مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۲۹–۴۹

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.49403.2368

حل مسئله FBVP در فضاهای باناخ: تحلیل وجود، یکتایی و خطای تقریب جواب

جواد شکری [۱]

دانشگاه ارومیه، دانشکده علوم، گروه ریاضی، ص. پستی ۱۶۵.

دبیر مسئول: عبدالرحمن رازانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۰۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۱۹

چکیده: در این مقاله، معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم با شرایط مرزی(FBVP[a]) به‌صورت معادله انتگرال ولترا–فردهلم(VFIE[b]) بازنویسی شده است. وجود، یکتایی و همگرایی جواب مسئله را در چارچوب VFIE با استفاده از روش پیکارد، قضیه نقطه ثابت باناخ و نامساوی شوارتز مورد بررسی قرار می‌گیرد و همچنین در ادامه، قضیه تقریب خطای جواب عددی مورد اثبات قرار می‌گردد. در این مطالعه، عملکرد روش تاو در حل مسائل FBVP با استفاده از توابع پایه چبیشف بررسی می‌شود. فرمول‌بندی معادل جبری این مسائل با بهره‌گیری از رویکرد ماتریس عملیاتی تاو توسعه داده شده است. آزمایش‌های عددی بر روی مسائل خطی و غیرخطی FBVP با استفاده از روش تاو، کاهش نمایی خطاها را نشان می‌دهد. نتایج عددی، شامل مقایسه با نتایج موجود برای مسائل مشابه، دقت بالای روش پیشنهادی تاو را به‌خوبی نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: فضاهای باناخ، قضیه نقطه ثابت، مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم، روش تاو، معادله ولترا–فردهلم.

رده‌بندی ریاضی: 65L10; 34B05; 46E20; 46B25.

[a] Fourth-order differential equation with boundary condition
[b] Volterra-Fredholm integral equation

۱ مقدمه

در سال ۱۹۳۸، لانچوس [۱۱] یک اصل بنیادی را معرفی کرد که هدف آن نمایش کاربرد چندجمله‌ای‌های چبیشف در بسط‌های متناهی جهت حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب چندجمله‌ای بود. عبارت اختلال در قالب چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب آزاد که به آن‌ها پارامترهای تاو گفته می‌شود، نمایش داده می‌شود (ر.ک. اورتیز [۱۹]).

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(J. Shokri) j.shokri@urmia.ac.ir

در سال‌های اخیر، روش تاو به‌طور گسترده‌ای به کار گرفته شده و در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته است؛ برای نمونه، در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) می‌توان به مطالعات [۱، ۱۵، ۱۶، ۲۲، ۲۶] و در زمینه حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (ODEs) به منابع [۱۴، ۱۷] مراجعه کرد. در مجموعه‌ای از مقالات از جمله [۲، ۳، ۱۸، ۲۰، ۲۷]، نقش چندجمله‌ای‌های لژاندر و چبیشف و کارایی عددی آن‌ها در حل مسائل ODE و ODE تحلیل شده است.

در حوزه تحلیل عددی، دسته‌ای از مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم (FBVPs) که در علوم و مهندسی کاربرد فراوانی دارند، یا به‌صورت تحلیلی و یا عددی بررسی می‌شوند [۴، ۹، ۲۹]. در این راستا، پژوهشگران متعددی تلاش کرده‌اند تا با بهره‌گیری از روش‌هایی چون تفاضل محدود، کمترین مربعات، سینک-گالرکین و سایر روش‌های مبتنی بر توابع اسپلاین چندجمله‌ای و غیرچندجمله‌ای، مسائل (FBVP) را با دقت بالا و به‌صورت مؤثر حل نمایند [۸، ۲۱].

مطالعه حاضر به بررسی خمش یک صفحه مستطیلی بلند و به‌طور یکنواخت بارگذاری‌شده می‌پردازد که بر روی کل سطح خود توسط یک بستر الاستیک پشتیبانی شده و لبه‌های آن به‌صورت صلب مهار شده‌اند. در هر نقطه، تغییر شکل عمودی ϕ از سیستم زیر پیروی می‌کند:

$$\begin{aligned} D\frac{d^4\phi}{dx^4} &= q - K\phi \\ \phi(0) = \phi(l) &= \phi'(0) = \phi'(l) = 0, \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

که در آن D، q و K به‌ترتیب سختی خمشی صفحه، شدت بار وارده و عکس‌العمل بستر را نشان می‌دهند. شکل کلی ریاضی این سیستم به‌صورت مسئله مقدار مرزی زیر قابل بیان است:

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} + p(x)\phi = q(x), \qquad x \in I = [a, b], \tag{۲.۱}$$

همراه با شرایط مرزی دیریکله:

$$\phi(a) = \alpha_1, \qquad \phi(b) = \alpha_2,$$

و شرایط مرزی نویمن:

$$\phi'(a) = \beta_1, \qquad \phi'(b) = \beta_2,$$

که در آن توابع $p(x)$ و $q(x)$ در دامنه خود پیوسته هستند. در این مقاله، وجود و یکتایی جواب و همچنین همگرایی جواب عددی مرتبط با این نوع مسائل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

از این‌رو، در این پژوهش بر آن شدیم تا روش تاو را با استفاده از پایه‌های چبیشف برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه چهارم مانند معادله (۲.۱) گسترش دهیم و با تبدیل معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم (۲.۱) به معادله انتگرال ولترا- فردهلم این شرایط را فراهم می‌کنیم تا با به‌کارگیری قضیه نقطه ثابت باناخ و روش پیکارد، وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل را مورد بررسی قرار دهیم. همچنین با استفاده از فرم انتگرالی مسئله، همگرایی و مرتبه خطای جواب تقریبی نیز در قالب یک قضیه نشان داده می‌شود.

ساختار مقاله به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، نحوه تبدیل مسئله (FBVP) به فرم معادله (VFIE) تشریح می‌گردد. وجود و یکتایی حل معادله (۲.۱) بنابر فرم معادله VFIE، در بخش ۳، بررسی می‌شود. در بخش ۴، روش عددی تاو بر اساس پایه‌های چبیشف برای حل مسئله (۲.۱) معرفی می‌گردد. بخش ۵ به تحلیل همگرایی و تقریب خطای روش عددی حاصل از فرم تبدیلی VFIE می‌پردازد. بخش ۶ شامل مثال‌های عددی متعددی همراه با حل دقیق آن‌ها است. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۷ ارائه خواهد شد.

۲ تبدیل مسئله FBVP به معادله VFIE

معادله مقداری مرزی (۲.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \phi^{(4)} = q(x) - p(x)\phi, \\ \phi(a) = \alpha_1, \ \phi(b) = \alpha_2, \\ \phi'(a) = \beta_1, \ \phi'(b) = \beta_2. \end{cases} \tag{۱.۲}$$

هدف ما این است که مسئله مقدار مرزی (۱.۲) را به‌صورت یک معادله انتگرالی خطی تبدیل کنیم. بنابراین، فرض می‌کنیم که $\phi^{(4)} = u(x)$ باشد. با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه داده‌شده روی بازه $[a, x]$، به رابطه زیر دست خواهیم یافت:

$$\phi^{(3)}(x) = \phi^{(3)}(a) + \int_a^x u(z)dz. \tag{۲.۲}$$

سپس به انتگرال‌گیری از دو طرف معادله فوق روی بازه $[a, x]$ ادامه می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= \phi''(a) + (x-a)\phi^{(۳)}(a) + \int_a^x \int_a^z u(\tau)d\tau dz \\ &= \phi''(a) + (x-a)\phi^{(۳)}(a) + \int_a^x (x-z)u(z)dz.\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

همچنین، با انتگرال‌گیری از (۳.۲) روی $[a, x]$ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \phi'(a) + (x-a)\phi''(a) + \tfrac{۱}{۲}(x-a)^۲\phi^{(۳)}(a) + \int_a^x \int_a^z (x-\tau)u(\tau)d\tau dz \\ &= \beta_۱ + (x-a)\phi''(a) + \tfrac{۱}{۲}(x-a)^۲\phi^{(۳)}(a) + \tfrac{۱}{۲}\int_a^x (x-z)^۲u(z)dz.\end{aligned} \tag{۴.۲}$$

