مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۴، دوره ۱۵، شماره ۴، ص ۱۴۷–۱۵۹

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2026.50643.2413

نوع جدیدی از عملگرهای بستار و درون تعمیم‌یافته بر پایه خانواده‌های موروثی

امین طلابیگی [۱] [۱] و قاسم میرحسین‌خانی [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام‌نور تهران، تهران، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

دبیر مسئول: علی رضایی علی آباد

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۱۸

چکیده: در این مقاله، قصد داریم با استفاده از یک کلاس از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژیکی تحت عنوان موروثی، یک نمونه مفید و کاربردی از عملگرهای پیش‌مشتق تعمیم‌یافته و عملگر دوگان آن (عملگر پیش هم–مشتق تعمیم‌یافته) را تحت نامهای $\mathcal{H}$–پیش‌بستار و $\mathcal{H}$–پیش‌درون معرفی و مطالعه کنیم. در نهایت، با استفاده از این عملگرها، دو عملگر دیگر را تحت نامهای $\mathcal{H}$–بستار و $\mathcal{H}$–درون به عنوان تعمیمی از عملگرهای کلاسیک بستار و درون توپولوژیکی معرفی و نشان می‌دهیم که همه این عملگرها یک توپولوژی تعمیم‌یافته یکسان را روی یک فضای توپولوژیکی القا می‌کنند. در نتیجه، بسیاری از نتایج عملگرهای توپولوژیکی از طریق کلاس‌های موروثی تعمیم، مشخصه‌سازی و بیان می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: کلاس موروثی، توپولوژی تعمیم‌یافته، عملگر پیش‌بستار، عملگر پیش‌درون.

رده‌بندی ریاضی: 54A05; 54A99

۱ مقدمه

ساختارهای توپولوژیکی، به ویژه سیستم‌های بستاری، در بسیاری از زمینه‌های علوم کاربردی و همچنین شاخه‌های ریاضیات اهمیت دارند. در واقع، از آن در داده‌کاوی، توپولوژی محاسباتی برای طراحی هندسی و طراحی مولکولی، طراحی به کمک کامپیوتر، طراحی هندسی به کمک کامپیوتر، توپولوژی دیجیتال، سیستم‌های اطلاعاتی، فیزیک ذرات، فیزیک کوانتومی و غیره استفاده می‌شود. می‌دانیم که فضاهای توپولوژیکی به صورت مشخصی با عملگر بستار توپولوژیکی که اصول کوراتوفسکی را برآورده می‌کند، مشخص می‌شوند [۱۱]. به طور معادل، می‌توان آن‌ها را با سایر عملگرهای توپولوژیکی، مانند عملگر درون توپولوژیکی، عملگر بستار توپولوژیکی، عملگر مرزی، عملگر مجموعه مشتق و عملگر مجموعه هم–مشتق، معین نمود. همچنین می‌دانیم که عملگر بستار و عملگر درون می‌توانند به صورت ضعیف‌تری در فضاهای توپولوژیکی تعمیم‌یافته تعریف شوند [۳].

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(A. Talabeigi) talabeigi.amin@gmail.com, talabeigi@pnu.ac.ir
(G. Mirhosseinkhani) gh.mirhosseini@yahoo.com, gh.mirhosseini@sirjantech.ac.ir,

شایان ذکر است که تلاش‌های متعددی برای تعمیم توپولوژی و در نتیجه تعمیم عملگرهای توپولوژیکی صورت گرفته است. برای این منظور، در سال ۱۹۶۳، لوین [۱۳] تلاش کرد مفهوم مجموعه‌های باز را تعمیم دهد. در واقع، او سعی کرد با جایگزین کردن مجموعه‌های نیمه‌باز به جای مجموعه‌های باز، مفهوم توپولوژی را گسترش و تعمیم دهد. پس از لوین، کارهای مشابهی انجام شد. در سال ۱۹۶۵، مجموعه‌های α–باز [۲۰]، در سال ۱۹۷۹، مجموعه‌های ضعیف‌باز [۱۴]، در سال ۱۹۸۲، مجموعه‌های پیش‌باز [۱۵]، و در سال ۱۹۸۳، مجموعه‌های β–باز [۱] تعریف شدند و نهایتاً در سال ۱۹۹۷، چاسار [۲] توانست با معرفی مجموعه‌های γ–باز و تعریف قیاسی مفهوم باز تعمیم‌یافته، این تنوع را سامان دهد. خواص مجموعه‌های γ–باز نهایتاً منجر به معرفی ساختاری فضاهای توپولوژیکی تعمیم‌یافته توسط چاسار در سال ۲۰۰۲ شد [۳].

نوع دیگری از تعمیم مفاهیم توپولوژیکی بر اساس واسطه‌هایی مانند پالایه‌ها، ایده‌آل‌ها و گریل‌ها صورت گرفته است [۶، ۱۶، ۲۳، ۲۴]. نخستین گام‌ها در معرفی فضاهای توپولوژیکی بیان‌شده توسط ایده‌آل به کوراتوفسکی در سال ۱۹۳۳ برمی‌گردد که تابع موضعی را به عنوان تعمیمی برای بستار معرفی کرد [۱۱]. مطالعه‌ای دقیق‌تر بر روی تابع موضعی و خواص آن با توجه به ایده‌آل‌های مختلف در سال ۱۹۴۴ توسط وایدیاناتاسوامی ارائه شد [۲۶]. توپولوژی جدید τ^* که از تابع موضعی حاصل می‌شود، توسط هیاشی در سال ۱۹۶۴ و بسیاری دیگر از نویسندگان مورد بررسی قرار گرفت [۷، ۸، ۱۹، ۲۱]. در [۴]، چاسار به جای توپولوژی و ایده‌آل روی مجموعه X، توپولوژی تعمیم‌یافته μ و کلاس موروثی روی X را در نظر گرفت و با استفاده از همان تابع موضعی توپولوژی تعمیم‌یافته جدید μ^* را به جای τ^* بدست آورد. در [۱۶] نشان داده شده است که واسطه‌های مذکور (پالایه‌ها، ایده‌آل‌ها و گریل‌ها) به نوعی دوگان یکدیگرند و بنابراین نتایجی که به یکی از آن‌ها مربوط می‌شود، نتایج متناظری درباره دو مورد دیگر نیز به دنبال دارد. در [۲۲]، طلابیگی به جای ایده‌آل روی فضای توپولوژیکی (X,τ) کلاس موروثی $\mathfrak{H}$ را در نظر گرفت و با استفاده از همان تابع موضعی توپولوژی تعمیم‌یافته جدید $\tau_{\mathfrak{H}}$ را به جای τ^* بدست آورد.

در [۱۲] تحت شرایط ضعیف‌تر، نویسندگان چند عملگر تعمیم‌یافته معادل از جمله عملگر مرزی، عملگر بیرونی، عملگر مجموعه مشتق، عملگر مجموعه هم‌مشتق و عملگر مجموعه پیش هم–مشتق معرفی کردند به‌طوری‌که همه این عملگرها قادرند توپولوژی تعمیم‌یافته یکسانی را روی یک مجموعه تعیین کنند. در این مقاله، با الهام از دو عملگر مجموعه هم–مشتق تعمیم‌یافته و مجموعه پیش هم–مشتق تعمیم‌یافته، قصد داریم مثالی کاربردی و مفید از عملگر مجموعه پیش هم–مشتق تعمیم‌یافته را تحت عنوان $\mathcal{H}$–پیش‌درون تعمیم‌یافته با استفاده از یک کلاس موروثی روی فضای توپولوژیکی معرفی و بررسی کنیم. در نهایت، با استفاده از این عملگر، عملگر دیگری به نام $\mathcal{H}$–درون تعمیم‌یافته معرفی می‌کنیم که مجموعه نقاط ثابت آن یک توپولوژی تعمیم‌یافته را روی فضای توپولوژیکی القا می‌کند. در نتیجه، بسیاری از نتایج عملگرهای توپولوژیکی از طریق کلاس‌های موروثی تعمیم، مشخصه‌سازی و بیان می‌شوند.

