مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۱۲۰–۱۳۲

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2026.49722.2374

روش تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای معادلات دیفرانسیل جزئی تأخیری دوبعدی

مجتبی فردی [۱] [۱] و بنفشه رئیسی [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

دبیر مسئول: غلامرضا حجتی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۰۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۱۳

چکیده: این مقاله یک روش عددی بدون شبکه محلی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تأخیری دوبعدی ارائه می‌دهد. این روش بر پایه تفاضل متناهی تولیدشده با توابع پایه شعاعی توسعه یافته است. در گام نخست، گسسته‌سازی مکانی به‌صورت محلی و با استفاده از گره‌های پراکنده‌ی مجاور انجام می‌شود که موجب بهبود پایداری عددی می‌گردد. این فرآیند، معادله دیفرانسیل جزئی تأخیری اولیه را به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی تأخیری نسبت به زمان تبدیل می‌کند. در ادامه، برای حل دستگاه زمانی حاصل، از یک طرح تفاضل متناهی استفاده می‌شود. به‌منظور ارزیابی دقت و کارایی روش، یک مثال عددی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی دقت بالایی دارد و عملکرد آن با روش المان محدود گالرکین قابل مقایسه است.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی تأخیری، روش تفاضل متناهی تولیدشده با توابع پایه شعاعی، گسسته‌سازی موضعی.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 65M70; 35R11

۱ مقدمه

تولید شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در دامنه‌های چندبعدی، به‌ویژه در شرایطی که پیچیدگی مدل با افزایش تعداد ابعاد بیشتر می‌شود، یک چالش مهم به‌شمار می‌رود. در نتیجه، روش‌های بدون شبکه به‌عنوان جایگزینی مناسب، مورد توجه گسترده‌ای قرار گرفته‌اند. برخلاف روش‌های سنتی مبتنی بر شبکه، در روش‌های بدون شبکه از نقاط پراکنده برای گسسته‌سازی استفاده می‌شود.
در این مقاله، تمرکز اصلی بر روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه شعاعی است؛ این روش‌ها تاکنون به‌طور گسترده در حوزه‌های مهندسی و علوم پایه مورد مطالعه و کاربرد قرار گرفته‌اند. از جمله روش‌های شناخته‌شده در این دسته می‌توان به روش بدون شبکه پتروف–گالرکین موضعی، روش تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه شعاعی (RBF–FD) و سایر روش‌های مرتبط اشاره کرد [۱–۳].

[۱] مجتبی فردی (M. Fardi) m.fardi@sku.ac.ir

روش‌های تقریب مبتنی بر توابع پایه شعاعی به‌دلیل ویژگی‌های ذاتی خود که با خصوصیات معادلات پیچیده سازگار هستند، در شبیه‌سازی عددی این نوع معادلات بسیار مؤثر عمل می‌کنند. برتری این روش‌ها نسبت به روش‌های مبتنی بر شبکه در این است که بدون نیاز به ساختار شبکه‌ای منظم، امکان تقریب تابع در سراسر دامنه را فراهم می‌کنند؛ این امر سبب افزایش انعطاف‌پذیری، دقت و سادگی پیاده‌سازی می‌شود [۴–۸].

در مسائل با ابعاد بالا و هندسه‌های پیچیده، استفاده از روش‌های موضعی بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه شعاعی معمولاً نسبت به روش‌های سراسری ترجیح داده می‌شود. برای مثال، روش RBF–FD به‌دلیل ایجاد ماتریس‌های محاسباتی تنک، هم از نظر پایداری و هم از نظر هزینه محاسباتی نسبت به روش‌های سراسری عملکرد بهتری دارد [۱، ۲، ۴، ۹–۱۱].

روش RBF–FD یک تکنیک عددی قدرتمند برای تقریب معادلات در دامنه‌های پیچیده است. در این روش، از توابع پایه شعاعی برای ساخت یک الگوی پراکنده در فضا استفاده می‌شود که مشتق‌ها را در هر نقطه از دامنه به‌صورت موضعی تقریب می‌زند. روند اجرای روش از انتخاب مجموعه‌ای از نقاط در دامنه آغاز شده، سپس توابع پایه شعاعی در مرکز این نقاط تعریف می‌شوند. با استفاده از این توابع، تقریب تفاضل متناهی برای مشتق‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قابلیت بالای روش RBF–FD در مدیریت دامنه‌های چندبعدی، آن را به ابزاری مؤثر برای حل مسائل پیچیده‌تر نسبت به روش‌های کلاسیک تبدیل کرده است [۱۲–۱۶]. این ویژگی‌ها باعث شده‌اند تا این روش در حل عددی معادلات مشتقات جزئی در حوزه‌های منظم و نامنظم و همچنین در شبیه‌سازی‌های فیزیکی، کاربردهای گسترده‌ای پیدا کند.

معادلات مشتقات جزئی تأخیری به‌طور گسترده‌ای برای مدل‌سازی مسائل واکنش–پخش با حافظه در حوزه‌های شیمی، زیست‌شناسی، فیزیک و سایر شاخه‌های علمی مورد استفاده قرار گرفته‌اند (برای مثال، به [۱۷، ۱۸] مراجعه کنید). این دسته از معادلات با معادلات استاندارد واکنش–پخش تفاوت دارند، زیرا پاسخ آن‌ها تنها به وضعیت کنونی وابسته نیست بلکه به تاریخچه رفتار سیستم نیز وابسته است. همین وابستگی به گذشته باعث می‌شود که یافتن جواب دقیق برای معادلات مشتقات جزئی تأخیری بسیار دشوار باشد. به همین دلیل، در دهه‌های اخیر روش‌های عددی مؤثری برای حل این نوع معادلات توسعه داده شده‌اند. به عنوان نمونه، هاون و همکاران [۱۹] روش‌های پیشگو–اصلاحگر را ارائه دادند، زوبیک–کوال [۲۰، ۲۱] به بررسی همگرایی و پایداری روش خطوط پرداخت، هه و همکاران [۲۲] یک طرح تجزیه دامنه استخراج کردند، تیان [۲۳، ۲۴]، لیانگ و همکاران [۲۵] و وو و همکاران [۲۶] تحلیل‌هایی از پایداری روش‌های θ ارائه دادند، لیانگ [۲۷] پایداری و همگرایی روش گالرکین را بررسی کرد، و همچنین روش‌های گالرکین ناپیوسته موضعی [۲۸]، طرح‌های فشرده تفاضل محدود [۲۹–۳۲] و روش‌های گالرکین طیفی [۳۳]، برای این معادلات معرفی شده‌اند.

