مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۱۳۳–۱۴۶

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2026.51267.2443

دیالکتیک تعمیم و انتزاع در آموزش ریاضی

محمد سبزی[(۱)] [۱]، رضا بهمانی [(۲)]، محمدعلی سیاوشی [(۳)]
[(۱)] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهیدچمران اهواز
[(۲)] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران
[(۳)] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهیدچمران اهواز

دبیر مسئول: مهرداد نامداری
تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۹/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۱۶

چکیده: نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی بروسو، چارچوبی اثرگذار بر مهندسی محیط یادگیری در کلاس ریاضی است. بااین‌حال، این نظریه فرآیندهای شناختیِ درونیِ یادگیرنده را در مواجهه‌با بحران در موقعیت آدی‌داکتیکی به‌طور کامل تبیین نمی‌کند. این مقاله مفهومی، نظریه معماری دانش ریاضی را به‌عنوان چارچوب شناختی مکملِ نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی برای پرداختن به فرآیندهای شناختی درونی یادگیرنده معرفی می‌کند. ما استدلال می‌کنیم که دیالکتیک تعمیم و انتزاع موتور محرکه این معماری است؛ این دیالکتیک در پاسخ‌به بحران‌های شناختی، مکانیسم‌های بنیادین نظریه معماری دانش ریاضی (مانند ترجمه، فشرده‌سازی و بازآرایی) را فعال می‌کند. برای نشان‌دادن قدرت تحلیلی این چارچوب دو وینیت آموزشی در آنالیز (اعداد مختلط) و جبرخطی (بردار ویژه) تحلیل می‌شود. تحلیل‌ها نشان می‌دهد که چگونه محیط نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی دیالکتیک تعمیم و انتزاع را تحریک می‌کند، که به‌نوبه‌خود نیازمند فعال‌شدن مکانیسم‌های نظریه معماری دانش ریاضی است. این رویکرد، درک عمیق‌تری از نقش معلم به‌عنوان معمار بحران‌های شناختیِ سازنده فراهم می‌آورد و پیامدهای مهمی برای طراحی آموزشی در ریاضیات پیشرفته دارد.

واژه‌های کلیدی: موقعیت‌های دی‌داکتیکی، محیط، دیالکتیک تعمیم و انتزاع، مکانیسم‌های شناختی، آموزش ریاضی.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

۱ مقدمه

نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی [۲](TDS) که توسط بروسو توسعه یافته، نگاه ما را به فرآیند یادگیری در کلاس درس ریاضی متحول کرده‌است. این نظریه با تمرکز بر تعامل دانش‌آموز با یک محیط [۳] مساله‌محور، یادگیری را نه نتیجه انتقال مستقیم

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(M. Sabzi) sabzi.mohamad@gmail.com
[2] Theory of Didactical Situations
[3] Milieu

دانش از معلم به دانش‌آموز، بلکه محصول سازگاری و ساخت‌وساز خود دانش‌آموز در یک موقعیت آدی‌داکتیکی [۴] می‌داند. در این چارچوب، یکی از حیاتی‌ترین و ظریف‌ترین لحظات، نهادینه‌سازی[۵] است؛ لحظه‌ای که در آن، معلم دانش شخصی، موقعیت‌مند و شاید غیررسمی را که دانش‌آموز در فرآیند کاوش‌گری خود ساخته است، به دانش رسمی، عمومی و فرهنگی جامعه ریاضی پیوند می‌زند [۵] و [۶].

درحالی‌که TDS بروسو و مهندسی دی‌داکتیکی [۶] آرتیگ [۳] به چگونگی طراحیِ محیط برای ایجادِ یک موقعیت آدی‌داکتیکی می‌پردازند و چارچوب‌هایی هم‌چون گذار دی‌داکتیکی[۷] شوالار چگونگی جابه‌جایی و تغییرشکلِ دانش بین نهادها را تشریح می‌کنند [۹] اما این دیدگاه‌ها به ما نمی‌گویند که یک یادگیرنده هنگام مواجهه‌با یک مانع معرفتی [۱] از چه فرایندهای شناختی درونی استفاده می‌کند. نظریه معماری دانش ریاضی[۸] (MKA) [۲] با ارائه یک معماری شناختی، در تکمیلِ TDS نشان می‌دهد که درون ذهن یادگیرنده لحظه وقوع موقعیت آدی‌داکتیکی چه می‌گذرد. در ادبیات TDS، نهادینه‌سازی تفسیری اجتماعی دارد، نه شناختی؛ این مقاله می‌کوشد موتور شناختی رسیدن‌به آن را روشن کند.

اگرچه TDS در آغاز برای موقعیت‌های آدی‌داکتیکیِ آرمانی و ایده‌آل طراحی شده بود، پژوهش‌های بعدی (برای مثال [۱۲]) ابزارهای تحلیلی آن، مانند محیط و قرارداد دی‌داکتیکی، را به تحلیل تعامل‌های کلاسیِ عادی گسترش دادند. بااین‌حال، حتی در این بسط‌ها نیز، سازوکارهای شناختی‌ای که ازطریق آن‌ها یادگیرندگان دانش را درونی‌سازی و بازساخت می‌کنند، تاحد زیادی نامشخص باقی مانده‌است. باوجود قدرت توصیفی نظریه بروسو در مدل‌سازی تعاملات کلاس درس، این سوال بنیادین باقی می‌ماند: در ذهن دانش‌آموز چه می‌گذرد که او را برای پذیرش و درک عمیق لحظه نهادینه‌سازی آماده می‌کند؟ چگونه دانش شخصی و خام او به ساختاری منسجم و قابل‌اتصال به دانش رسمی، تبدیل می‌شود؟ به بیان دیگر، موتور شناختی پنهان در این فرآیند چیست؟ ایده اصلی ما این است که یک فرآیند بنیادین و پویا، تحت‌عنوان رقص دیالکتیکی تعمیم و انتزاع (G/A)[۹]، قلب تپنده ساخت دانش در موقعیت‌های طراحی‌شده توسط بروسو است. در این دیالکتیک، تعمیم حرکتی برای گسترش قلمرو یک ایده است و به سوال «این ایده در چه جاهای دیگری کار می‌کند؟» پاسخ می‌دهد. درمقابل، انتزاع حرکتی درجهت تعمیق ساختار است که در پاسخ به بحران‌ها و تناقض‌های ناشی‌از تعمیم شتاب‌زده، به سوال بنیادین «این ایده اساسا چیست؟» می‌پردازد [۲]. در ادامه، ابتدا مبانی نظری این دو چارچوب TDS و MKA را تشریح می‌کنیم و سپس با تحلیل دو وینیت آموزشی، نشان خواهیم داد که چگونه مهندسی هوش‌مندانه یک صحنه دی‌داکتیکی، دانش‌آموز را وادار به اجرای این رقص شناختی (دیالکتیکِ تعمیم و انتزاع) می‌کند و لحظه نهادینه‌سازی را به اوج طبیعی این فرآیند خلاقانه بدل می‌سازد.

۲ مبانی نظری

۱.۲ نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی

نظریه TDS بروسو یادگیری را زمانی معنادار می‌داند که دانش‌آموز مسئولیت فکری حل یک مساله را برعهده بگیرد. در این راستا، معلم یک موقعیت آدی‌داکتیکی را طراحی می‌کند. در این موقعیت، دانش‌آموز با یک محیط درگیر می‌شود که مستقل‌از معلم به او بازخورد می‌دهد. مفاهیمی که در این چارچوب تعریف می‌شود ([۶] و [۸]) عبارت است از:

- واگذاری مسئولیت[۱۰]: فرآیندی که طی آن، معلم مسئولیت حل مساله را به دانش‌آموز واگذار می‌کند و به او اجازه می‌دهد تا با استراتژی‌های خود با محیط تعامل کند.
- محیط: سیستمی متشکل‌از مساله، ابزارها و قراردادها که دانش‌آموز با آن در تعامل است و به کنش‌های او بازخورد (موفقیت، شکست، تناقض) می‌دهد.

