مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۷۴–۹۲

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2025.49192.2355

نقاط بحرانی یک کلاس از تابعک‌ها در یک فضای سوبولوف

سعید شکوه [(۱)] [۱]، قاسم علیزاده افروزی [(۲)]

[(۱)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبدکاووس، گنبدکاووس، ایران
[(۲)] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

دبیر مسئول: امیرحسین صنعت پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۰/۰۴

چکیده: در این مقاله، به بررسی وجود نقاط بحرانی برای یک رده خاص از تابعک‌ها با به‌کارگیری قضیه‌های کمینه‌سازی پرداخته می‌شود. این نقاط بحرانی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند، چرا که با جواب‌های ضعیف مسائل انتگرال–دیفرانسیل همراه با شرایط مرزی دیریکله در ارتباط هستند. در واقع با استفاده از روش تغییراتی، ابتدا وجود یک نقطه بحرانی برای تابعکی با یک پارامتر کنترلی، و سپس وجود دنباله‌ای از نقاط بحرانی برای یک تابعک با دو پارامتر کنترلی مطالعه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال–دیفرانسیل، نقاط بحرانی، جواب ضعیف.

رده‌بندی ریاضی: 45J05; 35B38; 34B15; 46E35

۱ مقدمه

تابعک‌ها، توابعی هستند که ورودی‌شان خود یک تابع و خروجی‌شان یک عدد حقیقی یا مختلط است. در این پژوهش، تابعک‌ها به عنوان ابزاری برای مطالعه مسائل انتگرال–دیفرانسیل استفاده می‌شوند. به عبارتی، نقاط بحرانی این تابعک‌ها با جواب‌های ضعیف کلاسی از معادلات انتگرال دیفرانسیل با شرایط مرزی نظیر هستند. لازم به یادآوری است که جواب‌های ضعیف ممکن است به طور کلاسیک مشتق‌پذیر نباشند، اما در یک چارچوب ضعیف‌تر در معادله صادق هستند. مسئله‌هایی که در این مقاله مطالعه خواهیم کرد دستگاه‌هایی متشکل از n معادله انتگرال–دیفرانسیل می‌باشند که شرایط مرزی دیریکله [۲] کنار آن‌ها در نظر گرفته شده است. این دستگاه‌ها به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} L(\psi_i) = \lambda A_{\psi_i}(x, \psi_1, \cdots, \psi_n) + \mu B_{\psi_i}(x, \psi_1, \cdots, \psi_n), & \text{in } (\alpha, \beta), \\ \psi_i(\alpha) = 0 = \psi_i(\beta), \end{cases} \qquad (E_{\lambda,\mu})$$

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(S. Shokooh) shokooh@gonbad.ac.ir and sd.shokooh@gmail.com,
(G.A. Afrouzi) afrouzi@umz.ac.ir

[2] Dirichlet

$$\begin{cases} L(\psi_i) = \lambda A_{\psi_i}(x, \psi_1, \cdots, \psi_n), & \text{in } (\alpha, \beta), \\ \psi_i(\alpha) = 0 = \psi_i(\beta), \end{cases} \tag{E_λ}$$

که $1 \leq i \leq n$، پارامتر λ مثبت، پارامتر μ و اعداد $\alpha < \beta$ نامنفی هستند. هم‌چنین، $A : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی است که به‌ازای $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$، $A(\cdot, \xi_1, \cdots, \xi_n)$ در $[\alpha, \beta]$ پیوسته، و برای $x \in [\alpha, \beta]$، $A(x, \cdot, \cdots, \cdot)$ در $\mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر است. به‌علاوه، به‌ازای هر $x \in [\alpha, \beta]$، $A(x, 0, \cdots, 0) = 0$ و برای هر $\varsigma > 0$،

$$\sup_{|\xi| \leq \varsigma} \sum_{i=1}^{n} |A_{\xi_i}(\cdot, \xi)| \in L^1([\alpha, \beta]).$$

توجه داریم A_{ξ_i} مشتق جزیی A نسبت به ξ_i است. تابعک B روی $[\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$ طوری تعریف می‌شود که برای هر $\xi \in \mathbb{R}^n$، $B(\cdot, \xi)$ در $[\alpha, \beta]$ اندازه‌پذیر، و برای همه $x \in [\alpha, \beta]$، $B(x, \cdot, \cdots, \cdot)$ در $\mathbb{R}^n$، C^1 مشتق‌پذیر است. به‌علاوه، برای هر $x \in [\alpha, \beta]$، $B(x, 0, \cdots, 0) = 0$.
عملگر L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\psi_i) := -(y_i(x)\psi_i')' + \sigma_i z_i(x) \int_\alpha^\beta z_i(x)\psi_i \, dx$$

که در آن به‌ازای $1 \leq i \leq n$، $z_i \in L^2([\alpha, \beta])$، $z_i \not\equiv 0$، $y_i \in C^1([\alpha, \beta])$ به‌طوری‌که

$$y_i^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x \in [\alpha, \beta]} y_i(x) > 0,$$

و اعداد حقیقی σ_i در تمام نتایج این مقاله در شرط زیر صادق است

$$\sigma_i > -\frac{\pi^2 y_i^-}{(\beta - \alpha)^2 \|z_i\|^2_{L^2([\alpha, \beta])}}. \tag{۱.۱}$$

عملگر L در مدل‌سازی ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و زیست‌شناسی مانند انتشار نوترون و گونه‌های بیولوژیک، واکنش‌های پلاسما، ابررسانایی و فرایندهای حرارتی ظاهر می‌شود [۱] . بنابراین، در مقاله‌های مختلفی در سال‌های اخیر مورد بررسی قرار گرفته است، به عنوان مثال مقاله‌های [۲، ۴، ۸، ۱۱، ۱۲] را مشاهده نمایید. در مقاله [۸] با روش جواب بالایی و پایینی مسئله

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(y(x)\nabla\psi) + \sigma z_1(x) \int_\Omega z_2(x)\psi dx = \theta(x, \psi), & \text{in } W, \\ \psi > 0, \quad \text{in } W, \quad \psi = 0, \quad \text{on } \partial W \end{cases}$$

مطالعه شده است. هم‌چنین در مقاله [۱۱] نویسندگان با استفاده از روش تغییراتی ثابت کردند مسئله

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(y(x)\nabla\psi) + \sigma z(x) \int_\Omega z(x)\psi dx = \mu k_1(x)\psi^{-\alpha_0} + k_2(x)\psi^p, & \text{in } W, \\ \psi > 0, \quad \text{in } W, \quad \psi = 0, \quad \text{on } \partial W \end{cases}$$

دارای جواب مثبت است اگر و تنها اگر

$$\int_\Omega k_1(x)\psi^{1-\alpha_0} dx < \infty.$$

به‌علاوه، شکوه و همکاران [۱۲] وجود بی‌نهایت جواب ضعیف را برای مسئله

$$\begin{cases} -(y(x)\psi')' + \sigma z(x) \int_a^b z(x)\, \psi dx = \lambda\theta(x, \psi), & \text{in } (a, b), \\ \psi(a) = 0 = \psi(b), \end{cases}$$

بررسی کردند.
با وجود این مطالعات ارزشمند، اکثر مقاله‌های پیشین که شامل عملگر L هستند به صورت تک‌معادله بررسی شده‌اند. در این مقاله مسئله‌هایی شامل n معادله انتگرال–دیفرانسیل را تحت شرایط مرزی دیریکله و در فضای توابع مناسب مطالعه خواهیم کرد. در واقع، در فصل دوم فضای توابع و قضایای نقاط بحرانی لازم ارائه شده است. در فصل سوم وجود جواب نابدیهی برای مسئله (E_λ) بررسی می‌شود و در فصل چهارم وجود یک دنباله از جواب‌های ضعیف برای $(E_{\lambda,\mu})$ و (E_λ) مطالعه می‌گردد.

۲ فضای توابع و ابزار لازم

ساختار تغییراتی و فضای سوبولوف [۳] مورد نیاز جهت مطالعه مسئله‌های $(E_{\lambda,\mu})$ و (E_λ)، و همچنین ابزار اثبات وجود نقاط بحرانی و برخی از نتایج اولیه در این بخش بیان می‌شوند.
فضای $H_0^1([\alpha,\beta]) = W_0^{1,2}([\alpha,\beta])$ مجموعه همه توابعی است که خود تابع و مشتق ضعیف آن در $L^2([\alpha,\beta])$ قرار دارند و همراه با نرم $\|v\| := \|v'\|_{L^2([\alpha,\beta])}$ یک فضای هیلبرت [۴] می‌باشد (مرجع [۱۵] را مشاهده نمایید) و این فضا را با Y نمایش می‌دهیم.
در لم زیر نرم دیگری معرفی می‌کنیم که با نرم $\|\cdot\|$ معادل است.