در این مقاله، معادله دیفرانسیل جزئی با تأخیر زمانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{x},t)-\gamma\frac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{x},t-\bar{r})+Lu(\mathrm{x},t)=f(\mathrm{x},t),\quad (\mathrm{x},t)\in\Omega\times(0,T], \tag{۱.۱}$$

که در آن $\Omega=(a,b)\times(c,d)$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ است و L یک عملگر خطی با ضرایب حقیقی $\delta_3>0$، δ_2، δ_1 و δ_4 است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Lu(\mathrm{x},t)=-\delta_1\Delta u(\mathrm{x},t)-\delta_2\Delta u(\mathrm{x},t-\bar{r})+\delta_3 u(\mathrm{x},t)+\delta_4 u(\mathrm{x},t-\bar{r}).$$

همچنین $\bar{r}>0$ تأخیر زمانی ثابت است.

شرط اولیه مسئله به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(\mathrm{x},t)=g(\mathrm{x},t),\quad (\mathrm{x},t)\in\Omega\times[-\bar{r},0], \tag{۲.۱}$$

که در آن g تابعی معلوم است که تاریخچه‌ی مسئله را مشخص می‌کند.

شرط مرزی از نوع دیریکله و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(\mathrm{x},t)=h(\mathrm{x},t),\quad (\mathrm{x},t)\in\partial\Omega\times[-\bar{r},T]. \tag{۳.۱}$$

توابع f، g و h در مسئله معلوم هستند و $T>0$ نمایانگر زمان نهایی است.

در این مقاله، یک روش بدون‌شبکه‌ی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی دوبعدی با تأخیر زمانی ارائه می‌شود. هدف اصلی روش پیشنهادی، ارائه‌ی یک الگوریتم عددی کارا از طریق بهره‌گیری از طرح تفاضل متناهی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای گسسته‌سازی مکانی است. ساختار مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، استخراج ضرایب در روش RBF–FD ارائه می‌شود. در بخش ۳، فرآیند گسسته‌سازی مسئله‌ی اصلی شرح داده شده است. در بخش ۴، آزمایش‌های عددی برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی انجام می‌شود. در نهایت، در بخش ۵ نتایج اصلی مقاله جمع‌بندی می‌گردد.

۲ استخراج ضرایب در روش RBF-FD

تعریف **۱.۲.** ([۴]) فضای چندجمله‌ای‌های d متغیره از درجه‌ی حداکثر m را با نماد $\mathbb{P}_m^d$ نشان می‌دهیم. بعد این فضا برابر $Q = \binom{m+d}{m}$ است.

تعریف **۲.۲.** ([۴]) تابع زوج و پیوسته‌ی حقیقی مقدار K معین مثبت مشروط از مرتبه m روی $\mathbb{R}^d$ است، اگر برای هر دو نقطه متمایز از مجموعه‌ی $\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_N\} \in \mathbb{R}^d$ و بردار $\mathrm{c} \in \mathbb{R}^N$ که $N \in \mathbb{N}$ باشد، شرط جانبی $\Sigma_{j=1}^N c_j p(\mathrm{x}_j) = 0$ برای هر $p \in \mathbb{P}_{m-1}^d$ برقرار و فرم درجه‌ی دوم

$$\Sigma_{j=1}^N \Sigma_{k=1}^N c_j c_k K(\mathrm{x}_j - \mathrm{x}_k),$$

نامنفی باشد.

فرض کنید تابع $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ یک تابع معین مثبت مشروط از مرتبه m و $K \in C^\ell(\Omega)$ باشد. هم‌چنین فرض کنید $\mathrm{X} = \{\mathrm{x}_i\}_{i=1}^N$ مجموعه‌ای از نقاط در یک دامنه باز و کراندار $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ باشد. فرض کنید $\mathrm{X}_0 = \{\mathrm{x}_i\}_{i=1}^n$، که $n \ll N$، یک مجموعه از گره‌های پراکنده پیرامون $\mathrm{x}_0 \in \Omega$ باشد. برای یک عملگر L، مقدار $\mathrm{L}u(\mathrm{x}_0)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathrm{L}u(\mathrm{x}_0) \approx \Sigma_{j=1}^n c_j u(\mathrm{x}_j), \tag{۱.۲}$$

که در آن c_j ضرایب وزنی نامعلوم هستند.
در فرمول‌بندی روش RBF-FD بردار وزن به گونه‌ای تعیین می‌شود که رابطه (۱.۲) برای فضای

$$\mathrm{span}\{K(\cdot - \mathrm{x}_1), \ldots, K(\cdot - \mathrm{x}_n)\} + \mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^2).$$

به‌صورت دقیق برقرار باشد. بنابراین، تابع $u(\mathrm{x})$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود [۳۴]:

$$u(\mathrm{x}) \approx s_u(\mathrm{x}) = \Sigma_{j=1}^n a_j K(\mathrm{x} - \mathrm{x}_j) + \Sigma_{k=1}^Q b_k p_k(\mathrm{x}), \tag{۲.۲}$$

که در آن $\{p_i\}_{i=1}^Q$ پایه‌ای برای چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر $m-1$ هستند و $Q = \dfrac{(m-1+2)!}{2!(m-1)!}$ است. با استفاده از شرایط درونیابی $u(\mathrm{x}_j) = s_u(\mathrm{x}_j),\ j = 1, \ldots, n$، و شرایط کمکی $\Sigma_{j=1}^n a_j p_k(\mathrm{x}_j) = 0,\ k = 1, \ldots, Q$، بردارهای ضرایب $\mathrm{a} := [a_1, \ldots, a_n]^T$ و $\mathrm{b} := [b_1, \ldots, b_Q]^T$ به دست می‌آیند. این روابط به صورت ماتریسی به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & \mathrm{P} \\ \mathrm{P}^T & \mathrm{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_e \\ 0 \end{bmatrix},$$

که در آن $\boldsymbol{u}_e = [u(\mathrm{x}_1), \ldots, u(\mathrm{x}_n)]^T$، $\mathrm{K}_{jk} = K(\mathrm{x}_k - \mathrm{x}_j)$ برای $j,k = 1, \ldots, n$ و $\mathrm{P}_{jk} = p_k(x_j)$ برای $k = 1, \ldots, Q$، $j = 1, \ldots, n$ هستند. از آنجا که K یک تابع معین مثبت مشروط از مرتبه m است و مجموعه X_0 یک مجموعه $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}^2)$-یکتا حل‌کننده است، این دستگاه خطی دارای جواب یکتا است.
فرض کنید

$$\mathrm{L}\boldsymbol{k}(\mathrm{x}_0) = [\mathrm{L}K(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0), \mathrm{L}K(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_0), \cdots, \mathrm{L}K(\mathrm{x}_n - \mathrm{x}_0)]^T,$$
$$\mathrm{L}\boldsymbol{p}(\mathrm{x}_0) = [\mathrm{L}p_1(\mathrm{x}_0), \mathrm{L}p_2(\mathrm{x}_0), \cdots, \mathrm{L}p_Q(\mathrm{x}_0)]^T.$$