[4] Adidactical Situation
[5] Institutionalization
[6] Didactical Engineering
[7] The Didactic Transposition
[8] Mathematical Knowledge Architecture
[9] Generalization and Abstraction
[10] Devolution

- مراحل کنش[11]، فرمول‌بندی[12] و اعتبارسنجی[13]: دانش‌آموز ابتدا برروی مساله عمل می‌کند، سپس تلاش می‌کند استراتژی خود را بیان کند و درنهایت آن را دربرابر چالش‌های محیط معتبر سازد.
- نهادینه‌سازی[14]: پس‌از آن‌که دانش‌آموز به یک دانش شخصی و کارآمد دست یافت، معلم وارد عمل می‌شود تا به این دانش، جایگاه و نام رسمی ببخشد و آن را به دانش فرهنگی و عمومی جامعه ریاضی متصل کند.

این نظریه بر چهار اصل معرفتی استوار است:

۱. دانش به‌عنوان راه‌حل بهینه یک موقعیت

از دید بروسو، دانش ریاضی چیزی نیست که صرفا در ذهن فرد یا ازطریق گفتار معلم شکل بگیرد، بلکه پاسخی است به یک وضعیت یا مساله خاص که در آن، فرد برای رسیدن به نتیجه‌ای مطلوب، باید تصمیمات عقلانی بگیرد. بنابراین، هر قطعه دانش را می‌توان به‌منزله راه‌حل بهینه برای یک وضعیت دی‌داکتیکی درنظر گرفت؛ وضعیتی که در آن، یادگیرنده باید دربرابر محدودیت‌ها و فشارهای محیطی ایده‌ای تولید کند که او را به حالت باثبات‌تری در بازی یادگیری برساند. در این معنا، دانش نوعی سازگاری موفق با شرایط مساله است، نه انتقال یا انباشت اطلاعات. از همین‌روست که بروسو منشا واقعی دانش را در کنشِ فرد در موقعیت می‌داند، نه در گفت‌وگوی صرف یا توضیح معلم ([۶] و [۱۴]).

۲. یادگیری به‌منزله انطباق شناختی

بروسو یادگیری را فرایند انطباق شناختی می‌داند؛ اما او این انطباق را از سطح ساخت‌های ذهنی–درونی به سطح کنش در موقعیت می‌برد. در چارچوب نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی، یادگیری هنگامی رخ می‌دهد که دانش‌آموز در تعامل با محیط (یعنی محیط مساله‌دار شامل ابزارها، بازخوردها و نشانه‌ها) رفتار، بازنمایی یا زبان خود را اصلاح کند تا بتواند بر مساله فایق آید. بنابراین، یادگیری نه صرفا بازسازی ذهنی دانش، بلکه تنظیم فعال رابطه یادگیرنده با موقعیت است؛ یعنی دانش‌آموز ازطریق شکست‌ها و بازخوردهای محیط، راهبردهای موثرتر را در کنش خود نهادینه می‌کند. این همان یادگیری ازطریق بازی با موقعیت است که هسته نظریه بروسو را تشکیل می‌دهد ([۵]، [۷] و [۱۴]).

۳. موقعیت بنیادی و معنای دانش

به باور بروسو، هیچ دانشی به‌صورت انتزاعی و مستقل‌از موقعیت معنا ندارد. برای هر مفهوم ریاضی، خانواده‌ای از موقعیت‌ها وجود دارد که آن مفهوم در دل آن‌ها ضروری و معنادار می‌شود؛ به این خانواده، موقعیت بنیادی[15] گفته می‌شود. موقعیت بنیادی همان جایی است که یادگیرنده ناچار می‌شود برای حل مساله، آن ابزار یا ایده خاص ریاضی را به‌کار گیرد. ازاین‌رو، طراحی آموزش موثر، مستلزم داشتن نظریه‌ای معرفت‌شناختی برای کشف موقعیت‌های بنیادی و مهندسی دی‌داکتیکی برای ساخت آن‌هاست. درواقع، یادگیری معنادار زمانی اتفاق می‌افتد که موقعیت بنیادی بتواند نیاز به دانش را درونی و حقیقی کند ([۶] و [۱۴]).

۴. خودمختاری شرط یادگیری اصیل

بروسو بر یک اصل کلیدی تاکید می‌کند: خودمختاریِ دانش‌آموز شرط ضروری یادگیری واقعی است. اگر دانش‌آموز پاسخ خود را بدون اتخاذ تصمیمات معرفتی و انتخاب‌های شخصی در مسیر حل مساله به‌دست آورد، یادگیری او صوری و ناپایدار خواهد بود. از این رو، بروسو میان موقعیت دی‌داکتیکی و موقعیت آدی‌داکتیکی تمایز می‌گذارد. در موقعیت دی‌داکتیکی معلم وظیفه را ارائه و محیط را طراحی می‌کند و دانش‌آموز برای ورود به مساله آماده می‌شود. در موقعیت آدی‌داکتیکی

[11] Action
[12] Formulation
[13] Validation
[14] Institutionalization
[15] Fundamental Situation

دانش‌آموز مساله را به‌عنوان مساله خود می‌پذیرد و معلم از مداخله مستقیم پرهیز و عقب‌نشینی می‌کند تا امکان سازگاری واقعی پدید آید. بدین‌ترتیب، یادگیری نه از آموزش مستقیم، بلکه از بازی خودگردان میان دانش‌آموز و محیط زاده می‌شود؛ و هرگاه این استقلال سلب شود، فراگیریِ دانش به‌معنای دقیق کلمه صورت نخواهد گرفت ([۶] و [۱۴]).

همین ضرورت اصل خودمختاری است که بستر ظهور یک وضعیت پارادوکسیکال را پدید می‌آورد. معلم از یک سو مسئول آموزش دانش‌آموز است (هدف دی‌داکتیکی) و از سوی دیگر باید از دخالت مستقیم در آموزش پرهیز کند (ضرورت آدی‌داکتیکی). این تنش میان مسئولیت آموزشی معلم و ضرورت عدم مداخله منجر به بروز وضعیتی می‌شود که بروسو آن را پارادوکس معلم[۱۶] می‌نامد.

پارادوکس معلم

بروسو نشان می‌دهد که معلم با یک پارادوکس اساسی روبه‌روست: «اگر معلم توضیح دهد، یادگیری را از دانش‌آموز می‌گیرد؛ اگر توضیح ندهد، ممکن است دانش‌آموز هرگز یاد نگیرد.» بروسو دانش‌آموز را نیز در یک موقعیت پاردوکسیکال می‌بیند: «دانش‌آموز باید درک کند و بیاموزد؛ اما برای آنکه بیاموزد، باید تاحدی از درک‌کردن دست بکشد و برای آنکه درک کند، باید خطر نیاموختن را بپذیرد.» این پارادوکس بیانگر آن است که در آموزش ریاضی، آزادی شناختی دانش‌آموز و کنترل آموزشی معلم در تنش دایمی‌اند [۶]. راه‌حل TDS این نیست که معلم توضیح ندهد، بلکه آن است که محیط را طوری طراحی کند که محیط خود نقش معلم را بازی کند. به‌بیان دیگر در یک کلاس واقعی، کار معلم آن نیست که پاسخ بدهد، بلکه این است که شرایطی بسازد که پاسخ ناگزیر شود.