لم ۱.۲. فرض کنیم شرط (۱.۱) برقرار است. در این‌صورت برای هر $1 \le i \le n$،

$$\sqrt{\int_\alpha^\beta y_i(x)|\psi_i'|^2 dx + \sigma_i \left(\int_\alpha^\beta z_i(x)\psi_i\, dx\right)^2}$$

یک نرم روی Y است (که آن را با $\|\psi_i\|_{\sigma_i}$ نمایش می‌دهیم) و برای هر $\psi_i \in Y$، نامساوی‌های زیر برقرار است

$$c_{1i}\|\psi_i\| \le \|\psi_i\|_{\sigma_i} \le c_{2i}\|\psi_i\|,$$

که c_{1i} و c_{2i} به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$c_{1i} = \left(y_i^- + \min\left\{0, \frac{\sigma_i(\beta-\alpha)^2\|z_i\|^2_{L^2([\alpha,\beta])}}{\pi^2}\right\}\right)^{1/2},$$

$$c_{2i} = \left(y_i^+ + \max\left\{0, \frac{\sigma_i(\beta-\alpha)^2\|z_i\|^2_{L^2([\alpha,\beta])}}{\pi^2}\right\}\right)^{1/2},$$

که $y_i^+ = \operatorname{ess\,sup}_{x\in[\alpha,\beta]} y_i(x)$.

اثبات. اگر برای $1 \le i \le n$، داشته باشیم $\sigma_i \ge 0$، در این‌صورت

$$\|\psi_i\|^2_{\sigma_i} \ge y_i^-\|\psi_i\|^2. \tag{۱.۲}$$

اگر $\sigma_i < 0$، که $1 \le i \le n$، با توجه به این‌که

$$\min_{v\in Y,\, v\neq 0,} \frac{\|v'\|_{L^2([\alpha,\beta])}}{\|v\|_{L^2([\alpha,\beta])}} = \frac{\pi^2}{(\beta-\alpha)^2}, \tag{۲.۲}$$

(صفحه ۶۹ کتاب [۵])، می‌توان نتیجه گرفت

$$\|\psi_i\|^2_{\sigma_i} \ge y_i^-\|\psi_i\|^2 + \frac{\sigma_i(\beta-\alpha)^2\|z_i\|^2_{L^2}}{\pi^2}\|\psi_i\|^2. \tag{۳.۲}$$

بنابراین، برای $1 \le i \le n$، از رابطه‌های (۱.۲) و (۳.۲)، مشاهده می‌شود $\|\psi_i\|_{\sigma_i} \ge c_{1i}\|\psi_i\|$، و به‌طور مشابه می‌توان نشان داد $\|\psi_i\|_{\sigma_i} \le c_{2i}\|\psi_i\|$. همچنین بدیهی است که $\|\cdot\|_{\sigma_i}$ به‌ازای $1 \le i \le n$، یک نرم روی Y می‌باشد. □

ملاحظه ۲.۲. به‌ازای $1 \le i \le n$، ضرب داخلی زیر، نرم $\|\cdot\|_{\sigma_i}$ را تولید می‌کند:

$$\langle\psi_i,\phi_i\rangle_{\sigma_i} = \int_\alpha^\beta y_i(x)\psi_i'\,\phi_i'\,dx + \sigma_i\int_\alpha^\beta z_i(x)\psi_i\,dx\int_\alpha^\beta z_i(x)\phi_i\,dx.$$

[3] Sobolev
[4] Hilbert

ملاحظه ۳.۲. با ترکیب گزاره ۱.۲ از مقاله [۳]، و لم ۱.۲، برای هر $\psi_i \in Y$، مشاهده می‌کنیم

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]} |\psi_i(x)| \leq \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{۲c_{۱i}}\|\psi_i\|_{\sigma_i},$$

که $۱ \leq i \leq n$.

در ادامه از نمادگذاری‌های زیر استفاده خواهیم کرد:

$$\underline{c}_۱ = \min\{c_{۱i};\ ۱ \leq i \leq n\}, \quad \bar{c}_۲ = \max\{c_{۲i};\ ۱ \leq i \leq n\}.$$

هم‌چنین فضای E را حاصل‌ضرب دکارتی n فضای Y در نظر می‌گیریم، یعنی

$$E := Y \times Y \times \cdots \times Y.$$

به‌علاوه،

$$D(\zeta) = \left\{(\xi_۱, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=۱}^{n} |\xi_i| \leq \zeta\right\}. \tag{۴.۲}$$

جواب ضعیف از مسئله $(E_{\lambda,\mu})$، تابعی مانند $\psi = (\psi_۱, \cdots, \psi_n) \in E$ است، به‌طوری‌که برای هر $\phi = (\phi_۱, \cdots, \phi_n) \in E$، داشته باشیم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n}\left(\int_\alpha^\beta y_i(x)\psi_i'\phi_i'\,dx + \sigma_i\int_\alpha^\beta z_i(x)\psi_i\,dx\int_\alpha^\beta z_i(x)\phi_i\,dx\right)\\ -\lambda\sum_{i=۱}^{n}\int_\alpha^\beta A_{\psi_i}(x,\psi_۱,\cdots,\psi_n)\,\phi_i\,dx\\ -\mu\sum_{i=۱}^{n}\int_\alpha^\beta B_{\psi_i}(x,\psi_۱,\cdots,\psi_n)\,\phi_i\,dx = ۰.\end{aligned}$$

به‌طورمشابه، جواب ضعیف از مسئله (E_λ)، تابعی مانند $\psi = (\psi_۱, \cdots, \psi_n) \in E$ است، به‌طوری‌که برای هر $\phi = (\phi_۱, \cdots, \phi_n) \in E$، داشته باشیم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{n}\left(\int_\alpha^\beta y_i(x)\psi_i'\phi_i'\,dx + \sigma_i\int_\alpha^\beta z_i(x)\psi_i\,dx\int_\alpha^\beta z_i(x)\phi_i\,dx\right)\\ -\lambda\sum_{i=۱}^{n}\int_\alpha^\beta A_{\psi_i}(x,\psi_۱,\cdots,\psi_n)\,\phi_i\,dx = ۰.\end{aligned}$$

اکنون دو قضیه نقطه بحرانی را که ابزار ما برای اثبات نتایج است، ارائه می‌کنیم. قضیه اول که از آن در بخش سوم مقاله بهره خواهیم برد در مراجع [۶، ۱۴] اثبات شده است.

مجموعه ناتهی X و تابعک‌های $J, I : X \to \mathbb{R}$ را در نظر گرفته و برای همه $\rho_۱, \rho_۲ \in \mathbb{R}$، که $\rho_۱ < \rho_۲$، توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(\rho_۱,\rho_۲) = \inf_{v\in J^{-۱}(]\rho_۱,\rho_۲[)} \frac{\sup_{u\in J^{-۱}(]\rho_۱,\rho_۲[)} I(u) - I(v)}{\rho_۲ - J(v)},$$

$$\Psi(\rho_۱,\rho_۲) = \sup_{v\in J^{-۱}(]\rho_۱,\rho_۲[)} \frac{I(v) - \sup_{u\in J^{-۱}(]-\infty,\rho_۱[)} I(u)}{J(v) - \rho_۱}.$$

قضیه ۴.۲. فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی باشد. تابعک $J : X \to \mathbb{R}$ نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، اجباری و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو [۵] است و مشتق گاتوی آن روی X^*، وارون پیوسته دارد. هم‌چنین، $I : X \to \mathbb{R}$ نیز یک تابعک به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو می‌باشد که مشتق گاتوی آن فشرده است. قرار می‌دهیم $I_\lambda = J - \lambda I$ و فرض می‌کنیم $\rho_۱, \rho_۲ \in \mathbb{R}$، $\rho_۱ < \rho_۲$، به‌طوری‌که

$$\Phi(\rho_۱,\rho_۲) < \Psi(\rho_۱,\rho_۲).$$

در این‌صورت برای هر $\lambda \in]\frac{۱}{\Psi(\rho_۱,\rho_۲)}, \frac{۱}{\Phi(\rho_۱,\rho_۲)}[$، $u_{۰,\lambda} \in J^{-۱}(]\rho_۱,\rho_۲[)$ وجود دارد که $I_\lambda(u_{۰,\lambda}) \leq I_\lambda(u)$ $\forall u \in J^{-۱}(]\rho_۱,\rho_۲[)$ و $I'_\lambda(u_{۰,\lambda}) = ۰$.