۲ مفاهیم و تعاریف اولیه

فرض کنید X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه توانی آن باشد. عملگر γ روی $P(X)$ را گوییم:

- یکنواست اگر $A\subseteq B\subseteq X$ آن‌گاه $\gamma(A)\subseteq\gamma(B)$،
- خودتوان است اگر $\gamma(A)=\gamma(\gamma(A))=\gamma^2(A)$ برای هر $A\subseteq X$،
- کاهشی است اگر $\gamma(A)\subseteq A$ برای هر $A\subseteq X$،
- افزایشی است اگر $A\subseteq\gamma(A)$ برای هر $A\subseteq X$،
- $\vee$–جمعی است اگر $\gamma(A\cup B)=\gamma(A)\cup\gamma(B)$ برای هر $A,B\subseteq X$،
- $\wedge$–جمعی است اگر $\gamma(A\cap B)=\gamma(A)\cap\gamma(B)$ برای هر $A,B\subseteq X$.

یادآوری می‌کنیم که یک نگاشت $\gamma:P(X)\to P(X)$ به‌طوری‌که افزایشی، خودتوان، $\vee$–جمعی و $\gamma(\emptyset)=\emptyset$ باشد، عملگر بستار کوراتوفسکی نامیده می‌شود. اگر γ یک عملگر بستار کوراتوفسکی روی مجموعه X باشد، آن‌گاه گردایه $\tau:=\{A\subseteq X\mid \gamma(A^c)=A^c\}$ یک توپولوژی روی X است به‌طوری‌که برای هر $A\subseteq X$، $cl_\tau(A)=\gamma(A)$ [۱۱]، که در آن متمم مجموعه A را با A^c نشان می‌دهیم. در [۱۲]، تحت شرایط ضعیف‌تر، نویسندگان برخی از تعمیم‌های عملگرهای بستار و درون را تعریف و مطالعه کرده‌اند. اجازه دهید برخی از تعاریف لازم را ارائه دهیم.

تعریف ۱.۲. یک عملگر Cl روی $P(X)$ اگر یکنوا، خودتوان و افزایشی باشد، یک عملگر بستار تعمیم‌یافته نامیده می‌شود؛ به طور دوگان، یک عملگر Int روی $P(X)$ اگر یکنوا، خودتوان و کاهشی باشد، یک عملگر درون تعمیم‌یافته نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲. یک عملگر Der روی $P(X)$ یک عملگر مجموعه مشتق تعمیم‌یافته نامیده می‌شود، اگر برای هر $A\subseteq X$، در شرایط زیر صدق کند:

۱. Der یکنوا باشد،

۲. $x \in Der(A) \iff x \in Der(A - \{x\})$،

۳. $Der(A \cup Der(A)) \subseteq A \cup Der(A)$.

تعریف **۳.۲**. یک عملگر Pd روی $P(X)$، یک عملگر مجموعه پیش‌مشتق تعمیم‌یافته نامیده می‌شود، اگر برای هر $A \subseteq X$، در شرایط زیر صدق کند:

۱. Pd یکنوا باشد،

۲. $Pd(A \cup Pd(A)) \subseteq A \cup Pd(A)$.

تعریف **۴.۲**. یک عملگر Cod روی $P(X)$، یک عملگر مجموعه هم-مشتق تعمیم‌یافته نامیده می‌شود، اگر برای هر $A \subseteq X$، در شرایط زیر صدق کند:

۱. Cod یکنوا است،

۲. $x \in Cod(A) \iff x \in Cod(A \cup \{x\})$،

۳. $Cod(A \cap Cod(A)) \supseteq A \cap Cod(A)$.

تعریف **۵.۲**. یک عملگر Pcd روی $P(X)$، یک عملگر مجموعه پیش هم-مشتق تعمیم‌یافته نامیده می‌شود، اگر برای هر $A \subseteq X$، در شرایط زیر صدق کند:

۱. Pcd یکنوا است،

۲. $Pcd(A \cap Pcd(A)) \supseteq A \cap Pcd(A)$.

در ادامه، برخی از مفاهیم و نتایج اساسی کلاس‌های موروثی و فضاهای توپولوژیکی را یادآوری می‌کنیم. یک ایده‌آل $\mathcal{I}$ روی یک مجموعه غیرتهی X، گردایه‌ای غیرتهی از زیرمجموعه‌های X است که تحت زیرمجموعه و اجتماع‌های متناهی بسته است؛ و یک گردایه غیرتهی $\mathcal{H}$ از زیرمجموعه‌های X، که فقط تحت زیرمجموعه بسته باشد، یک کلاس موروثی نامیده می‌شود. بنابراین هر ایده‌آل یک کلاس موروثی است. ایده‌آل یک مفهوم اساسی در فضاهای توپولوژیکی است و نقش مهمی در مطالعه فضاهای توپولوژیکی [۵، ۸، ۱۸] ایفا می‌کند. به‌طور مشابه، کلاس‌های موروثی در مطالعه فضاهای توپولوژیکی تعمیم‌یافته [۴، ۲۲] مهم هستند.

مثال **۶.۲**. اگر X یک مجموعه غیرتهی باشد و $A \subseteq X$، آن‌گاه گردایه‌های $\mathcal{H}_1 = \{\emptyset\}$، $\mathcal{H}_2 = P(X)$ و $\mathcal{H}_3 = \{B \subseteq X \mid B \subseteq A\}$ ایده‌آل‌هایی روی X هستند و در نتیجه کلاس‌های موروثی نیز هستند. در واقع، $\emptyset \in \mathcal{H}$ برای هر کلاس موروثی $\mathcal{H}$، بنابراین $\mathcal{H}_1$ کوچکترین ایده‌آل و از این‌رو کوچکترین کلاس موروثی روی X است. همچنین، مجموعه $\mathcal{H}_p = \{\emptyset\} \bigcup \{\{x\} \mid x \in X\}$ کوچکترین ایده‌آل و از این‌رو کوچکترین کلاس موروثی روی X است. همچنین، مجموعه $\{\{x\} \mid x \in X\}$ یک کلاس موروثی است اما اگر X حداقل دو عنصر داشته باشد، ایده‌آل نیست.

برای هر زیرمجموعه A از یک فضای توپولوژیکی (X, τ)، بستار و درون مجموعه A به ترتیب با $cl_\tau(A)$ (یا $cl(A)$) و $int_\tau(A)$ (یا $int(A)$) نشان داده می‌شوند. برای هر نقطه $x \in X$، سیستم همسایگی باز در x را با $\tau(x)$ نشان می‌دهیم، یعنی $\tau(x) := \{U \in \tau \mid x \in U\}$. اگر چندین توپولوژی روی یک مجموعه X داشته باشیم، برای باز بودن (بسته بودن) نسبت به توپولوژی τ، τ-باز (τ-بسته) می‌نویسیم. اگر $\mathcal{H}$ یک کلاس موروثی روی (X, τ) باشد، آن‌گاه می‌گوییم $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی است. همچنین، یک کلاس موروثی مهم مورد مطالعه روی یک فضای توپولوژیکی (X, τ) که ایده‌آل نیست کلاس $\mathcal{H}_i := \{A \subseteq X : int(A) = \emptyset\}$ است. در [۲۵] برای هر کلاس موروثی $\mathcal{H}$ روی فضای (X, τ)، کلاس موروثی $dual(\mathcal{H}) = \{A \subseteq X \mid A^c \notin \mathcal{H}\}$ معرفی شده است. به عنوان مثال، $dual(\mathcal{H}_i) = \{A \subseteq X \mid clA \neq X\}$.