۲.۲ نظریه معماری دانش ریاضی

در چارچوب معماری دانش ریاضی (MKA) موتور واقعی رشد دانش، تنش دیالکتیکی میان دو میل معرفتی بنیادین است: میل به گسترش (تعمیم) و میل به انسجام (انتزاع). میل به گسترش، نیرویی گریز از مرکز است که مرزهای معرفت را به بیرون می‌راند و با آشکارساختن بحران‌های زاینده، امکان ظهور مساله و درنتیجه شرط لازمِ رشد را پدید می‌آورد. دربرابر آن، میل به انسجام، نیرویی جاذبه‌ای و سامان‌بخش است که در پاسخ به این بحران‌ها (وضعیت‌های نوظهور و به‌ظاهر ناسازگار)، با خلق ابزارها و ساختارهای مفهومی دقیق‌تر، آشفتگی را به نظمی ژرف‌تر بدل می‌سازد. پنج مکانیسم بنیادین، هم‌چون چرخ‌دنده‌های مهندسی-شناختی، نیروی این دو میل را درقالب یک چرخه زنده و دیالکتیکی آشکار می‌سازد؛ دیالکتیکی میان تعمیم و انتزاع که موتور واقعی ریاضی‌ورزی است. در این چرخه، تعمیم قلمرو را گسترش می‌دهد و بحران می‌آفریند؛ انتزاع در پاسخ، ابزار می‌سازد و انسجام می‌بخشد؛ و ابزار تازه، خود زمینه دور تازه‌ای از تعمیم‌های جسورانه‌تر را فراهم می‌آورد. این رفت‌وبرگشت بی‌پایان میان ساخت و بسط، معماری دانش را گام‌به‌گام غنی‌تر و منسجم‌تر می‌سازد. این دیالکتیک ازطریق یک دستورزبان شناختی متشکل‌از پنج مکانیسم بنیادین- ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی- به‌اجرا درمی‌آید. این مکانیسم‌ها می‌توانند نقش یک دستورزبان ساختاری را برای توصیف حرکات معنادار در فرایندهای تعمیم و انتزاع ایفا کنند؛ آن‌ها کنش‌های مهندسی بنیادینی هستند که دانش را می‌سازند، اصلاح و یکپارچه می‌کنند [۲].

ترجمه

ترجمه[۱۷] جابه‌جایی نظام‌مند یک سازه مفهومی از یک نظام بازنمایی به نظامی دیگر است. شرط اساسی ترجمه معتبر، حفظ ساختار معنایی عمیق آن سازه است، حتی اگر ابزارهای نمایش کاملا تغییر کنند. حوزه اثر این مکانیسم معمولا میان دو معماری یا دو نظام بازنمایی متفاوت است (مثلا هندسه و جبر) و کارکرد اصلی آن، دسترس‌پذیر ساختن ابزارهای یک حوزه برای حل مسایل حوزه‌ای دیگر است. همانند ابداع دستگاه مختصات توسط دکارت که پلی بین معماری‌های عظیم هندسه اقلیدسی و جبر نمادین است.

[16] Teacher's Paradox
[17] Translation

فشرده‌سازی

فشرده‌سازی[۱۸] فرآیندی شناختی است که در آن یک فعالیت پیچیده، چندمرحله‌ای و زمان‌بر به یک سازه یا مفهوم واحد، ایستا و قابل‌دستکاری بدل می‌شود. این مکانیسم، ابزارساز اصلی در معماری دانش است. این مکانیسم به‌صورت فراکتالی در مقیاس‌های مختلف عمل می‌کند. در سطح خرد، این همان فرآیندی است که طی آن، رویه $a \times a \times \cdots \times a$ به سازه مفهومی a^n فشرده می‌شود. در مقیاس کلان تاریخی، فرآیند طولانی و چند دهه‌ایِ کار برروی رویه‌های محاسباتی پراکنده در حوزه جایگشت‌ها، درنهایت در سازه انتزاعی گروه فشرده شد.

بازآرایی

بازآرایی[۱۹] زمانی رخ می‌دهد که ورود یک ایده، ابزار یا مثال نقض جدید، روابط میان اجزای دانش موجود را بازچینش می‌کند و شبکه‌ای تازه و کارآمدتر می‌سازد. این مکانیسم نقش مهندس نوسازی و مقاوم‌سازی را دارد. حوزه اثر آن درون یک معماری و کارکرد آن حل تناقضات، رفع بدفهمی‌ها و افزایش انسجام شبکه مفهومی است. یک نمونه بارز این مکانیسم قضیه بازآرایی ریمان در سری‌های نامتناهی است که منجربه حل بحران مفهومی ازطریق خلق یک معماری پیچیده‌تر با دسته‌بندی‌های جدید (همگرایی مشروط/ غیرمشروط) شد.

هماهنگی

هماهنگی[۲۰] فرآیند خلاقانه‌ای است که دو یا چند معماری یا ساختار مفهومی مجزا را در یک نظام نو و یکپارچه ادغام می‌کند. این مکانیسم نقش شهرساز کلان را دارد. برخلاف ترجمه که تنها پلی بین دو حوزه می‌سازد، هماهنگی با تغییر قوانین و ایجاد زیرساخت‌های تازه، معماری‌ای نو خلق می‌کند. هماهنگی فرآیندی است که در آن دو معماری درهم ادغام می‌شوند و یک معماری کاملا جدید با قوانین و موجودیت‌های خاص خود پدید می‌آید. مانند خلق هندسه تحلیلی به‌واسطه محاسبه‌پذیر کردن استدلال‌های هندسی ازطریق معرفی دستگاه مختصات.

گذار معرفتی

گذار معرفتی[۲۱] به‌معنای تغییر در معیارهای بنیادین صدق و اعتبار در دانش ریاضی است؛ زمانی‌که جامعه ریاضی یا یک یادگیرنده، چارچوبی نو برای تشخیص ریاضیات معتبر اتخاذ می‌کند. این مکانیسم نقش انقلاب و بازنویسی قانون‌اساسی را دارد. حوزه اثر آن بر اصول بنیادین یک معماری است و برخلاف تغییرات تکاملی، یک دگرگونی ریشه‌ای در نحوه شناخت، استدلال و اعتباربخشی است. مانند رویارویی با هندسه هذلولوی و به چالش کشیدن بداهت اقلیدسی و گذار از هندسه اقلیدسی به نااقلیدسی و تغییر بنیادین در معیار حقیقت؛ تغییر از انطباق با شهود به سازگاری منطقی درونی یک سیستم.

در MKA وقتی یادگیرنده موفق به گذار معرفتی نشود دچار ایستایی معرفتی[۲۲] می‌شود. در این آسیب‌شناسی یادگیرنده در یک معیار حقیقت قدیمی‌تر گیر می‌کند و معیارهای جدید را نمی‌پذیرد؛ یک مقاومت دربرابر تغییر قانون اساسی دانش. به‌عنوان مثال هنگامی‌که یک دانش‌آموز پس‌از آزمودن چند مورد، از درستی یک گزاره هندسی مطمین می‌شود و دربرابر نیازبه اثبات صوری مقاومت می‌کند: «واضح است که درست است، چرا باید آن را اثبات کنم؟» او گرفتار ایستایی در یک معیار حقیقت تجربی–شهودی شده‌است و قادربه گذار معرفتی به دنیای اصول موضوعه‌ای که لازمه ورود به تفکر ریاضی پیشرفته است، نیست [۲].