[5] Gâteaux

قضیه نقطه بحرانی زیر از مرجع [۷]، یکی دیگر از ابزار اصلی ما برای اثبات وجود جواب می‌باشد، که در بخش چهارم از آن استفاده می‌کنیم. از این قضیه در مقاله‌های بسیاری برای اثبات وجود بی‌نهایت جواب برای معادله‌های مختلف استفاده شده است. به عنوان مثال مراجع [۹، ۱۰، ۱۳] را می‌توان مشاهده کرد.

قضیه ۵.۲. فضای X را باناخ حقیقی انعکاسی، و دو تابعک J, I را روی X، مشتق‌پذیر گاتو در نظر می‌گیریم. به‌علاوه، تابعک J اجباری، پیوسته قوی و نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، و تابعک I نیم‌پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای است. هم‌چنین برای هر $\rho > \inf_X J$ فرض می‌شود:

$$\vartheta(\rho) := \inf_{u\in J^{-1}(-\infty,\rho)} \frac{(\sup_{v\in J^{-1}(-\infty,\rho)} I(v)) - I(u)}{\rho - J(u)},$$

$$\gamma := \liminf_{\rho\to+\infty} \vartheta(\rho), \quad \delta := \liminf_{\rho\to(\inf_X J)^+} \vartheta(\rho).$$

آن‌گاه، احکام زیر را داریم:

الف) به‌ازای $\rho > \inf_X J$ و $\lambda \in (0, \frac{1}{\vartheta(\rho)})$، تابع $I_\lambda := J - \lambda I$ در $J^{-1}(-\infty, \rho)$ یک کمینه سراسری دارد که این نقطه در X برای I_λ یک نقطه‌ی بحرانی (مینیمم موضعی) است.

ب) اگر $\gamma < +\infty$، در این‌صورت برای هر $\lambda \in (0, \frac{1}{\gamma})$ یکی از دو حالت زیر را داریم، یا

ب۱) تابعک I_λ یک کمینه سراسری دارد، یا

ب۲) دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی (کمینه‌های موضعی) I_λ موجود است که $\lim_{n\to+\infty} J(u_n) = +\infty$.

پ) اگر $\delta < +\infty$، در این‌صورت به‌ازای $\lambda \in (0, \frac{1}{\delta})$ یکی از دو حالت زیر برقرار است: یا

پ۱) یک کمینه سراسری از J موجود است که کمینه موضعی I_λ است، یا

پ۲) دنباله‌ای مانند $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی دوبدو مجزا (کمینه‌های‌های موضعی) I_λ وجود دارد که به‌طور ضعیف همگرا به کمینه سراسری J می‌باشد.

۳ وجود جواب نابدیهی برای مسئله (E_λ)

در این بخش با توجه به قضیه ۴.۲، شرایط کافی ارائه می‌شود به‌طوری‌که مسئله (E_λ) دارای جواب نابدیهی باشد. ثابت‌های مثبت ν و τ را طوری در نظر می‌گیریم که $۲\left(\frac{c_۱^۲\nu}{n\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲ \neq ۲n\left(\frac{\bar{c}_۲^۲\tau}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲$، و قرار می‌دهیم

$$T_\tau(\nu) := \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_۱,\ldots,\xi_n)\in D(\nu)} A(x,\xi_۱,\ldots,\xi_n)\,dx - \int_{\frac{۳\alpha+\beta}{۴}}^{\frac{۳\beta+\alpha}{۴}} A(x,\tau,\ldots,\tau)dx}{۲\left(\frac{c_۱^۲\nu}{n\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲ - ۲n\left(\frac{\bar{c}_۲^۲\tau}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲}.$$

نتیجه اصلی این بخش، قضیه زیر می‌باشد:

قضیه ۱.۳. فرض کنیم ثابت نامنفی $\nu_۱$ و ثابت‌های مثبت $\nu_۲$ و τ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\nu_۱ < n\sqrt{n}\tau$ و $\underline{c}_۱\nu_۲ < n\sqrt{n}\tau\bar{c}_۲$. به‌علاوه فرض می‌کنیم

$(A_۱)$ برای هر $(x,\xi_۱,\ldots,\xi_n) \in ([\alpha,(۳\alpha+\beta)/۴]\cup[(\alpha+۳\beta)/۴,\beta])\times[۰,\tau]^n$، $A(x,\xi_۱,\ldots,\xi_n) \geq ۰$؛

$(A_۲)$ $T_\tau(\nu_۲) < T_\tau(\nu_۱)$.

در این‌صورت برای هر $\lambda \in \left]\frac{۱}{T_\tau(\nu_۱)}, \frac{۱}{T_\tau(\nu_۲)}\right[$، دستگاه (E_λ) دست‌کم دارای یک جواب ضعیف نابدیهی $\psi_\circ = (\psi_{\circ ۱}, \dots, \psi_{\circ n}) \in E$ است که

$$۴\left(\frac{\underline{c}_۱\nu_۱}{n\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲ < \sum_{i=۱}^{n} \|\psi_{\circ i}\|_{\sigma_i}^۲ < ۴\left(\frac{\underline{c}_۱\nu_۲}{n\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲.$$

اثبات. با استفاده از قضیه ۴.۲ می‌خواهیم حکم را ثابت نماییم. برای این منظور فضای E را مانند بخش دوم تعریف کرده و به‌ازای $\psi = (\psi_۱, \dots, \psi_n) \in E$، تابعک‌های $J, I : E \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$J(u) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\|\psi_i\|_{\sigma_i}^۲}{۲}$$

$$I(u) = \int_\alpha^\beta A\left(x, \psi_۱(x), \dots, \psi_n(x)\right) dx.$$

تابعک‌های، J و I به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو هستند و مشتق آن‌ها در نقطه $\psi = (\psi_۱, \dots, \psi_n) \in E$ برابر است با

$$J'(\psi)(\phi) = \sum_{i=۱}^{n}\left(\int_\alpha^\beta y_i(x)\psi_i'\phi_i'\,dx + \sigma_i\int_\alpha^\beta z_i(x)\psi_i\,dx\int_\alpha^\beta z_i(x)\phi_i\,dx\right)$$

$$I'(u)(v) = \sum_{i=۱}^{n}\int_\alpha^\beta A_{\psi_i}(x, \psi_۱, \cdots, \psi_n)\,\phi_i\,dx$$

به‌ازای هر $\phi = (\phi_۱, \dots, \phi_n) \in E$. به‌علاوه، J نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، و $J' : E \to E^*$ دارای وارون پیوسته روی E^* است. هم‌چنین، I نیم‌پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای بوده و به‌راحتی می‌توان نشان داد $I' : E \to E^*$ یک عملگر فشرده می‌باشد. در واقع، کافی است ثابت کنیم I' روی E به‌طور قوی پیوسته است. با این هدف، نقطه $(\psi_۱, \dots, \psi_n) \in E$ را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم دنباله $(\psi_{۱m}, \dots, \psi_{nm})$ وقتی $m \to +\infty$، به‌طور ضعیف به نقطه $(\psi_۱, \dots, \psi_n)$ در فضای E همگرا باشد. پس، $(\psi_{۱m}, \dots, \psi_{nm})$ روی $[\alpha, \beta]$، وقتی $m \to +\infty$، همگرای یکنواخت به $(\psi_۱, \dots, \psi_n)$ است [۱۵]. چون تابع $A(x, \cdot, \cdots, \cdot)$ به‌ازای $x \in [\alpha, \beta]$ در $C^۱$، $\mathbb{R}^n$ می‌باشد، بنابراین به‌ازای $۱ \le i \le n$، دنباله $A_{\psi_i}\left(x, \psi_{۱m}, \dots, \psi_{nm}\right)$ همگرای قوی به $A_{\psi_i}\left(x, \psi_۱, \dots, \psi_n\right)$ است. پس I' روی X به‌طور قوی پیوسته می‌باشد. در نتیجه با توجه به گزاره ۲۶.۲ از کتاب [۱۵]، عملگر I' فشرده است. حال به‌ازای $۱ \le i \le n$، قرار دهیم $w(x) = (w_۱(x), \dots, w_n(x))$، که

$$w_i(x) = \begin{cases} ۴\tau\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & x \in \left[\alpha, \frac{\beta+۳\alpha}{۴}\right[, \\ \tau, & x \in \left[\frac{\beta+۳\alpha}{۴}, \frac{\alpha+۳\beta}{۴}\right], \\ ۴\tau\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}, & x \in \left]\frac{\alpha+۳\beta}{۴}, \beta\right]. \end{cases}$$