اکنون با انتگرال‌گیری از دو طرف (۴.۲) به این نتیجه می‌رسیم:

$$\phi(x) = \phi(a) + \beta_۱(x-a) + \frac{۱}{۲}(x-a)^۲\phi''(a) + \frac{۱}{۶}(x-a)^۳\phi^{(۳)}(a) + \frac{۱}{۶}\int_a^x (x-z)^۳u(z)dz. \tag{۵.۲}$$

با جای‌گذاری $x = b$ در معادلات (۴.۲) و (۵.۲) و استفاده از شرایط مرزی، به ترتیب به روابط زیر می‌رسیم:

$$\beta_۲ = \beta_۱ + (b-a)\phi''(a) + \frac{۱}{۲}(b-a)^۲\phi^{(۳)}(a) + \frac{۱}{۲}\int_a^b (b-z)^۲u(z)dz, \tag{۶.۲}$$

و

$$\alpha_۲ = \alpha_۱ + \beta_۱(b-a) + \frac{۱}{۲}(b-a)^۲\phi''(a) + \frac{۱}{۶}(b-a)^۳\phi^{(۳)}(a) + \frac{۱}{۶}\int_a^b (b-z)^۳u(z)dz. \tag{۷.۲}$$

با حل مجموعه معادلات شامل (۶.۲) و (۷.۲)، می‌توانیم مقادیر $\phi''(a)$ و $\phi^{(۳)}(a)$ را به‌دست آوریم:

$$\phi''(a) = \left(\frac{-۴\beta_۱ - ۲\beta_۲}{b-a} + \frac{۶(\alpha_۲ - \alpha_۱)}{(b-a)^۲}\right) + \int_a^b \left(\frac{(b-z)^۲}{b-a} - \frac{(b-z)^۳}{(b-a)^۲}\right)u(z)dz \tag{۸.۲}$$

و

$$\phi^{(۳)}(a) = \frac{۶(\beta_۱ + \beta_۲)}{(b-a)^۲} - \frac{۱۲(\alpha_۲ - \alpha_۱)}{(b-a)^۳} + \int_a^b \left(\frac{-۳(b-z)^۲}{(b-a)^۲} + \frac{۲(b-z)^۳}{(b-a)^۳}\right)u(z)dz \tag{۹.۲}$$

حال با جای‌گذاری $\phi''(a)$ از معادله (۸.۲) و $\phi^{(۳)}(a)$ از معادله (۹.۲) در معادله (۵.۲)، به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\phi(x) =& \Big[\alpha_۱ + \beta_۱(x-a) + \left(\frac{-۲\beta_۱ - \beta_۲}{b-a} + \frac{۳(\alpha_۲ - \alpha_۱)}{(b-a)^۲}\right)(x-a)^۲ \\ &+ \left(\frac{(\beta_۱ + \beta_۲)}{(b-a)^۲} - \frac{۲(\alpha_۲ - \alpha_۱)}{(b-a)^۳}\right)(x-a)^۳\Big] \\ &+ \int_a^b \Big[\frac{۱}{۲}(x-a)^۲\left(\frac{(b-z)^۲}{b-a} - \frac{(b-z)^۳}{(b-a)^۲}\right) \\ &\quad + \frac{۱}{۶}(x-a)^۳\left(\frac{-۳(b-z)^۲}{(b-a)^۲} + \frac{۲(b-z)^۳}{(b-a)^۳}\right)\Big]u(z)dz \\ &+ \int_a^x \frac{۱}{۶}(x-z)^۳u(z)dz.\end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

با قرار دادن معادل (۱۰.۲) در معادل (۱.۲)، در نهایت به معادله انتگرالی خطی زیر می‌رسیم:

$$u(x) = \hat{p}(x) + \int_a^b H_1(x,z)u(z)dz + \int_a^x H_2(x,z)u(z)dz, \qquad (11.2)$$

که در آن:

$$\hat{p}(x) = -p(x)\Big[\alpha_1 + \beta_1(x-a) + \Big(\frac{-2\beta_1-\beta_2}{b-a} + \frac{3(\alpha_2-\alpha_1)}{(b-a)^2}\Big)(x-a)^2 + \Big(\frac{(\beta_1+\beta_2)}{(b-a)^2} - \frac{2(\alpha_2-\alpha_1)}{(b-a)^3}\Big)(x-a)^3\Big] + q(x),$$

$$H_1(x,z) = -p(x)\Big[\frac{1}{2}(x-a)^2\Big(\frac{(b-z)^2}{b-a} - \frac{(b-z)^3}{(b-a)^2}\Big) + \frac{1}{6}(x-a)^3\Big(\frac{-3(b-z)^2}{(b-a)^2} + \frac{2(b-z)^3}{(b-a)^3}\Big)\Big],$$

$$H_2(x,z) = -\frac{1}{6}p(x)(x-z)^3.$$

۳ بحث وجود و یکتایی جواب

در ادامه بحث، برای مطالعه وجود و یکتایی حل معادل (۱۱.۲)، شرایط زیر لازم است:

(i) فرض کنید که تابع $\phi(x,z)$ که مشتقات جزئی آن نسبت به متغیرهای x و t در فضای $L_2(I)\times L_2(I)$ پیوسته است و نُرم آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\psi(x,z)\| = \max_{a\le x,t\le b}\Big\{\int_a^t |\psi(x,\tau)|^2 d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) برای تابع $q(x)$ که مشتق اول آن $q'(x)$ در $C[a,b]$ پیوسته است، نُرم آن به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\|p(x)\| = \max_{a\le x\le b}\Big\{\int_a^x |p(\tau)|^2\, d\tau\Big\}^{\frac{1}{2}} = N,$$

که در آن N یک ثابت است.

قضیه ۱.۳. با فرض اینکه شرایط (i) و (ii) برآورده شوند، معادل (۱۱.۲) دارای یک حل منحصر به فرد $u(x)$ در فضای باناخ $C[a,b]$ است، با شرط $L<\frac{1}{2}$؛ $L = Max\{L_1 = \|H_1(x,z)\|, L_2 = \|H_2(x,z)\|\}$.

اثبات. ما می‌خواهیم وجود و یکتایی حل معادل (۱۱.۲) را از دو روش اثبات کنیم. ابتدا با استفاده از روش پیکارد و سپس با استفاده از قضیه نقطه ثابت باناخ.

روش اول: روش پیکارد
حل معادل (۱۱.۲) را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

که در آن:

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} R_i(x)\ ; \quad x\in I=[a,b], \quad n = 1,2,\dots$$

که در آن $R_i(x),\ i = 1,2,\dots,n$ توابع پیوسته به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} R_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x), \\ R_0(x) = p(x). \end{cases} \qquad (1.3)$$

برای کامل کردن بحث، نیاز داریم نشان دهیم که سری $\sum_{i=0}^{n} R_i(x)$ به‌صورت یکنواخت به یک تابع جواب پیوسته $u(x)$ همگرا است. برای این منظور، دنباله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_n(x) = \hat{p}(x) + \int_a^b H_1(x,z)u_{n-1}(z)dz + \int_a^x H_2(x,z)u_{n-1}(z)dz\,; \quad u_0(x) = p(x).$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} u_n(x) - u_{n-1}(x) = &\int_a^b H_1(x,z)(u_{n-1}(z) - u_{n-2}(z))dz \\ &+ \int_a^x H_2(x,z)(u_{n-1}(z) - u_{n-2}(z))dz, \end{aligned}$$

سپس از (۱.۳) می‌توان نوشت:

$$R_n(x) = \int_a^b H_1(x,z)R_{n-1}(z))dz + \int_a^x H_2(x,z)R_{n-1}(z)dz,$$

و از خواص نُرم، داریم:

$$\|R_n(x)\| \le \left\| \int_a^b H_1(x,z)R_{n-1}(x))dz \right\| + \left\| \int_a^x H_2(x,z)R_{n-1}(x)dz \right\|. \tag{۲.۳}$$

