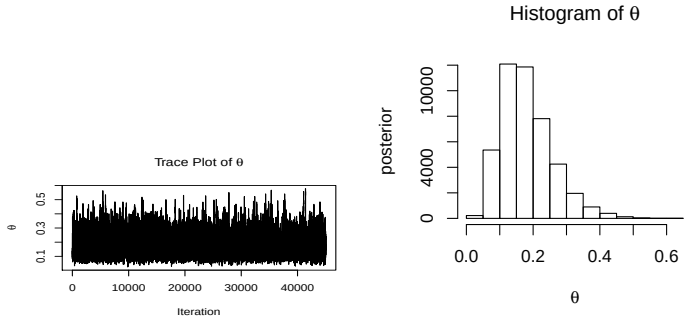
بر اساس داده‌های رکوردی، برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآورد گشتاوری پارامتر θ، به‌ترتیب $\hat{\theta}_{MLE} = ۰٫۱۷۴۷$ و $\hat{\theta}_{MBE} = ۰٫۱۹۰۸$ محاسبه شده‌اند. برای برآوردهای بیزی از روش *MCMC*، الگوریتم متروپلیس–هستینگز و روش تقریب لیندلی استفاده شده است. همچنین، برآوردهای بیزی تحت تابع زیان مربع خطا و تابع زیان لاینکس به ازای مقادیر $c = (-۱, ۰٫۰۰۵)$ محاسبه شده‌اند. از آنجایی که هیچ اطلاعی درباره توزیع پیشین نداریم، برای محاسبه برآوردها و پیش‌بینی‌های بیزی از توزیع پیشین تقریبا ناآگاهی بخش، $\alpha = \beta = ۰٫۰۰۰۱$ استفاده شده است. در الگوریتم متروپلیس–هستینگز مقدار اولیه $\theta^{(۰)}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی و واریانس توزیع پیشنهادی $S^۲_\theta = ۰٫۰۰۵۴$ معکوس اطلاع فیشر در نظر گرفته شده است. با استفاده از الگوریتم فوق نمونه‌ای به حجم $N = ۵۰۰۰۰$ تا از θ ها با $S^۲_\theta = ۰٫۰۰۵۴$ و درصد پذیرش ٪ ۶۸ تولید شده است. برای از بین بردن اثر نقاط آغازین، $M = ۵۰۰۰$ نمونه اولیه حذف شده است. برآوردهای بیز بر اساس روش *MCMC* تحت تابع زیان مربع خطا $\hat{\theta}_{BS} = ۰٫۱۸۱۵$ و تحت تابع زیان لاینکس با $c = -۱$، $\hat{\theta}_{BL} = ۰٫۱۸۴۷$ و برای $c = ۰٫۰۰۵$، $\hat{\theta}_{BL} = ۰٫۱۸۱۵$ به‌دست می‌آیند. همچنین، برآورد بیز بر اساس روش تقریب لیندلی تحت تابع زیان مربع خطا $\hat{\theta}_{BS} = ۰٫۱۸۱۷$ و تحت تابع زیان لاینکس با $c = -۱$، $\hat{\theta}_{BL} = ۰٫۱۸۴۵$ و برای $c = ۰٫۰۰۵$، $\hat{\theta}_{BL} = ۰٫۱۸۱۶$ محاسبه شده‌اند. برآورد فاصله‌ای برای پارامتر θ براساس توزیع مجانبی *MLE* $(۰٫۰۲۵۶, ۰٫۳۲۳۹)$، براساس آزمون نسبت درستنمایی ماکزیمم $(۰٫۰۷۰۷, ۰٫۳۷۶۷)$، بر اساس کمیت محوری $(۰٫۰۵۴۵, ۰٫۴۰۶۵)$ و فاصله اطمینان بیزی $(۰٫۰۶۹۵, ۰٫۳۵۵۲)$ محاسبه شده‌اند. پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای مختلفی برای رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n$ به‌دست آمده است. نتایج در جدول ۷ گزارش شده است. هیستوگرام زنجیره دنباله θ های به‌دست آمده از الگوریتم متروپلیس–هستینگز از