تعریف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{L}\boldsymbol{k}^T(\mathrm{x}_0) & \mathrm{L}\boldsymbol{p}^T(\mathrm{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{K} & \mathrm{P} \\ \mathrm{P}^T & \mathrm{O} \end{bmatrix}^{-1} =: \begin{bmatrix} \mathrm{L}\boldsymbol{w}^T(\mathrm{x}_0) & \mathrm{L}\boldsymbol{v}^T(\mathrm{x}_0) \end{bmatrix}. \tag{۳.۲}$$

با اعمال عملگر L بر رابطه (۲.۲)، داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}u(\mathrm{x}_0) \quad &\approx \quad \mathrm{L}s_u(\mathrm{x}_0) = \begin{bmatrix} \mathrm{L}\boldsymbol{k}^T(\mathrm{x}_0) & \mathrm{L}\boldsymbol{p}^T(\mathrm{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \end{bmatrix} \\ &=: \quad \begin{bmatrix} \mathrm{L}\boldsymbol{w}^T(\mathrm{x}_0) & \mathrm{L}\boldsymbol{v}^T(\mathrm{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{L}\boldsymbol{w}^T(\mathrm{x}_0)\boldsymbol{u}_e = \sum_{j=1}^n \mathrm{L}w_j(\mathrm{x}_0)u(\mathrm{x}_j), \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

که در آن

$$\mathrm{L}\boldsymbol{w}(\mathrm{x}_\circ) = [\mathrm{L}w_1(\mathrm{x}_\circ), \mathrm{L}w_2(\mathrm{x}_\circ), \cdots, \mathrm{L}w_n(\mathrm{x}_\circ)]^T.$$

با مقایسه رابطه (۴.۲) با فرمول (۱.۲)، داریم:

$$c_j = \mathrm{L}w_j(\mathrm{x}_\circ),\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

در نتیجه، ضرایب $c_j, j = 1, \cdots, n$ از حل دستگاه زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K} & \mathrm{P} \\ \mathrm{P}^T & \mathrm{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{L}\boldsymbol{w}^T(\mathrm{x}_\circ) \\ \mathrm{L}\boldsymbol{v}^T(\mathrm{x}_\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{L}\boldsymbol{k}^T(\mathrm{x}_\circ) \\ \mathrm{L}\boldsymbol{p}^T(\mathrm{x}_\circ) \end{bmatrix}. \tag{۵.۲}$$

برای هر $\mathrm{x}_\circ \in \mathrm{X}$، بردار متناظر $\mathrm{c} = \mathrm{L}\boldsymbol{w}^T(\mathrm{x}_\circ)$ به دست می‌آید. فرض کنید این بردار به صورت $\{\mathrm{c}_k\}_{k=1}^N$ نمایش داده شود که در آن، برای نقاط خارج از زیردامنه موضعی، مؤلفه‌ها صفر هستند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathrm{L}u(\mathrm{x}_k) \approx \mathrm{L}s_u(\mathrm{x}_k) = \mathrm{c}_k^T \boldsymbol{u}_e,\ k = 1, 2, \ldots, N,$$

یا به صورت فشرده‌تر داریم:

$$\mathrm{L}u|_{\mathrm{X}} \approx \mathrm{L}s_u|_{\mathrm{X}} = \mathrm{C}\boldsymbol{u}_e,$$

که در آن $\boldsymbol{u}_e = u|_{\mathrm{X}}$ و $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_1^T| & \mathrm{c}_2^T| & \ldots| & \mathrm{c}_N^T \end{bmatrix}^T$ هستند.

۳ گسسته‌سازی مسئله

برای گسسته‌سازی مسئله (۱.۱)–(۳.۱)، فرض می‌کنیم که

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_\Omega \cup \mathrm{X}_{\partial\Omega} = \{\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_N\},$$

مجموعه‌ای از نقاط پراکنده در دامنه $\Omega \cup \partial\Omega$ باشند، به‌طوری‌که $\mathrm{X}_\Omega \cup \mathrm{X}_{\partial\Omega} = \mathrm{X}$ ، $\mathrm{X}_\Omega \cap \mathrm{X}_{\partial\Omega} = \varnothing$ ، $|\mathrm{X}_\Omega| = N^{\{1\}}$ ، $|\mathrm{X}_{\partial\Omega}| = N^{\{2\}}$ و $N^{\{1\}} + N^{\{2\}} = N$ هستند. برای هر $\mathrm{x} \in \Omega \cup \partial\Omega$، روابط زیر برقرارند:

$$u(\mathrm{x}, t) \approx s_u(\mathrm{x}, t) = \boldsymbol{w}(\mathrm{x})^T \boldsymbol{u}_e(t), \quad \mathrm{x} \in \Omega \cup \partial\Omega, \tag{۱.۳}$$
$$u(\mathrm{x}, t-\bar{r}) \approx s_u(\mathrm{x}, t-\bar{r}) = \boldsymbol{w}(\mathrm{x})^T \boldsymbol{u}_e(t-\bar{r}), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{۲.۳}$$
$$\Delta u(\mathrm{x}, t) \approx \Delta s_u(\mathrm{x}, t) = \Delta\boldsymbol{w}(\mathrm{x})^T \boldsymbol{u}_e(t), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{۳.۳}$$
$$\Delta u(\mathrm{x}, t-\bar{r}) \approx \Delta s_u(\mathrm{x}, t-\bar{r}) = \Delta\boldsymbol{w}(\mathrm{x})^T \boldsymbol{u}_e(t-\bar{r}), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{۴.۳}$$

که در آن

$$\boldsymbol{u}_e(t) = u(\cdot, t)|_{\mathrm{X}},\ \ \boldsymbol{u}_e(t-\bar{r}) = u(\cdot, t-\bar{r})|_{\mathrm{X}}.$$

با استفاده از (۱.۳) تا (۴.۳)، موارد زیر حاصل می‌شوند:

$$u(\mathrm{x}_k, t) \approx s_u(\mathrm{x}_k, t) = \boldsymbol{w}(\mathrm{x}_k)^T \boldsymbol{u}_e(t), \quad k = 1, \cdots, N^{\{1\}}, \tag{۵.۳}$$
$$u(\mathrm{x}_{k+N^{\{1\}}}, t) \approx s_u(\mathrm{x}_{k+N^{\{1\}}}, t) = \boldsymbol{w}(\mathrm{x}_{k+N^{\{1\}}})^T \boldsymbol{u}_e(t), \quad k = 1, \cdots, N^{\{2\}}, \tag{۶.۳}$$
$$u(\mathrm{x}_k, t-\bar{r}) \approx s_u(\mathrm{x}_k, t-\bar{r}) = \boldsymbol{w}(\mathrm{x}_k)^T \boldsymbol{u}_e(t-\bar{r}), \quad k = 1, \cdots, N^{\{1\}}, \tag{۷.۳}$$
$$\Delta u(\mathrm{x}_k, t) \approx \Delta s_u(\mathrm{x}_k, t) = \Delta\boldsymbol{w}(\mathrm{x}_k)^T \boldsymbol{u}_e(t), \quad k = 1, \cdots, N^{\{1\}}, \tag{۸.۳}$$
$$\Delta u(\mathrm{x}_k, t-\bar{r}) \approx \Delta s_u(\mathrm{x}_k, t-\bar{r}) = \Delta\boldsymbol{w}(\mathrm{x}_k)^T \boldsymbol{u}_e(t-\bar{r}), \quad k = 1, \cdots, N^{\{1\}}. \tag{۹.۳}$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$u(\cdot,t)|_{\mathrm{x}_\Omega} \approx s_u(\cdot,t)|_{\mathrm{x}_\Omega} = \boldsymbol{w_I} \boldsymbol{u}_e(t), \tag{۱۰.۳}$$
$$u(\cdot,t)|_{\mathrm{x}_{\partial\Omega}} \approx s_u(\cdot,t)|_{\mathrm{x}_{\partial\Omega}} = \boldsymbol{w_B} \boldsymbol{u}_e(t), \tag{۱۱.۳}$$
$$u(\cdot,t-\bar{r})|_{\mathrm{x}_\Omega} \approx s_u(\cdot,t-\bar{r})|_{\mathrm{x}_\Omega} = \boldsymbol{w_I} \boldsymbol{u}_e(t-\bar{r}), \tag{۱۲.۳}$$
$$\Delta u(\cdot,t)|_{\mathrm{x}_\Omega} \approx \Delta s_u(\cdot,t)|_{\mathrm{x}_\Omega} = \boldsymbol{w_\Delta} \boldsymbol{u}_e(t), \tag{۱۳.۳}$$
$$\Delta u(\cdot,t-\bar{r})|_{\mathrm{x}_\Omega} \approx \Delta s_u(\cdot,t-\bar{r})|_{\mathrm{x}_\Omega} = \boldsymbol{w_\Delta} \boldsymbol{u}_e(t-\bar{r}). \tag{۱۴.۳}$$

روش پیشنهادی برای مسئله (۱.۱)–(۳.۱) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{w_I u}'(t) - \gamma \boldsymbol{w_I u}'(t-\bar{r}) - \delta_1 \boldsymbol{w_\Delta u}(t) - \delta_2 \boldsymbol{w_\Delta u}(t-\bar{r}) \\ &+\delta_3 \boldsymbol{w_I u}(t) + \delta_4 \boldsymbol{w_I u}(t-\bar{r}) = \mathrm{F}(t),\ t \in (0,T], \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$
$$\boldsymbol{w_B u}(t) = \mathrm{H}(t),\ t \in [-\bar{r},T], \tag{۱۶.۳}$$

با شرط اولیه

$$\boldsymbol{w_I u}(t) = \mathrm{G}(t),\ t \in [-\bar{r},0],$$

که در آن

$$\mathrm{F}(t) = [f(\mathrm{x}_1,t), f(\mathrm{x}_2,t), \cdots, f(\mathrm{x}_{N\{1\}},t)]^T,$$
$$\mathrm{H}(t) = [h(\mathrm{x}_{N\{1\}+1},t), h(\mathrm{x}_{N\{1\}+2},t), \cdots, h(\mathrm{x}_N,t)]^T,$$

و

$$\mathrm{G}(t) = [g(\mathrm{x}_1,t), g(\mathrm{x}_2,t), \cdots, g(\mathrm{x}_{N\{1\}},t)]^T.$$

می‌دانیم:

$$\boldsymbol{w_I} = [\boldsymbol{w}_\mathbf{I}^\Omega\ \boldsymbol{w}_\mathbf{I}^{\partial\Omega}] = [\mathrm{I}_{N\{1\}\times N\{1\}}\ \mathrm{O}_{N\{1\}\times N\{2\}}],$$
$$\boldsymbol{w_B} = [\boldsymbol{w}_\mathbf{B}^\Omega\ \boldsymbol{w}_\mathbf{B}^{\partial\Omega}] = [\mathrm{O}_{N\{2\}\times N\{1\}}\ \mathrm{I}_{N\{2\}\times N\{2\}}].$$

اکنون فرض می‌کنیم:

$$\boldsymbol{u}(t) = [\boldsymbol{u}_\Omega(t)\ \boldsymbol{u}_{\partial\Omega}(t)]^T,\ \boldsymbol{w_\Delta} = [\boldsymbol{w}_\mathbf{\Delta}^\Omega\ \boldsymbol{w}_\mathbf{\Delta}^{\partial\Omega}],$$

و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}'_\Omega(t) - \gamma \boldsymbol{u}'_\Omega(t-\bar{r}) - \delta_1 \boldsymbol{w}_\mathbf{\Delta}^\Omega \boldsymbol{u}_\Omega(t) - \delta_2 \boldsymbol{w}_\mathbf{\Delta}^\Omega \boldsymbol{u}_\Omega(t-\bar{r}) + \delta_3 \boldsymbol{u}_\Omega(t) \\ &+\delta_4 \boldsymbol{u}_\Omega(t-\bar{r}) = \mathrm{F}(t) + \delta_1 \boldsymbol{w}_\mathbf{\Delta}^{\partial\Omega} \mathrm{H}(t) + \delta_2 \boldsymbol{w}_\mathbf{\Delta}^{\partial\Omega} \mathrm{H}(t-\bar{r}), \quad t \in (0,T], \end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

با شرط اولیه

$$\boldsymbol{u}_\Omega(t) = \mathrm{G}(t),\ t \in [-\bar{r},0].$$

برای گسسته‌سازی زمانی دستگاه ماتریسی (۱۷.۳)، بازه‌ی زمانی $(0,T]$ را به N_t زیربازه مساوی تقسیم می‌کنیم، به‌طوری‌که

$$\tau = \frac{T}{N_t}, \quad t_n = n\tau, \quad n = 0,1,\ldots,N_t.$$

فرض می‌کنیم تأخیر زمانی $\bar{r}$ مضربی از τ باشد، یعنی

$$\bar{r} = m\tau, \quad m \in \mathbb{N}.$$

در این صورت، برای هر t_n مقدار $t_n - \bar{r}$ برابر با t_{n-m} خواهد بود. حال متغیرها را در نقاط گسسته به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{u}_\Omega^n := \boldsymbol{u}_\Omega(t_n), \quad \mathrm{F}^n := \mathrm{F}(t_n), \quad \mathrm{H}^n := \mathrm{H}(t_n), \quad \mathrm{G}^n := \mathrm{G}(t_n).$$

برای تقریب مشتقات زمانی، از روش اویلر پسرو استفاده می‌کنیم:

$$\boldsymbol{u}'_\Omega(t_n) \approx \frac{\boldsymbol{u}_\Omega^n - \boldsymbol{u}_\Omega^{n-1}}{\tau}, \qquad \boldsymbol{u}'_\Omega(t_n - \bar{r}) \approx \frac{\boldsymbol{u}_\Omega^{n-m} - \boldsymbol{u}_\Omega^{n-m-1}}{\tau}.$$