به‌علاوه تعریف می‌کنیم $\rho_۱ = ۲\left(\frac{\underline{c}_۱\nu_۱}{n\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲$، $\rho_۲ = ۲\left(\frac{\underline{c}_۱\nu_۲}{n\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^۲$. مشاهده می‌شود، $w = (w_۱, \dots, w_n) \in E$، و به‌ازای $۱ \le i \le n$، داریم

$$\frac{۸c_{۱i}^۲\tau^۲}{\beta-\alpha} \le \|w_i\|_{\sigma_i}^۲ \le \frac{۸c_{۲i}^۲\tau^۲}{\beta-\alpha}.$$

با توجه به تعریف J، ملاحظه می‌کنیم

$$\frac{۲n\tau^۲\underline{c}_۱^۲}{\beta-\alpha} \le \sum_{i=۱}^{n}\frac{۲\tau^۲c_{۱i}^۲}{\beta-\alpha} \le J(w) \le \sum_{i=۱}^{n}\frac{۲\tau^۲c_{۲i}^۲}{\beta-\alpha} \le \frac{۲n\tau^۲\bar{c}_۲^۲}{\beta-\alpha}.$$

از فرض‌های $\nu_۱ < n\sqrt{n\tau}$ و $n\sqrt{n\tau}\bar{c}_۲ < \underline{c}_۱\nu_۲$ به راحتی می‌توان دریافت که

$$\rho_۱ < J(w) < \rho_۲.$$

به‌علاوه، با توجه به ملاحظه ۳.۲، مشاهده می‌کنیم

$$\sup_{x\in[\alpha,\beta]}\sum_{i=1}^{n}|\psi_i(x)|^2\le\frac{\beta-\alpha}{4\underline{c}_1^2}\sum_{i=1}^{n}\|\psi_i\|_{\sigma_i}^2$$

برای هر $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_n)\in E$. در نتیجه

$$\begin{aligned}J^{-1}(]-\infty,\rho_2[)&=\{(\psi_1,\dots,\psi_n)\in E;J(\psi_1,\dots,\psi_n)<\rho_2\}\\&=\left\{(\psi_1,\dots,\psi_n)\in E;\sum_{i=1}^{n}\|\psi_i\|_{\sigma_i}^2<2\rho_2\right\}\\&\subseteq\left\{(\psi_1,\dots,\psi_n)\in E;\sum_{i=1}^{n}|\psi_i(x)|^2<\frac{\nu_2^2}{n^2}\ \text{برای هر}\ x\in[\alpha,\beta]\right\}\\&\subseteq\left\{(\psi_1,\dots,\psi_n)\in E;\sum_{i=1}^{n}|\psi_i(x)|<\nu_2\ \text{برای هر}\ x\in[\alpha,\beta]\right\}.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\sup_{(\psi_1,\dots,\psi_n)\in J^{-1}(]-\infty,\rho_2[)}I(\psi)&=\sup_{(\psi_1,\dots,\psi_n)\in J^{-1}(]-\infty,\rho_2[)}\int_\alpha^\beta A\left(x,\psi_1(x),\dots,\psi_n(x)\right)dx\\&\le\int_\alpha^\beta\sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu_2)}A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx.\end{aligned}$$

چون به‌ازای $1\le i\le n$، $0\le w_i(x)\le\tau$ برای هر $x\in[\alpha,\beta]$، پس از شرط (A_1)، می‌توان نتیجه گرفت

$$\int_\alpha^{\frac{3\alpha+\beta}{4}}A\left(x,w_1(x),\dots,w_n(x)\right)dx+\int_{\frac{\alpha+3\beta}{4}}^{\beta}A\left(x,w_1(x),\dots,w_n(x)\right)dx\ge 0.$$

هم‌چنین، مشاهده می‌کنیم

$$\begin{aligned}\Phi\left(\rho_1,\rho_2\right)&\le\frac{\sup_{\psi\in J^{-1}(]-\infty,\rho_2[)}I(\psi)-I(w)}{\rho_2-J(w)}\\&\le\frac{\int_\alpha^\beta\sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu_2)}A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx-\Psi(w)}{\rho_2-J(w)}\\&\le T_\tau\left(\nu_2\right).\end{aligned}$$

از سویی دیگر مشابه قبل می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\Psi\left(\rho_1,\rho_2\right)&\ge\frac{-\sup_{\psi\in J^{-1}(]-\infty,\rho_1[)}I(\psi)+I(w)}{-\rho_1+J(w)}\\&\ge\frac{-\int_\alpha^\beta\sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu_1)}A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx+\Psi(w)}{-\rho_1+J(w)}\\&\ge T_\tau\left(\nu_1\right).\end{aligned}$$

بنابراین از شرط (A_2)، می‌توان دریافت $\Phi\left(\rho_1,\rho_2\right)<\Psi\left(\rho_1,\rho_2\right)$، و با توجه به قضیه ۴.۲ حکم به اثبات می‌رسد. □

اکنون نتیجه‌ای از قضیه ۱.۳ را ارائه می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم شرط (A_1) از قضیه ۱.۳ برقرار باشد. هم‌چنین، فرض می‌کنیم دو ثابت مثبت ν و τ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $n\sqrt{n}\tau\bar{c}_2 < \underline{c}_1\nu$. به‌علاوه فرض می‌کنیم

(A_3)

$$\frac{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu)} A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx}{\nu^2} < \frac{1}{n}\left(\frac{\underline{c}_1}{n\bar{c}_2}\right)^2 \frac{\int_{\frac{3\alpha+\beta}{4}}^{\frac{\alpha+3\beta}{4}} A(x,\tau,\dots,\tau)dx}{\tau^2};$$

(A_4) برای هر $x\in[\alpha,\beta]$، $A(x,0,\cdots,0)=0$.

در این‌صورت برای هر

$$\lambda \in \left]\frac{\frac{2n\bar{c}_2^2}{\beta-\alpha}}{\int_{\frac{3\alpha+\beta}{4}}^{\frac{\alpha+3\beta}{4}} A(x,\tau,\dots,\tau)dx}, \frac{\frac{2n\underline{c}_1^2}{\beta-\alpha}}{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu)} A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx}\right[$$

دستگاه (E_λ) دست‌کم دارای یک جواب ضعیف نابدیهی $\psi_0=(\psi_{01},\dots,\psi_{0n})\in E$ است که

$$\sum_{i=1}^n \|\psi_{0i}\|_{\sigma_i}^2 < 4\left(\frac{\underline{c}_1\nu}{n\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^2.$$

اثبات. اگر در قضیه ۱.۳، قرار دهیم $\nu_1=0$ و $\nu_2=\nu$، حکم به‌دست می‌آید. در واقع، با توجه به فرض‌ها داریم

$$\begin{aligned} T_\tau(\nu_2) &< \frac{\left(1-\frac{n^3\bar{c}_2^2\tau^2}{\nu^2\underline{c}_1^2}\right)\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu)} A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2\nu^2}{n^2(\beta-\alpha)}-\frac{2n\bar{c}_2^2\tau^2}{\beta-\alpha}} \\ &= \frac{\left(1-\frac{\frac{2n\bar{c}_2^2\tau^2}{\beta-\alpha}}{\frac{2\underline{c}_1^2\nu^2}{n^2(\beta-\alpha)}}\right)\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu)} A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2\nu^2}{n^2(\beta-\alpha)}-\frac{2n\bar{c}_2^2\tau^2}{\beta-\alpha}} \\ &= \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in D(\nu)} A\left(x,\xi_1,\dots,\xi_n\right)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2\nu^2}{n^2(\beta-\alpha)}}. \end{aligned}$$

از طرف دیگر، فرض (A_4) نتیجه می‌دهد

$$\frac{\int_{\frac{3\alpha+\beta}{4}}^{\frac{3\beta+\alpha}{4}} A(x,\tau,\dots,\tau)dx}{\frac{2n\bar{c}_2^2\tau^2}{\beta-\alpha}} = T_\tau(\nu_1).$$

بنابراین، با توجه به شرط (A_3) و قضیه ۱.۳، حکم به اثبات می‌رسد. □

در این‌جا، حالت ساده‌تر قضیه ۱.۳، وقتی $n=1$ را بیان می‌کنیم.
قرار دهیم $y_1=y$، $\sigma_1=\sigma$، $z_1=z$، $\underline{c}_1=c_{11}$ و $\bar{c}_2=c_{21}$. هم‌چنین، $\theta:[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را یک تابع L^1-کاراتئودری در نظر می‌گیریم و به‌ازای $(x,\xi)\in[\alpha,\beta]\times\mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم: $\Theta(x,\xi)=\int_0^\xi \theta(x,s)ds$. ثابت‌های مثبت ν و τ را طوری در نظر می‌گیریم که $2\left(\frac{c_{11}^2\nu}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^2 \neq 2\left(\frac{c_{21}^2\tau}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^2$، و قرار می‌دهیم

$$S_\tau(\nu) := \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{|\xi|\le\nu}\Theta\left(x,\xi\right)dx - \int_{\frac{3\alpha+\beta}{4}}^{\frac{3\beta+\alpha}{4}}\Theta\left(x,\xi\right)dx}{2\left(\frac{c_{11}^2\nu}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{c}_{21}^2\tau}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right)^2}.$$

قضیه ۳.۳. فرض کنیم ثابت نامنفی ν_1 و ثابت‌های مثبت ν_2 و τ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\nu_1 < \tau$ و $c_{11}\nu_2 < \tau\bar{c}_{21}$.
به‌علاوه فرض می‌کنیم

(Θ_1) برای هر $(x,\xi) \in ([\alpha,(3\alpha+\beta)/4] \cup [(\alpha+3\beta)/4,\beta]) \times [0,\tau]$، $\Theta(x,\xi) \geq 0$؛

(Θ_2) $S_\tau(\nu_2) < S_\tau(\nu_1)$.