در چارچوب نظریه معماری دانش ریاضی، تفکر ریاضی پیشرفته صرفا سکونت در جهان صوری نیست، بلکه توانایی عمل‌کردن بر خودِ معماری دانش است. یک متفکر پیشرفته نه‌تنها کاربر قوانین و ساختارهای موجود، بلکه معمار آن‌هاست؛ کسی‌که به‌طور آگاهانه از مکانیسم‌های پنج‌گانه برای تحلیل، نقد، اصلاح، یکپارچه‌سازی و حتی خلق معماری‌های جدید

[18] Compression
[19] Reconfiguration
[20] Coordination
[21] Epistemic Shift
[22] Epistemic Fixation

استفاده می‌کند. این توانایی عاملیت معمارانه[۲۳] نامیده می‌شود. بنابراین، فقدان AMT نه یک مشکل منفرد، بلکه پیامد شکست در یک یا چند مکانیسم بنیادین است. از این منظر، مسیر توسعه AMT مسیری تدریجی برای تسلط بر پنج مکانیسم است: از ترجمه و فشرده‌سازی (کاربری) تا بازآرایی، هماهنگی و گذار معرفتی (معمارانه). براین‌اساس، این نظریه خلاقیت ریاضی را اجرای هنرمندانه و بصیرت‌آمیز مکانیسم‌های پنج‌گانه تعریف می‌کند که نقطه مقابلِ صلبیت الگوریتمی[۲۴]، یعنی استفاده مکانیکی و صرفا نحوی از مکانیسم‌ها است [۲].

MKA چالش بنیادین را در آموزش ریاضی، شکاف معرفتی[۲۵] میان سه قلمرو زایشی (ریاضیات در بستر کشف تاریخی)، بازسازانه (ریاضیات در ساختار رسمی و آموزشی)، و بازتابی (ریاضیات در معماری شناختی یادگیرنده) می‌داند. اغلب، دانش‌آموز صرفا با محصول نهایی در قلمرو بازسازانه مواجه می‌شود، بدون آن‌که از فرآیند خلاق و پر از بحران قلمرو زایشی آگاه باشد. هدف غایی آموزش، یعنی هم‌راستایی معرفتی[۲۶]، پُرکردن همین شکاف است. این هم‌راستایی یک محصول نهایی و ایستا نیست، بلکه پیامدِ درگیرشدن فعالانه یادگیرنده در همان فرآیندهای پویایی است که خود دانش ریاضی را درطول تاریخ به‌حرکت درآورده است. به‌عبارت دیگر، هم‌راستایی معرفتی زمانی محقق می‌شود که معماری شناختی دانش‌آموز (قلمرو بازتابی)، ازطریق اجرای مکانیسم‌های پنج‌گانه، با منطق ساختاری و روح خلاق تاریخ (قلمرو زایشی) هم‌نوا شود. پنج مکانیسم شناختیِ MKA، همان ماشین‌آلاتی هستند که این فرآیند را ممکن می‌سازند. ترجمه، بسترساز حرکت میان معماری‌ها است؛ فشرده‌سازی، رویه‌های پیچیده را به سازه‌های مفهومی پایدار و قابل نهادینه‌سازی تبدیل می‌کند؛ بازآرایی، بحران‌های شناختی ناشی‌از تعارض‌ها را مدیریت می‌کند؛ هماهنگی، ساختارهای دانشی مختلف را در یک شبکه یکپارچه به‌هم پیوند می‌زند؛ و گذار معرفتی، آن جهش کیفی در درک را، به‌واسطه تغییر در جهان‌بینی، مدل‌سازی می‌کند. این مکانیسم‌ها، ابزارهای عملی هستند که در طراحی نسخه‌های هدایت‌شده به‌کار گرفته می‌شوند تا هم‌راستایی معرفتی را به‌صورت هدف‌مند محقق سازند. درنهایت، هم‌راستایی معرفتی زبان مشترکی است که تاریخ، منطق و تجربه یادگیرنده را به‌هم پیوند می‌زند. اگر دانش ریاضی را یک کلان‌شهر فرض کنیم، هم‌راستایی معرفتی همان طرح جامع شهر است که ارتباط هماهنگ بین مناطق تاریخی (زایشی)، مناطق مدرن و استاندارد (بازسازانه)، و خانه‌های شخصی شهروندان (بازتابی) را تضمین می‌کند. در این‌جا، پنج مکانیسم بنیادین، ابزارهای مهندسی و شهرسازی هستند. MKA با فراهم‌کردن این زبان و ابزارها، نشان می‌دهد که تاریخ ریاضیات، ذهن یادگیرنده و طراحی آموزشی، سه بُعد از یک ساختار معرفتی واحد و مقیاس‌پذیر هستند؛ چارچوبی که امکان فهم، بازسازی و تجربه ریاضی را در یک مسیر شناختی منسجم و معنادار فراهم می‌آورد. در مجموع، نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی با تمرکز بر طراحی محیط‌های آموزشی و واگذاری مسئولیت به یادگیرنده، سازوکار بیرونی یادگیری را به‌دقت تبیین می‌کند. بااین‌حال، این نظریه کم‌تر به سازوکارهای شناختی درونی‌ای می‌پردازد که یادگیرنده ازطریق آن‌ها بحران آدی‌داکتیکی را حل و دانش را بازساخت می‌کند. نظریه معماری دانش ریاضی در این نقطه وارد می‌شود: با تبیین پنج مکانیسم بنیادین، MKA را می‌توان معماری درونی مکمل مهندسی بیرونی TDS دانست. بدین‌ترتیب، پیوند میان این دو نظریه، امکان تحلیل هم‌زمانِ شکل‌گیریِ یادگیری در دو سطح بیرونی و درونی را فراهم می‌آورد [۲].

۳ روش‌شناسی

این پژوهش یک تحلیل کیفی-مفهومی است که هدف آن نشان‌دادن توان چارچوب MKA برای گشودن فرآیندهای درونی یادگیری در نظریه TDS است. داده‌های اصلی این مقاله شامل دو وینیت آموزشی بازسازی‌شده است که براساس موانع معرفتی کلاسیک ([۴] و [۶]) در ریاضیات پیشرفته (اعداد مختلط و بردار ویژه) طراحی شده‌است. این وینیت‌ها داده‌های تجربی خام نیستند، بلکه ماهیتی شبیه به آزمایش‌های فکری[۲۷] دارند که با جزییات واقعی غنی‌شده‌اند. محتوای این روایت‌ها، حاصل تلفیق مشاهدات کلاسی و تحلیل روایت‌های آموزشی همکاران است. هدف از به‌کارگیری آن‌ها، نه تعمیم‌پذیری آماری، بلکه تبیین نظری و نمایش شفاف فرآیندهای شناختی پیچیده‌ای است که مشاهده آن‌ها در داده‌های

[23] Architectural Agency
[24] Algorithmic Rigidity
[25] Epistemic Gap
[26] Epistemic Alignment
[27] Thought Experiments

کلاسیِ واقعی ممکن است دشوار باشد. این رویکرد، که بر ایزوله‌کردن[۲۸] و توجه‌کردن[۲۹] به لحظات بحرانی [۱۳] استوار است، به ما اجازه می‌دهد تا با وضوح تحلیلی بالا، این لحظات و مکانیسم‌های شناختی فعال‌شده را بررسی کنیم.