[20] Akaike information criterion
[21] Bayesian Information Criterion
[22] Kolmogrov-Smirnov

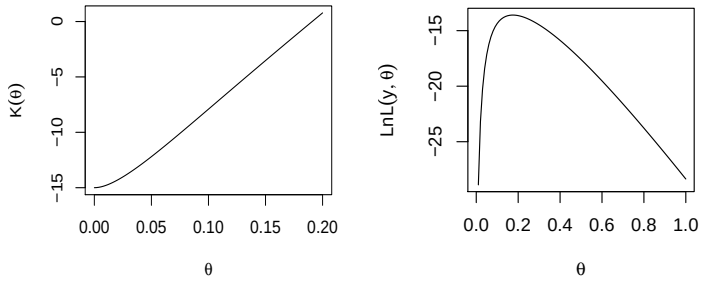
توزیع پیشین تقریبا ناآگاهی بخش در شکل ۱ ارائه شده است. این نمودار نشان می‌دهد که انتخاب توزیع نرمال به عنوان تقریبی از تابع چگالی پسین و توزیع پیشنهادی انتخابی کاملا مناسب است. برای بررسی همگرایی زنجیره‌های تولید شده در الگوریتم از نمودار اثر استفاده شده است. این نمودار نشان می‌دهد که مقادیر θ های تولید شده در الگوریتم متروپلیس–هستینگز به طور تصادفی در اطراف میانگین پراکنده شده‌اند. این نمودار همگرایی در الگوریتم را نشان می‌دهد. توجه شود در مثال فوق، برای بررسی وجودیت و یکتایی برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر θ، نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی $L(\mathbf{y}|\theta)$ رسم شده است. شکل ۲ نشان می‌دهد که تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی در بازه $(۰, \infty)$ یک تابع تک مدی است و لذا برآورد ماکسیمم درستنمایی وجود دارد و یکتاست. همچنین برای اثبات و وجودیت برآوردگر گشتاوری *(MBE)* معادله (۵.۲) را برابر با $K(\theta)$ در نظر گرفته و برای مثال فوق، نمودار تابع $K(\theta)$ رسم شده است. شکل ۲ نیز نشان می‌دهد که تابع $K(\theta)$ در بازه $(۰, \infty)$ یک تابع صعودی از مقداری منفی به مقداری مثبت است. لذا برآوردگر گشتاوری که از حل معادله $K(\theta) = ۰$ بدست می‌آید، وجود دارد و یکتاست.

جدول ۷: پیش‌بینی‌کننده‌های نقطه‌ای و فاصله‌ای مختلفی برای رکورد بالای مشاهده نشده

n	PMLE	MLP	CMP	BUP	SEL	LINEX $c = ۰/۰۵$	BPI	HCD روش	Pivotal روش
۶	۰/۲۰۸۱	۳۳/۱۵۲	۳۲/۲۹۷	۳۴/۰۴۹	۳۴/۸۵۹	۳۴/۷۱۷	(۲۸/۵۳, ۵۵/۵۲)	(۲۸/۴۰, ۴۵/۳۹)	(۲۸/۵۴, ۴۹/۳۵)
۷	۰/۲۰۸۴	۳۷/۹۲۶	۳۷/۸۸۲	۳۹/۷۳۱	۴۱/۲۹۷	۴۰/۹۷۷	(۲۹/۶۴, ۷۲/۰۵)	(۲۸/۶۳, ۵۵/۵۱)	(۲۹/۷۵, ۶۰/۱۲)
۸	۰/۲۰۸۷	۴۲/۶۹۹	۴۳/۵۵۶	۴۵/۴۳۱	۴۸/۱۳۳	۴۷/۵۶۸	(۳۱/۴۰, ۸۷/۱۶)	(۳۰/۱۰, ۶۴/۸۷)	(۳۱/۸۷, ۶۹/۵۸)
۹	۰/۲۰۸۸	۴۷/۴۸۶	۴۹/۲۵۷	۵۱/۱۴۲	۵۴/۳۹۳	۵۳/۵۸۰	(۳۳/۵۸, ۹۲/۷۱)	(۳۲/۴۰, ۷۳/۷۲)	(۳۴/۵۴, ۷۸/۴۱)
۱۰	۰/۲۰۸۸	۵۲/۲۷۹	۵۴/۹۷۰	۵۶/۸۵۸	۶۰/۸۶۵	۵۹/۷۶۶	(۳۵/۷۸, ۹۷/۳۰)	(۳۵/۲۰, ۸۲/۲۱)	(۳۷/۵۷, ۸۶/۸۵)