در این‌صورت برای هر $\lambda \in \left] \frac{1}{S_\tau(\nu_1)}, \frac{1}{S_\tau(\nu_2)} \right[$، مسئله

$$\begin{cases} -(y(x)\psi')' + \sigma z(x) \int_\alpha^\beta z(x)\psi\, dx = \lambda\theta(x,\psi), \\ \psi(\alpha) = 0 = \psi(\beta), \end{cases}$$

دست‌کم دارای یک جواب ضعیف نابدیهی $\psi_0 \in Y$ است که

$$\frac{2c_{11}\nu_1}{\sqrt{\beta-\alpha}} < \|\psi_0\|_\sigma < \frac{2c_{11}\nu_2}{\sqrt{\beta-\alpha}}.$$

۴ وجود یک دنباله از جواب‌های ضعیف برای مسئله $(E_{\lambda,\mu})$

در این بخش شرایط کافی ارائه می‌دهیم که مسئله $(E_{\lambda,\mu})$ دارای دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف در فضای E باشد. قضیه اصلی این بخش را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. فرض می‌کنیم اعداد مثبت α_1 و β_1 موجود باشد به‌طوری‌که $\beta_1 + \alpha_1 < \beta - \alpha$ و

(A_5) برای هر $(x,\xi_1,\ldots,\xi_n) \in ([\alpha,\alpha+\alpha_1] \cup [\beta-\beta_1,\beta]) \times \mathbb{R}^n$، $A(x,\xi_1,\ldots,\xi_n) \geq 0$؛

(A_6)

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in D(t)} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2} < \frac{4\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)} \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\sum_{i=1}^n \xi_i^2}.$$

(لازم به ذکر است منظور از $\xi \to +\infty$، به این معنی است که $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \to (+\infty,\ldots,+\infty)$). در این‌صورت برای هر $\lambda \in]\lambda_1,\lambda_2[$ که

$$\lambda_1 := \frac{1}{2\limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\sum_{i=1}^n \xi_i^2}},$$

$$\lambda_2 := \frac{\frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)}}{\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in D(t)} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2}},$$

و برای هر تابع نامنفی $B : [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و صادق در شرط

$$B_\infty := \lim_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} B(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2} < +\infty, \tag{۱.۴}$$

مسئله $(E_{\lambda,\mu})$ به‌ازای $\mu \in [0,\mu_{B,\lambda})$، یک دنباله بی‌کران از جواب‌های ضعیف در E دارد که

$$\mu_{B,\lambda} := \frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)B_\infty}\left(1 - \lambda\frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2} \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2}\right).$$

اثبات. با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۵.۲ حکم را به اثبات می‌رسانیم. با این هدف، فضای E را مانند قبل و با نرم

$$\|(\psi_1,\dots,\psi_n)\|_E=\sum_{i=1}^{n}\|\psi_i\|_{\sigma_i}$$

در نظر می‌گیریم. فرض نماییم $\bar{\lambda}$ در بازه $]\lambda_1,\lambda_2[$ ثابت بوده و تابع B در شرط (۱.۴) صادق باشد. چون $\bar{\lambda}<\lambda_2$، داریم

$$\mu_{B,\bar{\lambda}}=\frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)B_\infty}\left(1-\bar{\lambda}\frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\liminf_{t\to+\infty}\frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)}A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2}\right)>0.$$

هم‌چنین، $\bar{\mu}$، را در بازه $]0,\mu_{B,\bar{\lambda}}[$ ثابت در نظر گرفته و قرار می‌دهیم

$$\nu_1:=\lambda_1 \quad \text{و} \quad \nu_2:=\frac{\lambda_2}{1+\dfrac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\dfrac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}}\lambda_2 B_\infty}.$$

اگر $B_\infty=0$، بدیهی است $\nu_1=\lambda_1,\nu_2=\lambda_2$ و $\lambda\in]\nu_1,\nu_2[$. اگر $B_\infty\neq 0$، چون $\bar{\mu}<\mu_{B,\bar{\lambda}}$، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_2}+\frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\bar{\mu}B_\infty<1,$$

و بنابراین

$$\frac{\lambda_2}{1+\dfrac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\dfrac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}}\lambda_2 B_\infty}>\bar{\lambda},$$

یعنی $\bar{\lambda}<\nu_2$. پس، با توجه $\bar{\lambda}>\lambda_1=\nu_1$، مشاهده می‌شود $\bar{\lambda}\in]\nu_1,\nu_2[$. اکنون قرار می‌دهیم

$$H(x,t)=A(x,t)+\frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}}B(x,t)$$

برای هر $x\in[\alpha,\beta]$ و $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$. تابعک‌های $J,I:E\to\mathbb{R}$ را برای $\psi=(\psi_1,\dots,\psi_n)\in E$، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$J(\psi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|\psi_i\|_{\sigma_i}^2,\qquad I(\psi)=\int_\alpha^\beta H\left(x,\psi_1(x),\dots,\psi_n(x)\right)dx.$$

می‌خواهیم ثابت کنیم تابعک‌های J و I در شرایط قضیه ۵.۲ صادق هستند. به‌ازای $\psi\in E$، تابعک I مشتق‌پذیر گاتو بوده و مشتق آن برابر است با

$$I'(\psi)(\phi)=\int_\alpha^\beta\sum_{i=1}^{n}H_{\psi_i}\left(x,\psi_1(x),\dots,\psi_n(x)\right)\phi_i(x)dx$$

برای هر $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_n)\in E$. به‌علاوه، تابعک I نیم‌پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای بوده و مشابه بخش سوم می‌توان ثابت کرد عملگر $I':E\to E^*$ فشرده است. هم‌چنین، تابعک J نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای و به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو می‌باشد. مشتق این تابعک همان‌طور که قبلا هم بیان شد، در نقطه $\psi\in E$ برابر است با

$$J'(\psi)(\phi)=\sum_{i=1}^{n}\left(\int_\alpha^\beta y_i(x)\psi_i'\phi_i'\,dx+\sigma_i\int_\alpha^\beta z_i(x)\psi_i\,dx\int_\alpha^\beta z_i(x)\phi_i\,dx\right)$$

برای هر $\phi\in E$. لازم به یادآوری است که نقاط بحرانی تابعک $I_{\bar{\lambda}}=J-\bar{\lambda}I$، جواب‌های ضعیف مسئله $(E_{\lambda,\mu})$ هستند. اکنون نشان می‌دهیم

$$\gamma<+\infty.$$

فرض نماییم $\{t_k\}$ دنباله‌ای حقیقی باشد که وقتی $k \to \infty$، $t_k \to \infty$ و

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} H(x,\xi)dx}{t_k^2} = \liminf_{t\to\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} H(x,\xi)dx}{t^2}.$$

به‌ازای $k \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $\rho_k = \frac{2\underline{c}_1^2 t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}$. چون

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]} |\psi_i(x)| \le \frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2c_{1i}} \|\psi_i\|_{\sigma_i},$$

که $1 \le i \le n$ و $\psi \in Y$، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} J^{-1}(]-\infty,\rho_k]) &= \left\{\psi \in E; \sum_{i=1}^n \|\psi_i\|_{\sigma_i}^2 \le \rho_k\right\} \\ &\subseteq \left\{\psi \in E; \sum_{i=1}^n |\psi_i(x)|^2 \le \frac{\rho_k(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2} \text{ برای هر } x \in [\alpha,\beta]\right\} \\ &\subseteq \left\{\psi \in E; \sum_{i=1}^n |\psi_i(x)| \le t_k \text{ برای هر } x \in [\alpha,\beta]\right\}. \end{aligned}$$

