مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۱–۱۱

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.49112.2350

زیرفضاهای پایا مکمل‌دار از دوگان G مدول‌های چپ باناخ

علی غفاری * ایمان امانی و فریدون حبیبیان

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
دبیر مسئول: امیرحسین صنعت پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۰۵

چکیده: فرض کنید G گروهی هاسدورف، فشرده‌موضعی و A یک G مدول باناخ چپ باشد. در این مقاله به مطالعه زیرفضاهای ضعیف ستاره‌بسته خاصی از A^* پرداخته و بررسی خواهیم کرد که چه موقع این زیرفضاها، برد تصویری پیوسته‌اند که با انتقال و پیچش جابه‌جا می‌شود. یکی از یافته‌های اصلی در این مقاله، نتیجه می‌دهد که گروه G میانگین‌پذیر است هرگاه هر زیرفضای ضعیف ستاره‌بسته، انتقال پایا و مکمل، برد تصویری روی $L^\infty(G)$ باشد که با پیچش جابه‌جا می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گروه فشرده‌موضعی، جبرهای گروهی، تصویر، مکمل، میانگین‌پذیری، عمل‌گرهای فشره، زیرفضاهای انتقال پایا.

رده‌بندی ریاضی: 43A60; 22A20

۱ تعاریف و مقدمات

ابتدا به تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این مقاله می‌پردازیم. تلاش کرده‌ایم همه مفاهیم مورد نیاز در این بخش آورده شود و به خواننده توصیه می‌شود برای اطلاعات بیشتر و یا مفاهیمی که از قلم افتاده است به مراجع [۹]، [۱۱]، [۱۸] و [۱۹] رجوع کند.

فرض کنیم G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی و $C_b(G)$ فضای متشکل از همه توابع پیوسته و کراندار روی G باشد. خانواده همه توابع پیوسته روی گروه G که در بی نهایت صفر می‌شوند را با $C_0(G)$ نمایش می‌دهیم. یادآوری می‌شود که $M(G) = C_0(G)^*$ و نیز $L^1(G)$ ایده‌آل بسته در $M(G)$ است [۹]. برای تابع $f : G \to \mathbb{C}$ و $x \in G$، تابع $l_x f : G \to \mathbb{C}$ را با ضابطه $l_x f(y) = f(xy)$ تعریف می‌کنیم. $f \in C_b(G)$ را پیوسته یکنواخت چپ گوئیم هرگاه نگاشت $x \mapsto l_x f$ از G به $C_b(G)$ نسبت به توپولوژی نرم پیوسته باشد. فضای همه توابع مختلط مقدار و کراندار اساسی روی G را با $L^\infty(G)$ نمایش می‌دهیم. تابع $f \in C_b(G)$ را تقریبا متناوب (تقریبا متناوب ضعیف) گوئیم هرگاه

*علی غفاری
(A. Ghaffari) aghaffari@semnan.ac.ir, (I. Amani) imanamani7070@gmail.com
and (F. Habibian) fhabibian@semnan.ac.ir

$\{l_x f; x \in G\}$ نسبت به توپولوژی نرم (ضعیف) فشرده نسبی باشد. مجموعه همه توابع تقریبا متناوب (تقریبا متناوب ضعیف) را با نماد $AP(G)$ ($WAP(G)$) نمایش می‌دهیم [۲۱]. زیرفضای S از $L^\infty(G)$ را پایای انتقال گوئیم هرگاه برای هر $f \in S$ و هر $x \in G$، $l_x f \in S$. همه این زیرفضاها، زیرجبرهای باناخ و پایای انتقال از $L^\infty(G)$ بوده و بعلاوه

$$AP(G) \subseteq WAP(G) \subseteq LUC(G) \subseteq L^\infty(G).$$

فرض کنیم که S زیرفضای انتقال پایای چپ از $L^\infty(G)$ شامل توابع ثابت بوده که نسبت به مزدوج نیز پایاست، یعنی وقتی که $f \in S$ آنگاه $\overline{f} \in S$. تابعک m را یک میانگین روی S گوئیم هرگاه $\|m\| = \langle m, 1\rangle = 1$. m یک میانگین پایای چپ است هرگاه برای هر $f \in S$ و $x \in G$، $\langle m, l_x f\rangle = \langle m, f\rangle$. گروه G را میانگین‌پذیر گوئیم هرگاه یک میانگین پایای چپ روی $L^\infty(G)$ وجود داشته باشد. توجه کنید که G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $LUC(G)^*$ شامل یک میانگین پایای چپ روی $LUC(G)$ باشد [۱]. بعلاوه با استفاده از قضیه نقطه ثابت ریل ناردزوسکی، می‌توان نشان داد که $WAP(G)^*$ شامل یک میانگین پایای چپ منحصربه فرد روی $WAP(G)$ است. کارهای زیادی روی میانگین‌پذیری گروه‌ها و جبرهای باناخ انجام شده که از آن جمله خواننده علاقمند می‌تواند به [۲]، [۳]، [۶] و [۱۳] مراجعه کند.

توجه کنید زیرفضای بسته N از فضای نرم‌دار X را در X مکمل‌دار گوئیم هرگاه N برد تصویری پیوسته روی X باشد. فرض کنید $\mathbb{R}$ گروه جمعی از اعداد حقیقی باشد. قبلا ثابت شده است که $AP(\mathbb{R})$ و $WAP(\mathbb{R})$ در $LUC(\mathbb{R})$ مکمل‌دار نیستند. توجه کنید که برای گروه $G = SL(2, \mathbb{R})$، $AP(G)$ در $LUC(G)$ مکمل است. لائو و لاسرت [۱۵] ثابت کردند که گروه G متناهی است اگر و تنها اگر هر زیرفضای S از $WAP(G)$ شامل $C_0(G)$ در $L^\infty(G)$ مکمل‌دار باشد. فرض کنیم G گروهی فشرده و S زیرجبر بسته و پایای انتقال از $C_b(G)$ بوده که خود الحاق نیست. تصویری پیوسته با برد S روی $C(G)$ وجود ندارد. تاکاهاشی [۲۴] ثابت کرد که هر زیرجبر ضعیف ستاره‌بسته، پایای انتقال و غیر خود الحاق از $L^\infty(G)$ برد تصویری پیوسته روی $L^\infty(G)$ نیست. لائو و لاسرت [۱۴] ثابت کردند که اگر G گروهی میانگین‌پذیر باشد، هر زیرجبر ضعیف ستاره‌بسته، انتقال‌پایا و خود الحاق از $L^\infty(G)$ برد تصویری پیوسته بوده که این تصویر با عمل‌گر انتقال نیز جابه‌جا می‌شود. آن‌ها این چنین زیرفضاها را پایای مکمل‌دار نامیدند. زیرفضاهای پایای مکمل‌دار و ارتباط آنها با میانگین‌پذیری روی جبرهای ابرگروهی در [۲۳] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. مطالعات روی زیرفضاهای مکمل بعضی از جبرها، بویژه روی جبرهای ابرگروهی ادامه یافت [۲۰] و [۲۲]. خواننده برای آشنایی بیشتر می تواند به مراجع [۲۵] و نیز [۲۶] مراجعه کند.