با جای‌گذاری تقریب مشتقات در معادله‌ی اصلی، معادله گسسته در زمان t_n به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\boldsymbol{u}_\Omega^n - \boldsymbol{u}_\Omega^{n-1}}{\tau} - \gamma\frac{\boldsymbol{u}_\Omega^{n-m} - \boldsymbol{u}_\Omega^{n-m-1}}{\tau} - \delta_1 \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\Delta}}^\Omega \boldsymbol{u}_\Omega^n - \delta_2 \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\Delta}}^\Omega \boldsymbol{u}_\Omega^{n-m} + \delta_3 \boldsymbol{u}_\Omega^n + \delta_4 \boldsymbol{u}_\Omega^{n-m} = \mathrm{F}^n + \delta_1 \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\Delta}}^{\partial\Omega} \mathrm{H}^n + \delta_2 \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\Delta}}^{\partial\Omega} \mathrm{H}^{n-m}.$$

برای مقداردهی اولیه، با توجه به حضور تأخیر زمانی، نیاز است مقادیر $\boldsymbol{u}_\Omega^n$ برای $n = -m, \ldots, 0$ از تابع تاریخچه تعیین شوند:

$$\boldsymbol{u}_\Omega^n = \mathrm{G}^n = \mathrm{G}(t_n), \quad \text{برای} n = -m, \ldots, 0.$$

۴ نتایج عددی

این بخش به کاربرد روش پیشنهادی برای حل عددی یک مسئله آزمایشی می‌پردازد. برای پیاده‌سازی روش پیشنهادی، از زیردامنه‌های هم‌پوشان به صورت قرص‌های دایره‌ای

$$\Omega_j := B(\mathrm{x}_j, r_j) \cap \Omega, \; j = 1, \cdots, N^{\{1\}},$$

استفاده شده است، که در آن $\widehat{X} = \{\mathrm{x}_j\}_{j=1}^{N^{\{1\}}}$ و r_j به‌ترتیب مجموعه‌ی مراکز زیردامنه‌ها و شعاع آن‌ها را تشکیل می‌دهند. اگر h_{cov} فاصله تراکم مجموعه نقاط $\widehat{X}$ باشد، شعاع هر زیردامنه را می‌توان به‌صورت $r_j = Ch_{cov}$ تعیین کرد، که در آن $C \geq 1$ ثابت همپوشانی است.
در مثال این بخش، زیردامنه‌ها به صورت قرص‌های دایره‌ای متمرکز در نقاط x_j با شعاع‌های $r_j = 4h$ در نظر گرفته شده‌اند، که پوشش مناسبی از دامنه Ω را تضمین می‌کند.

مثال **۱.۴**. مسئله مشتقات جزئی تأخیری زیر با $\bar{r} = 1$ و $T = 1$ را در نظر بگیرید :[۳۵]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[u(\mathbf{x},t) - \dfrac{2}{5}u(\mathbf{x},t-\bar{r})\right] + Lu(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x},t), & (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(\mathbf{x},t) = e^{-t}\sin x \sin y, & (\mathbf{x},t) \in \Omega \times [-\bar{r}, 0], \\ u(\mathbf{x},t) = 0, & (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times [-\bar{r}, T], \end{cases}$$

تابع منبع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\mathbf{x},t) = \frac{1}{5}\sin(x)\sin(y)\left(20e^{-t} + 17e^{-t+\bar{r}}\right),$$

و عملگر دیفرانسیلی L به صورت زیر داده شده است:

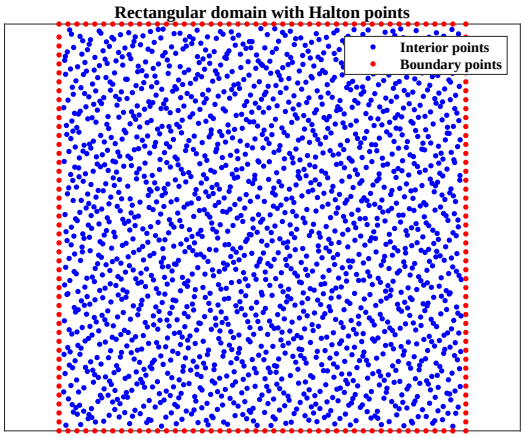
$$Lu(\mathbf{x},t) = -\frac{3}{2}\Delta u(\mathbf{x},t) - \Delta u(\mathbf{x},t-\bar{r}) + 2u(\mathbf{x},t) + u(\mathbf{x},t-\bar{r}).$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که تابع زیر یک جواب دقیق برای مسئله است:

$$u(\mathbf{x},t) = e^{-t}\sin x \sin y.$$

در این مثال، دامنه‌ی زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Omega := \left\{\mathbf{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, \; 0 < y < \pi\right\}.$$



شکل ۱: نقاط هالتون در دامنه: نقاط داخلی با رنگ آبی و نقاط مرزی با رنگ قرمز نمایش داده شده‌اند.

شکل ۱ موقعیت نقاط داخلی و مرزی را برای دامنه‌ی Ω نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نقاط آبی رنگ مربوط به نواحی داخلی و نقاط قرمز رنگ مربوط به مرزهای دامنه هستند. استفاده از توزیع هالتون باعث توزیع یکنواخت‌تر نقاط در کل دامنه شده و از تجمع یا پراکندگی نامطلوب جلوگیری می‌کند.
در این مثال، فضای تقریب به‌صورت ترکیبی از توابع پایه شعاعی چندهارمونیکی

$$K(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)=\begin{cases}((x-x_j)^2+(y-y_j)^2)^{k/2}, & \text{اگر } k \text{ فرد باشد}\\ ((x-x_j)^2+(y-y_j)^2)^{k/2}\log\left(\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}\right), & \text{اگر } k \text{ زوج باشد}\end{cases}$$

که معین مثبت مشروط اکید از مرتبه $m=\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1$ هستند، به‌همراه فضای چندجمله‌ای‌های چندمتغیره با درجه حداکثر $m-1$ به‌صورت

$$\operatorname{span}\{K(\cdot-\mathbf{x}_1),\ldots,K(\cdot-\mathbf{x}_n)\}+\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R}^2),$$