شکل ۱: نمودار هیستوگرام و نمودار اثر مربوط به الگوریتم متروپلیس–هستینگز



شکل ۲: نمودار تابع لگاریتم ماکسیمم درستنمایی $L(\mathbf{y}|\theta)$ و نمودار $K(\theta)$

۸ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، ابتدا، مسأله‌ی برآوردیابی کلاسیک و بیزی پارامتر توزیع لیندلی اصلاح شده بر اساس داده‌های رکوردی مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به این که برآوردهای بیزی پارامتر دارای فرم بسته‌ای نیستند، برای برآوردهای بیزی از روش MCMC و الگوریتم متروپلیس–هستینگز و روش تقریب لیندلی استفاده شده است. با توجه به روش شبیه‌سازی، برآوردگرهای بیز تقریبی به‌دست آمده توسط روش تقریب لیندلی عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای بیز تقریبی به‌دست آمده توسط روش متروپولیس–هستینگز دارند. همچنین، برآوردگرهای بیز عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و برآوردگرهای گشتاوری دارند و زمانی که اطلاعات پیشین در دسترس می‌باشد توصیه می‌شود که از برآوردگرهای بیز بهره بگیرند. همچنین، با مقایسه فواصل اطمینان مختلف، ملاحظه می‌شود که فواصل اطمینان بیزی کمترین میانگین طول فواصل اطمینان را نسبت به دیگر فواصل دارا هستند. بنابراین، در بخش برآوردگرهای مختلف فاصله ای برای پارامتر θ توصیه می شود که از فواصل اطمینان بیزی استفاده شود.

در ادامه، بر مبحث پیش‌بینی نقطه‌ای و فاصله‌ای برای رکورد بالای مشاهده نشده به کمک تکنیک‌های کلاسیک و بیزی تمرکز کردیم. با توجه به روش شبیه‌سازی، به‌طور کلی، با مقایسه پیش‌بینی‌کننده‌های کلاسیک و پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی مشاهده می‌شود که پیش‌بینی‌کننده نااریب و پیش‌بینی‌کننده‌های بیز تقریبی با توزیع پیشین آگاهی‌بخش نسبت به پیش‌بینی‌کننده‌های دیگر به‌ترتیب عملکرد بهتری دارند. همچنین، فواصل پیش‌بینی HCD و فواصل پیش‌بینی محوری به‌ترتیب کمترین میانگین طول فواصل پیش‌بینی را دارا هستند. در یک مثال کاربردی ملاحظه شد که فاصله‌های پیش‌بینی کلاسیک و بیزی محاسبه شده، مقادیر پیش‌بینی کلاسیک و بیزی برای پیش‌بینی رکورد بالای مشاهده نشده $Z = Y_n, n > m$، را بر اساس داده‌های رکوردی در بر دارند. از جمله موضوعاتی که در آینده می‌تواند مورد تحقیق قرار گیرند استنباط خطی (برآورد و پیش‌بینی) برای آماره‌های رکوردی از توزیع لیندلی اصلاح شده می‌باشد. در پایان لازم به ذکر است که تمامی محاسبات با نرم افزار آماری R (تیم هسته‌ای R، [۲۳]) و بسته نرم افزاری (MHadaptive)، جیورس [۱۴] انجام شده‌اند.