بنابراین، با در نظر گرفتن $I(0,\dots,0) = J(0,\dots,0) = 0$، برای هر k به‌قدر کافی بزرگ داریم

$$\begin{aligned} \vartheta(\rho_k) &= \inf_{\psi\in J^{-1}(]-\infty,\rho_k[)} \frac{\sup_{v\in J^{-1}(]-\infty,\rho_k])} I(v) - I(\psi)}{\rho_k - J(\psi)} \\ &\le \frac{\sup_{v\in J^{-1}(]-\infty,\rho_k])} I(v)}{\rho_k} \le \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} H(x,\xi)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2 t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}} \\ &= \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} \left[A(x,\xi) + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} B(x,\xi)\right] dx}{\frac{2\underline{c}_1^2 t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}} \\ &\le \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} A(x,\xi)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2 t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} B(x,\xi)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2 t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}}. \end{aligned}$$

به‌علاوه، از فرض (A_6) و (۱.۴) مشاهده می‌کنیم

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} A(x,\xi)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2 t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}} + \lim_{k\to\infty} \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} B(x,\xi)dx}{\frac{2\underline{c}_1^2 t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}} < +\infty$$

در نتیجه

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} H(x,\xi)dx}{t_k^2} < +\infty$$

بنابراین،

$$\gamma \le \liminf_{k\to\infty} \vartheta(\rho_k) \le \frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2} \lim_{k\to\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} H(x,\xi)dx}{t_k^2} < +\infty. \qquad (۲.۴)$$

چون

$$\frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} H(x,\xi)dx}{\frac{2c_1^2t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}} \leq \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} A(x,\xi)dx}{\frac{2c_1^2t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t_k)} B(x,\xi)dx}{\frac{2c_1^2t_k^2}{n^2(\beta-\alpha)}},$$

با توجه به (۱.۴)، می‌توان دریافت

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} H(x,\xi)dx}{t^2} \leq \liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} A(x,\xi)dx}{t^2} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} B_\infty. \tag{۳.۴}$$

هم‌چنین، چون B نامنفی است، از فرض (A_6) مشاهده می‌کنیم

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} H(x,t,\dots,t)dx}{t^2} \geq \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,t,\dots,t)dx}{t^2}. \tag{۴.۴}$$

با توجه به (۳.۴) و (۴.۴)، نتیجه می‌شود

$$\bar{\lambda} \in]\varrho_1, \varrho_2[\subseteq]\lambda_1, \lambda_2[.$$

از فرض (A_6) به‌همراه (۲.۴) می‌توان نوشت

$$]\lambda_1, \lambda_2[\subseteq]0, 1/\gamma[.$$

نامساوی (۲.۴)، بیان می‌کند می‌توان قسمت (ب) از قضیه ۵.۲ را برای تابعک $I_{\bar{\lambda}}$ به‌کار برد. یعنی $I_{\bar{\lambda}}$ یا دارای یک کمینه سراسری است یا دارای یک دنباله بی‌کران از نقاط بحرانی مانند $\{\psi_k = (\psi_{1k}, \dots, \psi_{nk})\}$ است که جواب‌های ضعیف از مسئله $(E_{\lambda,\mu})$ خواهند بود. پس کافی است ثابت نماییم $I_{\bar{\lambda}}$ کمینه سراسری ندارد تا حالت دوم اتفاق افتد. برای این منظور نشان می‌دهیم $I_{\bar{\lambda}}$ از پایین کران‌دار نیست. چون

$$\begin{aligned}\frac{1}{\bar{\lambda}} &< 2 \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \\ &\leq 2 \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} H(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\sum_{i=1}^n \xi_i^2},\end{aligned}$$

می‌توان دنباله حقیقی $\{\tau_k\}$ و عدد مثبت d را طوری در نظر گرفت که $\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty$ و برای $k \in \mathbb{N}$ به‌قدر کافی بزرگ داشته باشیم

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} < d < 2\frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} H(x,\tau_k,\cdots,\tau_k)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1} n\tau_k^2}. \tag{۵.۴}$$

دنباله $\{w_k = (w_{1k}, \dots, w_{nk})\}$ را در E با درایه‌های زیر، به‌ازای $1 \leq i \leq n$، تعریف می‌کنیم

$$w_{ik}(x) = \begin{cases} \frac{\tau_k}{\alpha}(x-a) & \text{if } \alpha \leq x < \alpha+\alpha_1 \\ \tau_k & \text{if } \alpha+\alpha_1 \leq x \leq \beta-\beta_1 \\ \frac{\tau_k}{\beta}(\beta-x) & \text{if } \beta-\beta_1 < x \leq \beta. \end{cases} \tag{۶.۴}$$

با محاسبات ساده دیده می‌شود $w_k \in E$ و

$$\|w_{ik}\|^2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\tau_k^2 \quad \text{برای } 1 \leq i \leq n,$$

در نتیجه

$$J(w_k) \leq \frac{\alpha_1+\beta_1}{2\alpha_1\beta_1} n\tau_k^2 \bar{c}_2^2. \tag{۷.۴}$$

از سویی دیگر، با توجه به فرض (A_5)، و این‌که B نامنفی است، مشاهده می‌شود

$$I(w_k) \geq \int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} H(x, \tau_k, \ldots, \tau_k)\, dx. \tag{۸.۴}$$

بنابراین، طبق نامساوی‌های (۵.۴)، (۷.۴) و (۸.۴) داریم

$$\begin{aligned} I_{\bar{\lambda}}(w_k) &\leq \frac{\alpha_1+\beta_1}{2\alpha_1\beta_1} n\tau_k^2 \bar{c}_2^2 - \bar{\lambda} \int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} H(x, \tau_k, \ldots, \tau_k)\, dx \\ &< (1-\bar{\lambda}d) \frac{\alpha_1+\beta_1}{2\alpha_1\beta_1} n\tau_k^2 \bar{c}_2^2. \end{aligned}$$

برای $k \in \mathbb{N}$ به‌قدر کافی بزرگ. یعنی، $I_{\bar{\lambda}}$، از پایین کران‌دار نمی‌باشد. پس طبق قسمت (ب) از قضیه ۵.۲، دنباله

$$\{\psi_k = (\psi_{1k}, \ldots, \psi_{nk})\} \subset E$$

از نقاط بحرانی تابعک $I_{\bar{\lambda}}$ وجود دارد که

$$\lim_{k\to\infty} \|(\psi_{1k}, \ldots, \psi_{nk})\|_E = +\infty,$$

و اثبات تکمیل می‌شود. □

ملاحظه ۲.۴. تحت شرایط

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} A(x,\xi)dx}{t^2} = 0, \quad \limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,\xi)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\alpha_1\beta_1}\bar{c}_2^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2} = +\infty,$$

حکم قضیه ۱.۴، برای $\lambda > 0$ و $\mu \in \left]0, \frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)B_\infty}\right[$ برقرار است. همچنین، اگر $B_\infty = 0$، باز هم حکم برای $\lambda > 0$ و $\mu > 0$ درست می‌باشد.

قضیه زیر حالت خاص از قضیه ۱.۴ است که $\mu = 0$.

قضیه ۳.۴. فرض کنیم همه شرایط قضیه ۱.۴ برقرار باشد. در این‌صورت برای هر λ، در

$$\left]\frac{1}{2\limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,\xi)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2\alpha_1\beta_1}\bar{c}_2^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2}}, \frac{\frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(b-a)}}{\liminf_{t\to+\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} A(x,\xi)dx}{t^2}}\right[,$$

مسئله (E_λ)، دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف در E است.

حال نتیجه‌ای از قضیه ۱.۴ را بیان می‌کنیم که در آن به‌جای فرض (A_6)، شرط کلی‌تری ارائه می‌شود.