در این مقاله G مدول‌های باناخ را در نظر می‌گیریم. تصویرهای پیوسته که با انتقال و یا با پیچش روی زیرفضاهای ضعیف ستاره‌بسته جابه‌جا می‌شوند، را مطالعه می‌کنیم. می‌دانیم که هر میانگین پایای چپ توپولوژیک، یک میانگین پایای چپ است ولی عکس آن درست نیست. از این موضوع استفاده کرده و نتیجه می‌گیریم که دلیلی ندارد تصویری که با انتقال جابه‌جا می‌شود با پیچش نیز جابه‌جا شود. ثابت می‌کنیم که یک زیرفضای انتقال پایا و ضعیف ستاره‌بسته از دوگان یک G مدول باناخ چپ، برد تصویری است که با انتقال جابه‌جا می‌شود اگر و تنها اگر آن زیرفضا، برد تصویری باشد که با پیچش جابه‌جا می‌شود. ارتباط بین تصویرهای خاص و فشردگی گروه نیز بررسی شده‌است.

۲ ارتباط بین زیرفضاهای مکمل پایا و تصویرها

فرض کنید A یک فضای باناخ و G گروه هاسدورف و فشرده موضعی باشد. A را یک G مدول چپ گوئیم هرگاه نگاشت $(x, a) \mapsto xa$ از $G \times A$ به A موجود باشد که برای هر $a, b \in A$، $x, y \in G$ و $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$x(a + b) = xa + xb, (xy)a = x(yb), \alpha(xa) = x(\alpha a), ea = a.$$

بعلاوه اینکه برای هر $a \in A$، نگاشت $x \mapsto xa$ از G به A پیوسته بوده و همچنین عدد ثابت k موجود باشد که برای هر $a \in A$ و $x \in G$، $\|xa\| \leq k\|a\|$. اگر A یک G مدول باناخ چپ باشد، برای $\mu \in M(G)$ و $a \in A$، انتگرال برداری مقدار $\mu a = \int xad\mu(x)$ تعریف می‌شود. لذا A یک $M(G)$ مدول باناخ چپ است [۵]. برای $a \in A$ و $x \in G$، $xa = \delta_x a$. توجه کنید که G مدول راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. اگر A یک G مدول چپ باشد، برای $f \in A^*$، $a \in A$ و $x \in G$ تعریف می‌کنیم $\langle fx, a\rangle = \langle f, xa\rangle$. اگر A^* را با توپولوژی ضعیف در نظر بگیریم،

A^* یک G مدول باناخ راست است. قرار می‌دهیم

$$UC(A^*) = \{f \in A^*;\ \text{با توپولوژی نرم پیوسته است } x \mapsto fx\}.$$

به آسانی دیده می‌شود که $UC(A^*)$ زیرفضای خطی بسته از A^* است. توجه کنید که نگاشت $(x, f) \mapsto l_{x^{-1}}f$، جبر باناخ $L^1(G)$ را به یک G مدول چپ تبدیل می‌کند و در این حالت $UC(A^*) = LUC(G)$.

فرض کنید A یک G مدول چپ باناخ و S یک زیرفضای پایای انتقال و بسته از A^* باشد، یعنی برای $f \in S$ و $x \in G$، $f\delta_x \in S$. عملگر $T : A^* \to A^*$ نسبت به انتقال جابه‌جا می‌شود هرگاه برای هر $x \in G$ و $f \in A^*$، $T(f\delta_x) = T(f)\delta_x$. S را پایا مکمل‌دار گوئیم هرگاه S برد تصویری پیوسته روی A^* باشد که با انتقال جابه‌جا می‌شود. فرض کنید S برد تصویر پیوسته P روی A^* بوده که با انتقال جابه‌جا می‌شود. قرار می‌دهیم $N = \{f \in A^*; P(f) = 0\}$. برای هر $f \in A^*$، $f = P(f) + f - P(f)$ و لذا $A^* \subseteq S + N$. برای $f \in S \cap N$، $f = P(f) = 0$. نتیجه اینکه $A^* = S \oplus N$. از آن‌جا که P نسبت به انتقال جابه‌جا می‌شود، به آسانی دیده می‌شود که N نیز انتقال پایاست. عکس این موضوع نیز برقرار است. در واقع اگر A^* جمع مستقیم دو زیرفضای انتقال پایای S و N باشد. تصویری پیوسته از A^* بروی S یافت می‌شود که با انتقال جابه‌جا می‌شود.

لم ۱.۲. فرض کنید G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی و A یک G مدول باناخ چپ باشد. فرض کنید T عملگری کراندار روی $UC(A^*)$ باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

(i) T با انتقال جابه‌جا می‌شود،

(ii) T با پیچش جابه‌جا می‌شود، یعنی برای هر $\phi \in L^1(G)$ و $f \in A^*$، $T(f\phi) = T(f)\phi$.

اثبات. فرض کنید عملگر T با انتقال جابه‌جا شود و $f \in UC(A^*)$ و $\phi \in L^1(G)$ داده شده باشند. فرض کنید T^* عملگر الحاقی روی $UC(A^*)^*$ باشد. با توجه به پیوستگی $x \mapsto f\delta_x$، برای هر $a \in A$، انتگرال برداری مقدار زیر خوش تعریف بوده [۱۸] و

$$\begin{aligned}\langle T(f\phi), a\rangle &= \langle T^*(a), f\phi\rangle = \int \langle T^*(a), f\delta_x\rangle d\phi(x)\\ &= \int \langle T(f\delta_x), a\rangle d\phi(x) = \int \langle T(f), xa\rangle d\phi(x)\\ &= \int \langle T(f)\delta_x, a\rangle d\phi(x) = \langle T(f)\phi, a\rangle.\end{aligned}$$

چون رابطه اخیر برای هر $a \in A$ درست است، $T(f\phi) = T(f)\phi$.