یک زیرمجموعه μ از $P(X)$ یک توپولوژی تعمیم‌یافته روی X نامیده می‌شود و زوج (X, μ) یک فضای توپولوژیکی تعمیم‌یافته (به‌اختصار فضای تعمیم‌یافته) نامیده می‌شود اگر $\emptyset \in \mu$ و هر اجتماع عناصر μ متعلق به μ [۳] باشد. یک فضای تعمیم‌یافته (X, μ) قوی نامیده می‌شود اگر $X \in \mu$. یک مجموعه $A \subseteq X$ را μ-باز می‌نامیم اگر $A \in \mu$ و μ-بسته می‌نامیم اگر $A^c \in \mu$.

ملاحظه **۷.۲**. [۳] اگر μ یک توپولوژی تعمیم‌یافته روی X باشد، آن‌گاه نگاشت $int_\mu : P(X) \to P(X)$ که به‌صورت $int_\mu A := \bigcup\{M \in \mu \mid M \subseteq A\}$ تعریف می‌شود، یک عملگر درون تعمیم‌یافته است؛ و نگاشت $cl_\mu : P(X) \to P(X)$ که به‌صورت $cl_\mu A := \bigcap\{N \mid N^c \in \mu, A \subseteq N\}$ تعریف می‌شود، یک عملگر بستار تعمیم‌یافته است. برعکس، اگر $\gamma : P(X) \to P(X)$ یک عملگر بستار تعمیم‌یافته (عملگر درون تعمیم‌یافته) باشد، آن‌گاه مجموعه $\mu := \{A \mid \gamma(A^c) = A^c\}$ ($\mu := \{A \mid \gamma(A) = A\}$) یک توپولوژی تعمیم‌یافته روی X است به‌طوری‌که $cl_\mu(A) = \gamma(A)$ ($int_\mu(A) = \gamma(A)$) برای هر $A \subseteq X$.

۳ عملگرهای $\mathcal{H}$-پیش‌بستار و $\mathcal{H}$-پیش‌درون

یادآوری می‌کنیم که دو عملگر γ و δ روی $P(X)$ را دوگان یا مزدوج یکدیگر می‌نامیم اگر $\gamma(A) = (\delta(A^c))^c$، یا به طور معادل $\delta(A) = (\gamma(A^c))^c$ برای هر $A \subseteq X$. به عنوان مثال، عملگرهای int و cl دوگان یکدیگرند، یعنی $int(A) = (cl(A^c))^c$ و $cl(A) = (int(A^c))^c$. در این قسمت، با الهام از این مفهوم، قصد داریم برخی از ویژگی‌های نوع جدیدی از عملگر مشتق تعمیم‌یافته و عملگر پیش هم-مشتق تعمیم‌یافته را با استفاده از کلاس‌های موروثی، که به ترتیب با $(-)^*$ و $(-)^\diamond$ نشان داده می‌شوند، معرفی و بررسی کنیم.

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک کلاس موروثی (یا یک ایده‌آل) روی فضای (X, τ) باشد. آن‌گاه

$$A^*(\mathcal{H}, \tau) := \{x \in X \mid U \cap A \notin \mathcal{H} \quad \forall\, U \in \tau(x)\}$$

تابع موضعی A نسبت به τ و $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود و برای سادگی با A^* [۸، ۲۲] نمایش می‌دهیم. در این‌صورت می‌توانیم تابع موضعی را به عنوان یک عملگر روی $P(X)$ به صورت زیر در نظر بگیریم:

تعریف **۱.۳**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این‌صورت عملگر

$$(-)^* : P(X) \to P(X)$$

$$A \longmapsto A^* \tag{۱.۳}$$

عملگر $\mathcal{H}$-پیش‌بستار نسبت به τ و $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود.

قضیه زیر که در [۲۲] یافت می‌شود، نشان می‌دهد که $(-)^*$ نمونه‌ای از عملگرهای مجموعه پیش‌مشتق تعمیم‌یافته است.

قضیه **۲.۳**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد و $A, B \subseteq X$. در این‌صورت:

۱. $cl(A^*) = A^*$، یعنی A^* در (X, τ) بسته است.

۲. $A^{**} \subseteq (A \cup A^*)^* = A^* \subseteq clA$.

۳. $(-)^*$ یکنوا است، به‌عبارت دیگر اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A^* \subseteq B^*$.

۴. $(-)^*$ نسبت به کلاس‌های موروثی نزولی است، به‌عبارت دیگر اگر $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2$، آن‌گاه $A^*(\mathcal{H}_2) \subseteq A^*(\mathcal{H}_1)$.

۵. اگر $A \in \mathcal{H}$، آن‌گاه $A^* = \emptyset$، و به‌خصوص $\emptyset^* = \emptyset$.

۶. اگر $U \in \tau$، آن‌گاه $U \cap A^* = U \cap (U \cap A)^*$.

تعریف **۳.۳**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این‌صورت عملگر دوگان $(-)^*$، را با $(-)^\diamond$ نشان می‌دهیم، به‌عبارت دیگر برای هر $A \subseteq X$، $A^\diamond := ((A^c)^*)^c$، و آنرا عملگر $\mathcal{H}$-پیش‌درون نسبت به τ و $\mathcal{H}$ می‌نامیم.

توجه داشته باشید که متناظر با هر مفهوم تعریف شده برای عملگرها در این مقاله، یک مفهوم دوگان وجود دارد به‌طوری‌که اگر دو عملگر نسبت به هم دوگان باشند و یکی در شرط یک مفهوم صدق کند، دیگری نیز در شرط مفهوم دوگان صدق می‌کند و برعکس. لم زیر نتیجه مستقیم مفهوم دوگان است.

لم **۴.۳**. فرض کنید γ و δ دو عملگر روی $P(X)$ باشند به‌طوری‌که نسبت به هم دوگان باشند. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. γ خودتوان است اگر و تنها اگر δ خودتوان باشد.

۲. γ کاهشی است اگر و تنها اگر δ افزایشی باشد.

۳. γ، $\vee$-جمعی است اگر و تنها اگر δ، $\wedge$-جمعی باشد.

طبق لم بالا، از آنجا که عملگر $(-)^*$ خودتوان و افزایشی است ولی $\vee$-جمعی نیست، عملگر $(-)^\diamond$ خودتوان و کاهشی است اما $\wedge$-جمعی نیست. اما طبق قضیه ۲.۳، عملگر $(-)^\diamond$ دارای ویژگی‌های زیر است.

قضیه **۵.۳**. فرض کنید $(X,\tau,\mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد و $A,B\subseteq X$. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $A^\diamond=\{x\in X\mid \exists\, U\in\tau(x)\ : U-A\in\mathcal{H}\}$.

۲. $A^\diamond$ در (X,τ) باز است، به‌عبارت دیگر $int(A^\diamond)=A^\diamond$.

۳. $int(A)\subseteq A^\diamond$.

۴. $(-)^\diamond$ یکنواست، به‌عبارت دیگر، اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A^\diamond\subseteq B^\diamond$.

۵. $(-)^\diamond$ نسبت به کلاس‌های موروثی صعودی است، یعنی اگر $\mathcal{H}_1\subseteq\mathcal{H}_2$، آن‌گاه $A^\diamond(\mathcal{H}_1)\subseteq A^\diamond(\mathcal{H}_2)$.

۶. اگر $A^c\in\mathcal{H}$، آن‌گاه $A^\diamond=X$، و به‌خصوص $X^\diamond=X$.

۷. $A^\diamond\subseteq(A^\diamond)^\diamond$.

۸. $(A^\diamond)^c=(A^c)^*$ و $(A^*)^c=(A^c)^\diamond$.

۹. $((A^\diamond)^\diamond)^c=((A^c)^*)^*$ و $((A^*)^*)^c=((A^c)^\diamond)^\diamond$.

۱۰. $((A^*)^\diamond)^c=((A^c)^\diamond)^*$ و $((A^\diamond)^*)^c=((A^c)^*)^\diamond$.