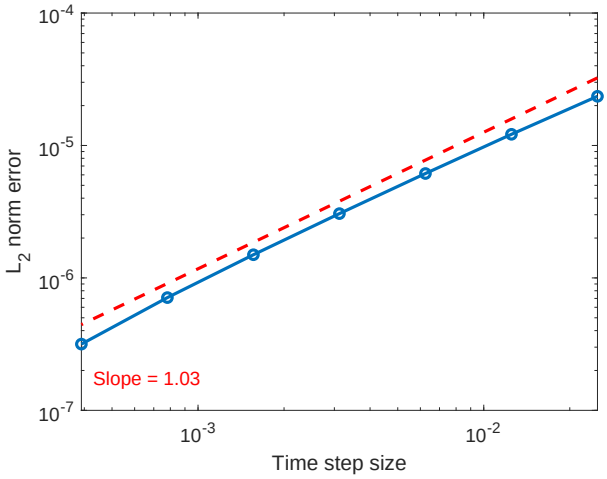
در نظر گرفته شده است. در این رابطه، $\mathbf{x}=(x,y)$ نقطه‌ی ارزیابی و $\mathbf{x}_j=(x_j,y_j)$ نقطه‌ی مرکزی تابع پایه است. پارامتر $k\in\mathbb{N}$ مرتبه تابع چندهارمونیک است. برای به‌دست آوردن نتایج عددی تابع پایه چندهارمونیک با پارامترهای $k=7$، $k=10$ و $k=11$ در نظر گرفته شده است، که به‌ترتیب معین مثبت مشروط از مرتبه ۴، ۶ و ۶هستند. با این حال، ما از چندجمله‌ای مرتبه بالاتر مانند $m=7$ نیز برای مشاهده تأثیر چندجمله‌ای‌ها بر نرخ همگرایی استفاده خواهیم کرد.
در شکل ۲ نمودار L_2 نُرم خطا نسبت به اندازه گام زمانی در مقیاس لگاریتمی رسم شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، با کاهش اندازه گام زمانی، خطا نیز کاهش یافته و رفتار همگرایی تقریباً خطی در مقیاس لگاریتمی دارد. مطابق برازش انجام‌شده، شیب منحنی در حدود 1.03 است. در جدول ۱، L_2 نُرم خطا برای دو حالت مختلف از پارامترهای k و m در روش پیشنهادی با نتایج گزارش‌شده در مرجع

جدول ۱: مقایسه L_2 نُرم خطا برای روش حاضر و نتایج گزارش‌شده در [۳۵]

تعداد نقاط	$k=11,\ m=7$	$k=7,\ m=5$	[۳۵]
۹۳	$۲٫۸۶۸۰۰۶\times۱۰^{-۵}$	$۲٫۲۱۱۳۳۸\times۱۰^{-۴}$	$(r=2)\ ۲٫۸۸۸۱\times۱۰^{-۳}$
۳۴۵	$۲٫۱۵۹۷۰۳\times۱۰^{-۷}$	$۲٫۰۴۱۷۶۵\times۱۰^{-۵}$	$(r=3)\ ۱٫۱۹۸۳\times۱۰^{-۵}$

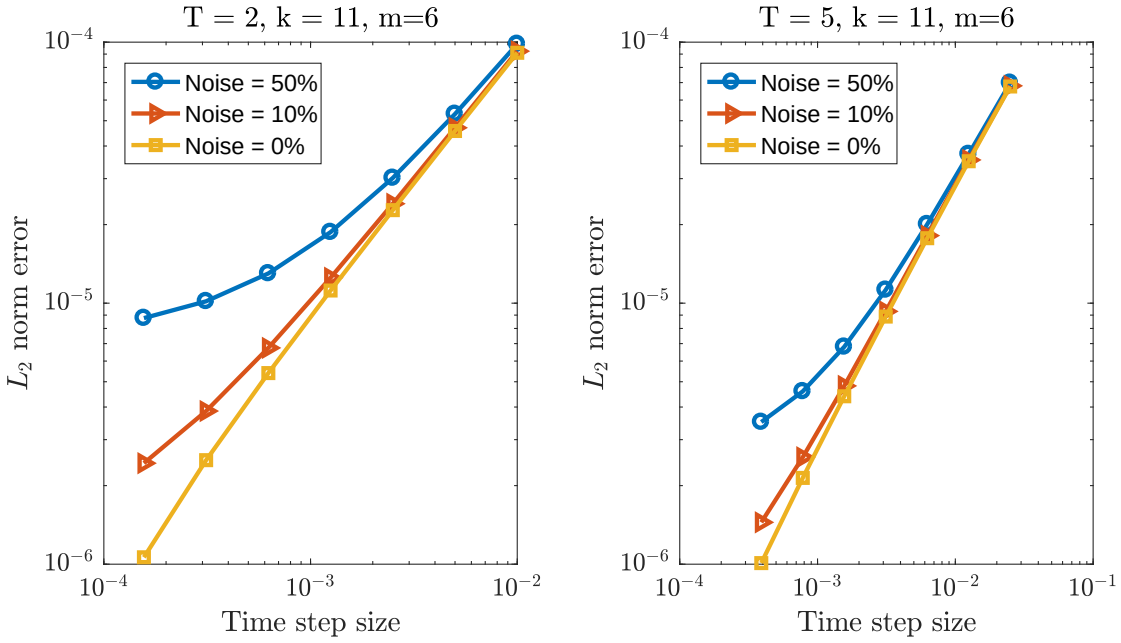
[۳۵] مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد نقاط، دقت روش حاضر بهبود می‌یابد و نتایج بهتری نسبت به روش مرجع ارائه می‌دهد.
برای بررسی حساسیت عددی نسبت به شرط اولیه، یک شرط اولیه حاوی نویز تصادفی را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(\mathbf{x},0)=g(\mathbf{x},0)+(1+\frac{\varrho}{100}\mathrm{Rand}),\mathbf{x}\in\Omega,$$