قضیه ۴.۴. فرض می‌کنیم همه‌ی شرایط قضیه ۱.۴، بجز (A_6) صادق باشد. به‌علاوه، فرض کنیم

$(A_۷)$ دنباله‌های $\{a_k\}$ و $\{b_k\}$ موجود باشد که برای هر $k \in \mathbb{N}$،

$$a_k^۲ < \frac{۴\underline{c}_۱^۲\alpha_۱\beta_۱}{n^۳(\beta-\alpha)(\alpha_۱+\beta_۱)\bar{c}_۲^۲} b_k^۲,$$

و

$$\lim_{k\to\infty} b_k = +\infty$$

به‌طوری که

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(b_k)} A(x,\xi)dx - \int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} A(x,a_k,\ldots,a_k)\,dx}{\frac{۲\underline{c}_۱^۲ b_k^۲}{n^۲(\beta-\alpha)} - \frac{\alpha_۱+\beta_۱}{۲\alpha_۱\beta_۱} n a_k^۲ \bar{c}_۲^۲} < ۲ \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} A(x,\xi)dx}{\frac{\alpha_۱+\beta_۱}{\alpha_۱\beta_۱}\bar{c}_۲^۲ \sum_{i=۱}^n \xi_i^۲}.$$

آن‌گاه برای هر λ در

$$\left]\frac{۱}{۲\limsup_{\xi\to+\infty} \frac{\int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} A(x,\xi)dx}{\frac{\alpha_۱+\beta_۱}{\alpha_۱\beta_۱}\bar{c}_۲^۲\sum_{i=۱}^n \xi_i^۲}}, \frac{\frac{۲\underline{c}_۱^۲}{n^۲(b-a)}}{\lim_{k\to\infty} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(b_k)} A(x,\xi)dx - \int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} A(x,a_k,\ldots,a_k)\,dx}{\frac{۲\underline{c}_۱^۲ b_k^۲}{n^۲(\beta-\alpha)} - \frac{\alpha_۱+\beta_۱}{۲\alpha_۱\beta_۱} n\bar{c}_۲^۲ a_k^۲}}\right[,$$

مسئله (E_λ) یک دنباله از جواب‌های ضعیف در فضای E دارد.

اثبات. به راحتی از فرض $(A_۷)$، و با انتخاب $a_k = ۰$ برای هر $k \in \mathbb{N}$، می‌توان دریافت که $(A_۶)$ در قضیه ۱.۴ صادق است. هم‌چنین، اگر فرض کنیم شرط $(A_۷)$ به‌جای $(A_۶)$ برقرار است و به‌ازای $k \in \mathbb{N}$، قرار دهیم $\rho_k = \frac{۲\underline{c}_۱^۲ b_k^۲}{n^۲(\beta-\alpha)}$، مشابه اثبات قضیه ۱.۴ با $\mu = ۰$، می‌توان مشاهده کرد

$$\begin{aligned}\vartheta(\rho_k) &= \inf_{\psi\in J^{-۱}(]-\infty,\rho_k[)} \frac{\sup_{v\in J^{-۱}(]-\infty,\rho_k]} I(v) - I(\psi)}{\rho_k - J(\psi)} \\ &\le \frac{\sup_{v\in J^{-۱}(]-\infty,\rho_k])} I(v) - \int_\alpha^\beta A(x,w_{۱k}(x),\ldots,w_{nk}(x))\,dx}{\rho_k - \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^n \|w_{ik}\|_{\sigma_i}^۲} \\ &\le \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(b_k)} A(x,\xi)dx - \int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} A(x,a_k,\ldots,a_k)\,dx}{\frac{۲\underline{c}_۱^۲ b_k^۲}{n^۲(b-a)} - \frac{\alpha_۱+\beta_۱}{۲\alpha_۱\beta_۱} n\bar{c}_۲^۲ a_k^۲},\end{aligned}$$

که $w_k = (w_{۱k},\ldots,w_{nk})$، و برای $۱ \le i \le n$، w_{ik} مانند (۶.۴) در نظر گرفته شده است ولی به‌جای τ_k، a_k قرار گرفت. بنابراین، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

در ادامه، مشابه اثبات قضیه ۱.۴ و با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۵.۲، شرایط کافی ارائه می‌دهیم تا مسئله $(E_{\lambda,\mu})$ دارای یک دنباله از جواب‌های ضعیف باشد که به صفر همگراست.

قضیه ۵.۴. فرض کنیم شرایط قضیه ۱.۴، بجز $(A_۶)$ برقرار باشد. به‌علاوه، فرض می‌کنیم

(A_8)

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in D(t)} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2} < \frac{4\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)} \limsup_{\xi\to 0^+} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$$

(لازم به ذکر است منظور از $\xi \to 0^+$، به این معنی است که $(\xi_1,\ldots,\xi_n) \to (0^+,\ldots,0^+)$). در این‌صورت برای هر $\lambda \in]\lambda_3,\lambda_4[$ که

$$\lambda_3 := \frac{1}{2\limsup_{\xi\to 0^+} \frac{\int_{\alpha+\alpha_1}^{\beta-\beta_1} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\sum_{i=1}^n \xi_i^2}},$$

$$\lambda_4 := \frac{\frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)}}{\liminf_{t\to 0^+} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in D(t)} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2}},$$

و برای هر تابع نامنفی $B : [\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و صادق در شرط

$$B_0 := \lim_{t\to 0^+} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} B(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2} < +\infty, \tag{۹.۴}$$

مسئله $(E_{\lambda,\mu})$ به‌ازای $\mu \in [0,\mu'_{B,\lambda})$، یک دنباله از جواب‌های ضعیف همگرا به صفر در E دارد که

$$\mu'_{B,\lambda} := \frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)B_0}\left(1-\lambda\frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\liminf_{t\to 0^+}\frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2}\right).$$

اثبات. با استفاده از قسمت (پ) قضیه‌ی ۵.۲ حکم را به اثبات می‌رسانیم. فرض کنیم $\bar\lambda$ در بازه $]\lambda_3,\lambda_4[$ ثابت بوده و تابع B در شرط (۹.۴) صادق باشد. چون $\bar\lambda < \lambda_4$، داریم

$$\mu'_{B,\bar\lambda} = \frac{2\underline{c}_1^2}{n^2(\beta-\alpha)B_0}\left(1-\bar\lambda\frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\liminf_{t\to 0^+}\frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi\in D(t)} A(x,\xi_1,\cdots,\xi_n)dx}{t^2}\right) > 0.$$

هم‌چنین، $\bar\mu$، را در بازه $]0,\mu'_{B,\bar\lambda}[$ ثابت در نظر گرفته و قرار می‌دهیم

$$\varrho_1 := \lambda_3 \quad و \quad \varrho_2 := \frac{\lambda_4}{1+\frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\frac{\bar\mu}{\bar\lambda}\lambda_4 B_0}.$$

اگر $B_0 = 0$، بدیهی است $\varrho_1 = \lambda_3, \varrho_2 = \lambda_4$ و $\bar\lambda \in]\varrho_1,\varrho_2[$. اگر $B_0 \neq 0$، چون $\bar\mu < \mu'_{B,\bar\lambda}$، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\bar\lambda}{\lambda_4} + \frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\bar\mu B_0 < 1,$$

و بنابراین

$$\frac{\lambda_4}{1+\frac{n^2(\beta-\alpha)}{2\underline{c}_1^2}\frac{\bar\mu}{\bar\lambda}\lambda_4 B_0} > \bar\lambda,$$

یعنی $\bar{\lambda} < \varrho_۲$. پس، با توجه $\bar{\lambda} > \lambda_۱ = \varrho_۱$، مشاهده می‌شود $\bar{\lambda} \in]\varrho_۱, \varrho_۲[$. اکنون قرار می‌دهیم

$$H(x,t) = A(x,t) + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} B(x,t)$$

برای هر $x \in [\alpha, \beta]$ و $t = (t_۱, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ تابعک‌های $J, I : E \to \mathbb{R}$ را مانند اثبات قضیه ۱.۴ در نظر می‌گیریم. فرض نماییم $\{t_k\}$ دنباله‌ای حقیقی باشد که وقتی $k \to \infty$، $t_k \to ۰^+$ و

$$\lim_{k \to ۰^+} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi \in D(t_k)} H(x,\xi) dx}{t_k^۲} < +\infty.$$

به‌ازای $k \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $\rho_k = \frac{۲\underline{c}_۱^۲ t_k^۲}{n^۲(\beta - \alpha)}$. چون

$$\frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi \in D(t_k)} H(x,\xi) dx}{\frac{۲\underline{c}_۱^۲ t_k^۲}{n^۲(\beta-\alpha)}} = \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi \in D(t_k)} \left[A(x,\xi) + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} B(x,\xi)\right] dx}{\frac{۲\underline{c}_۱^۲ t_k^۲}{n^۲(\beta-\alpha)}}$$
$$\leq \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi \in D(t_k)} A(x,\xi) dx}{\frac{۲\underline{c}_۱^۲ t_k^۲}{n^۲(\beta-\alpha)}} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi \in D(t_k)} B(x,\xi) dx}{\frac{۲\underline{c}_۱^۲ t_k^۲}{n^۲(\beta-\alpha)}}.$$