مثال زیر نشان می‌دهد که هیچ رابطه شمولی بین $A^\diamond$ و A به‌طور کلی وجود ندارد. همچنین، عکس شمول در قسمت (۷) از قضیه ۵.۳ در حالت کلی درست نیست.

مثال **۶.۳**. فرض کنید $X=\{a,b,c,d\}$، $\mathcal{H}=\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$ و $\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$. در این‌صورت $(X,\tau,\mathcal{H})$ یک فضای موروثی است و داریم:

۱. $\{b\}^\diamond=\{a,b\}$ و $(\{b\}^\diamond)^\diamond=X$. بنابراین تساوی $(A^\diamond)^\diamond=A^\diamond$ در حالت کلی برقرار نیست.

۲. $\emptyset^\diamond=\{a\}\neq\emptyset$. بنابراین تساوی $\emptyset^\diamond=\emptyset$ به‌طور کلی برقرار نیست.

۳. همچنین $\{c,d\}^\diamond=\{a\}\neq\{c,d\}$.

قضیه **۷.۳**. فرض کنید $(X,\tau,\mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این‌صورت برای هر زیرمجموعه A از X داریم: $(A\cap A^\diamond)^\diamond=A^\diamond$.

اثبات. طبق قسمت (۲) از قضیه ۲.۳، برای هر $A\in P(X)$، $(A\cup A^*)^*=A^*$. در نتیجه طبق قسمت (۸) از قضیه ۵.۳، برای هر $A\in P(X)$ داریم:

$$\begin{aligned}(A^c\cup(A^c)^*)^*=(A^c)^*&\Leftrightarrow(A^c\cup(A^\diamond)^c)^*=(A^\diamond)^c\\&\Leftrightarrow((A\cap A^\diamond)^c)^*=(A^\diamond)^c\\&\Leftrightarrow((A\cap A^\diamond)^\diamond)^c=(A^\diamond)^c\\&\Leftrightarrow(A\cap A^\diamond)^\diamond=A^\diamond.\end{aligned}$$

□

طبق قضیه فوق نتیجه زیر را داریم:

نتیجه **۸.۳**. شرط $(A\cap A^\diamond)^\diamond=A^\diamond$ دوگان شرط $(A\cup A^*)^*=A^*$ است. از این رو از آنجا که $(-)^\diamond$ یکنوا است، نتیجه می‌شود که یک عملگر مجموعه پیش هم–مشتق تعمیم‌یافته است.

مثال زیر نشان می‌دهد که $(-)^\diamond$ یک عملگر مجموعه هم–مشتق تعمیم‌یافته نیست.

مثال **۹.۳**. فرض کنید $X=\{a,b,c,d\}$، $\mathcal{H}=\{\emptyset,\{a\},\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$ و $\tau=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$. در این‌صورت $(X,\tau,\mathcal{H})$ یک فضای موروثی است. اگر $A=\emptyset$، آن‌گاه $A^\diamond=\{a\}$ و $(A\cup\{b\})^\diamond=\{a,b\}$. در این‌صورت $b\in(A\cup\{b\})^\diamond$ اما $b\notin A^\diamond$. بنابراین $(-)^\diamond$ در شرط (۲) تعریف ۴.۲ صدق نمی‌کند.

بدیهی است اگر $\tau \cap \mathcal{H} = \{\emptyset\}$، آن‌گاه $\emptyset^\diamond = \emptyset$. یادآوری می‌کنیم که یک ایده‌آل $\mathcal{I}$ روی یک فضای توپولوژیکی (X, τ)، τ-هم‌چگال نامیده می‌شود اگر $\tau \cap \mathcal{I} = \{\emptyset\}$. نشان داده شده است که $\mathcal{I}$ یک τ-هم‌چگال است اگر و تنها اگر $X = X^*$ اگر و تنها اگر برای هر $I \in \mathcal{I}$، $int_\tau(I) = \emptyset$ [۸]. به طور مشابه، یک کلاس موروثی $\mathcal{H}$ را روی یک فضای توپولوژیکی (X, τ)، τ-هم‌چگال می‌نامیم اگر $\tau \cap \mathcal{H} = \{\emptyset\}$. به عنوان مثال، برای هر فضای توپولوژیکی (X, τ)، کلاس موروثی $\mathcal{H}_i$ یک τ-هم‌چگال است.
مشابه اثبات ایده‌آل‌ها، نتیجه زیر را داریم:

قضیه **۱۰.۳**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $\mathcal{H}$ یک τ-هم‌چگال است،

۲. $X = X^*$،

۳. برای هر $H \in \mathcal{H}$، $int_\tau(H) = \emptyset$، به‌عبارت دیگر $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_i$،

۴. برای هر $U \in \tau$، $U \subseteq U^*$.

قضیه **۱۱.۳**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $\mathcal{H}$ یک τ-هم‌چگال است،

۲. $\emptyset = \emptyset^\diamond$،

۳. اگر $H^c \in \mathcal{H}$، آن‌گاه $cl_\tau(H) = X$،

۴. برای هر مجموعه بسته F، $F^\diamond \subseteq F$.

اثبات. از آنجا که عملگرهای $(-)^*$ و $(-)^\diamond$؛ و همچنین int و cl دوگان یکدیگرند، طبق قضیه ۱۰.۳، نتیجه برقرار است. □

نتیجه **۱۲.۳**. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیکی باشد و $A \subseteq X$. از آنجا که $A^*(\mathcal{H}_i) = clint(A)$ و $A^\diamond(\mathcal{H}_i) = intcl(A)$، طبق قسمت (۳) قضیه ۱۰.۳، قسمت (۴) قضیه ۲.۳ و قسمت (۵) قضیه ۵.۳، برای هر کلاس موروثی τ-هم‌چگال $\mathcal{H}$ روی X، داریم:

$$A^*(\mathcal{H}) \supseteq clint(A), \quad A^\diamond(\mathcal{H}) \subseteq intcl(A).$$

قضیه **۱۳.۳**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $\mathcal{H}$، τ-هم‌چگال است،

۲. برای هر مجموعه بسته F، $F^\diamond = int_\tau(F)$،

۳. برای هر $U \in \tau$، $U^* = cl_\tau(U)$.

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱): چون $F^\diamond$ یک مجموعه باز است، طبق قضیه ۱۱.۳، داریم $F^\diamond = int_\tau(F^\diamond) \subseteq int(F)$. بنابراین، طبق قضیه ۵.۳ قسمت (۳)، $int_\tau(F) = F^\diamond$.
(۳) $\Leftrightarrow$ (۲): از آنجا که عملگرهای int و cl مزدوج هستند، نتیجه برقرار است.
(۱) $\Rightarrow$ (۳): برای هر $U \in \tau$، داریم $U \subseteq cl_\tau(U) = U^*$، بنابراین طبق قضیه ۱۰.۳، نتیجه برقرار است.
□

با توجه به خواص خوب عملگر $(-)^\diamond$ با شرط هم‌چگالی، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف **۱۴.۳**. اگر $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد به‌طوری که $\mathcal{H}$ یک τ-هم‌چگال باشد، آن‌گاه $(X, \tau, \mathcal{H})$ را یک فضای هم‌چگال موروثی می‌نامیم.

با توجه به قضیه فوق، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه **۱۵.۳**. برای فضاهای هم‌چگال موروثی، عملگرهای $(-)^*$ و cl_τ روی زیرمجموعه‌های باز برابرند و عملگرهای $(-)^\diamond$ و int_τ روی زیرمجموعه‌های بسته برابرند.

ملاحظه **۱۶.۳**. فرض کنید $(X,\tau,\mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد، $A\subseteq X$ و $U\in\tau$. اگر $U-A\in\mathcal{H}$، آن‌گاه طبق قضیه ۵.۳، داریم $U\subseteq A^{\diamond}$.