فهرست منابع

[1] Ahsanullah, M., 1995. Record Statistics, Commack, NewYork: Nova Science Publishers, Inc.

[2] Alotaibi, R. Nassar, M. and Elshahhat, A., 2023. Estimations of modified Lindley parameters using progressive type-II censoring with applications, *Axioms, 12*, 171, pp.1-21. doi.org/10.3390/axioms12020171

[3] Arnold, B.C. Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N., 1998. Records, Wiley, New York.

[4] Arnold, B.C. and Press, S. J., 1989. Bayesian estimation and prediction for Pareto data, *Journal of the American Statistical Association*, 84, pp.1079-1084. doi:10.1080/01621459.1989.10478875.

[5] Asgharzadeh, A., Fallah, A., Raqab, M. Z. and Valiollahi, R., 2018. Statistical inference based on Lindley record data, *Statistical Papers*, 59, pp.759-779. doi: 10.1007/s00362-016-0788-1

[6] Asgharzadeh, A., Ng, H. K. T., Valiollahi, R. and Azizpour, M., 2017. Statistical Inference for Lindley Model based on Type II Censored Data, *Journal of Statistical Theory and Applications*, 16, pp.178–197. doi: 10.2991/jsta.2017.16.2.4

[7] Basak, P. and Balakrishnan, N., 2003. Maximum likelihood prediction of future record statistic, *Mathematical and statistical methods in reliability*. In B.H. Lindquist, and K.A. Doksum (Eds) Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics, 7, pp.159-175. doi:10.1142/9789812795250-0011

[8] Casella, G. and Berger, R. L., 2004. Statistical Inference, 2nd edition, Duxbury, California.

[9] Chandler, K.N., 1952. The distribution and frequency record values, *Journal of the Royal Statistical Society, B14*, pp.220-228. doi:10.1111/j.2517-6161.1952.tb00115.x

[10] Chen, M.H. and Shao, Q.M., 1999. Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 8, pp.69-92. doi:10.1080/10618600.1999.10474802

[11] Chesneau, C. Tomy, L. and Gillariose, J., 2021. A new modified Lindely distribution with properties and applications, *Journal of Statistics and Management Systems, 7*(24), pp.1383-1403. doi:10.1080/09720510.2020.1824727

[12] Chesneau, C., Tomy, L., Gillariose, J. and Jamal, F., 2020, The inverted modified Lindely distribution, *Journal of Statistics Theory and Practice, 14*(46), pp.1-17. doi:10.1007/s42519-020-00116-5

[13] Chesneau, C., Tomy, L. and Jose, M., 2022, Power modified Lindley distribution: theory and applications, *Journal of Mathematical Extension, 16*(6), pp.1-32. doi.org/10.30495/JME.2022.1798

[14] Chivers, C., 2012. MHadaptive: General Markov Chain Monte Carlo for Bayesian Inference using adaptive Metropolis-Hastings sampling, R package version 1.1-8. http://CRAN.R-project.org/package=MHadaptive.

[15] Ghitany, M. E., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D. K. and Husain, H. A., 2011, A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data, *Mathematics and Computers in Simulation, 81*, pp.1190-1201. doi.org/10.1016/j.matcom.2010.11.005

[16] Ghitany, M.E., Atieh, B., and Nadarajah, S., 2008, Lindley distribution and its applications, *Journal of Mathematical Computation and Simulation, 78*, pp.493-506. doi:10.1016/j.matcom.2007.06.007

[17] Kharazmi, O., Kumar, D. and Dey, S., 2023, Power modified Lindley distribution: properties, classical and Bayesian estimation and regression model with applications, *Austrian Journal of Statistics, 52*(3), pp.71-95. doi.org/10.17713/ajs.v52i3.1386

[18] Krishna, H. and Kumar, K., 2011. Reliability estimation in Lindely distribution with progressively type II right censored sample, *Journal of Mathematical Computation and Simulation, 82*, pp.281-294. doi:10.1016/j.matcom.2011.07.005

[19] Lawless, J. L., 2003. Statistical Models and Methods for Lifetime Data, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York.