فرض کنید عملگر T با پیچش جابه‌جا شود و $f \in UC(A^*)$، $a \in A$ و $x \in G$ داده شده باشند. قرار دهید

$$D = \{U \subseteq G;\ \text{زیر مجموعه باز و فشرده نسبی شامل همانی است } U\}.$$

D با عکس جزئیت مجموعه‌ای جهت دار است. برای هر $U \in D$، فرض کنید 1_U تابع مشخصه و نیز $|U|$ اندازه هار U باشد. قرار می‌دهیم $\phi_U = \frac{1_U}{|U|}$. عناصر $f \in UC(A^*)$، $x \in G$ و $a \in A$ را در نظر بگیرید. با توجه به پیوستگی نگاشت $x \mapsto f\delta_x$،

$$\begin{aligned}\langle T(f\delta_x), a\rangle &= \lim_U \langle T(f\delta_x * \phi_U), a\rangle = \lim_U \langle T(f), \delta_x * \phi_U a\rangle\\ &= \langle T(f), xa\rangle = \langle T(f)\delta_x, a\rangle.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که T با انتقال جابه‌جا می‌شود. □

یاد آوری می‌شود که در حالت کلی دوگان دوم یک جبر باناخ با ضرب آرنز نوع اول یک جبر باناخ است. از آن‌جا که بحث ما روی جبر گروهی است، این ضرب را تنها برای دوگان دوم جبر گروهی بیان می‌کنیم.

برای $\varphi \in L^1(G)$ و $f \in L^1(G)^* = L^\infty(G)$، تابع $f\varphi \in L^\infty(G)$ را با ضابطه $\langle f\varphi, \psi\rangle = \langle f, \varphi * \psi\rangle$ تعریف می‌کنیم. برای $F \in L^\infty(G)^*$ تابع $Ff \in L^\infty(G)$ را به‌صورت $\langle Ff, \varphi\rangle = \langle F, f\varphi\rangle$ و در نهایت برای $G \in L^\infty(G)^*$ تابع $GF \in L^\infty(G)^*$ را به صورت $\langle GF, f\rangle = \langle G, Ff\rangle$ تعریف می‌کنیم [۵] و [۷]. اگر $L^1(G)^{**}$ را با ضرب آرنز نوع اول در نظر بگیریم، $LUC(G) = L^\infty(G)L^1(G)$. توجه کنید برای بعضی از $E \in L^1(G)^{**}$، نگاشت $F \mapsto EF$ از $L^1(G)^{**}$ به $L^1(G)^{**}$ نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته نیست. مجموعه همه چنین Eهایی که نگاشت فوق نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته است را مرکز توپولوژیک $L^1(G)$ گوئیم.

توجه کنید که در حالت کلی یک عمل‌گر روی دوگان یک G مدول چپ باناخ که با انتقال جابه‌جا می شود، لزومی ندارد که با پیچش نیز جابه‌جا شود. در واقع اگر G گروهی آبلی و ناگسسته باشد، $L^1(G)$ یک G مدول باناخ چپ با عمل $(x, f) \mapsto l_{x^{-1}}f$ است. یک میانگین پایای چپ m روی $L^\infty(G)$ موجود است که میانگین پایای چپ توپولوژیک نیست [۱۹]. به آسانی می‌توان دید که عمل‌گر $T : L^\infty(G) \to L^\infty(G)$ با ضابطه $T(f) = mf$ با انتقال جابه‌جا می‌شود ولی با پیچش جابه‌جا نمی‌شود.

قضیه ۲.۲. فرض کنید G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی و A یک G مدول باناخ چپ باشد. فرض کنید S زیر فضای ضعیف ستاره‌بسته و پایای انتقال از A^* باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

(i) تصویری از A^* بروی S موجود است که با انتقال جابه‌جا می‌شود، به عبارتی S پایا مکمل‌دار است.

(ii) تصویری از $UC(A^*)$ بروی $S \cap UC(A^*)$ موجود است که با انتقال جابه‌جا می‌شود.

(iii) تصویری از A^* بروی S موجود است که با پیچش و انتقال جابه‌جا می‌شود.

اثبات. فرض کنیم P تصویری پیوسته از A^* بروی S بوده که با انتقال جابه‌جا می‌شود. چون P پیوسته است، به‌وضوح برای هر $f \in UC(A^*)$، $x \mapsto P(f\delta_x) = P(f)\delta_x$ نیز پیوسته بوده و لذا $P(UC(A^*)) \subseteq UC(A^*) \cap S$. بنابراین $UC(A^*) \cap S$ برد تصویری روی $UC(A^*)$ بوده که با انتقال جابه‌جا می‌شود.

اکنون فرض کنیم گزاره (ii) برقرار بوده و $P : UC(A^*) \to UC(A^*) \cap S$ تصویری باشد که با انتقال جابه‌جا می شود. چون S نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره‌بسته بوده و همچنین پایای انتقال است، به آسانی می‌توان نشان داد که پایای توپولوژیک نیز هست. این به این معناست که برای هر $\phi \in L^1(G)$ و $f \in S$، $f\phi \in S$ [۱۵]. حال فرض کنید $\{\phi_U\}$ تور ساخته شده در لم ۱.۲ باشد. نگاشت $P' : A^* \to A^*$ را با ضابطه‌ی

$$\langle P'(f), a\rangle = \lim_U \langle P(f\phi_U), a\rangle$$

روی A^* تعریف می‌کنیم. توجه کنید که برای هر $f \in A^*$ و $U \in D$، $f\phi_U \in UC(A^*)$. در واقع فرض کنید $\epsilon > 0$ داده شده باشد. چون $\phi_U \in L^1(G)$، مجموعه باز و متقارن V شامل عنصر همانی از گروه G وجود دارد که برای هر $xy^{-1} \in V$ [۹]،

$$\|\phi_U * \delta_x - \phi_U * \delta_y\|_1 < \epsilon.$$

لذا برای هر $a \in A$، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} |\langle f\phi_U * \delta_x - f\phi_U * \delta_y, a\rangle| &= \left| \int \langle f, ta\rangle d\phi_U * \delta_x - \phi_U * \delta_y(t) \right| \\ &\leq k\|f\|\|a\|\|\phi_U * \delta_x - \phi_U * \delta_y\|_1 < k\|f\|\|a\|\epsilon. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که نگاشت $x \mapsto f\phi_U * \delta_x$ پیوسته بوده و ادعا ثابت می‌شود. بنا به لم ۱.۲ برای هر $U \in D$، $P(f\phi_U) = P(f)\phi_U$. از طرفی $\{\phi_U a\}$ در توپولوژی نرم به $\{a\}$ همگراست [۵]، بنابراین حد فوق موجود بوده و لذا P' خوش تعریف است. چون P نگاشت خطی است، واضح است که P' نیز نگاشت خطی است. بعلاوه اینکه برای هر $f \in A^*$ و هر $a \in A$،

$$|\langle P'(f), a\rangle| = \lim_U |\langle P(f\phi_U), a\rangle| \leq \|P\|\|f\|\|a\|.$$