نتیجه **۱۷.۳**. از آنجا که برای هر $U\in\tau\cap\mathcal{H}$ داریم $U-\emptyset, U-U\in\mathcal{H}$، بنابراین $U\subseteq\emptyset^{\diamond}$ و $U\subseteq U^{\diamond}$. اگر $\tau\subseteq\mathcal{H}$، آن‌گاه برای هر $A\subseteq X$؛ $intcl(A)\subseteq\emptyset^{\diamond}$ و همچنین اگر $intcl(A)-A\in\mathcal{H}$، $intcl(A)\subseteq A^{\diamond}$.

طبق تعریف، عملگرهای $(-)^{*}$ و $(-)^{\diamond}$ دوگان یکدیگرند، به‌عبارت دیگر، با فرض یکی، دیگری را می‌توان از آن استنتاج کرد. در ادامه، نشان می‌دهیم که این عملگرهای تعمیم‌یافته می‌توانند یک توپولوژی تعمیم‌یافته یکسان μ را روی یک فضای موروثی $(X,\tau,\mathcal{H})$ به گونه‌ای مشخص کنند که $\tau\subseteq\mu$.

فرض کنید γ یک نگاشت یکنوا روی $P(X)$ باشد و $A\subseteq X$. در این‌صورت A را یک مجموعه γ–باز می‌نامیم هرگاه $A\subseteq\gamma(A)$، و γ–بسته می‌نامیم هرگاه $\gamma(A)\subseteq A$. برای هر عملگر γ قرار می‌دهیم:
$\mu_{\gamma}:=\{A\mid A\ \text{است}\ -\gamma\ \text{باز}\}$ و $\bar{\mu}_{\gamma}:=\{A\mid A^{c}\ \text{است}\ -\gamma\ \text{بسته}\}$.

لم **۱۸.۳**. [۱۷] فرض کنید γ و δ دو عملگر یکنوا روی $P(X)$ باشند به‌طوری‌که نسبت به هم دوگان باشند. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $A\subseteq X$ یک مجموعه γ–باز است اگر و تنها اگر A^{c} یک مجموعه δ–بسته باشد.

۲. اگر γ کاهشی یا δ افزایشی باشد، در این‌صورت $A\subseteq X$ یک مجموعه γ–باز است اگر و تنها اگر $A=\gamma(A)$؛ و δ–بسته است اگر و تنها اگر $A=\delta(A)$.

۳. μ_{γ} یک توپولوژی تعمیم‌یافته روی X است. علاوه بر این، $\mu_{\gamma}=\bar{\mu}_{\delta}$.

حال، با توجه به لم بالا، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه **۱۹.۳**. فرض کنید $(X,\tau,\mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این‌صورت عملگرهای $(-)^{*}$ و $(-)^{\diamond}$ یک توپولوژی تعمیم‌یافته یکسان را روی X القا می‌کنند که با $\mu(\tau,\mathcal{H})$ یا به طور ساده $\mu(\mathcal{H})$ نشان داده می‌شود، همچنین $\mu(\mathcal{H})=\{A\mid A\subseteq A^{\diamond}\}=\{A\mid (A^{c})^{*}\subseteq A^{c}\}$ و $\tau\subseteq\mu(\mathcal{H})$.

۴ عملگرهای $\mathcal{H}$–بستار و $\mathcal{H}$–درون

در این بخش، مثالی از عملگر بستار تعمیم‌یافته و عملگر درون تعمیم‌یافته، تحت نام‌های $\mathcal{H}$–بستار و $\mathcal{H}$–درون، که به ترتیب توسط عملگرهای $\mathcal{H}$–پیش‌بستار و $\mathcal{H}$–پیش‌درون تولید می‌شوند، معرفی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که این دو عملگر، توپولوژی تعمیم‌یافته یکسانی $\mu(\mathcal{H})$ را روی یک فضای موروثی القا می‌کنند.

قضیه **۱.۴**. [۱۲] فرض کنید $Pd:P(X)\to P(X)$ یک عملگر مجموعه پیش‌مشتق تعمیم‌یافته باشد.

۱. اگر عملگر $Cl(A):=A\cup Pd(A)$ را برای هر زیرمجموعه A از X تعریف کنیم، آن‌گاه Cl یک عملگر بستار تعمیم‌یافته است.

۲. اگر عملگر $Der(A):=\{x\in X\mid x\in Cl(A-\{x\})\}$ برای هر زیرمجموعه A از X تعریف کنیم، آن‌گاه Der یک عملگر مجموعه مشتق تعمیم‌یافته است و گزاره‌های زیر معادل هستند:

(الف) برای هر $A\subseteq X$، $x\in Pd(A)\iff x\in Pd(A-\{x\})$،

(ب) برای هر $A\subseteq X$، $Pd(A)=Der(A)$.

قضیه **۲.۴**. [۱۲] فرض کنید $Pcd:P(X)\to P(X)$ یک عملگر مجموعه پیش هم–مشتق تعمیم‌یافته باشد.

۱. اگر عملگر $Int(A):=A\cap Pcd(A)$ را برای هر زیرمجموعه‌ی A از X تعریف کنیم، آن‌گاه Int یک عملگر درون تعمیم‌یافته است.

۲. اگر عملگر $Cod(A):=\{x\in X\mid x\in Int(A\cup\{x\})\}$ برای هر زیرمجموعه‌ی A از X تعریف کنیم، آن‌گاه Cod یک عملگر مجموعه هم–مشتق تعمیم‌یافته است و گزاره‌های زیر معادل هستند:

(الف) برای هر $A \subseteq X$، $x \in Pcd(A) \iff x \in Pcd(A \cup \{x\})$.

(ب) برای هر $A \subseteq X$، $Pcd(A) = Cod(A)$.

حال، با توجه به قضایای فوق، چون $(-)^*$ یک عملگر مجموعه پیش‌مشتق تعمیم‌یافته و $(-)^\diamond$ یک عملگر مجموعه پیش هم-مشتق تعمیم‌یافته است، نتیجه زیر را داریم:

قضیه **۳.۴**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد.

۱. عملگر $cl^* : P(X) \to P(X)$ که به‌صورت $cl^*(A) = A \cup A^*$ تعریف می‌شود، یک عملگر بستار تعمیم‌یافته است که آنرا عملگر $\mathcal{H}$-بستار می‌نامیم.

۲. عملگر $int^\diamond : P(X) \to P(X)$ که به‌صورت $int^\diamond(A) = A \cap A^\diamond$ تعریف می‌شود، یک عملگر درون تعمیم‌یافته است که آنرا عملگر $\mathcal{H}$-درون می‌نامیم.

۳. cl^* و $int^\diamond$ دوگان یکدیگرند، در نتیجه $\mu_{int^\diamond} = \bar{\mu}_{cl^*}$. همچنین داریم:
$\mu_{int^\diamond} = \{A \subseteq X \mid int^\diamond(A) = A\} = \{A \subseteq X \mid A \subseteq A^\diamond\} = \mu(\mathcal{H})$.

قضیه فوق نشان می‌دهد که عملگرهای $(-)^*$، $(-)^\diamond$، cl^* و $int^\diamond$ توپولوژی تعمیم‌یافته یکسان $\mu(\mathcal{H})$ را روی یک فضای موروثی $(X, \tau, \mathcal{H})$ تولید می‌کنند. در ادامه، برخی از ویژگی‌های $\mu(\mathcal{H})$ را ارائه می‌دهیم، اثبات برخی از قسمت‌ها مشابه فضاهای ایده‌آل [۸] است و برخی از قسمت‌ها را می‌توان در [۴، ۲۲] یافت:

قضیه **۴.۴**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی و $A \subseteq X$ باشد. در این‌صورت

۱. $int_\tau(A) \subseteq int^\diamond(A) \subseteq A \subseteq cl^*(A) \subseteq cl_\tau(A)$.