[20] Lindley, D.V., 1958. Fiducial Distribution and Bayes Theorem, *Journal of the Royal Statistical Society, 20*(1), pp.102-107.

[21] Lindley, D. V., 1980. Approximate Bayesian methods. *Trabajos de Estadistica Y de Investigacion Operativa*, 31, pp.223-245. doi:10.1007/BF02888353

[22] Raqab, M.Z. Alkhalfan, L.A. Bdair, O.M. and Balakrishnan, N. 2019. Maximum likelihood prediction of records from 3-parameter Weibull distribution and some approximations, *Journal of Computational and Applied Mathematics, 356*(15), pp.118-132. doi:10.1016/j.cam.2019.02.006

[23] R Core Team, 2019. R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

[24] Robert, C. P. and Casella, G., 2004. Monte Carlo statistical methods, 2nd Ed, Springer-Verlag, New York.

[25] Ross, S.M., 2010. Introduction to Probability Models, 10th edition. Academic, Amsterdam.

[26] Singh, S. Dey, S. and Kumar, D., 2020. Statistical inference based on generalized Lindley record values, *Journal of Applied Statistics, 47*(9), pp.1543-1561. doi:10.1080/02664763.2019.1683153

[27] Tiku, M. L. and Akkaya, A. D., 2004. Robust Estimation and Hypothesis Testing, New Age International, New Delhi.

[28] Varrian, H. R., 1975. A Bayesian approach to real estate assessment, *Studies in Bayesian Econometrics and Statistics in Honor of Leonard J. Savage*, Amsterdam: North Holland, pp.195-208. CRID: 1572824500518986496

[29] Zakerzadeh, H. and Dolati, A., 2009. Generalized Lindely distribution, *Journal of Mathematical Extension*, 3, pp.13-25.

[30] Zellner, A., 1986. Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss function, *Journal of the American Statistical Association*, 81, pp.418-485. doi:10.1080/01621459.1986.10478289

Estimation and Prediction for the Modified Lindley Distribution Based on Record Data

Adeleh Fallah[(1)] [23]

[(1)] Department of Statistics, University of Payame Noor, Tehran, Iran

Communicated by: Gholamreza Mohtashami Borzadaran

Received: 4 March 2025 Accepted: 9 December 2025

Abstract: In this paper, estimation and prediction for the modified Lindley distribution are studied based on records. Estimation and prediction for the modified Lindley distribution are based on classical and Bayesian approaches. Bayesian estimation and prediction are based on the symmetric squared error loss function and the asymmetric Linex loss function. As it seems that the integrals of the Bayes estimates do not possess closed forms, the Metropolis-Hastings and Lindley approximation methods are applied to approximating these integrals. A simulation study and an application example are presented to evaluate and compare the performance of different estimation and prediction methods. Simulation results indicate that the Bayesian estimators obtained under the informative prior distribution perform better than the maximum likelihood estimators and the moment-Based estimators. Also, Bayesian confidence intervals have the lowest average confidence interval length compared to other confidence intervals. Among Bayesian and classical predictors, the unbiased predictor and the Bayesian predictor with an informative prior distribution, respectively, perform better than other predictors. Also, HCD prediction intervals and pivot prediction intervals have the lowest average prediction interval length compared to Bayesian prediction intervals, respectively.

Keywords: Modified Lindley distribution, Record data, Estimation, Prediction, Metropolis-Hastings algorithm, Lindley's approximation.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[23] Corresponding author
E-mail addresses: (A. Fallah) adelehfallah@pnu.ac.ir