با فرض اینکه $n = 1$ در (۲.۳)، با استفاده از نابرابری کوشی–شوارتز و شرایط $(i) - (ii)$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \|R_1(x)\| &\le \left\| \int_a^b H_1(x,z)R_0(z)dz \right\| + \left\| \int_a^x H_2(x,z)R_0(z)dz \right\| \\ &\le \left\| \int_a^b |H_1(x,z)|\,|R_0(z)|dz \right\| + \left\| \int_a^x |H_2(x,z)|\,|R_0(z)|dz \right\| \\ &\le \left\| \left\{ \int_a^b |H_1(x,z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b |R_0(z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \right\| \\ &\quad + \left\| \left\{ \int_a^x |H_2(x,z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^x |R_0(z)|^2 dz \right\}^{\frac{1}{2}} \right\| \\ &\le \|H_1(x,z)\|\,\|R_0(x)\| + \|H_2(x,z)\|\,\|R_0(x)\| \le (2L)N. \end{aligned}$$

سپس با استفاده از استقراء، به‌دست می‌آوریم:

$$\|R_n(x)\| \le (2L)^n N\,; \quad 2L \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که دنباله $u_n(x)$ به یک جواب مانند $u(x)$ همگرا می‌شود. به عبارت دیگر، داریم

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(x). \tag{۳.۳}$$

حال می‌خواهیم یکتایی جواب $u(x)$ را در (۳.۳) برای معادلهٔ (۱۱.۲) بررسی کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم که $v(x)$ یک جواب دیگر از معادلهٔ (۱۱.۲) باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$u(x) - v(x) = \int_a^b H_1(x,z)[u(z) - v(z)]dz + \int_a^x H_2(x,z)[u(z) - v(z)]dz,$$

سپس با اعمال شرایط $(i)-(ii)$ و استفاده از نامساوی کوشی–شوارتز، به‌دست می‌آوریم:

(۴.۳)

$$\begin{aligned}\|u(x)-v(x)\| &\le \Big\|\int_a^b H_1(x,z)[u(z)-v(z)]dz\Big\| + \Big\|\int_a^x H_2(x,z)[u(z)-v(z)]dz\Big\| \\ &\le \Big\|\int_a^b |H_1(x,z)|\,|u(z)-v(z)|dz\Big\| + \Big\|\int_a^x |H_2(x,z)|\,|u(z)-v(z)|dz\Big\| \\ &\le \Big\|\Big\{\int_a^b |H_1(x,z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\{\int_a^b |u(z)-v(z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\| \\ &\quad + \Big\|\Big\{\int_a^x |H_2(x,z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\{\int_a^x |u(z)-v(z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\| \\ &\le L_1\|u(x)-v(x)\| + L_2\|u(x)-v(x)\| \le 2L\|u(x)-v(x)\|.\end{aligned}$$

معادل (۴.۳) بدین معنی است که:

$$(1-2L)\|u(x)-v(x)\| \le 0,$$

چون $0 < (1-2L) < 1$، بنابراین $u(x)=v(x)$، که نشان‌دهنده یکتایی حل معادل (۱۱.۲) است.

روش دوم: قضیه نقطه ثابت باناخ

ما می‌خواهیم دوباره وجود جواب معادل (۱۱.۲) را با استفاده از قضیه نقطه ثابت باناخ بررسی کنیم. برای این منظور، معادل (۱۱.۲) را به‌صورت اپراتور انتگرالی به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(\overline{T}u)(x) = \hat{p}(x) + (Tu)(x)\,; \quad (Tu)(x) = \int_a^b H_1(x,z)u(z)dz + \int_a^x H_2(x,z)u(z)dz. \quad (۵.۳)$$

برای رسیدن به نتیجه مطلوب، باید نرمال بودن و پیوستگی اپراتور انتگرالی (۱۱.۲) را بررسی کنیم.

(الف) در جستجوی نرمال بودن، از معادل (۵.۳) داریم:

$$\|(Tu)(x)\| = \Big\|\int_a^b H_1(x,z)u(z)dz + \int_a^x H_2(x,z)u(z)dz\Big\|,$$

با اعمال شرایط $(i)-(ii)$ و نابرابری کوشی–شوارتز، داریم:

$$\begin{aligned}\|(Tu)(x)\| &\le \Big\|\int_a^b H_1(x,z)u(z)dz\Big\| + \|\int_a^x H_2(x,z)u(z)dz\Big\| \\ &\le \Big\|\int_a^b |H_1(x,z)|\,|u(z)|dz\Big\| + \Big\|\int_a^x |H_2(x,z)|\,|u(z)|dz\Big\| \\ &\le \Big\|\Big\{\int_a^b |H_1(x,z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\{\int_a^b |u(z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\| \\ &\quad + \Big\|\Big\{\int_a^x |H_2(x,z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\{\int_a^x |u(z)|^2dz\Big\}^{\frac12}\Big\| \\ &\le L_2\|u(x)\| + L_2\|u(x)\| \le 2L\|u(x)\|\,; \quad 2L<1.\end{aligned}$$

بنابراین اپراتور انتگرالی T نرمال است و از شرط (i) نرمال بودن $\overline{T}$ استنتاج می‌شود.

(ب) در توصیف پیوستگی، فرض کنید که دو تابع $u_1(x)$ و $u_2(x)$ در فضای $C[a,b]$ در معادل (۵.۳) صدق کنند، بنابراین:

$$\begin{aligned}(\overline{T}u_1)(x) &= \hat{p}(x) + \int_a^b H_1(x,z)u_1(z)dz + \int_a^x H_2(x,z)u_1(z)dz \\ (\overline{T}u_2)(x) &= \hat{p}(x) + \int_a^b H_1(x,z)u_2(z)dz + \int_a^x H_2(x,z)u_2(z)dz,\end{aligned} \quad (۶.۳)$$

از معادل (۶.۳) به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\overline{T}[u_1(x)-u_2(x)]=\int_a^b H_1(x,z)[u_1(z)-u_2(z)]\,dz+\int_a^x H_2(x,z)[u_1(z)-u_2(z)]\,dz.$$

با اعمال شرایط (i) و (ii)، داریم:

$$\begin{aligned}\|\overline{T}[u_1(x)-u_2(x)]\| &\le L_1\Big\|\max_{a\le x\le b}\int_a^x |u_1(z)-u_2(z)|\,dz\Big\|+L_2\Big\|\max_{a\le x\le b}\int_a^x |u_1(z)-u_2(z)|\,dz\Big\|\\ &\le L\|u_1(x)-u_2(x)\|+L\|u_1(x)-u_2(x)\|=2L\|u_1(x)-u_2(x)\|.\end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که:

$$\|\overline{T}[u_1(x)-u_2(x)]\|\le\mathcal{L}\|u_1(x)-u_2(x)\|;\quad \mathcal{L}=2L<1. \tag{۷.۳}$$

نامساوی (۷.۳) نشان‌دهنده پیوستگی یکنواخت عملگر انتگرالی $\overline{T}$ است. بنابراین، عملگر $\overline{T}$ یک عملگر انقباضی است. در نتیجه، از قضیه نقطه ثابت باناخ، نتیجه می‌گیریم که یک نقطه ثابت یکتا $u(x)$ وجود دارد که جواب معادله ولترا–فردهلم (۱۱.۲) است. □

۴ روش تاو طیفی چبیشف

۱.۴ حالت خطی

این قسمت به حل عددی فرم خطی مسئله (۲.۱) با استفاده از روش تاو طیفی چبیشف اختصاص دارد. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم که $I=[0,1]$ باشد. در ضمن پیشنهاد می‌شود جهت مطالعه بیشتر چندجمله‌ای‌های چبیشف به منابع [۱، ۲۰] مراجعه شود.

در روش تاو طیفی چبیشف، به دنبال یافتن جوابی به فرم زیر هستیم:

$$\phi_N(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k\psi_k(x)=\underline{a}\underline{\psi}=\underline{a}\phi\underline{X}_x, \tag{۱.۴}$$

در اینجا، $\underline{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_N,0,\cdots)$، $\underline{X}_x=(1,x,x^2,\cdots)^T$ و $\underline{\psi}=(\psi_0(x),\psi_1(x),\cdots)^T$ هستند که در آن $x\in[0,1]$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد چبیشف نسبت به ضرب داخلی زیر می‌باشند:

$$<\psi_i(x),\psi_j(x)>_w=\int_0^1\psi_i(x)\psi_j(x)w(x)dx.\qquad w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$$

همچنین، ϕ ماتریس ضرایب پایین‌مثلثی چندجمله‌ای‌های چبیشف است و $\underline{\psi}=\phi\underline{X}_x$ تعریف می‌شود.