این نشان می‌دهد که P' پیوسته بوده و همچنین $\|P'\| \leq \|P\|$. فرض کنید $f \in A^*$ عنصری دلخواه و $P'(f) \notin S$. چون S نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره‌بسته است، $a \in A$ موجود است که برای هر $h \in S$، $\langle h, a\rangle = 0$ و بعلاوه $\lim_U \langle P(f\phi_U), a\rangle = \langle P'(f), a\rangle = 1$ [۱۸]. اما P تصویری به‌توی S بوده و این یک تناقض است. نتیجه اینکه $P'(A^*) \subseteq S$. دوباره فرض کنید که $f \in S$ عنصری دلخواه باشد. چون S انتقال پایا و نیز نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره‌بسته است، بنابراین $f\phi_U \in S$. از طرف دیگر P تصویری بروی $UC(A^*) \cap S$ است. نتیجه اینکه برای هر $a \in A$،

$$\langle P'(f), a\rangle = \lim_U \langle P(f\phi_U), a\rangle = \lim_U \langle f\phi_U, a\rangle = \langle f, a\rangle.$$

بنابراین P' تصویری بروی S است.
به سادگی دیده می‌شود که $\{\phi_U\}$ یک واحد تقریبی کراندار با کران یک برای $L^1(G)$ است [۹]. برای هر $f \in A^*$، $a \in A$ و $\phi \in L^1(G)$،

$$\begin{aligned}\langle P'(f\phi), a\rangle &= \lim_U \langle P(f\phi_U * \phi), a\rangle = \lim_U \langle P(f\phi_U)\phi, a\rangle = \lim_U \langle P(f\phi_U), \phi a\rangle \\ &= \langle P'(f), \phi a\rangle = \langle P'(f)\phi, a\rangle.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که P' با پیچش جابه‌جا می‌شود. برای اثبات اینکه P' با انتقال جابه‌جا می‌شود عناصر $f \in A^*$، $a \in A$ و $x \in G$ را در نظر بگیرید. می توان نوشت

$$\begin{aligned}\langle P'(f\delta_x), a\rangle &= \lim_U \langle P'(f\delta_x), \phi_U a\rangle = \lim_U \langle P'(f\delta_x)\phi_U, a\rangle \\ &= \lim_U \langle P'(f\delta_x * \phi_U), a\rangle = \lim_U \langle P'(f)\delta_x * \phi_U, a\rangle \\ &= \lim_U \langle P'(f)\delta_x, \phi_U a\rangle = \langle P'(f)\delta_x, a\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین P' با انتقال جابه‌جا می‌شود.
به‌وضوح گزاره (iii) گزاره (i) را نتیجه می‌دهد و برهان کامل می‌شود. □

در حالت کلی عمل‌گرهایی که با انتقال جابه‌جا می‌شوند، لزوما با پیچش جابه‌جا نمی‌شوند. قضیه بالا بیان می‌کند که اگر زیرفضایی مکمل پایا باشد، آن زیرفضا برد تصویری خواهد بود که با پیچش جابه‌جا می‌شود. در قضیه زیر برای گروه فشرده G، زیرفضاهای مکمل پایا و ضعیف ستاره‌بسته از $L^\infty(G)$ به طور کامل مشخص می‌شود. در واقع همه این چنین زیرفضاها به صورت $L^\infty(G)\phi$ بوده که در آن ϕ عنصری خودتوان در $L^1(G)$ است.

قضیه ۳.۲. فرض کنید G گروهی آبلی، هاسدورف و فشرده‌موضعی باشد. گزاره‌های زیر معادلند:

(i) گروه G فشرده است،

(ii) هر زیرفضای مکمل‌پایا، ضعیف ستاره‌بسته از $L^\infty(G)$ برد تصویری فشرده مانند P روی $L^\infty(G)$ است که برای هر $F \in L^\infty(G)^*$ و $f \in L^\infty(G)$، $P(Ff) = P(F)f$،

(iii) هر زیرفضای مکمل‌پایا، ضعیف ستاره‌بسته S از $L^\infty(G)$ به صورت $S = L^\infty(G)\mu$ که در آن $\mu \in L^1(G)$ عنصری خودتوان و منحصربه فرد است.

اثبات. فرض کنیم G گروهی فشرده و S زیرفضای مکمل‌پایا و ضعیف ستاره بسته از $L^\infty(G)$ باشد. بنا به قضیه ۲.۲، S برد تصویری مانند P است که با پیچش جابه‌جا می‌شود. این به این معناست که برای هر $f \in L^\infty(G)$ و $\phi \in L^1(G)$، $P(\phi f) = \phi P(f)$. فرض کنید $\{\phi_\alpha\}$ واحد تقریبی کران‌دار از اندازه‌های احتمال در $L^1(G)$ [۹] و عناصر $f \in L^\infty(G)$ و $F \in L^\infty(G)^*$ نیز داده شده باشد. چون G فشرده است، بنابراین $L^1(G)$ ایده‌آل در $L^\infty(G)^*$ بوده و بنابراین برای هر α، $\phi_\alpha F \in L^1(G)$ [۵]. برای $\phi \in L^1(G)$،

$$\begin{aligned}\langle P(Ff), \phi\rangle &= \lim_\alpha \langle P(Ff), \phi * \phi_\alpha\rangle = \lim_\alpha \langle \phi_\alpha P(Ff), \phi\rangle \\ &= \lim_\alpha \langle P(\phi_\alpha Ff), \phi\rangle = \lim_\alpha \langle \phi_\alpha FP(f), \phi\rangle \\ &= \lim_\alpha \langle FP(f), \phi * \phi_\alpha\rangle = \langle FP(f), \phi\rangle.\end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $\phi \in L^1(G)$ و $\{F_\alpha\}$ نیز توری در $L^\infty(G)^*$ بوده که نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره به تابعک $F \in L^\infty(G)^*$ همگراست. برای هر $f \in L^\infty(G)$،

$$\begin{aligned}\lim_\alpha \langle P^*(\phi)F_\alpha, f\rangle &= \lim_\alpha \langle P^*(\phi), F_\alpha f\rangle = \lim_\alpha \langle \phi, P(F_\alpha f)\rangle = \lim_\alpha \langle \phi, F_\alpha P(f)\rangle \\ &= \lim_\alpha \langle F_\alpha, P(f)\phi\rangle = \langle F, P(f)\phi\rangle = \langle FP(f), \phi\rangle \\ &= \langle P(Ff), \phi\rangle = \langle P^*(\phi), Ff\rangle = \langle P^*(\phi)F, f\rangle.\end{aligned}$$