۲. A^* هم τ-بسته و هم $\mu(\mathcal{H})$-بسته است. و $A^\diamond$ هم τ-باز و هم $\mu(\mathcal{H})$-باز است.

۳. اگر A، τ-باز باشد، آن‌گاه $int^\diamond(A) = int_\tau(A) = A$.

۴. اگر A، τ-بسته باشد، آن‌گاه $cl^*(A) = cl_\tau(A) = A$.

۵. اگر $\mathcal{H} = \{\emptyset\}$، آن‌گاه $cl^*(A) = cl_\tau(A) = A^*$، $int^\diamond(A) = int_\tau(A) = A^\diamond$، و بنابراین $\tau = \mu(\mathcal{H})$.

۶. $int^\diamond(A) = \emptyset \iff A^c$ در $(X, \mu(\mathcal{H}))$ چگال است.

۷. مجموعه $\beta := \{U - H \mid U \in \tau, H \in \mathcal{H}\}$ یک پایه برای $\mu(\mathcal{H})$ است.

۸. برای هر $H \in \mathcal{H}$، $H^* = \emptyset$ در نتیجه H، $\mu(\mathcal{H})$-بسته است.

قضیه **۵.۴**. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای هم‌چگال-موروثی و $A \subseteq X$ باشد. در این‌صورت

۱. اگر $A \subseteq clint(A)$، آن‌گاه $cl^*(A) = cl_\tau(A) = A^*$.

۲. اگر $A \supseteq intcl(A)$، آن‌گاه $int^\diamond(A) = int_\tau(A) = A^\diamond$.

اثبات. طبق نتیجه ۱۲.۳ و قضیه ۴.۴، نتیجه برقرار است. □

لم **۶.۴**. گزاره‌های زیر معادل‌اند:

۱. $x \in (A - \{x\})^* \Leftrightarrow x \in A^*$.

۲. اگر $U \in \tau(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(U \cap A) - \{x\} \in \mathcal{H}$، آن‌گاه $V \in \tau(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که $V \cap A \in \mathcal{H}$.

اثبات. فرض کنید $A \subseteq X$ و $x \in X$. از آنجا که $(A - \{x\})^* \subseteq A^*$، بنابراین گزاره (۱) معادل است با: $x \in A^*$ نتیجه می‌دهد $x \in (A - \{x\})^*$. لذا طبق تعریف عملگر $(-)^*$، نتیجه برقرار است. □

قضیه **۷.۴**. فرض کنید (X,τ) یک فضای T_1 باشد. در این‌صورت برای فضای موروثی $(X,\tau,\mathcal{H}_p)$، که در آن $\mathcal{H}_p$ کلاس موروثی مجموعه‌های تک نقطه‌ای است، عملگر $(-)^*$ یک عملگر مجموعه مشتق تعمیم‌یافته است؛ و در نتیجه، عملگر $(-)^\diamond$ یک عملگر مجموعه هم–مشتق تعمیم‌یافته است.

اثبات. فرض کنید $A \subseteq X$ و $x \in X$. اگر $U \in \tau(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(U \cap A) - \{x\} \in \mathcal{H}_p$، آن‌گاه $U \cap A = \emptyset$ یا $U \cap A = \{x\}$ یا $U \cap A = \{x, y\}$ که $y \in X$. اگر قرار دهیم $V = U$ یا $V = U - \{y\}$، آن‌گاه $V \in \tau(x)$ و $V \cap A \in \mathcal{H}_p$. بنابراین با توجه به لم ۶.۴، نتیجه برقرار است. □

ملاحظه **۸.۴**. فرض کنید $(X,\tau,\mathcal{I})$ یک فضای ایده‌آل باشد، یعنی $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل روی X باشد. در این‌صورت عملگر $(-)^*$ همچنین در شرط $\vee$–جمعی صدق می‌کند؛ و در نتیجه عملگر $(-)^\diamond$ در شرط $\wedge$–جمعی صدق می‌کند. بنابراین $(-)^*$ یک عملگر مجموعه پیش‌مشتق و $(-)^\diamond$ یک عملگر مجموعه پیش هم–مشتق است. در نتیجه، توپولوژی تعمیم‌یافته‌ی القایی $\mu(\tau,\mathcal{I})$ یک توپولوژی روی X است که معمولاً با τ^* [۸] نشان داده می‌شود.

ملاحظه **۹.۴**. اگر (X,μ) یک فضای تعمیم‌یافته باشد و $\mathcal{H}$ یک کلاس موروثی روی X باشد. آن‌گاه به راحتی می‌توان نشان داد که عملگر $(-)^*$ در شرایط عملگر مجموعه پیش‌مشتق تعمیم‌یافته صدق می‌کند و به‌طور دوگان، $(-)^\diamond$ در شرایط عملگر مجموعه پیش هم–مشتق تعمیم‌یافته صدق می‌کند. بنابراین، نتایج ما برای فضاهای توپولوژیکی تعمیم‌یافته به جای فضاهای توپولوژیکی نیز برقرار است.

۵ کاربردها و مثال‌ها

یادآوری می‌کنیم که یک زیرمجموعه A از یک فضای توپولوژیکی (X,τ)، نیمه‌باز (به ترتیب پیش‌باز، b–باز، β–باز) نامیده می‌شود اگر $A \subseteq cl(int(A))$ (به ترتیب $A \subseteq int(cl(A)) \cup cl(int(A))$، $A \subseteq cl(int(cl(A)))$) [۱، ۲].

اگر گردایه تمام مجموعه‌های نیمه‌باز، تمام مجموعه‌های پیش‌باز، تمام مجموعه‌های b–باز و تمام مجموعه‌های β–باز را به ترتیب با μ_s، μ_p، μ_b و μ_β نشان داده شوند، آن‌گاه تمام این مجموعه‌ها توپولوژی‌های تعمیم‌یافته روی X اند. بنابراین با توجه به ۹.۴، مثال زیر را داریم که تعمیمی از عملگرهای داده شده در [۱۰] است.

مثال **۱.۵**. فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیکی با کلاس موروثی $\mathcal{H}$ باشد. اگر توابع موضعی مربوط به توپولوژی‌های تعمیم‌یافته μ_s، μ_p، μ_b و μ_β به ترتیب با $(-)^{*s}$، $(-)^{*p}$، $(-)^{*b}$ و $(-)^{*\beta}$ نشان داده شوند، آن‌گاه همه این عملگرها عملگرهای $\mathcal{H}$–پیش‌بستار هستند.

در ادامه، مثال دیگری از عملگرهای خود را روی فضاهای توپولوژیکی گرافیکی ارائه می‌دهیم. حال، فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف (ساده) بدون رأس تنها باشد. اگر A_x مجموعه تمام رئوس مجاور x باشد، آن‌گاه واضح است که $x \in A_y$ اگر و تنها اگر $y \in A_x$ برای هر $x,y \in V$. همچنین $x \notin A_x$ برای هر $x \in V$. اگر S_G را به صورت $S_G = \{A_x \mid x \in V\}$ تعریف کنیم، آن‌گاه S_G زیرپایه برای یک توپولوژی τ_G روی V تشکیل می‌دهد که توپولوژی گرافیکی روی G و (V,E,τ_G) یک فضای توپولوژیکی گرافیکی نامیده می‌شود [۹].

تعریف **۲.۵**. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد. یک مجموعه ناتهی $\mathcal{H}$ از زیرگراف‌های G یک کلاس موروثی گرافیکی نامیده می‌شود، هرگاه تحت زیرگراف بسته باشد، به‌عبارت دیگر اگر G' زیرگرافی از G'' و $G'' \in \mathcal{H}$، آن‌گاه $G' \in \mathcal{H}$.