تحلیل وینیت‌ها بااستفاده‌از چارچوب ترکیبی TDS و MKA انجام می‌شود. ابتدا، هر وینیت بااستفاده‌از مفاهیم کلیدی TDS کالبدشکافی می‌شود. در این مرحله، محیط طراحی‌شده توسط معلم، مانع معرفتی [۱] هدف‌گذاری، و فرآیند واگذاری مسئولیت مشخص می‌شود. این تحلیل، معماری بیرونی موقعیت را که منجر به بحران شناختی می‌شود، روشن می‌کند. سپس، برای تحلیل فرآیندهای درونی یادگیری دانشجو در حالت آدی‌داکتیکی، از دیالکتیک تعمیم و انتزاع (G/A) به‌عنوان ابزاری تحلیلی و تفسیری بهره می‌گیریم. در این رویکرد، مسیر شناختی دانشجو به‌صورت چرخه‌هایی از تعمیم و انتزاع ردیابی می‌شود که هر چرخه بیانگر دگرگونی تدریجی در معماری فهم اوست:

- شناسایی تعمیم اولیه (G1): تلاش دانشجو برای استفاده از دانش قبلی؛
- شناسایی بحران: لحظه‌ای که محیط این تعمیم را شکست می‌دهد؛
- شناسایی انتزاع (A1): حرکت شناختی دانشجو برای خروج از بحران.

پس‌از شناسایی انتزاع (A1)، ما این حرکت شناختی را براساس پنج مکانیسم معماری دانش (ترجمه، فشرده‌سازی، بازآرایی، هماهنگی، و گذار معرفتی) کدگذاری مفهومی می‌کنیم تا مشخص شود کدام ابزار ساختاری برای حل بحران فعال می‌شود. اعتبار این پژوهش مفهومی، نه ازطریق معیارهای رایج پژوهش تجربی، بلکه ازطریق انسجام درونی و قدرت تبیینی چارچوب ارائه‌شده سنجیده می‌شود. هدف آن است که نشان دهیم چارچوب ترکیبی MKA-TDS چگونه می‌تواند فرآیندهای یادگیری پیچیده را به شیوه‌ای قابل‌دفاع و نظام‌مند مدل‌سازی کند.

۴ تحلیل وینیت‌های آموزشی در چارچوب MKA - TDS

در بخش‌های پیشین، ما چارچوب نظری این پژوهش را بر پایه دو نظریه مکمل بنا نهادیم؛ نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی (TDS) به‌مثابه معماری بیرونی و مهندسی محیط یادگیری، و مکانیسم‌های معماری دانش ریاضی (MKA) به‌مثابه معماری شناختی درونی یادگیرنده. هم‌چنین در بخش روش‌شناسی، بیان کردیم که چگونه از وینیت‌های تحلیلی بازسازی‌شده برای بررسی این چارچوب یکپارچه استفاده خواهیم کرد. در این بخش، این چارچوب نظری ترکیبی را برای تحلیل دو وینیت به‌کار می‌گیریم. هدف از این تحلیل، نه‌صرفا نشان‌دادن قابلیت کاربرد نظریه، بلکه آشکارسازی سازوکارهای شناختی نهفته در موقعیت آدی‌داکتیکی بروسو است. ما نشان خواهیم داد که چگونه یک محیط به‌خوبی طراحی‌شده در TDS، دانشجو را در یک مسیر شناختیِ قابل‌ردیابی قرار می‌دهد و او را مجبور به فعال‌سازی مکانیسم‌های خاص MKA برای خروج از بحران می‌کند. تحلیل هر دو وینیت از یک ساختار سه‌مرحله‌ای پیروی می‌کند:

- تحلیل موقعیت TDS: ابتدا مهندسی موقعیت، مانع معرفتی هدف‌گذاری‌شده، و محیطی که بحران را ایجاد می‌کند، توصیف می‌شود؛
- ردیابی دیالکتیکی G/A: سپس، رقص دیالکتیکی تعمیم و انتزاع (G/A) دانشجو در مواجهه‌با این بحران، گام‌به‌گام ردیابی می‌شود تا لحظه شکست تعمیم (G1) و حرکت به‌سمت انتزاع (A1) مشخص شود؛
- شناسایی مکانیسم MKA: درنهایت، نشان می‌دهیم که این حرکت انتزاعی (A1) دقیقا با کدام یک از مکانیسم‌های معماری دانش (مانند بازآرایی، فشرده‌سازی یا ترجمه) مطابقت دارد و چگونه این مکانیسم، راه‌حل بهینه شناختی را برای آن موقعیت فراهم می‌کند.

[28] Isolating
[29] Noticing

وینیت ۱: عدد مختلط

رادین هنوز مفهوم عدد را صرفا در چارچوب محور حقیقی می‌فهمد. از دید او، اعداد ابزاری برای اندازه‌گیری یا حل معادلات خطی‌اند و هر عدد باید جای خاصی روی خط داشته باشد (مانع معرفتی). درنتیجه، معادله $x^۲ + ۱ = ۰$ از نظر او غیرممکن است، چون مربع هیچ عدد حقیقی منفی نیست. استاد روی تخته می‌نویسد: عملی را پیدا کنید که اگر دو بار روی ۱ اعمال شود، نتیجه آن -۱ باشد. استاد عقب می‌کشد و آخرِ کلاس می‌ایستد. رادین با خودش می‌گوید:

$$۱ \longmapsto ? \longmapsto -۱.$$

او شروع‌به امتحان‌کردن اعداد روی محور حقیقی می‌کند $۲, -۲, ۰, ۰۰۰$. هیچ‌کدام جواب نمی‌دهد. با خود می‌گوید: «هیچ عددی روی این خط نمی‌تواند بعداز دوبار ضرب‌شدن، علامتش را عوض کند. اگر منفی باشد، ضرب در منفی مثبت می‌شود... اگر مثبت باشد...».
استاد چیزی نمی‌گوید. رادین چند لحظه خیره به عدد ۱ روی خط راست می‌ماند. رادین: «اگر... اگر مساله روی خط قابل حل نیست، شاید اصلا روی خط نیست!» استاد (بدون نزدیک شدن به تخته): «اگر این فضا مناسب نیست، آیا فضای دیگری سراغ داری؟»
رادین روی تخته یک دستگاه مختصات رسم می‌کند. نقطه $(۱, ۰)$ را علامت می‌زند. رادین می‌گوید «اگر این را بچرخانیم... ۹۰ درجه... می‌رود اینجا: $(۰, ۱)$ ...» «اگر دوباره بچرخانیم... می‌شود... $(-۱, ۰)$!» «پس این عمل، همان چرخش است. عملی که دو بار انجام شود و ۱ را به -۱ ببرد، چرخش ۹۰ درجه است.» رادین مداد را برمی‌دارد و می‌نویسد:

$$i(۱) = (۰, ۱) \Longrightarrow i(i(۱)) = i((۰, ۱)) = -۱.$$

به i نگاه می‌کند و می‌گوید: «پس i صرفا یک عدد نیست؛ بلکه یک عمل‌گر است.» او به استاد نگاه می‌کند، انگار تازه کشف کرده باشد که چرا $i^۲ = -۱$.

تحلیل وینیت بر اساس MKA-TDS

آ. سازوکارِ TDS: این روایت، نمونه دقیقی از مهندسی یک موقعیت آدی‌داکتیکی است:

جدول ۱: تحلیل TDS وینیت ۱

مرحله TDS	تحلیل روایت (آن چه در صحنه اتفاق افتاد)
واگذاری موقعیت	استاد فقط یک موقعیت را روی تخته مطرح کرد و عقب کشید. مسئولیت حل با دانشجو بود.
کنش با محیط	رادین روی محور حقیقی (محیط اولیه) کار کرد و شکست خورد.
تنظیم و بازخورد	محیط [نه استاد] ایجاب کرد که هیچ عدد حقیقی این کار را انجام نمی‌دهد.
محیط	استاد با یک سوال («آیا فضای دیگری سراغ داری؟»)، محیط را آماده کرد تا امکان بازآرایی فراهم شود.
فرمول‌بندی و اعتبارسنجی	رادین مدل چرخش ۹۰ درجه را فرمول‌بندی کرد و آزمود و با دو بار اعمالِ آن، به -۱ رسید (اعتبارسنجی موفق).
نهادینه‌سازی	در بخش بعدی مقاله انجام می‌شود: استاد i را به ماتریس دوران پیوند می‌زند.