این نشان می دهد که $P^*(\phi)$ عضوی از مرکز توپولوژیک $L^1(G)$ است [۴]. اما مرکز توپولوژیک $L^1(G)$ جبر گروهی $L^1(G)$ است [۵]. نتیجه اینکه $P^*(L^1(G)) \subseteq L^1(G)$. چون تصویر P با پیچش جابه‌جا می‌شود، به آسانی می‌توان دید که برای هر $\psi \in L^1(G)$ و $x \in G$، $P^*(l_x\psi) = l_xP^*(\psi)$ [۱۲]. لذا P^* یک ضربگر چپ روی $L^1(G)$ بوده و بنا به قضیه وندل، اندازه $\mu \in M(G)$ موجود است که برای هر $\phi \in L^1(G)$، $P^*(\phi) = \mu * \phi$. چون G فشرده است، بنابراین $\{\mu * \phi; \|\phi\|_1 \leq 1\}$ فشرده نسبی بوده [۱۲] و لذا $P^* : L^1(G) \to L^1(G)$ عملگری فشرده است. اکنون فرض کنید $F \in L^\infty(G)$ و $\|F\| \leq 1$. تور $\{\phi_\alpha\}$ از اعضای $L^1(G)$ را طوری می‌گیریم که برای هر α، $\|\phi_\alpha\|_1 \leq 1$ و $\{\phi_\alpha\}$ به F در توپولوژی ضعیف ستاره همگرا باشد [۵]. چون P^* نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته است، لذا $\{P^*(\phi_\alpha)\}$ به $P^*(F)$ در توپولوژی ضعیف ستاره همگراست. از طرف دیگر برای هر α، $P^*(\phi_\alpha) \in \{\mu * \phi; \|\phi\|_1 \leq 1\}$. از فشردگی نسبی $\{\mu * \phi; \|\phi\|_1 \leq 1\}$ استفاده کرده و زیرتور همگرا (در نرم) از تور $\{P^*(\phi_\alpha)\}$ را بدست می‌آوریم. این زیرتور در توپولوژی ضعیف ستاره به $P^*(F)$ همگراست. بنا به منحصربه فردی حد تورها، $P^*(F)$ در بستار $\{\mu * \phi; \|\phi\|_1 \leq 1\}$ قرار دارد و لذا $P^* : L^\infty(G)^* \to L^\infty(G)^*$ عملگری فشرده بوده و لذا P فشرده است [۱۸].

اکنون فرض کنید (ii) برقرار بوده و S زیرفضای مکمل‌پایا، انتقال‌پایا و ضعیف ستاره‌بسته از $L^\infty(G)$ باشد. بنابراین تصویر فشرده $P : L^\infty(G) \to S$ موجود است که برای هر عنصر $f \in L^\infty(G)$ و $F \in L^\infty(G)^*$، $P(Ff) = FP(f)$. بنا به آنچه در بالا آمده‌است اندازه $\mu \in M(G)$ یافت می‌شود که برای هر $\phi \in L^1(G)$، $P^*(\phi) = \mu * \phi$. از آن‌جا که P تصویر است، P^* نیز یک تصویر است و بنابراین برای هر $\phi \in L^1(G)$، $\phi * \mu = \phi * \mu * \mu$. فرض کنید $f \in C_0(G)$ داده شده باشد. چون $C_0(G) \subseteq LUC(G) = L^\infty(G)L^1(G)$ [۹]، بنابراین عناصر $h \in L^\infty(G)$ و $\phi \in L^1(G)$ موجودند که $f = h\phi$. در نتیجه

$$\langle f, \mu\rangle = \langle h\phi, \mu\rangle = \langle h, \phi * \mu\rangle = \langle h, \phi * \mu * \mu\rangle = \langle h\phi, \mu * \mu\rangle = \langle f, \mu * \mu\rangle.$$

چون تساوی اخیر برای هر $f \in C_0(G)$ برقرار است، لذا μ خودتوان است. نشان می‌دهیم $\mu \in L^1(G)$. دوباره واحد تقریبی $\{\phi_\alpha\}$ از اندازه‌های احتمال در $L^1(G)$ را در نظر می‌گیریم [۹]. واضح است که برای هر α،

$$\mu * \phi_\alpha \in \{\mu * \phi; \|\phi\|_1 \leq 1\}.$$

چون مجموعه اخیر نسبت به توپولوژی نرم فشرده نسبی است، بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد آید فرض می‌کنیم $\{\mu * \phi_\alpha\}$ به $\phi \in L^1(G)$ همگراست. برای $f \in C_0(G)$، $\langle f, \mu\rangle = \lim_\alpha \langle f, \mu * \phi_\alpha\rangle = \langle f, \phi\rangle$. بنابراین $\mu = \phi \in L^1(G)$. برای $f \in L^\infty(G)$ و $\psi \in L^1(G)$، $\langle P(f), \psi\rangle = \langle f, P^*(\psi)\rangle = \langle f, \mu * \psi\rangle = \langle f\mu, \psi\rangle$. نتیجه اینکه $P(f) = f\mu$. به آسانی می‌توان دید که μ منحصربه فرد است.