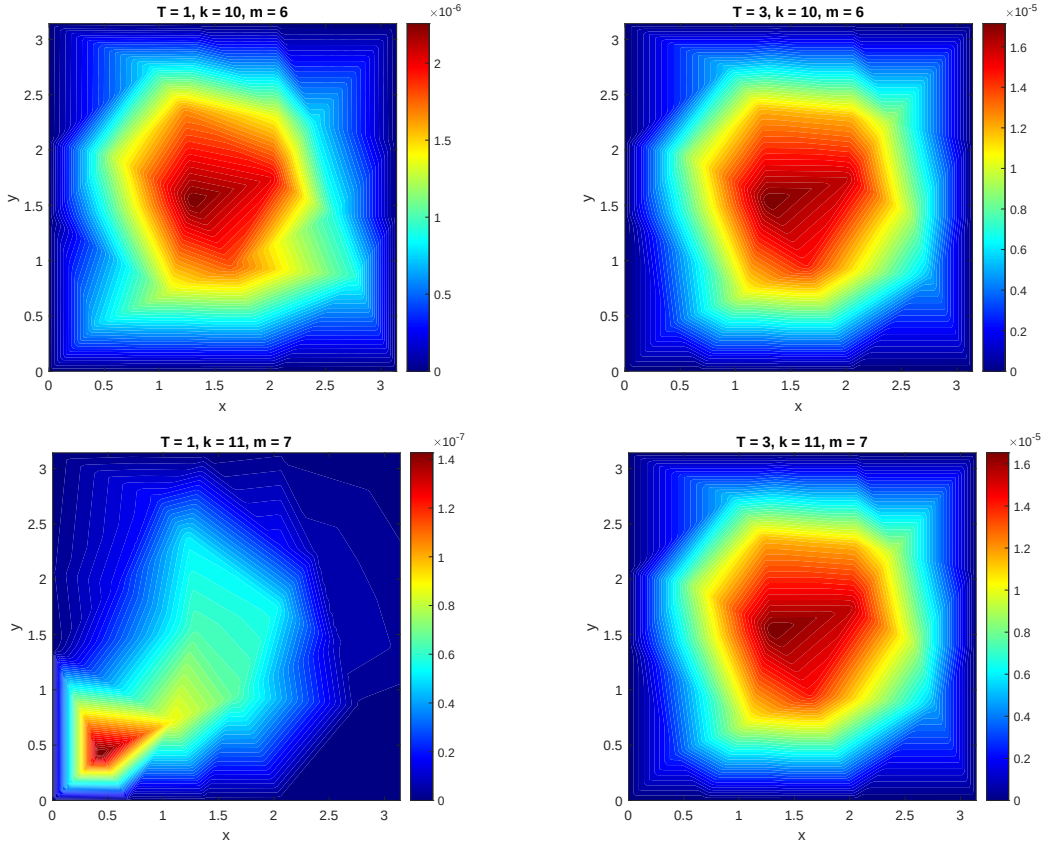
شکل ۲: نمودار $L_۲$ نُرم خطا بر حسب اندازه گام زمانی. شیب همگرایی تقریباً برابر با Slope = 1.03 است که با خطچین قرمز مشخص شده است.

که $\mathrm{Rand} \in [-۱, ۱]$ یک عدد شبه تصادفی تولید می‌کند و ϱ یک نویز است. برای مشاهده میزان تأثیر سطوح نویز بر جواب‌های تقریبی نمودار $L_۲$ نُرم خطا نسبت به اندازه گام زمانی در مقیاس لگاریتمی در شکل رسم شده است. واضح است که نتایج روش عددی ارائه شده با تغییر تعداد گام زمانی و سطوح نویز افزوده شده پایدار می‌ماند.
در شکل ۴، خطای مطلق بین حل عددی و حل دقیق در زمان نهایی $T = ۱$ و $T = ۳$ نمایش داده شده است. این نتایج با تعداد گام‌های



شکل ۳: $L_۲$ نُرم خطا با نویزهای متفاوت در زمان نهایی $T = ۲, ۵$ نسبت به اندازه گام زمانی و اندازه گام مکانی $h = ۰/۱$.

زمانی $N_t = ۱۲۸۰۰$ به‌دست آمده‌اند. نقاط ارزیابی بر اساس توزیع هالتون انتخاب شده‌اند. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، با تغییر پارامتر k و درجه‌ی چندجمله‌ای m، توزیع خطای مطلق تغییر کرده و دقت حل عددی تحت تأثیر این پارامترها قرار می‌گیرد. مقایسه‌ی بین حالات مختلف نشان می‌دهد که انتخاب مناسب پارامترهای تابع پایه و درجه‌ی چندجمله‌ای نقش مهمی در کاهش خطای عددی دارد.



شکل ۴: نمایش خطای مطلق در زمان نهایی $T = ۱, ۳$ با $N_t = ۱۲۸۰۰$، برای توابع پایه چندهارمونیک با پارامترهای $k = ۱۰, ۱۱$ و درجات چندجمله‌ای $m = ۶, ۷$.

۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی تأخیردار دوبعدی ارائه شد. گسسته‌سازی مکانی در این روش به صورت موضعی و با استفاده از تفاضل متناهی تولیدشده با توابع پایه شعاعی انجام شد. به منظور ارزیابی دقت و کارایی روش، یک مسأله آزمایشی حل شده است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان داد که روش پیشنهادی دقت بالایی در تقریب جواب دارد. بنابراین، این روش می‌تواند به عنوان ابزاری مؤثر و قابل اعتماد در حل مسائل تأخیردار دوبعدی مورد استفاده قرار گیرد. در نهایت، پیشنهاد می‌شود تحقیقات آینده به توسعه و تعمیم این روش به مسائل با ابعاد بالاتر از دو و انواع مختلف معادلات دیفرانسیل بپردازند.

فهرست منابع

[1] Najafi, M., Dehghan, M., Šarler, B., Kosec, G. and Mavrič, B., 2022. Divergence-free meshless local Petrov–Galerkin method for Stokes flow. *Engineering with Computers, 38*(6), pp.5359-5377. doi: 10.1007/s00366-022-01621-w

[2] Jiwari, R., 2022. Local radial basis function-finite difference based algorithms for singularly perturbed Burgers' model. *Mathematics and Computers in Simulation, 198*, pp.106-126. doi: 10.1016/j.matcom.2022.02.024

[3] Yan, W., 2003. Progress of meshless methods. *Journal of Ningxia University*.

[4] Fasshauer, G.E., 2007. Meshfree approximation methods with Matlab (With Cd-rom) (Vol. 6). *World Scientific Publishing Company*. doi.org/10.1142/6437

[5] Roohani Ghehsareh, H. and Zabetzadeh, S.M., 2020. A meshless computational approach for solving two-dimensional inverse time-fractional diffusion problem with non-local boundary condition. *Inverse Problems in Science and Engineering, 28*(12), pp.1773-1795. doi: 10.1080/17415977.2020.1764949

[6] Roohani Ghehsareh, H., Seidzadeh, M.S. and Etesami, S.K., 2020. Numerical simulation of a generalized anomalous electro-diffusion process in nerve cells by a localized meshless approach in Pseudospectral mode. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields, 33*(6), p.e2756. doi: 10.1002/jnm.2756

[7] Aslefallah, M., Abbasbandy, S. and Shivanian, E., 2019. Numerical solution of a modified anomalous diffusion equation with nonlinear source term through meshless singular boundary method. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 107*, pp.198-207. doi: 10.1016/j.enganabound.2019.07.016

[8] Aslefallah, M., Abbasbandy, S. and Shivanian, E., 2019. Fractional cable problem in the frame of meshless singular boundary method. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 108*, pp.124-132. doi: 10.1016/j.enganabound.2019.08.003

[9] Bollig, E.F., Flyer, N. and Erlebacher, G., 2012. Solution to PDEs using radial basis function finite-differences (RBF-FD) on multiple GPUs. *Journal of Computational Physics, 231*(21), pp.7133-7151. doi: 10.1016/j.jcp.2012.06.030

[10] Wendland, H., 2004. Scattered data approximation (Vol. 17). *Cambridge university press*. doi.org/10.1017/cbo9780511617539