برای هر گراف $G=(V,E)$، مجموعه تمام رئوس G را با $V(G)$ نشان می‌دهیم. واضح است که اگر $\mathcal{H}$ یک کلاس موروثی گرافیکی روی G باشد، آن‌گاه مجموعه $\mathcal{H}_V := \{V(G') \mid G' \in \mathcal{H}\}$ یک کلاس موروثی روی $V(G)$ است. بنابراین مثال زیر را داریم:

مثال **۳.۵**. فرض کنید $G=(V,E,\tau_G)$ یک فضای توپولوژیکی گرافیکی با یک کلاس موروثی گرافیکی $\mathcal{H}$ باشد. در این‌صورت چون $(V(G),\tau_G,\mathcal{H}_V)$ یک فضای موروثی است، عملگر $(-)^*$ مربوط به τ_G و $\mathcal{H}_V$ یک عملگر $\mathcal{H}$–پیش‌بستار روی $V(G)$ است.

در ادامه قصد داریم یک مشخصه‌سازی از عملگر بستار بر حسب عملگر $\mathcal{H}$–پیش‌بستار ارائه کنیم. برای این منظور ابتدا مفهوم پوچ‌ساز یک خانواده از مجموعه‌ها را معرفی میکنیم. فرض کنید X یک مجموعه و $\mathcal{S} \subseteq P(X)$، در این‌صورت پوچ‌ساز گردایه $\mathcal{S}$ را با نماد $Ann(\mathcal{S})$ نمایش و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ann(\mathcal{S}) := \{A \subseteq X \mid A \cap S = \emptyset \ \forall S \in \mathcal{S}\}.$$

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $Ann(\mathcal{S})$ یک ایده‌آل روی مجموعه X است به‌طوری‌که در شرط زیر برای هر دو خانواده $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ صدق می‌کند:

$$\mathcal{S}_2 \subseteq Ann(\mathcal{S}_1) \Longrightarrow \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset \qquad (1.5)$$

اگر گردایه تمام کلاس‌های موروثی و گردایه تمام ایده‌آل‌ها روی مجموعه X را به‌ترتیب با نمادهای $Her(X)$ و $Ide(X)$ نشان دهیم، آن‌گاه یک بررسی ساده نشان می‌دهد که مشبکه‌های $(Her(X), \subseteq)$ و $(Ide(X), \subseteq)$، مشبکه‌های تام شبه‌متمم دارند اما در حالت کلی متمم‌دار نیستند و شبه‌متمم هر کلاس موروثی $\mathcal{H}$ (هر ایده‌آل $\mathcal{I}$) همان $Ann(\mathcal{H})$ $(Ann(\mathcal{I}))$ است. همچنین برای هر $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in Her(X)$ و هر $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in Ide(X)$ داریم: $\mathcal{H}_1 \wedge \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$، $\mathcal{H}_1 \vee \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$، $\mathcal{I}_1 \wedge \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ اما

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{I_1 \cup I_2 \mid I_1 \in \mathcal{I}_1 و I_2 \in \mathcal{I}_2\}.$$

لم ۴.۵. فرض کنید $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو کلاس موروثی روی فضای توپولوژی (X, τ) باشند. در این‌صورت برای هر $A \subseteq X$ گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $A^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) = A^*(\mathcal{H}_1) \cup A^*(\mathcal{H}_2)$.

۲. $\mu^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) = \mu^*(\mathcal{H}_1) \cap \mu^*(\mathcal{H}_2)$.

اثبات. (۱): از آنجا که عملگر $^*(-)$ برحسب کلاسهای موروثی نزولی است، در نتیجه داریم: $A^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \supseteq A^*(\mathcal{H}_1) \cup A^*(\mathcal{H}_2)$. برعکس، فرض کنید $x \notin A^*(\mathcal{H}_1) \cup A^*(\mathcal{H}_2)$. در این‌صورت همسایگی‌های U_1 و U_2 شامل x وجود دارند به‌طوری‌که $U_1 \cap A \in \mathcal{H}_1$ و $U_2 \cap A \in \mathcal{H}_2$. بنابراین $U_1 \cap U_2 \cap A \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$. در نتیجه $x \notin A^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$.

(۲): چون هر عضو پایه توپولوژی تعمیم‌یافته $\mu^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$ عضو پایه‌ای از $\mu^*(\mathcal{H}_1)$ و $\mu^*(\mathcal{H}_2)$ است، لذا $\mu^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \subseteq \mu^*(\mathcal{H}_1) \cap \mu^*(\mathcal{H}_2)$. برعکس، فرض کنید $U - H_1$ عضو پایه $\mu^*(\mathcal{H}_1)$ و $V - H_2$ عضو پایه $\mu^*(\mathcal{H}_2)$ باشند، که در آن $U, V \in \tau$ و $H_1 \in \mathcal{H}_1$ و $H_2 \in \mathcal{H}_2$. در این‌صورت $(U \cap V) - (H_1 \cap H_2)$ عضو پایه $\mu^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$ است به‌طوری‌که $(U \cap V) - (H_1 \cap H_2) \subseteq (U - H_1) \cup (V - H_2)$. در نتیجه $\mu^*(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \supseteq \mu^*(\mathcal{H}_1) \cap \mu^*(\mathcal{H}_2)$. □

از آنجا که $\tau = \mu^*(\{\emptyset\})$ و $cl_\tau(A) = A^*(\{\emptyset\})$، بنابراین طبق لم قبل مهم‌ترین قضیه این بخش را به صورت زیر داریم:

قضیه ۵.۵. فرض کنید $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو کلاس موروثی روی فضای (X, τ) باشند به‌طوری‌که $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{\emptyset\}$. در این‌صورت برای هر $A \subseteq X$ گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $cl_\tau(A) = A^*(\mathcal{H}_1) \cup A^*(\mathcal{H}_2)$.

۲. $\tau = \mu^*(\mathcal{H}_1) \cap \mu^*(\mathcal{H}_2)$.

نتیجه ۶.۵. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{H})$ یک فضای موروثی باشد. در این‌صورت برای هر $A \subseteq X$ گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $cl_\tau(A) = A^*(\mathcal{H}) \cup A^*(Ann(\mathcal{H}))$.

۲. $\tau = \mu^*(\mathcal{H}) \cap \tau^*(Ann(\mathcal{H}))$.

اثبات. از آنجا که $\mathcal{H} \cap Ann(\mathcal{H}) = \{\emptyset\}$، بنابراین طبق قضیه قبل نتیجه برقرار است. □

با توجه به اینکه هر ایده‌آل یک کلاس موروثی است و توپولوژی تعمیم‌یافته در نتیجه ۶.۵ برای ایده‌آل، تبدیل به توپولوژی می‌شود، لذا نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۷.۵. فرض کنید $(X, \tau, \mathcal{I})$ یک فضای ایده‌آل باشد. در این‌صورت برای هر $A \subseteq X$ گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. $cl_\tau(A) = A^*(\mathcal{I}) \cup A^*(Ann(\mathcal{I}))$.

۲. $\tau = \tau^*(\mathcal{I}) \cap \tau^*(Ann(\mathcal{I}))$.

یادآوری می‌کنیم یک دسته مناسب از ایده‌آل‌ها، ایده‌آل‌های اصلی‌اند. یک ایده‌آل اصلی روی یک مجموعه X برای هر $A \subseteq X$ به‌صورت $\mathcal{I}(A) := \{B \subseteq X \mid B \subseteq A\}$ تعریف می‌شود. اگر $\mathcal{I}(A)$ یک ایده‌آل اصلی باشد، آن‌گاه به‌راحتی دیده می‌شود که $Ann(\mathcal{I}(A)) = \mathcal{I}(A^c)$ نیز یک ایده‌آل اصلی است. برای ایده‌آل‌های اصلی روی فضای اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی می‌توان توسیع‌های جالبی به‌صورت زیر بیان کرد:

مثال **۸.۵**. فرض کنید $(\mathbb{R}, \tau)$ فضای اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی، $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا و $\mathbb{Q}^c$ مجموعه اعداد گنگ باشد و قرار دهیم $\tau_1^* = \tau^*(\mathcal{I}(\mathbb{Q}))$ و $\tau_2^* = \tau^*(\mathcal{I}(\mathbb{Q}^c))$. از آنجا که $\mathbb{Q} \in \mathcal{I}(\mathbb{Q})$ و $\mathbb{Q}^c \in \mathcal{I}(\mathbb{Q}^c)$ لذا داریم: $cl_{\tau_2^*}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ و $cl_{\tau_2^*}(\mathbb{Q}^c) = \mathbb{Q}^c \cup \emptyset = \mathbb{Q}^c$. بنابراین $\mathbb{Q}$ در فضای هاسدورف $(\mathbb{R}, \tau_2^*)$ چگال است ولی $\mathbb{Q}^c$ چگال نیست.