در نهایت، فرض کنید (iii) برقرار باشد. زیرفضای یک بعدی $S = \{\alpha 1; \alpha \in \mathbb{C}\}$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که S زیرفضای ضعیف ستاره‌بسته و پایای انتقال است. نشان می‌دهیم S مکمل‌پایاست. از آن‌جا که G گروهی آبلی است، $L^\infty(G)$ شامل یک میانگین پایای چپ توپولوژیک می‌باشد. یعنی تابعک نامنفی m با نرم یک روی $L^\infty(G)$ موجود است که برای هر $f \in L^\infty(G)$ و هر اندازه احتمال $\phi \in L^1(G)$، $\langle m, f\phi\rangle = \langle m, f\rangle$. از آنجا که هر میانگین پایای چپ توپولوژیک یک میانگین پایای چپ نیز هست [۱۹]، لذا m یک میانگین پایای چپ می‌باشد. $P : L^\infty(G) \to L^\infty(G)$ را با ضابطه $P(f) = mf$ تعریف می‌کنیم. واضح است که P خطی بوده و بعلاوه اینکه $\|m\| = 1 \leq \|P\|$. توجه کنید که برای هر اندازه احتمال ψ در $L^1(G)$ و هر $f \in L^\infty(G)$، $\langle P(f), \psi\rangle = \langle mf, \psi\rangle = \langle m, f\psi\rangle = \langle m, f\rangle 1$. نتیجه اینکه $P(f) = \langle m, f\rangle 1$. این نشان می‌دهد که $P(L^\infty(G)) \subseteq S$. نشان می‌دهیم P با انتقال جابه‌جا می‌شود. فرض کنید $f \in L^\infty(G)$، $x \in G$ و $\phi \in L^1(G)$ داده شده باشد. می‌توان نوشت

$$\langle P(l_xf), \phi\rangle = \langle ml_xf, \phi\rangle = \langle m, l_xf\phi\rangle = \langle l_xmf, \phi\rangle = \langle l_xP(f), \phi\rangle.$$

بنابراین P با انتقال جابه‌جا می‌شود. با این توضیحات نتیجه می‌گیریم که S مکمل پایا است. بنا به فرض $\mu \in L^1(G)$ موجود است که $S = L^\infty(G)\mu$. $\lambda_\mu : L^1(G) \to L^1(G)$ را با ضابطه $\lambda_\mu(\psi) = \mu * \psi$ تعریف می‌کنیم. λ_μ یک ضربگر چپ بوده [۱۲] و به آسانی دیده می‌شود که $\lambda^*_\mu : L^\infty(G) \to L^\infty(G)$ به صورت $\lambda^*_\mu(f) = f\mu$ است [۱۶]. چون برد λ^*_μ دارای بعد متناهی است، لذا λ^*_μ فشرده است [۱۸]. نتیجه اینکه G گروهی فشرده است [۱۷] و این برهان را کامل می‌کند. □

نتیجه ۴.۲. فرض کنید G گروهی هاسدورف و فشرده‌موضعی و A یک G مدول چپ باناخ باشد. گروه G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرفضای ضعیف ستاره‌بسته، انتقال پایا و مکمل، برد تصویری روی A^* باشد که با پیچش جابه‌جا می‌شود.

اثبات. فرض کنید G گروهی میانگین‌پذیر و S نیز زیرفضای ضعیف ستاره‌بسته، پایای انتقال و مکمل‌دار از دوگان G مدول باناخ چپ A باشد. بنا به [۱۵]، S برد تصویری است که با انتقال جابه‌جا می‌شود. بنا به قضیه ۲.۲، S برد تصویری است که با پیچش جابه‌جا می‌شود.

برای اثبات عکس گزاره، $L^1(G)$ با عمل $(x, f) \mapsto l_{x^{-1}}f$ یک G مدول باناخ چپ است. واضح است که $S = \{\alpha 1_G; \alpha \in \mathbb{C}\}$ دارای بعد متناهی و لذا زیرفضای انتقال پایا، ضعیف ستاره بسته و مکمل از $L^\infty(G)$ می‌باشد. در واقع برای $x \in G$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha l_x 1 = \alpha 1$. یعنی S انتقال پایاست. بنا به فرض، تصویری پیوسته مانند P از $L^\infty(G)$ بروی S موجود است که با پیچش جابه‌جا می‌شود. بنا به قضیه ۲.۲، بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد آید فرض کنید P تصویری است که با انتقال جابه‌جا می‌شود. می توان نوشت $P = ReP + iReP$ [۱۸]. چون P تابعکی غیر صفر است، لذا ReP غیر صفر است. تابعک‌های نامنفی ReP^+ و ReP^- موجودند که $ReP = ReP^+ - ReP^-$ و نیز برای هر $f \in L^\infty(G)^+$،

$$\langle ReP^+, f\rangle = \sup\{\langle ReP^+, g\rangle; g \in L^\infty(G)^+, g \le f\}.$$

برای هر $f \in L^\infty(G)^+$ و $x \in G$،

$$\begin{aligned}\langle ReP^+, f\delta_x\rangle &= \sup\{\langle ReP^+, g\rangle; g \in L^\infty(G)^+, g \le f\delta_x\}\\ &= \sup\{\langle ReP^+, g\delta_{x^{-1}}\rangle; g \in L^\infty(G)^+, g\delta_{x^{-1}} \le f\}\\ &= \sup\{\langle ReP^+, g\rangle; g \in L^\infty(G)^+, g \le f\} = \langle ReP^+, f\rangle.\end{aligned}$$

چون هر عنصر از $L^\infty(G)$ را می توان به صورت ترکیب خطی از چهار عنصر نامنفی نوشت، لذا برای هر $f \in L^\infty(G)$ و $x \in G$، $\langle ReP^+, f\delta_x\rangle = \langle ReP^+, f\rangle$. این موضوع برای ReP^- نیز صادق بوده و لذا بدون اینکه به کلیت استدلال خللی وارد آید فرض می کنیم $ReP^+ \neq 0$. به آسانی می‌توان دید که $m = \frac{ReP^+}{\langle ReP^+, 1\rangle}$ یک میانگین پایای چپ روی $L^\infty(G)$ است، نتیجه اینکه G میانگین‌پذیر است. □

گزاره ۵.۲. فرض کنید G گروهی هاسدورف و فشرده موضعی باشد. فرض کنید برای هر G مدول باناخ چپ A و برای هر زیر فضای S با بعد متناهی و انتقال‌پایا از A^*، S برد تصویری ضعیف ستاره پیوسته بوده که با انتقال جابه‌جا می‌شود. در این‌صورت G گروهی فشرده است.