با استفاده از شرط تعامد $\underline{\psi}$، توابع $p(x)$ و $q(x)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$p_N(x)=\sum_{k=0}^{N}p_k\psi_k(x)=\underline{p}\phi\underline{X}_x,\quad p_k=\frac{<p(x),\psi_k(x)>_w}{<\psi_k(x),\psi_k(x)>_w},$$

$$q_N(x)=\sum_{k=0}^{N}q_k\psi_k(x)=\underline{q}\phi\underline{X}_x,\quad q_k=\frac{<q(x),\psi_k(x)>_w}{<\psi_k(x),\psi_k(x)>_w},$$

که در آن: $\underline{p}=(p_0,\cdots,p_N,0,\cdots)$ و $\underline{q}=(q_0,\cdots,q_N,0,\cdots)$ می‌باشند.

تقریب مشتق l–ام تابع ϕ نسبت به x برای $l=1,\cdots,4$، به‌صورت فرم ماتریسی زیر قابل بیان است:

$$\frac{d^l\phi_N}{dx^l}=\underline{a}\phi\Psi^l\underline{X}_x=\underline{a}\phi\Psi^l\phi^{-1}\underline{\psi}, \tag{۲.۴}$$

که در آن:

$$\Psi = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & \dots \\ ۱ & ۰ & ۰ & \dots \\ ۰ & ۲ & ۰ & \dots \\ ۰ & ۰ & ۳ & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

اکنون تاثیر ضرب متغیر x در ϕ_N را بررسی می‌کنیم:

$$x^k \phi_N(x) = \underline{a}\phi M^k \underline{X}_x, \tag{۳.۴}$$

که در آن:

$$M = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \dots \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & \dots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & \dots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix},$$

سپس خواهیم داشت:

$$p_N(x)\phi_N(x) = \underline{a}\phi p_N(M)\underline{X}_x = \underline{a}\phi p_N(M)\phi^{-۱}\underline{\psi}. \tag{۴.۴}$$

با جای‌گذاری معادلات (۲.۴) و (۴.۴) در معادله (۲.۱)، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\underline{a}\phi\Psi^l\phi^{-۱}\underline{\psi} + \underline{a}\phi p_N(M)\phi^{-۱}\underline{\psi} = \underline{q}\,\underline{\psi}. \tag{۵.۴}$$

اکنون شرایط دیریکله را در نظر می‌گیریم. از معادله (۲.۱)، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\underline{a}\phi\underline{X}_۰ = \alpha_۱, \quad \underline{a}\phi\underline{X}_۱ = \alpha_۲, \quad \underline{a}\phi\Psi\underline{X}_۰ = \beta_۱, \quad \underline{a}\phi\Psi\underline{X}_۱ = \beta_۲. \tag{۶.۴}$$

بنا به تعامد مجموعه $\{\psi_k(x)\}_{k=۰}^{N-۴}$، تصویرسازی معادله (۵.۴) روی مجموعه $\underline{\psi} = (\psi_۰(x), \psi_۱(x), \cdots)$، همراه با اعمال شرایط دیریکله معادله (۶.۴)، منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات خطی جبری برای ضرایب مجهول $\underline{a} = (a_۰, a_۱, \cdots, a_N, ۰, \cdots)$ می‌شود.

۲.۴ حالت غیرخطی

شکل غیرخطی معادله (۲.۱) از مرجع [۱۰] را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y^{(۴)} + p(x)yy' + r(x)H(y) = s(x), \quad x \in I = [a, b], \tag{۷.۴}$$

با شرایط مرزی دیریکله و نویمن که در معادله (۲.۱) تعریف شده‌اند.
بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد که تابع تحلیلی غیرخطی $H(y(x))$ را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$H(y(x)) \simeq \sum_{k=۰}^{N} \gamma_k y^k(x), \tag{۸.۴}$$

با در نظر گرفتن روش عددی پیشنهادی در بخش ۱.۴ برای معادله (۷.۴)، داریم:

$$y_N^{(۴)} = \underline{a}\phi\Psi^۴\phi^{-۱}\underline{\varphi}. \tag{۹.۴}$$

همچنین، طبق لم ۱ در مرجع [۷]، خواهیم داشت:

$$y_N^k(x) = \underline{a}\phi B^{k-۱}\underline{X}_x = \underline{a}\phi B^{k-۱}\phi^{-۱}\underline{\varphi} \tag{۱۰.۴}$$

که در آن B یک ماتریس بالامثلثی بی‌نهایت‌بعدی با ساختار زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} \underline{a}\phi_0 & \underline{a}\phi_1 & \underline{a}\phi_2 & \cdots \\ 0 & \underline{a}\phi_0 & \underline{a}\phi_1 & \cdots \\ 0 & 0 & \underline{a}\phi_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

که در آن $\phi_i = [\varphi_{i,j}]_{j=0}^{\infty}$ است.
برای نمایش ماتریسی عبارات $r_N(x)H(y_N)$ و $p_N(x)y_N y'_N$ با تاثیر ضرب متغیر x بر روی y_N به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$r_N(x)H(y_N) = \sum_{k=0}^{N} \gamma_k \underline{a}\phi B^{k-1} r_N(M)\phi^{-1}\underline{\varphi}, \tag{۱۱.۴}$$

$$p_N(x)y_N y'_N = \underline{a}\phi p_N(M)\big(\underline{X}_x \times (\underline{a}\phi\Psi\underline{X}_x)\big) = \underline{a}\phi p_N(M)\tilde{B}\phi^{-1}\underline{\varphi}, \tag{۱۲.۴}$$

که در آن $\tilde{B}$ نیز یک ماتریس بالا مثلثی بی‌نهایت‌بعدی با فرم زیر است :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \underline{a}\tilde{\phi}_0 & \underline{a}\tilde{\phi}_1 & \underline{a}\tilde{\phi}_2 & \cdots \\ 0 & \underline{a}\tilde{\phi}_0 & \underline{a}\tilde{\phi}_1 & \cdots \\ 0 & 0 & \underline{a}\tilde{\phi}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

که در آن $\tilde{\phi} = \phi\Psi$ و $\tilde{\phi}_i = [\tilde{\varphi}_{i,j}]_{j=0}^{\infty}$ می‌باشد.
با جایگذاری معادلات (۹.۴)، (۱۱.۴) و (۱۲.۴) در معادله (۷.۴)، داریم:

$$\underline{a}\phi\Psi^4\phi^{-1}\underline{\varphi} + \underline{a}\phi p_N(M)\tilde{B}\phi^{-1}\underline{\varphi} + \sum_{k=0}^{N}\gamma_k\underline{a}\phi B^{k-1}r_N(M)\phi^{-1}\underline{\varphi} = \underline{s}\underline{\varphi}. \tag{۱۳.۴}$$

با توجه به شرایط مرزی دیریکله و نویمن از معادله (۲.۱) و با بهره‌گیری از خاصیت متعامد بودن توابع $\underline{\varphi} = (\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots)$، می‌توان ضرایب ناشناخته $\underline{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_N, 0, \cdots)$ را یافت.

۵ تحلیل تقریب خطا

برای برآورد خطا، باید از لِم‌های اساسی زیر استفاده کنیم.