مثال **۹.۵**. فرض کنید $(\mathbb{R}, \tau)$ فضای توپولوژی معمولی اعداد حقیقی، $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد و قرار دهیم $\tau_1^* = \tau^*(\mathcal{I}(\mathbb{N}))$ و $\tau_2^* = \tau^*(\mathcal{I}(\mathbb{N}^c))$. از آنجا که $\mathbb{N}$ نسبت به τ بسته است در نتیجه نسبت به τ_2^* نیز بسته است. از طرف دیگر $\mathbb{N}^c \in \mathcal{I}(\mathbb{N}^c)$، لذا داریم: $cl_{\tau_2^*}(\mathbb{N}^c) = \mathbb{N}^c \cup \emptyset = \mathbb{N}^c$. بنابراین $\mathbb{N}$ نسبت به τ_2^* باز هم است. در نتیجه فضای $(\mathbb{R}, \tau_2^*)$ ناهمبند است.

فهرست منابع

[1] Abd El-Monsef, M.E., El-Deeb, S.N. and Mahmoud, R.A., 1983. β-open sets and β-continuous mappings, *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., 12*, pp.77-90.

[2] Császár, Á., 1997. Generalized open sets, *Acta Math. Hungar., 57* (1-2), pp.65-87. doi: 10.1023/A:1006582718102

[3] Császár, Á., 2002. Generalized topology, generalized continuity, *Acta Math. Hungar., 96*, pp.351-357. https://dx.doi.org/10.1023/A:1019713018007

[4] Császár, Á., 2007. Modification of generalized topologies via hereditary classes, *Acta Math. Hungar., 115*, pp.29-36. doi: 10.1007/s10474-006-0531-9

[5] Dontehev, J., Ganster, M. and Rose, D., 1999. Ideal resolvability, *Topology Appl. 64*(3), pp.1-16. doi: 10.1016/s0166-8641(97)00257-5

[6] Habibi Mooakher, A., Ebrahimi M. and Talabeigi, A., 2022. Extraction of pre-open sets as a generalized topology from topological spaces, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci., 46* (1), pp.203-210. https://doi.org/10.1007/s40995-021-01223-z

[7] Hayashi, E., 1964. Topologies defined by local properties, *Math. Ann., 156*, PP.205-215. https://doi.org/10.1007/BF01363287

[8] Jankovic, D. and Hamlett, T.R., 1990. New topologies from old via ideals. *Amer. Math. Monthly, 97*(4), pp.295-310. https://doi.org/10.1080/00029890.1990.11995593

[9] Jafarian Amiri, S.M., A. Jafarzadeh nand A. and Khatibzadeh, H., 2013. An Alexandroff Topology on Graphs, *Bull. Iranian Math. Soc., 39*(4), pp.647-662.

[10] Khatun, K., Modak S. and Das, M.K., 2024. *Encounter to the additive propery of local function*, arXiv:2410.09791v2 [math.GN]. https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.09791

[11] Kuratowski, K., 1966. *Topology: Volume I.* Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2013-0-11022-7

[12] Lei Y. and Zhang, J., 2021. Closure system and its semantics, *Axioms, 198*(10), pp.1-30. https://doi.org/10.3390/axioms10030198

[13] Levine, N., 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly, 70*, pp.36-41. https://doi.org/10.1080/00029890.1963.11990039

[14] Maheshvari, S.N. and Tapi, U., 1979. Note on some applications of feebly open sets, *M. B. J. Univ. of Saugar*. doi: 10.1155/s0161171203203161

[15] Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E. and El-Deeb, S.N., 1982. On precontinuous and weak pre-continuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53*, pp.47-53.

[16] Mirhosseinkhani G. and Talabeigi, A., 2024. Ideals, grills, primals and filters from the categorical viewpoint (in persian), *Journal of Advances in Mathematical Modeling, 14*(4), pp.17-28. doi: 10.22055/jamm.2024.46281.2263

[17] Mohammadi Khorsand T. and Mirhosseinkhani, G., 2020. Some categorical structures of generalized topologies in terms of monotone operators, *Alg. Struc. Appl., 7*(1), pp.101-115. doi:10.29252/as.2020.1734

[18] Newcomb, R.L., 1967. *Topologies which are compact modulo an ideal*, Ph. D. Dissertation, Univ. of Cal. at Santa Barbara.

[19] Njastad, O., 1966. Remarks on topologies defined by local properties, *Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo I (N.S.), 8*, 16.

[20] Njastad, O., 1965. On some classes of nearly open sets, *Pacific J. Math., 15*, pp.961-970. https://doi.org/10.2140/pjm.1965.15

[21] Samuels, P., 1975. A topology formed from a given topology and ideal, *J. London Math. Soc. (2), 10*(4), pp.409-416. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-10.4

[22] Talabeigi, A., Extension of topological derived set operator and topological closure set operator via a class of sets to construct generalized topologies, *Caspian J. of Math. Sci., 11*(1), pp.26-39. doi: 10.22080/cjms.2020.16460.1397

[23] Talabeigi, A. and Talabeigi, M., 2022. An approach to change the topology of a topological space. *Sahand Commun. Math. Anal., 19*(3), pp.55-63. https://doi.org/10.22130/scma.2022.132038.842

[24] Talabeigi, A., 2021. An approach to change the topology of a topological space with the help of its closed sets in the presence of grills. *J. Mahani Math. Res., 10*(2), pp.9-19. doi: 10.22103/jmmrc.2021.17094.1132

[25] Talabeigi, A., 2022. Extracting some supra topologies from the topology of a topological space using stacks, *AUT J. Math. Comput., 3*(1) pp. 45-52. doi: 10.22060/AJMC.2021.19123.1042

[26] Vaidyanathaswamy, R., 1944. The localisation theory in set-topology, *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A., 20*, pp.51-61. https://doi.org/10.1007/BF03048958

A new type of the generalized pre-interior and pre-closure operators via hereditary classes

A. Talabeigi[(1)] [2] and G. Mirhosseinkhani[(2)]

[(1)] Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O. Box, 19395-3697, Tehran, Iran
[(2)] Department of Mathematics and Computer Sciences, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

Communicated by: Ali Rezaei Aliabad

Received: 16 September 2025 Accepted: 8 May 2026

Abstract: In this paper, we intend to introduce and study an useful and practical example of the generalized pr-derived-set and the generalized pre-co-derived-set operators under the name $\mathcal{H}$-pre-closure and $\mathcal{H}$-pre-interior operator by using a hereditary class on a topological space. Finally, using these operator, we introduce two operators $\mathcal{H}$-closure and $\mathcal{H}$-interior and show that all these operators induce a new identical generalized topology on a topological space. As a consequence, many results of topological operators are generalized, clarified and stated via hereditary classes.

Keywords: Hereditary class, generalized topology, pre-interior operator, pre-closure operator.

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (A. Talabeigi) talabeigi.amin@gmail.com,talabeigi@pnu.ac.ir, (G. Mirhosseinkhani) gh.mirhosseini@yahoo.com,gh.mirhosseini@sirjantech.ac.ir