[11] Shu, C., Ding, H. and Yeo, K.S., 2003. Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering, 192*(7-8), pp.941-954. doi: 10.1016/S0045-7825(02)00618-7

[12] Flyer, N., Lehto, E., Blaise, S., Wright, G.B. and St-Cyr, A., 2012. A guide to RBF-generated finite differences for nonlinear transport: Shallow water simulations on a sphere. *Journal of Computational Physics, 231*(11), pp.4078-4095. doi: 10.1016/j.jcp.2012.01.028

[13] Fornberg, B., Lehto, E. and Powell, C., 2013. Stable calculation of Gaussian-based RBF-FD stencils. *Computers & Mathematics with Applications, 65*(4), pp.627-637. doi: 10.1016/j.camwa.2012.11.006

[14] Flyer, N., Fornberg, B., Bayona, V. and Barnett, G.A., 2016. On the role of polynomials in RBF-FD approximations: I. *Interpolation and accuracy. Journal of Computational Physics, 321*, pp.21-38. doi.org/10.1016/j.jcp.2018.12.013

[15] Bayona, V., Flyer, N., Fornberg, B. and Barnett, G.A., 2017. On the role of polynomials in RBF-FD approximations: II. Numerical solution of elliptic PDEs. *Journal of Computational Physics, 332*, pp.257-273. doi.org/10.1016/j.jcp.2016.12.008

[16] Oruç, Ö., 2021. A local radial basis function-finite difference (RBF-FD) method for solving 1D and 2D coupled Schrödinger-Boussinesq (SBq) equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 129*, pp.55-66. doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.04.019

[17] Kolmanovskii, V. and Myshkis, A., 1999. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. *Kluwer Academic Publishers*.

[18] Wu, J., 1996. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations (Vol. 119). *Springer Science & Business Media*. doi: 10.1007/978-1-4612-4050-1

[19] van der Houwen, P.J., Sommeijer, B.P. and Baker, C.T., 1986. On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay. *IMA journal of numerical analysis, 6*(1), pp.1-23. doi.org/10.1093/imanum/6.1.1

[20] Zubik-Kowal, B., 1997. The method of lines for parabolic differential–functional equations. *IMA journal of numerical analysis, 17*(1), pp.103-123. doi.org/10.1093/imanum/17.1.103

[21] Zubik-Kowal, B., 2001. Stability in the numerical solution of linear parabolic equations with a delay term. *BIT Numerical Mathematics, 41*(1), pp.191-206. doi.org/10.1023/A:1021930104326

[22] He, Q., Kang, L. and Evans, D.J., 1997. Convergence and stability of the finite difference scheme for nonlinear parabolic systems with time delay. *Numerical Algorithms, 16*(2), pp.129-153. doi.org/10.1023/A:1019130928606

[23] Tian, H., 2008. Asymptotic stability of numerical methods for linear delay parabolic differential equations. *Computers & Mathematics with Applications, 56*(7), pp.1758-1765. doi.org/10.1016/j.camwa.2008.05.001

[24] Tian, H., 2009. Asymptotic stability analysis of the linear θ-method for linear parabolic differential equations with delay. *Journal of Difference Equations and Applications, 15*(5), pp.473-487. doi.org/10.1080/10236190802128284

[25] Liang, H., Liu, M.Z. and Lv, W., 2010. Stability of θ-schemes in the numerical solution of a partial differential equation with piecewise continuous arguments. *Applied mathematics letters, 23*(2), pp.198-206. doi.org/10.1016/j.aml.2009.09.012

[26] Wu, F., Wang, Q., Cheng, X. and Chen, X., 2018. Linear θ-Method and Compact θ-Method for Generalised Reaction-Diffusion Equation with Delay. *International Journal of differential equations, 2018*(1), p.6402576. doi.org/10.1155/2018/6402576

[27] Liang, H., 2015. Convergence and asymptotic stability of Galerkin methods for linear parabolic equations with delays. *Applied Mathematics and Computation, 264*, pp.160-178. doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.104

[28] Li, D., Zhang, C. and Qin, H., 2011. LDG method for reaction–diffusion dynamical systems with time delay. *Applied Mathematics and Computation, 217*(22), pp.9173-9181. doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.153

[29] Sun, Z.Z. and Zhang, Z.B., 2013. A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling, 37*(3), pp.742-752. doi.org/10.1016/j.apm.2012.02.036

[30] Zhang, Q. and Zhang, C., 2013. A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection–reaction–diffusion equations with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18*(12), pp.3278-3288. doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.05.018

[31] Li, D., Zhang, C. and Wen, J., 2015. A note on compact finite difference method for reaction–diffusion equations with delay. *Applied Mathematical Modelling, 39*(5-6), pp.1749-1754. doi.org/10.1016/j.apm.2014.09.028

[32] Zhang, Q., Zhang, C. and Wang, L., 2016. The compact and Crank–Nicolson ADI schemes for two-dimensional semilinear multidelay parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 306*, pp.217-230. doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.016

[33] Liu, B. and Zhang, C., 2015. A spectral galerkin method for nonlinear delay convection–diffusion–reaction equations. *Computers & Mathematics with Applications, 69*(8), pp.709-724. doi.org/10.1016/j.camwa.2015.02.027

[34] Arefian, S. and Mirzaei, D., 2022. A compact radial basis function partition of unity method. *Computers & Mathematics with Applications, 127*, pp.1-11. doi.org/10.1016/j.camwa.2022.09.029

[35] Han, H. and Zhang, C., 2021. Galerkin finite element methods solving 2D initial–boundary value problems of neutral delay-reaction–diffusion equations. *Computers & Mathematics with Applications, 92*, pp.159-171. doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.030

The radial basis function-generated finite difference (RBF-FD) method for two-dimensional delayed PDEs

Mojtaba Fardi[(1)] [2] and Banafsheh Raeisi[(2)]

[(1)] Department of Applied Mathematics, Shahrekord University, Shahrekord, Iran
[(2)] Department of Applied Mathematics, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

Communicated by: Gholamreza Hojjati

Received: 26 May 2025 Accepted: 3 May 2026

Abstract: This paper proposes a local meshfree numerical method for solving two-dimensional delayed partial differential equations (PDEs). The method is based on the radial basis function-generated finite difference approach. In the first step, spatial discretization is performed locally using scattered neighboring nodes, which improves numerical stability. This process transforms the original delayed PDE into a system of delay ordinary differential equations with respect to time. A finite difference scheme is then applied to solve the resulting temporal system. To assess the accuracy and efficiency of the method, a numerical example is presented. The results demonstrate that the proposed method achieves high accuracy and delivers performance comparable to that of the Galerkin finite element method.

Keywords: Delayed PDEs, Radial basis function-finite difference (RBF-FD) method, Local discretization.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (M. Fardi) m.fardi@sku.ac.ir, (B. Raeisi) banafshe.raeisi@stu.sku.ac.ir