لم ۱.۵. [۵] فرض کنید که $H_w^m(\Omega)$ فضای سوبولف تمام توابع $\phi(\mathbf{x})$ بر روی $\Omega = (0,1)^p$ (که در آن $p = 1, 2$) است، به طوری که $\phi(\mathbf{x})$ و تمام مشتقات ضعیف آن تا مرتبه m عضو $L_w^2(\Omega)$ هستند. مجموعه $\mathbb{P}_N(\Omega)$ را به عنوان مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها بر روی Ω با درجه حداکثر N در نظر می‌گیریم. اپراتور P_N به عنوان تصویر نرمال از $L_w^2(\Omega)$ به فضای چندجمله‌ای‌های $\mathbb{P}_N(\Omega)$ تعریف شده است. خطای برش از سری چبیشف انتقال‌یافته در تقریب زیر برای هر $\phi \in H_w^m(\Omega)$ صدق می‌کند.

$$\|\phi - P_N\phi\|_{L_w^2(\Omega)} \le CN^{-m}|\phi|_{H_w^{m,N}(\Omega)}; \quad m \ge 1, \tag{۱.۵}$$

نیم‌نُرم $|\cdot|$ به‌صورت زیر توصیف می‌شود:

$$|\phi|_{H_w^{m,N}(\Omega)} = \left(\sum_{j=\min(m,N+1)}^{m}\sum_{i=1}^{p}||D_i^j\phi||_{L_w^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}.$$

معادل (۲.۱) را به شکل زیر با $I = [۰, ۱]$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \phi^{(۴)} + p(x)\phi = q(x), \\ \phi(۰) = \alpha_۱, \ \phi(۱) = \alpha_۲, \\ \phi'(۰) = \beta_۱, \ \phi'(۱) = \beta_۲. \end{cases} \tag{۲.۵}$$

با استفاده از رویه مشابهی که در بخش ۲ توضیح داده شده است، داریم:

$$\begin{aligned} \phi(x) = &\Big[\alpha_۱ + \beta_۱ x + \Big(-۲\beta_۱ - \beta_۲ + ۳(\alpha_۲ - \alpha_۱)\Big)x^۲ + \Big((\beta_۱ + \beta_۲) - ۲(\alpha_۲ - \alpha_۱)\Big)x^۳\Big] \\ &+ \int_۰^۱ \Big[\frac{۱}{۲}x^۲\Big(-۲(۱-z)^۲ - (۱-z)^۳\Big) + \frac{۱}{۶}x^۳\Big(۳(۱-z)^۲ + ۲(۱-z)^۳\Big)\Big]u(z)dz \\ &+ \int_۰^x \frac{۱}{۶}(x-z)^۳ u(z)dz \end{aligned} \tag{۳.۵}$$

و

$$u(x) = \hat{p}(x) + \int_۰^۱ H_۱(x,z)u(z)dz + \int_۰^x H_۲(x,z)u(z)dz. \tag{۴.۵}$$

ادامه بحث را با برآورد خطا در نُرم وزن‌دار $L^۲_w$ برای روش عددی تاو، که در بخش قبلی توضیح داده شد، پیش می‌گیریم.

قضیه **۲.۵**. فرض کنید که $\phi(x)$ جواب دقیق برای $FBVP$ (۲.۱) است و فرض کنید که $\phi(x)$ به اندازه کافی هموار است به طوری که مسئله خوش‌وضع باشد. فرض کنید که $\phi_N(x)$ تقریب تاو چبیشف طیفی، در معادل (۱.۴)، برای $\phi(x)$ است. اگر $\phi(x) \in H^m_w(۰, ۱)$، آنگاه برای $m \geq ۱$،

$$\|\phi - \phi_N\|_{L^۲_w(۰,۱)} \to ۰.$$

فرض می‌کنیم که N به اندازه کافی بزرگ است و C یک ثابت است که به N بستگی ندارد.

اثبات. مسئله BVP (۲.۱) را مشابه با (۲.۵) به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\phi^{(۴)} + p(x)\phi = q(x)\,, \qquad x \in I = [۰, ۱], \tag{۵.۵}$$

فرض کنید که $\phi^{(۴)}_N = u_N$. بر اساس نتیجه (۳.۵) که در بخش ۲ توضیح داده شده است، داریم:

$$\begin{aligned} \phi_N(x) = &\Big[\alpha_۱ + \beta_۱ x + \Big(-۲\beta_۱ - \beta_۲ + ۳(\alpha_۲ - \alpha_۱)\Big)x^۲ + \Big((\beta_۱ + \beta_۲) - ۲(\alpha_۲ - \alpha_۱)\Big)x^۳\Big] \\ &+ \int_۰^۱ \Big[\frac{۱}{۲}x^۲\Big(-۲(۱-z)^۲ - (۱-z)^۳\Big) + \frac{۱}{۶}x^۳\Big(۳(۱-z)^۲ + ۲(۱-z)^۳\Big)\Big]u_N(z)dz \\ &+ \int_۰^x \frac{۱}{۶}(x-z)^۳ u_N(z)dz \end{aligned} \tag{۶.۵}$$

و

$$u_N(x) = \hat{p}_N(x) + \int_۰^۱ H_{۱,N}(x,z)u_N(z)dz + \int_۰^x H_{۲,N}(x,z)u_N(z)dz. \tag{۷.۵}$$

با کم کردن معادل (۷.۵) از معادل (۴.۵) داریم:

$$E(x) = \int_۰^۱ H_۱(x,z)E(z)dz + \int_۰^x H_۲(x,z)E(z)dz + Er_۱ + Er_۲ + Er_۳ \tag{۸.۵}$$

که در آن $E(x) = u(x) - u_N(x)$، و

$$Er_۱ = \hat{p}(x) - \hat{p}_N(x),$$

$$Er_۲ = \int_۰^۱ (H_۱(x,z) - H_{۱,N}(x,z))u_N(z)dz,$$

$$Er_۳ = \int_۰^x (H_۲(x,z) - H_{۲,N}(x,z))u_N(z)dz.$$

با استفاده از نامساوی گرونووال [۶] و نامساوی هاردی [۱۲]، به ازای $p = q = ۲$ و $w_۱(x) = w_۲(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-(۲x-۱)^۲}}$، برای معادل (۸.۵) داریم:

$$\|E\|_{L^۲_w(۰,۱)} \leq C\|Er_۱ + Er_۲ + Er_۳\|_{L^۲_w(۰,۱)}. \tag{۹.۵}$$

با استفاده از نامساوی (۱.۵) از لم ۱.۵، نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\|Er_۱\|_{L^۲_w(۰,۱)} \leq CN^{-m}|\hat{p}|_{H^{m,N}_w(۰,۱)}. \tag{۱۰.۵}$$

این نتیجه از نامساوی هاردی و نامساوی (۱.۵) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\|Er_۲\|_{L^۲_w(۰,۱)} &\leq \|H_۱ - H_{۱,N}\|_{L^۲_w(۰,۱)}\|u_N\|_{L^۲_w(۰,۱)} \\ &\leq CN^{-m}|H_۱|_{H^{m,N}_w(۰,۱)}\big(\|u\|_{L^۲_w(۰,۱)} + \|E\|_{L^۲_w(۰,۱)}\big),\end{aligned} \tag{۱۱.۵}$$

و به طور مشابه:

$$\begin{aligned}\|Er_۳\|_{L^۲_w(۰,۱)} &\leq \|H_۲ - H_{۲,N}\|_{L^۲_w(۰,۱)}\|u_N\|_{L^۲_w(۰,۱)} \\ &\leq CN^{-m}|H_۲|_{H^{m,N}_w(۰,۱)}\big(\|u\|_{L^۲_w(۰,۱)} + \|E\|_{L^۲_w(۰,۱)}\big).\end{aligned} \tag{۱۲.۵}$$

در نهایت، از نامساوی‌های (۹.۵) تا (۱۲.۵) و یادآوری اینکه $\phi^{(۴)}_N = u_N$، نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\|\phi - \phi_N\|_{L^۲_w(۰,۱)} \leq\ & CN^{-m}|p|_{H^{m,N}_w(۰,۱)} \\ &+ CN^{-m}|H_۱|_{H^{m,N}_w(۰,۱)}\left(\|\phi^{(۴)}\|_{L^۲_w(۰,۱)} + CN^{-m}|\phi^{(۴)}|_{H^{m,N}_w(۰,۱)}\right) \\ &+ CN^{-m}|H_۲|_{H^{m,N}_w(۰,۱)}\left(\|\phi^{(۴)}\|_{L^۲_w(۰,۱)} + CN^{-m}|\phi^{(۴)}|_{H^{m,N}_w(۰,۱)}\right),\end{aligned}$$

اکنون، زمانی که $N \to \infty$، همگرایی تقریب جواب استنتاج می‌شود. □

۶ نتایج عددی

برای نشان دادن کارایی روش عددی پیشنهادی در بخش ۴، در این بخش سه مثال عددی را بررسی می‌کنیم. تمام محاسبات با استفاده از نرم‌افزار مَتمَتیکا انجام شده است. برای تحلیل رفتار خطا، از نُرم وزن‌دار $L^۲_w$ به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\|\phi - \phi_N\|_{L^۲_w(a,b)} = \|e\|_{L^۲_w(a,b)} = \left(\int_a^b |e|^۲ w(x)dx\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

که در آن $\phi_N(x)$ تقریب $\phi(x)$، جواب دقیق معادله، است که با استفاده از روش پیشنهادی در بخش ۴ به‌دست آمده است.