نکته کلیدی نظریه TDS در طراحی این موقعیت آدی‌داکتیکی است که استاد دانش را انتقال نمی‌دهد؛ بلکه شرایط رسیدن به آن را با طراحی محیط مناسب، فراهم می‌کند. شرایطی که در آن رادین مجبور به شناسایی بحران و عبور از آن ازطریق خلق راه‌حل بهینه شود.

ب. دیالکتیک تعمیم و انتزاع G/A: فرآیند شناختی رادین همانند جدول ۲ از دیالکتیک G/A پیروی می‌کند.

جدول ۲: تحلیل G/A وینیت ۱

چرخه دیالکتیک	کنش شناختی رادین
تعمیم جبری (G1)	تلاش روی محور حقیقی برای یافتن عملی که با دو بار اعمال روی ۱، ۱− را نتیجه بدهد (شکست)
انتزاع (A1 - ترجمه)	انتقال بحران از خط به صفحه (تغییر بازنمایی و فضا)
تعمیم هندسی (G2)	مدل‌سازی چرخش ۹۰ درجه به‌عنوان عمل موردنظر
انتزاع (A2 - بازآرایی)	تغییر معنای i از عدد ناموجود به عمل‌گر دوران
تعمیم (G3)	ارتباط ضرب جبری $i^۲$ با دوران هندسی $(۲ \times ۹۰^\circ)$
انتزاع نهایی (A3 - هماهنگی)	شکل‌گیری ساختار مفهومی مشترک: ضرب در i = دوران ۹۰ درجه.

ج. فعال‌سازی مکانیسم‌های MKA: دیالکتیک تعمیم و انتزاع (G/A) همانند جدول ۳ مکانیسم‌های MKA را فعال می‌کند.

جدول ۳: تحلیل G/A وینیت ۱

مکانیسم MKA	لحظه فعال‌سازی
ترجمه	وقتی رادین در پاسخ به استاد، پیشنهاد می‌دهد به فضای دیگری (صفحه دکارتی) برود.
بازآرایی	وقتی با هیجان اعلام می‌کند: «پس i عدد نیست ... عمل است.» (مفهوم عدد بازآرایی می‌شود).
هماهنگی	در لحظه کشف $i(i(۱)) = -۱$ ؛ جایی‌که ضرب جبری و دوران هندسی یک چیز تلقی می‌شوند.

این وینیت نشان می‌دهد که دانش (مفهوم i به‌عنوان عمل‌گر) ازطریق طراحی هوش‌مندانه محیط TDS ساخته شد، نه ازطریق توضیح استاد. محیط، دانشجو را به یک دیالکتیک G/A واداشت که این دیالکتیک، مکانیسم‌های شناختی MKA را برای ساخت یک دانش عمیقِ مفهومی فعال کرد.

در این‌جا رادین مجبور شد معماری دانش خود را از عدد به‌مثابه نقطه، به عدد به‌مثابه عمل‌گر تغییر دهد. این بازآرایی، راه‌حل بهینه برای موقعیت طراحی‌شده بود. در این نقطه، نقش استاد دوباره فعال می‌شود. او بازآرایی شناختی رادین را به‌صورت نمادین نهادینه می‌کند: با معرفی نمایش جبری $a + bi$ به‌عنوان بازنمایی رسمی همان معماری جدیدی که رادین ازطریق بازآرایی کشف کرده بود. استاد این درک تازه را از عدد به‌مثابه عمل‌گر چرخش، به زبان رسمی و فرهنگی ریاضیات پیوند می‌زند. بنابراین نهادینه‌سازی نه انتقال دانشی جدید، بلکه رسمی‌کردن دانشی است که پیش‌تر در بستر آدی‌داکتیکی ساخته شده بود. او روی تخته می‌نویسد:

$$i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

و توضیح می‌دهد که ضرب در i دقیقا همان اثر ماتریس دوران ۹۰° را دارد.

وینیت ۲: بردار ویژه و مقدار ویژه

آرش ماتریس‌ها را به‌عنوان ابزار محاسباتی صرف می‌بیند. او می‌داند چگونه یک ماتریس A را در یک بردار v ضرب کند $Av = b$، اما این عمل را یک فرآیند الگوریتمی می‌بیند، نه یک تبدیل هندسی (چرخش، انبساط، انقباض). استاد برای شکستن این مانع معرفتی، یک موقعیت آموزشی را مهندسی می‌کند که دانشجویان را مجبوربه جست‌وجوی یک معنای هندسی کند. استاد روی تخته می‌نویسد: «یک ماتریس A را درنظر بگیرید. آیا می‌توانید بردارهایی (راستاهایی) را پیدا کنید که پس‌از اعمال A، جهت‌شان تغییر نکند (نچرخند) و فقط طول‌شان کم یا زیاد شود؟» این وظیفه، آرش را وارد یک موقعیت آدی‌داکتیکی می‌کند. او باید تنها با تکیه‌بر ابزارهای هندسی و جبری و بازخورد محیط، این راستاها را کشف کند.

تحلیل وینیت براساس MKA-TDS

آ. سازوکارِ TDS:

جدول ۴: تحلیل TDS وینیت ۲

مرحله TDS	تحلیل روایت (آن چه در صحنه اتفاق افتاد)
واگذاری	استاد مساله را مطرح کرد (یافتن بردار بدون چرخش) و مسئولیت حل مساله را به دانشجو سپرد.
کنش	آرش با انتخاب چند بردار به‌صورت تصادفی و ضرب ماتریس در آن‌ها اقدام به عمل نسبت به محیط کرد.
بازخورد محیط	نتیجه ضرب ماتریس در بردارهای به‌طور تصادفی انتخاب‌شده، نشان‌داد که بردارها تحت این ماتریس دوران داده می‌شوند و استراتژی آزمون و خطای آرش با شکست مواجه شد.
فرمول‌بندی	آرش شرط هندسی را به زبان جبری فرمول‌بندی کرد: $Av = \lambda v$.
اعتبارسنجی	بااستفاده‌از شرط دترمینان ($\det(A-\lambda I) = ۰$ اگر و تنها اگر معادله جبری $Av = \lambda v$ جواب غیربدیهی داشته باشد) وجود جواب برای صورت‌بندی جبری مساله را تضمین کرد.
نهادینه‌سازی	استاد در تایید فرمول‌بندی جبری آرش، بردار ویژه و مقدار ویژه را تعریف می‌کند.

ب. رقص دیالکتیکی

۱. بحران هندسی و ترجمه به جبر (G1/A1)

* G1- تعمیم شهودی: آرش ابتدا سعی می‌کند به‌صورت شهودی و با تعمیم تجربیات قبلی، چند بردار تصادفی (مانند $v_۱ = (۱, ۰)$ و $v_۲ = (۱, ۱)$) را آزمایش کند. او $Av_۱$ و $Av_۲$ را محاسبه و روی نمودار رسم می‌کند.
* بحران: او مشاهده می‌کند که تمام بردارهای آزمایشی‌اش، هم طول و هم جهت‌شان تغییر می‌کند (می‌چرخند). تعمیم شهودی او این است که «ماتریس‌ها همه چیز را به‌هم می‌ریزند.» این نتیجه با وظیفه‌ای که از او خواسته شده‌است (پیدا کردن بردار بدون تغییر جهت) درتضاد است.
* A1- انتزاعِ مساله (فعال‌سازیِ مکانیسم ترجمه): آرش درمی‌یابد که آزمایش تصادفی ناکارآمد است. او باید بفهمد که به‌دنبال چه‌چیزی می‌گردد. بنابراین وظیفه هندسی (عدم تغییر جهت) را به‌زبان جبری ترجمه می‌کند:
  - بردار خروجی Av باید با بردار ورودی v موازی باشد؛
  - موازی‌بودن یعنی Av باید مضرب اسکالری از v باشد؛
  - انتزاع نهایی: $Av = \lambda v$.