اثبات. فرض کنید شرایط گزاره برقرار باشد، ثابت می‌کنیم G گروهی فشرده است. قرار می‌دهیم $A = L^1(G)$. واضح است که A با عمل $(x, \phi) \mapsto l_{x^{-1}}\phi$ یک G مدول باناخ چپ است. گیریم $S = \{\alpha 1; \alpha \in \mathbb{C}\}$. واضح است که S زیرفضایی با بعد یک، پایای انتقال و نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره‌بسته است. چون هر زیرفضا با بعد متناهی برد تصویری پیوسته است [۸]، بنابراین S برد تصویری پیوسته روی $L^\infty(G)$ است. بنا به فرض S، برد تصویری مانند P است که با انتقال جابه‌جا شده و همچنین نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته است. می‌دانیم تنها تابعک‌های خطی که نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته‌اند، اعضای $L^1(G)$ هستند [۱۸]. بنابراین عنصر ϕ در $L^1(G)$ موجود است که برای هر $f \in L^\infty(G)$، $P(f) = \langle f, \phi\rangle$. اکنون فرض کنید G گروهی فشرده نباشد. خانواده همه زیر مجموعه‌های فشرده از G را در نظر گرفته و این خانواده را با رابطه جزئیت مرتب می‌کنیم. در واقع $K_1 \subseteq K_2$ اگر و تنها اگر $K_1 \preceq K_2$. برای هر زیر مجموعه فشرده K، عنصر $x_K \notin K$ را در نظر بگیرید. از آن‌جا که اندازه‌های دیراک تابعک‌های خطی پیوسته روی $LUC(G)$ هستند، لذا برای هر مجموعه فشرده K، $\delta_K \in LUC(G)^*$. چون

گوی واحد بسته در دوگان یک فضای باناخ همواره نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است [۱۸]، بدون اینکه به کلیت استدلال خلل وارد آید فرض کنیم $\{\delta_K\}$ در توپولوژی ضعیف ستاره به $m \in LUC(G)^*$ همگرا باشد. برای هر $f \in C_0(G)$، $f\phi \in C_0(G)$ [۵] و لذا

$$0 = \langle m, f\phi\rangle = \lim_K \langle \delta_K, f\phi\rangle = \lim_K P(f\delta_K) = \lim_K P(f)\delta_K = P(f) = \langle f, \phi\rangle.$$

نتیجه اینکه $\phi = 0$ و این یک تناقض است. در نتیجه G فشرده است. □

تا اینجای مقاله، همواره زیرفضاهای ضعیف ستاره بسته مورد توجه بوده است. در گزاره زیر وقتی G گروهی فشرده باشد، زیرفضاهای بسته از $C(G)$ را در نظر گرفته و مکمل پایا بودن آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گزاره ۶.۲. فرض کنید G گروهی فشرده، S زیرفضای انتقال پایا و بسته از $C(G)$ و همچنین P تصویری پیوسته از $C(G)$ بروی S باشد. در این‌صورت تصویری از $C(G)$ به‌روی S وجود دارد که با انتقال و پیچش جابه‌جا می‌شود.

اثبات. نگاشت $Q : C(G) \to C(G)$ را با ضابطه

$$Q(f) = \int l_{x^{-1}} P l_x(f) d\lambda(x)$$

تعریف می‌کنیم، که در آن λ اندازه هار نرمال شده روی G است. توجه داشته باشید که G گروهی فشرده بوده و لذا $C(G) = LUC(G)$. بنابراین نگاشت $x \mapsto l_{x^{-1}} P l_x(f)$ از G به $C(G)$ پیوسته است. در نتیجه انتگرال برداری فوق خوش تعریف است [۱۸]. به آسانی می‌توان بررسی کرد که Q نگاشتی خطی است. بنا به [۱۸]،

$$\begin{aligned}
\|Q\| &= \sup\{\|Q(f)\|; f \in C(G), \|f\| \le 1\} \\
&= \sup\Big\{\Big\| \int l_{x^{-1}} P l_x(f) d\lambda(x)\Big\|; \|f\| \le 1\Big\} \\
&\le \sup\Big\{ \int \|l_{x^{-1}} P l_x(f)\| d\lambda(x); \|f\| \le 1\Big\} \\
&\le \sup\{\|P\|\|f\|\lambda(G); \|f\| \le 1\} \le \|P\|.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که Q عملگری پیوسته روی $C(G)$ است. از طرف دیگر، توجه کنید که S پایای انتقال و P نیز تصویری بروی S است. در نتیجه برای $f \in S$ و $x \in G$، $PL_x(f) \in S$. لذا $l_{x^{-1}} PL_x(f) = l_{x^{-1}} L_x(f) = f$ و بنابراین $Q(f) = f$. نشان می‌دهیم $Q(C(G)) \subseteq S$. فرض کنید $f \in C(G)$ و $Q(f) \notin S$. بنا به قضیه هان باناخ تابعک خطی پیوسته Λ روی $C(G)$ موجود است که $\langle \Lambda, Q(f)\rangle = 1$ و نیز برای هر $h \in S$، $\langle \Lambda, h\rangle = 0$ [۵]. چون S انتقال پایا و P نیز تصویری بروی S است، بنابراین

$$\langle \Lambda, Q(f)\rangle = \langle \Lambda, \int l_{x^{-1}} P l_x(f) d\lambda(x)\rangle = \int \langle \Lambda, l_{x^{-1}} P l_x(f)\rangle d\lambda(x) = 0.$$

این یک تناقض بوده و لذا Q تصویری بروی S است. نشان می‌دهیم Q با انتقال جابه‌جا می‌شود. فرض کنیم $f \in C(G)$ و $y \in G$ داده شده باشد. با استفاده از پایایی اندازه هار [۹]، برای هر $\Lambda \in C(G)^*$،

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda, Q(l_y f)\rangle &= \int \langle \Lambda, l_{x^{-1}} P l_x(l_y f)\rangle d\lambda(x) = \int \langle \Lambda, l_y l_{(yx)^{-1}} P l_{yx}(f)\rangle d\lambda(x) \\
&= \int \langle \Lambda, l_y l_{x^{-1}} P l_x(f)\rangle d\lambda(x) = \langle \Lambda, \int l_y l_{x^{-1}} P l_x(f)\rangle d\lambda(x) = \langle \Lambda, l_y Q(f)\rangle.
\end{aligned}$$

چون این رابطه برای هر $\Lambda \in C(G)^*$ برقرار است، پس Q با انتقال جابه‌جا می‌شود. □

فهرست منابع

[۱] غفاری، علی، ۱۳۹۰. مقدمه‌ای بر آنالیز هارمونیک، انتشارات دانشگاه سمنان.