مثال ۱.۶. مسئلهٔ *FBVP* از [۱۳، ۲۳، ۲۵، ۳۰] به‌صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \phi^{(۴)} + x\phi = -(۸ + ۷x + x^۳)e^x, \quad x \in [۰, ۱], \\ \phi(۰) = \phi(۱) = ۰, \\ \phi'(۰) = ۱, \ \phi'(۱) = -e, \end{cases} \tag{۱.۶}$$

که در آن، جواب دقیق به‌صورت زیر است:

$$\phi(x) = x(-x + ۱)e^x.$$

ما در این مثال روش عددی پیشنهادی بخش ۴ را برای این مثال به ازای $N = ۵$ توصیف می‌کنیم: جواب تقریبی $\phi_N(x) = \sum_{j=۰}^{N} a_k\psi_j(۲x - ۱)$ که در آن $\psi_j(x)$ها چندجمله‌ایهای متعامد چبیشف می‌باشند. حال با جایگذاری $\phi_N(x)$ در معادله دیفرانسیل (۲.۶) و تصویر $\psi_j(x)$ها به صورت ضرب داخلی بر جملات معادله مذکور یک دستگاه دو معادله با ۶ مجهول در زیر ظاهر می‌شود که در آن تابع وزن w_j به صورت $w_j = \frac{\pi}{۲N}$, $j = ۲, \ldots, N$ و $w_۱ = w_{N+۱} = \frac{\pi}{N}$.

$$\sum_{j=۱}^{N+۱} (\phi_N^{(۴)}(x_j) + x_j\phi_N(x_j) - g(x_j))(\psi_{k-۱}(۲x - ۱)w_j = ۰ \ , \ k = ۱, ۲,$$

که در آن $g(x) = -(۸ + ۷x + x^۳)e^x$ و $x_{j+۱} = (۱ - \cos(\frac{j\pi}{N}))/۲, j = ۰, \ldots, N$، ریشه‌های چندجمله‌ایهای چبیشف می‌باشند. در ادامه با اعمال شرایط اولیه مسئله برای جواب تقریبی $\phi_N(x)$، ۴ معادله با ۶ مجهول ظاهر می‌گردد، که در نهایت به یک دستگاه معادلات خطی با ۶ معادله و ۶ مجهول $a_۰, a_۱, \ldots, a_۵$ به فرم زیر دست خواهیم یافت:

$$\begin{cases} ۱٫۲۵۶۶۴a_۰ + ۰٫۸۶۳۹۳۸a_۱ + ۰٫۴۷۱۲۳۹a_۲ + ۰٫۴۷۱۲۳۹a_۳ + ۷۷۲۱٫۲۵a_۴ + ۰٫۴۷۱۲۳۹a_۵ = -۵۹٫۴۶۵۹ \\ ۰٫۸۶۳۹۳۸a_۰ + ۰٫۸۶۳۹۳۸a_۱ + ۰٫۶۶۷۵۸۸a_۲ + ۰٫۴۷۱۲۳۹a_۳ + ۰٫۴۷۱۲۳۹a_۴ + ۵۳۰۸۰٫۸a_۵ = -۳۰٫۳۰۸۹ \\ a_۰ - a_۱ + a_۲ - a_۳ + a_۴ - a_۵ = ۰ \\ a_۰ + a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ = ۰ \\ ۲a_۱ - ۸a_۲ + ۱۸a_۳ - ۳۲a_۴ + ۵۰a_۵ = ۱ \\ ۲a_۱ + ۸a_۲ + ۱۸a_۳ + ۳۲a_۴ + ۵۰a_۵ = -e \end{cases}$$

از حل دستگاه فوق ضرایب مجهول به صورت زیر حاصل می‌گردند:

$$a_۰ = ۰٫۲۰۹۲۱۵, a_۱ = ۰٫۰۵۲۵۵۱۹, a_۲ = -۰٫۲۰۱۴۸۹, a_۳ = -۰٫۰۵۱۹۷۹۷,$$
$$a_۴ = -۰٫۰۰۷۷۲۶۰۱, a_۵ = -۰٫۰۰۰۵۷۲۱۹۲,$$

که با جایگذاری این ضرایب در $\phi_N(x)$ جواب تقریبی مسئلهٔ (۲.۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

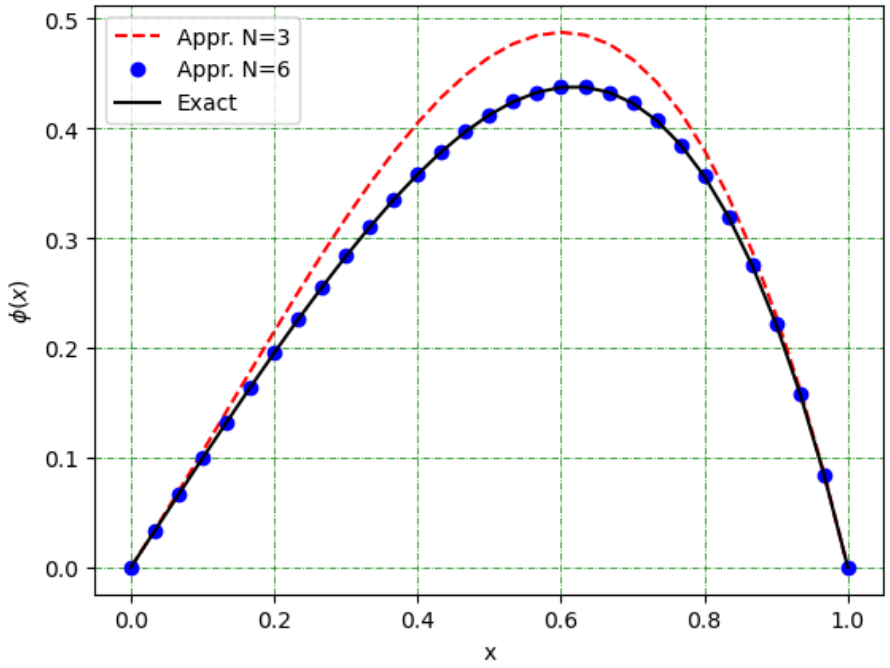
$$\phi_N(x) = -۳٫۴۶۹۴۵ \times ۱۰^{-۱۷} + x - ۰٫۱۲۴۱۶۶x^۲ - ۰٫۳۲۶۳۴۷x^۳ - ۰٫۲۵۶۵۲۴x^۴ - ۰٫۲۹۲۹۶۲x^۵$$

جدول ۱ مقادیر خطای $\|e\|_{L_w^۲(a,b)}$ را برای مقادیر مختلف N که با استفاده از روند پیشنهادی در بخش ۴ به‌دست آمده است، نشان می‌دهد. این جدول همچنین نتایج مطالعات [۱۳، ۲۳، ۲۵، ۳۰] را نیز ارجاع می‌دهد.