  در این لحظه، مکانیسم ترجمه فعال و یک مساله هندسی به یک معادله جبری تبدیل شده‌است.

۲. بحران جبری و انتزاعِ ساختاری (G2/A2)

* G2- تعمیمِ رویه جبری: آرش اکنون با معادله جدید A1 مواجه است: $Av = \lambda v$. او سعی می‌کند آن را با تعمیم رویه‌های جبری استاندارد حل کند. او معادله را به $Av - \lambda v = ۰$ و سپس به $(A - \lambda I)v = ۰$ بازنویسی می‌کند.
* بحران: این یک سیستم همگن است. آرش می‌داند که این سیستم همیشه جواب بدیهی $v = ۰$ را دارد. اما $v = ۰$ یک راستا نیست و به حل مساله کمک نمی‌کند. او به دنبال جوابی غیربدیهی $v \neq ۰$ می‌گردد. او در بن‌بست محاسباتی قرار می‌گیرد: چگونه سیستمی را حل کند که هم λ و هم

v در آن مجهول‌اند؟ آرش مجبور می‌شود از پیدا کردن v به پیدا کردن شرایطی که v غیربدیهی در آن وجود داشته باشد، برسد. سپس به‌یاد می‌آورد که یک سیستم همگن زمانی جواب غیربدیهی دارد که ماتریس ضرایب آن $(A - \lambda I)$ وارون‌ناپذیر باشد.

* A2- انتزاعِ نهایی: شرط وارون‌ناپذیری، $\det(A - \lambda I) = 0$ است. با این روش، آرش مساله را از یک جست‌وجوی غیرنظام‌مند برای یافتن بردار v، به حل یک معادله چندجمله‌ای استاندارد برای λ (معادله مشخصه) تبدیل می‌کند.

این لحظه نشان‌دهنده مکانیسم فشرده‌سازی است. استاد با نامگذاریِ λ با عنوان مقدار ویژه ماتریس A و بردار نابدیهیِ v با عنوان بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ به کشف آرش رسمیت می‌بخشد؛ سپس معادله $Av = \lambda v$ را به‌عنوان تعریف نهادی بردار ویژه معرفی می‌کند. این نهادینه‌سازی، گذار دانشجو از جست‌وجوی تجربی به ساختار مفهومی را تایید و تثبیت می‌کند.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

تحلیل شناختی دو وینیت ارائه‌شده شواهد روشنی برای ایده اصلی این مقاله فراهم می‌کند؛ چارچوب MKA (مکانیسم‌های معماری دانش ریاضی) در پیوند با دیالکتیک G/A (تعمیم و انتزاع)، فرآیندهای درونی فهم را در موقعیت آدی‌داکتیکی نظریه بروسو تبیین می‌کند. این مقاله نشان می‌دهد که چگونه طراحی آگاهانه محیط یادگیری توسط معلم/ استاد، به‌طور مستقیم سازوکارهای شناختی یادگیرنده را برمی‌انگیزد و او را به فعال‌سازی مکانیسم‌های خاص MKA برای بازساخت و تولید دانش وامی‌دارد.

در هر دو وینیت، محیط طراحی‌شده در TDS، نقشی فراتر از یک مساله ساده را ایفا کرد؛ این محیط به‌عنوان کاتالیزور بحران شناختی عمل کرد.

۱. غلبه بر ایستایی معرفتی: در هر دو مورد، دانشجو با یک دانش قبلیِ صلب (ایستایی معرفتی) وارد موقعیت شد. در وینیت عدد مختلط، این ایستایی، عدد به‌مثابه نقطه روی خط بود. در وینیت بردار ویژه، ماتریس به‌مثابه ابزار محاسبه بود.

۲. مهندسی بحران: طراحی مساله در هر دو مورد، دقیقا این دانش صلب را هدف قرار داد و آن را با شکست مواجه کرد. محیط به دانشجو بازخورد داد که صلبیت الگوریتمی او (تلاش برای حل روی خط و تلاش برای محاسبه صرف Av) در این موقعیت جدید غیرممکن یا ناسازگار است.

۳. فعال‌سازی عاملیت معمارانه: این بحران، دانشجو را مجبور به انتزاع (A1) کرد. این انتزاع، همان لحظه فعال‌سازی عاملیت معمارانه بود؛ جایی‌که دانشجو از اجراکننده رویه به معمار دانش تبدیل شد. این عاملیت، خود را در قالب مکانیسم‌های MKA نشان داد:

- در وینیت عدد مختلط، دانشجو مجبور به بازآرایی ساختار عدد شد؛
- در وینیت بردار ویژه، دانشجو مجبور به ترجمه مساله از هندسه به جبر شد.

بنابراین، این تحلیل‌ها نشان می‌دهند که راه‌حل بهینه موقعیت (مفهوم کلیدی بروسو) صرفا یک پاسخ نیست، بلکه یک مکانیسم MKA است که در مواجهه‌با بحران فعال می‌شود. وینیت‌ها نشان می‌دهند که فعال‌سازی مکانیسم‌ها در پاسخ‌به بحران است، نه به‌عنوان یک استراتژی ازپیش دانسته.

پیامدهای نظری: بازتعریف نقش معلم و محیط

ادغام چارچوب MKA با TDS، درک ما را از مفاهیم کلیدی بروسو عمیق‌تر می‌کند:

۱. بازتعریف محیط: یک محیط موثر در TDS،، صرفا یک مساله چالش‌برانگیز نیست، بلکه یک موقعیت هدف‌گیرنده مکانیسم است. این محیط باید به‌طور هدف‌مند برای به بن‌بست رساندن یک صلبیت الگوریتمی مشخص طراحی شود تا فعال‌سازی یک مکانیسم خاص MKA را ضروری کند.

۲. راه‌حل پارادوکس معلم: MKA راه‌حل شناختی پارادوکس معلم را در این می‌بیند که معلم نباید صرفا عقب‌نشینی کند؛ بلکه باید نقش یک معمار بحران‌های شناختیِ سازنده را ایفا کند. او باید معماری شناختی فعلی دانش‌آموز (دانشِ صلب او) را تشخیص دهد و سپس موقعیتی را مهندسی کند که ناکارآمدی این معماری را آشکار سازد و دانش‌آموز را به‌سمت عاملیت معمارانه (فعال‌سازی مکانیسم‌های MKA) سوق دهد.

۳. تبیین نهادینه‌سازی: این چارچوب نشان می‌دهد که نهادینه‌سازی نباید افشاگری دانش توسط معلم باشد. بلکه باید لحظه‌ای باشد که معلم، ساختار شناختی جدیدی را که دانش‌آموز قبلا ازطریق MKA ساخته است (مثلا درک i به‌عنوان عمل‌گر)، تایید کند، به آن نام رسمی بخشد و آن را به دانش فرهنگی-اجتماعی ریاضی متصل کند. نهادینه‌سازی برروی دانشی که هنوز فشرده یا بازآرایی نشده‌است، به یادگیری صوری منجر خواهد شد.