[2] Akbari, M. and Habibian, F., 2023. Higher dimensional amenability for a generalized matrix Banach algebra. *Houston Journal of Mathematics,* 94(1), pp. 143–156. doi:Not available

[3] Aminpour, A., Dianatifar, A. and Nasr Isfahani, R., 2018. Asymptotically non-expansive actions of strongly amenable semigroups and fixed points. *J. Math. Anal. Appl.,* 461(1), pp. 364–-377. doi:10.1016/j.jmaa.2017.12.061

[4] Baker, J., Lau, A.T. and Pym, J., 1998. Module homomorphisms and topological centres associated with weakly sequentially complete Banach algebras. *J. Funct. Anal.,* 158(1), pp. 186-–208. doi:10.1006/jfan.1998.3280

[5] Dales, H.G., *Banach algebras and automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs. New Series 24, Oxford Univ. Press, 2000.

[6] Esfandani, M. and Nasr Isfahani, R., 2024. Lebesgue-Fourier algebras on coset spaces and approximate amenability. *Quaestiones Mathematicae,* 47(1), pp. 1–15. doi:10.2989/16073606.2024.2368089

[7] Eshaghi, M., Ghaffari, A. and Sahabi, M.B., 2023. Induced topologies on certain Banach algebras. *Filomat,* 37(4), pp. 1311–1318. doi:10.2298/FIL2304311E

[8] Filali, M., 1999. Finite-dimensional left ideals in some algebras associated with a locally compact group. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 127(8), pp. 2325–2333. doi:10.1090/S0002-9939-99-04631-6

[9] Folland, G.B., A course in abstract harmonic analysis, CRC Press, Boca Raton, FL. 1995.

[10] Ghaffari, A., Hadadi, T., Javadi, S., and Sheibani, M., 2022. On the structure of hypergroups with respect to the induced topology. *Rocky Mountain J. Math.,* 52(2), pp. 519–533. doi:10.1216/rmj.2022.52.519

[11] Ghaffari, A. and Amirjan, S., 2017. Invariantly complemented and amenability in Banach algebras related to locally compact groups. *Rocky Mountain J. Math.,* 47(2), pp. 445–461. doi:10.1216/RMJ-2017-47-2-445

[12] Ghahramani, F. and Lau, A.T., 1997. Multipliers and modulus on Banach algebras related to locally compact groups. *J. Funct. Anal.,* 150(2), pp. 478-–497. doi.org/10.1006/jfan.1997.3133

[13] Lakzian, H., Ebrahimi Vishki, H.R. and Barootkoob, S., 2022. The first cohomology group and weak amenability of a Morita context Banach algebra. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana,* 15(4), pp. 541–560. doi:10.1007/s40574-022-00320-0

[14] Lau, A.T. and Losert, V., 1990. Complementation of certain subspaces of $L^\infty(G)$ of a locally compact group. *Pacific J. Math.,* 141(2), pp. 295–310. doi:10.2140/pjm.1990.141.295

[15] Lau, A.T. and Losert, V., 1986. Weak*-closed complemented invariant subspaces of $L^\infty(G)$ and amenable locally compact groups. *Pacific J. Math.,* 123(1), pp. 149–159. doi:Not available

[16] Medghalchi, A.R. and Mollakhalili, A., 2018. Compact and weakly compact multipliers of locally compact quantum groups. *Bull. Iran. Math. Soc.,* 44(2), pp. 101-–136. doi:10.1007/s41980-018-0008-y

[17] Peralta, A.M., Villanueva, I., Wright, J.D.M. and Ylinen, K., 2020. Weakly compact operators and the strong* topology for a Banach space. *Proc. R. Soc. Edinb. A,* 140(6), pp. 1249–1267. doi:10.1017/S0308210509001486

[18] Rudin, W., Functional analysis, McGraw Hill, New York, 1991.

[19] Runde, V., Amenable Banach algebras, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2020.

[20] Shakir, A., Alali, A.S., Rafiquee, N.N. and Varshney, V., 2023. Action of projections on Banach algebras. *AIMS Mathematics,* 8(8), pp. 17503-17513. doi: 10.3934/math.2023894

[21] Sepulcreand, J.M. and Vidal, T., 2022. A note on spaces of almost periodic functions with values in Banach spaces. *Canad. Math. Bull.,* 65(4), pp. 953–962. doi:10.4153/S0008439522000042

[22] Tahmasebi, N., 2014. Hypergroups and invariant complemented subspaces. *J. Math. Anal. Appl.,* 414(2), pp. 641–655. doi:10.1016/j.jmaa.2014.01.026

[23] Tahmasebi, N., 2016. Fixed point properties, invariant means and invariant projections related to hypergroups. *J. Math. Anal. Appl.,* 437(1), pp. 526–544. doi:10.1016/j.jmaa.2016.01.012

[24] Takahashi, Y., 1982. A characterization of certain weak* closed subalgebras of $L^\infty(G)$. *Hokhaido Math. J.,* 11, pp. 116–124. doi:Not available

[25] Wood, P.J., 2002. Invariant complementation and projectivity in the fourier algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 131(6), pp. 1881–1890. doi:10.1090/S0002-9939-02-06742-4

[26] Wood, P.J., 1999. Complemented ideals in the fourier algebra of a locally compact group. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 128(2), pp. 445–451. doi:10.2307/119909

Invariantly complemented subspaces of dual a left Banach G module

Ali Ghaffari [†] **, Iman Amani and Feridoun Habibian**

Department of Mathematics, Semnan University, Semnan, Iran
Received: 7 May 2024 Accepted: 26 May 2026

Communicated by: Amir Hossain Sanatpour

Abstract: Let G be a locally compact topological group, and let A be a left Banach G-module. Our purpose, among the other things, is to study certain weak*-closed subspaces of A^* to consider when their weak*-closed subspaces are the range of a bounded projection on A^* which commutes with translations and convolutions. One of the main results of this paper implies that a locally compact group G is amenable if and only if whenever S is a weak*-closed translation invariant complemented subspace of $L^\infty(G)$, S is the range of a projection on $L^\infty(G)$ commuting with convolutions.

Keywords: Locally compact group, Group algebras, Projection, Complemented, Amenability, Compact operators, Translation invariant subspaces.

[†]Corresponding author.
E-mail addresses: aghaffari@semnan.ac.ir (A. Ghaffari), imanamani7070@gmail.com (I. Amanii), fhabibian@semnan.ac.ir (F. Habibian).