N	خطا-$L_w^۲(۰, ۱)$	زمان اجرا(ثانیه)	N	خطا-$L_w^۲(۰, ۱)$	زمان اجرا(ثانیه)
۳	$۳٫۳۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۵۵۹	۸	$۸٫۱۱ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۰۸۲۰
۴	$۲٫۶۳ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۰۵۸۵	۹	$۱٫۷۳ \times ۱۰^{-۹}$	۰٫۱۲۳۹
۵	$۲٫۰۳ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۱۱۸۰	۱۰	$۳٫۸۰ \times ۱۰^{-۱۱}$	۰٫۱۳۰۶
۶	$۴٫۱۶ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۰۷۳۹	۱۱	$۸٫۰۴ \times ۱۰^{-۱۳}$	۰٫۱۷۹۶
۷	$۴٫۹۵ \times ۱۰^{-۶}$	۰٫۰۷۲۰	۱۲	$۱٫۶۱ \times ۱۰^{-۱۴}$	۰٫۱۶۶۹
نتایج مراجع:	[۱۳] $۳٫۷۲ \times ۱۰^{-۱۱}$	[۲۳] $۱٫۴۲ \times ۱۰^{-۱۱}$		[۲۵] $۵٫۳۷ \times ۱۰^{-۶}$	[۳۰] $۴٫۹۶ \times ۱۰^{-۸}$

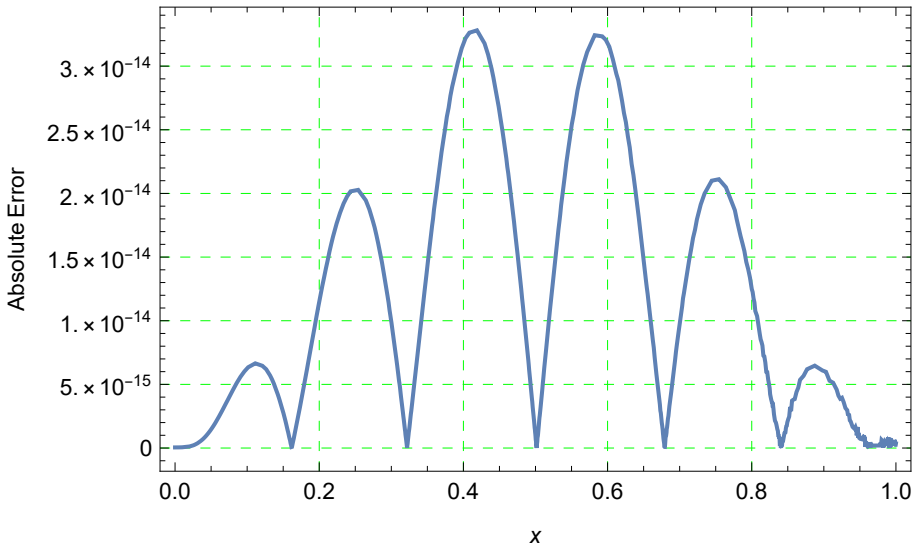
جدول ۱. خطاها برای مثال ۱.۶.

در ادامه نمودار مقایسه جواب دقیق مسئله مربوط به مثال ۱.۶ با جواب تقریبی به‌دست آمده آن از روش پیشنهادی، به ازای دو مقدار مختلف N، آورده می‌شود.



نمودار مقایسه‌ای مثال ۱.۶: مقایسه جواب دقیق با جواب تقریبی به ازای $N = ۳$ و $N = ۶$.

نمودار خطای قدرمطلق جواب تقریبی مسئله مربوط به مثال ۱.۶ در زیر ملاحظه می‌شود.



نمودار خطای مثال ۱.۶ به ازای $N = ۱۲$.

مثال **۲.۶**. مسئلهٔ $FBVP$ [۲۳] را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \phi^{(۴)} - \phi = -۸x\cos x - ۱۲\sin x, \quad x \in [۰, ۱], \\ \phi(۰) = \phi(۱) = ۰, \\ \phi'(۰) = -۱, \ \ \phi'(۱) = ۲\sin ۱, \end{cases} \tag{۲.۶}$$

که در آن، جواب دقیق به‌صورت زیر است:

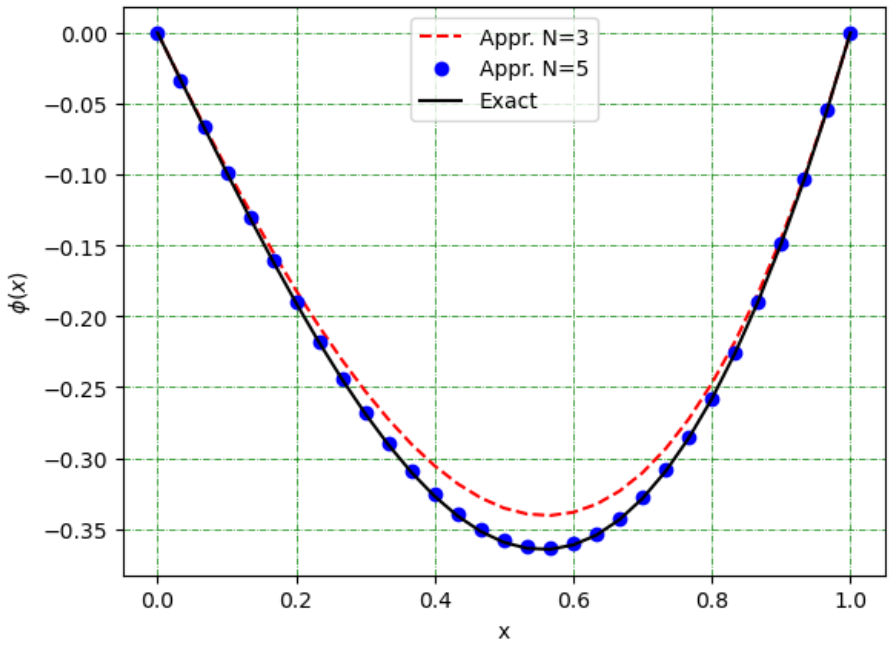
$$\phi(x) = (x^{۲} - ۱)\sin x.$$

در [۲۳] از روش‌های اسپلاین درجه پنج برای حل این مسئله استفاده شده است. بر اساس جدول ۲، خطاهای حاصل توسط روش تاو در بخش ۴ به‌طور قابل توجهی کمتر از نتایج یافت شده در [۲۳] هستند.

N	خطا-$L_w^2(0,1)$	زمان اجرا(ثانیه)	N	خطا-$L_w^2(0,1)$	زمان اجرا(ثانیه)
۳	$۱٫۵۴ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۴۶۹	۸	$۳٫۹۶ \times ۱۰^{-۸}$	۰٫۱۱۷۶
۴	$۱٫۰۹ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۰۴۹۰	۹	$۶٫۰۰ \times ۱۰^{-۱۰}$	۰٫۱۲۳۸
۵	$۷٫۸۴ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۰۷۰۹	۱۰	$۱٫۸۹ \times ۱۰^{-۱۱}$	۰٫۱۵۸۵
۶	$۱٫۹۷ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۰۸۱۹	۱۱	$۲٫۷۰ \times ۱۰^{-۱۳}$	۰٫۱۷۹۷
۷	$۱٫۷۸ \times ۱۰^{-۶}$	۰٫۰۹۳۸	۱۲	$۸٫۱۲ \times ۱۰^{-۱۵}$	۰٫۲۲۴۸
نتایج مراجع:		$۱٫۴۱۷ \times ۱۰^{-۱۱}$[۲۳]			

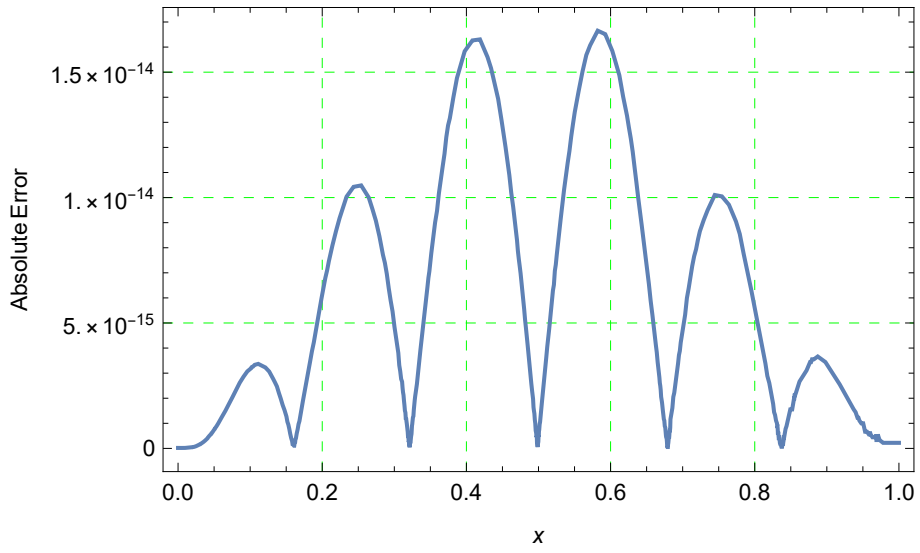
جدول ۲. خطاها برای مثال ۲.۶.