محدودیت‌ها و پژوهش‌های آتی

تحلیل ارائه‌شده در این مقاله، علی‌رغم غنای نظری دارای محدودیت‌هایی است. اولا، این پژوهش بر دو وینیت متمرکز است که اگرچه به‌دقت انتخاب شده‌اند، اما لزوما نماینده تمام فرآیندهای یادگیری نیستند. ثانیا، این وینیت‌ها لحظات موفقیت شناختی را نشان می‌دهند؛ تحلیل شکست‌ها (یعنی زمانی‌که دانشجو علی‌رغم بحران، در فعال‌سازی مکانیسم MKA شکست می‌خورد و در ایستایی معرفتی باقی می‌ماند) نیازمند پژوهش بیشتری است.

پژوهش‌های آتی می‌تواند بر دو حوزه متمرکز شود:

۱. طراحی آموزشی مبتنی‌بر MKA: توسعه و آزمایش تجربی موقعیت‌هایی که به‌طور خاص برای فعال‌سازی مکانیسم‌های پیچیده‌تر (هماهنگی یا گذار معرفتی) طراحی شده‌اند.

۲. تحلیل زنجیره‌ای مکانیسمی: این مقاله هر وینیت را بر یک مکانیسم غالب متمرکز کرد. پژوهش‌های آتی باید بررسی کنند که در حل مسایل پیچیده، چگونه مکانیسم‌ها به‌صورت زنجیره‌ای (مثلا: ترجمه $\longrightarrow$ بازآرایی $\longrightarrow$ فشرده‌سازی) فعال می‌شوند.

این مقاله با هدف ارائه یک چارچوب شناختی برای تبیین فرآیندهای درونی-شناختی یادگیرنده در بستر نظریه موقعیت‌های دی‌داکتیکی تدوین شد. ایده اصلی ما این بود که نظریه بروسو بیشتر به معماری بیرونی صحنه یادگیری، یعنی طراحی و مهندسی محیط آموزشی، می‌پردازد اما فرآیندهای شناختی را که یادگیرنده در دل موقعیت آدی‌داکتیکی برای عبور از بحران‌های فهم به‌کار می‌گیرد، به‌روشنی توضیح نمی‌دهد. ما استدلال کردیم که دیالکتیک تعمیم و انتزاع (G/A) نقش موتور شناختی و مکانیسم‌های معماری دانش ریاضی (MKA) نقش ابزارهای ساختاری را دارند که می‌توانند این لایه درونیِ فعالیت شناختی را تبیین کنند.

تحلیلِ دو وینیت از حوزه‌های کلیدی ریاضیات پیشرفته، شواهد محکمی را برای این ادعا فراهم می‌کند:

۱. در وینیت عدد مختلط، محیط طراحی‌شده توسط معلم، تعمیم اولیه رادین (G1: جست‌وجو روی خط حقیقی) را با شکست مواجه کرد. این بحران، او را مجبوربه یک انتزاع (A1) کرد که موجب فعال‌شدن مکانیسم بازآرایی شد: او مجبور شد معماری دانش خود را از عدد به‌مثابه نقطه، به عدد به‌مثابه عمل‌گر تغییر دهد. این بازآرایی، راه‌حل بهینه برای موقعیت طراحی‌شده بود.

۲. در وینیت بردار ویژه، بحران در محیط هندسی رخ داد (G1: شکست در یافتن بردارهای بدون چرخش با آزمایش). این بحران، دانشجو را مجبور به فعال‌سازی مکانیسم ترجمه کرد (A1: ترجمه مساله از هندسه به زبان جبری $Av = \lambda v$). این ترجمه، بحران را به مساله‌ای قابل‌حل تبدیل کرد که درنهایت منجربه یک انتزاع ساختاری عمیق‌تر شد.

فهرست منابع

[۱] سبزی، محمد، نامداری، مهرداد، سیاوشی، محمدعلی. (۱۴۰۴). سازوکار مقاومت در برابر یادگیری؛ بازخوانی موانع معرفتی در ریاضیات پیشرفته. به سوی علم ریاضی، ۵(۱)، ۱۰.۲۲۰۶۷/tmsj.۱۰۷۴.۹۸۷۸۰.۲۰۲۵ doi:-۶۸.pp ۸۰.

[۲] سبزی، محمد و بهمانی، رضا. (۱۴۰۴). نظریه معماری دانش ریاضی. (در دست داوری).

[3] M. Artigue (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products." In R. Biehler et al. (Eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline (pp. 27–39). Dordrecht: Kluwer.

[4] G. Bachelard (2002). The formation of the scientific mind: A contribution to a psychoanalysis of objective knowledge. Clinamen Press. (Original work published 1938).

[5] G. Brousseau (1997). La théorie des situations didactiques. Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal, Montréal.

[6] G. Brousseau (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer.

[7] G. Brousseau (1988). Le contrat didactique: Le milieu. Recherches en Didactique des Mathématiques 9.3, pp. 309–336.

[8] G. Brousseau (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. Retrieved on January 20, 2007.

[9] Y. Chevallard, (1985). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage.

[10] R. V. Churchill, J. W. Brown (2014). Complex Variables and Applications (9th Ed.). McGraw-Hill Education.

[11] K. Hoffman, R. Kunze, (1971). Linear Algebra (2nd Ed.). Prentice Hall.

[12] M. J. Perrin-Glorian, M. Hersant. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. Recherches en Didactique des Mathématiques, 23(2), 217–276.

[13] J. Mason (2002). Researching your own practice: The discipline of noticing. Routledge.

[14] L. Radford. (2018) On theories in mathematics education and their conceptual differences. In B. Sirakiv; P. De Souza; M. Viana, (Eds.), Proceedings of the International Congress of Mathematicians Vol. 4, p. 4055-4074. Singapore: World Scientific Publishing Co. DOI:10.1142/9789813272880

The Dialectic of Generalization and Abstraction in Mathematics Education

M. Sabzi[(1)] [30], R. Behmani[(2)] and M. A. Siavoshi[(3)]

[(1)] Department of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz,
[(2)] School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran,
[(3)] Department of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz.

Communicated by: Mehrdad Namdari

Received: 28 November 2025 Accepted: 6 May 2026

Abstract: The theory of didactical situations (TDS) proposed by Brousseau is an influential framework for engineering learning environments in mathematics classrooms. However, this theory does not fully account for the learner's internal cognitive processes when facing a crisis in an adidactical situation. In this conceptual paper, we introduce the theory of Mathematical Knowledge Architecture (MKA) as a complementary cognitive framework to TDS for addressing the learner's internal cognitive processes. We argue that the dialectic of generalization and abstraction is the driving engine of this architecture; this dialectic, in response to cognitive crises, activates the fundamental mechanisms of MKA (such as translation, compression and reconfiguration). To demonstrate the analytical power of this framework, two instructional vignettes in analysis (complex numbers) and linear algebra (eigenvectors) are examined. The analyses show how the TDS environment stimulates the dialectic of generalization and abstraction, which in turn requires the activation of MKA mechanisms. This approach provides a deeper understanding of the teacher's role as an architect of productive cognitive crises and offers important implications for instructional design in advanced mathematics.

Keywords: The Didactical Situations, Milieu, The Dialectic of Generalization and Abstraction, Cognitive Mechanisms, Mathematics Education.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[30]Corresponding Author
E-mail addresses: (M. Sabzi) sabzi.mohamad@gmail.com, (R. Behmani) reza.behmani@ut.ac.ir, (M.A. Siavoshi) m.siavoshi@scu.ac.ir