با توجه به (۹.۴)، می‌توان دریافت

$$\liminf_{t \to ۰^+} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi \in D(t)} H(x,\xi) dx}{t^۲} \leq \liminf_{t \to ۰^+} \frac{\int_\alpha^\beta \sup_{\xi \in D(t)} A(x,\xi) dx}{t^۲} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}} B_۰. \tag{۱۰.۴}$$

هم‌چنین، چون B نامنفی است، از فرض $(A_۵)$ مشاهده می‌کنیم

$$\limsup_{t \to ۰^+} \frac{\int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} H(x,t,\dots,t) dx}{t^۲} \geq \limsup_{t \to ۰^+} \frac{\int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} A(x,t,\dots,t) dx}{t^۲}. \tag{۱۱.۴}$$

با توجه به (۱۰.۴) و (۱۱.۴)، نتیجه می‌شود

$$\bar{\lambda} \in]\varrho_۱, \varrho_۲[\subseteq]\lambda_۱, \lambda_۲[.$$

بنابراین، $\delta < +\infty$. حال ثابت می‌شود $I_{\bar{\lambda}}$ در صفر کمینه موضعی ندارد. برای این منظور، فرض کنیم $\{\tau_k\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد که $\lim_{k \to \infty} \tau_k = ۰^+$. عدد مثبت d را طوری در نظر می‌گیریم که برای $k \in \mathbb{N}$ به‌قدر کافی بزرگ، داشته باشیم

$$\frac{۱}{\bar{\lambda}} < d < ۲ \frac{\int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} H(x, \tau_k, \cdots, \tau_k) dx}{\frac{\alpha_۱+\beta_۱}{\alpha_۱\beta_۱} n\tau_k^۲}. \tag{۱۲.۴}$$

دنباله $\{w_k = (w_{۱k}, \dots, w_{nk})\}$ را در E مانند قبل تعریف می‌کنیم. در نتیجه برای $k \in \mathbb{N}$ به‌قدر کافی بزرگ،

$$I_{\bar{\lambda}}(w_k) \leq \frac{\alpha_۱ + \beta_۱}{۲\alpha_۱\beta_۱} n\tau_k^۲ \bar{c}_۲^۲ - \bar{\lambda} \int_{\alpha+\alpha_۱}^{\beta-\beta_۱} H(x, \tau_k, \dots, \tau_k) dx$$
$$< (۱ - \bar{\lambda} d) \frac{\alpha_۱ + \beta_۱}{۲\alpha_۱\beta_۱} n\tau_k^۲ \bar{c}_۲^۲.$$

چون $I_{\bar{\lambda}}(۰) = ۰$، تابعک $I_{\bar{\lambda}}$ در صفر کمینه موضعی ندارد. پس طبق قسمت (پ) از قضیه ۵.۲، دنباله

$$\{\psi_k = (\psi_{۱k}, \dots, \psi_{nk})\} \subset E$$

از نقاط بحرانی تابعک $I_{\bar{\lambda}}$ وجود دارد که

$$\lim_{k \to \infty} \|(\psi_{۱k}, \dots, \psi_{nk})\|_E = ۰,$$

و اثبات تمام می‌شود. □

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله وجود نقاط بحرانی برای کلاسی از تابعک‌ها بررسی شد. نقاط بحرانی این تابعک‌ها با جواب‌های ضعیف دو مسئله مقدار مرزی متناظر بودند. یکی از این دستگاه‌ها دارای یک پارامتر کنترلی و دیگری دو پارامتر کنترلی داشت که وجود یک جواب نابدیهی و یک دنباله از جواب‌ها برای آن‌ها به‌ازای مقادیر معین از پارامترها در یک فضای هیلبرت بررسی شد. علاقمندان می‌توانند وجود جواب برای این مسئله‌ها را با دیگر روش‌های آنالیز غیرخطی مورد مطالعه قرار دهند.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم که با پیشنهادها و نظرات ارزشمند خود به بهبود مقاله کمک کردند صمیمانه قدردانی می‌شود. شایان ذکر است این مقاله برگرفته از طرح پژوهشی شماره ۶/۰۳/۱۱۷ در دانشگاه گنبد کاووس می‌باشد.

فهرست منابع

[1] Allegretto, W. and Barabanova, A., 1996. Positivity of solutions of elliptic equations with nonlocal terms, *Proc. R. Soc. Edinb.,* **126A**, pp.643-663. doi: 10.1017/S0308210500022952

[2] Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A. and Santos, J.R., 2022. Remarks on a class of integro-differential problems, *J. Math. Anal. Appl.,* **506**, 125723. doi: 10.1016/j.jmaa.2021.125723

[3] Amoroso, E., Bonanno, G., D'Aguì, G., Caro, S.D., Foti, S., O'regan, D. and Testa, A., 2022. Second-order differential equations for the power converters dynamical performance analysis, *Math Meth Appl Sci.,* **49**, pp.5573–5591. doi: 10.1002/mma.8127

[4] Bahia, M.A.L., Pimenta, M.T.O. and Junior, J.R.S., 2024. Existence, sign and asymptotic behaviour for a class of integro-differential elliptic type problems, *Calc. Var.,* **63**, 122. doi: 10.1007/s00526-024-02730-8

[5] Boccardo, L. and Croce, G., 2014. Elliptic Partial Differential Equations, Berlin: De Gruyter.

[6] Bonanno, G., 2012. A critical point theorem via the Ekeland variational principle, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 75(5), pp. 2992–3007. doi: 10.1016/j.na.2011.12.003

[7] Bonanno, G. and Molica Bisci, G., 2009. Infinitely many solutions for a boundary value problem with discontinuous nonlinearities, *Bound. Value Probl.*, 2009, pp.1–20. doi: 10.1155/2009/670675

[8] Corrêa, F.J.S.A., Assis Lima, N. de and Lima, R.N. de, 2023. Existence of solutions of integro-differential semilinear elliptic equations, *Appl. Anal.,* **102**, pp.1821-1839. doi.org/10.1080/00036811.2021.2005786

[9] Heidarkhani, S., 2013. Infinitely many solutions for systems of n two-point Kirchhoff-type boundary value problems, *Ann. Polon. Math.*, 107, pp.133–152. doi: 10.4064/ap107-2-3

[10] Makvand Chaharlang, M., Razani, A., 2019. Existence of infinitely many solutions for a class of nonlocal problems with Dirichlet boundary condition, *Commun. Korean Math. Soc.*, 34(1), pp.155–167, doi: 10.4134/CKMS.c170456

[11] Santos, G.C.G. dos, Assis Lima, N. de, and Lima, R.N. de, 2023 Existence of solution for a class of integro-differential sublinear problems with strong singularity, *Z. Angew. Math. Phys.,* **74**, 196. doi: 10.1007/s00033-023-02085-8

[12] Shokooh, S., Nohtani, F., Fozouni, M., 2024. Study an integro-differential equation by variational method, *J. Elliptic Parabol. Equ.*, **11**, 495-513. doi: 10.1007/s41808-025-00325-8

[13] Shokooh, S., Ghezelseflou, H. and Farokhzad Rostami, R., 2024. On the existence of solutions for a sixthorder boundary value problem, *Journal of Advanced Mathmatical Modeling*, 14(2), pp.26–38. doi: 10.22055/JAMM.2024.46159.2257

[14] Ricceri, B., 2000. A general variational principle and some of its applications, *J. Comput. Appl. Math.* **113** (2000), pp.401-410. doi: 10.1016/S0377-0427(99)00269-1

[15] Zeidler, E., 1990 and 1985. Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol. II/B and III, Berlin-Heidelberg-New York.

Critical points of a class of functionals in a Sobolev space

Saeid Shokooh[(1)] [6], **Ghasem Alizadeh Afrouzi**[(2)],
[(1)] Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Gonbad Kavous University, Gonbad Kavous, Iran.
[(2)] Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

Communicated by: Amirhossain Sanatpour

Received: 6 March 2025 Accepted: 25 December 2025

Abstract: In this paper, we investigate the existence of critical points for a specific class of functionals using critical point theorems. These critical points are of particular importance because they are associated with weak solutions to integral-differential problems with Dirichlet boundary conditions. Indeed, by employing variational methods, we first study the existence of a critical point for a functional with one control parameter and then examine the existence of a sequence of critical points for a functional with two parameters.

Keywords: Integro-differential equations, critical points, weak solution.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[6]Corresponding author.
E-mail addresses: (S. Shokooh) shokooh@gonbad.ac.ir and sd.shokooh@gmail.com
(G.A. Afrouzi) afrouzi@umz.ac.ir .