نمودار مقایسه جواب دقیق مسئله مربوط به مثال ۲.۶ با جواب تقریبی به‌دست آمده آن از روش پیشنهادی، به ازای دو مقدار مختلف N، در ادامه ملاحظه می‌شود.



نمودار مقایسه‌ای مثال ۲.۶: مقایسه جواب دقیق با جواب تقریبی به ازای $N = ۳$ و $N = ۵$.

در ادامه نمودار خطای قدرمطلق جواب تقریبی مسئله مربوط به مثال ۲.۶ آورده می‌شود.



نمودار خطای مثال ۲.۶ به ازای $N = ۱۲$.

مثال **۳.۶**. مسئلهٔ $FBVP$ [۲۴] را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \phi^{(۴)} + ۴\phi = ۱, \quad x \in [-۱, ۱], \\ \phi(-۱) = \phi(۱) = ۰, \\ \phi'(-۱) = -\phi'(۱) = \frac{\sinh(۲)-\sin(۲)}{۴(\cos(۲)+\cosh(۲))}, \end{cases}$$

که جواب دقیق به‌صورت زیر است:

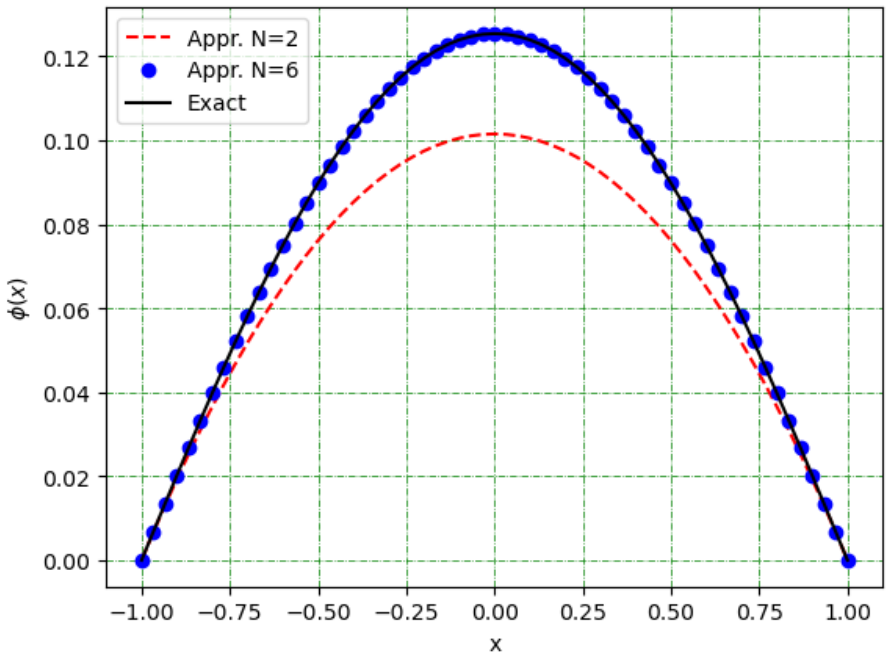
$$\phi(x) = ۰/۲۵ \left[۱ - ۲ \left(\frac{\sin(۱)\sinh(۱)\sin(x)\sinh(x) + \cos(۱)\cosh(۱)\cos(x)\cosh(x)}{\cos(۲)+\cosh(۲)} \right) \right].$$

مقادیر $\|e\|_{L^{۲}_{w}(a,b)}$ مربوط به برخی از مقادیر N در جدول ۳ نشان داده شده است.
زمانی که N مقادیر فرد ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱ را می‌گیرد، نتایج همانند نتایج اعداد قبلی باقی می‌ماند.

N	خطا-$L^{۲}_{w}(۰, ۱)$	زمان اجرا(ثانیه)	N	خطا-$L^{۲}_{w}(۰, ۱)$	زمان اجرا(ثانیه)
۴	$۱/۵۵ \times ۱۰^{-۳}$	۰/۰۵۰۹	۱۰	$۳/۸۷ \times ۱۰^{-۹}$	۰/۱۱۴۹
۶	$۲/۷۸ \times ۱۰^{-۵}$	۰/۰۶۶۹	۱۲	$۱/۹۱ \times ۱۰^{-۱۱}$	۰/۱۶۷۹
۸	$۶/۰۷ \times ۱۰^{-۷}$	۰/۰۹۳۸	۱۴	$۵/۵۴ \times ۱۰^{-۱۴}$	۰/۳۱۰۴
نتایج مراجع: [۲۴] $۶/۲۲ \times ۱۰^{-۶}$					

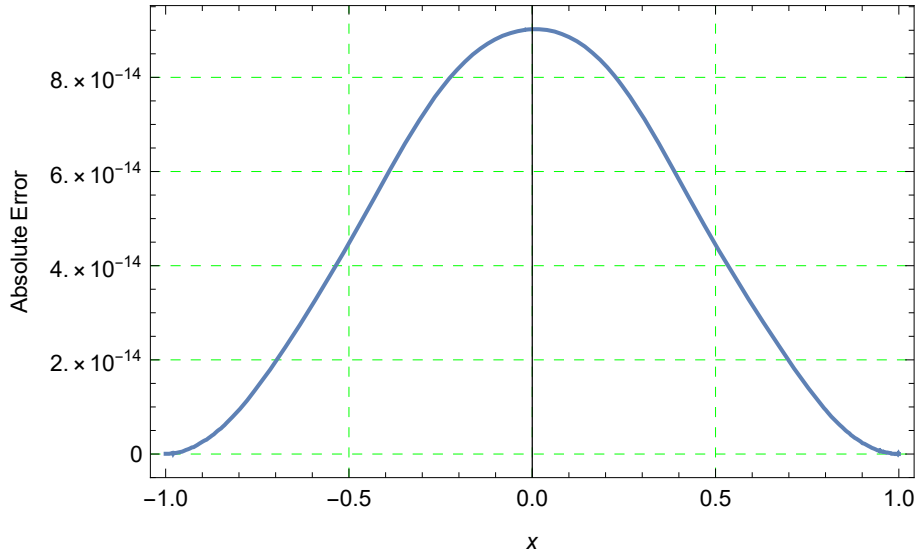
جدول ۳. خطاها برای مثال ۳.۶.

نمودار مقایسه جواب دقیق مسئله مربوط به مثال ۳.۶ با جواب تقریبی به‌دست آمده آن از روش پیشنهادی، به ازای دو مقدار مختلف N، در ادامه مشاهده می‌شود.



نمودار مقایسه‌ای مثال ۳.۶: مقایسه جواب دقیق با جواب تقریبی به ازای $N = ۲$ و $N = ۶$.

نمودار خطای قدرمطلق جواب تقریبی مسئله مربوط به مثال ۳.۶ در پایین آورده شده است.



نمودار خطای مثال ۳.۶ به ازای $N = ۱۲$.

مثال **۴.۶**. مسئلهٔ غیرخطی $FBVP$ از [۱۰، ۲۸] را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \phi^{(۴)} = ۶e^{-۴\phi} - ۱۲(۱+x)^{-۴}, & x \in [۰, ۱], \\ \phi(۰) = ۰, \ \ \phi(۱) = \ln ۲, \\ \phi'(۰) = ۱, \ \ \phi'(۱) = \frac{۱}{۲}, \end{cases}$$

که جواب دقیق به‌صورت زیر است:

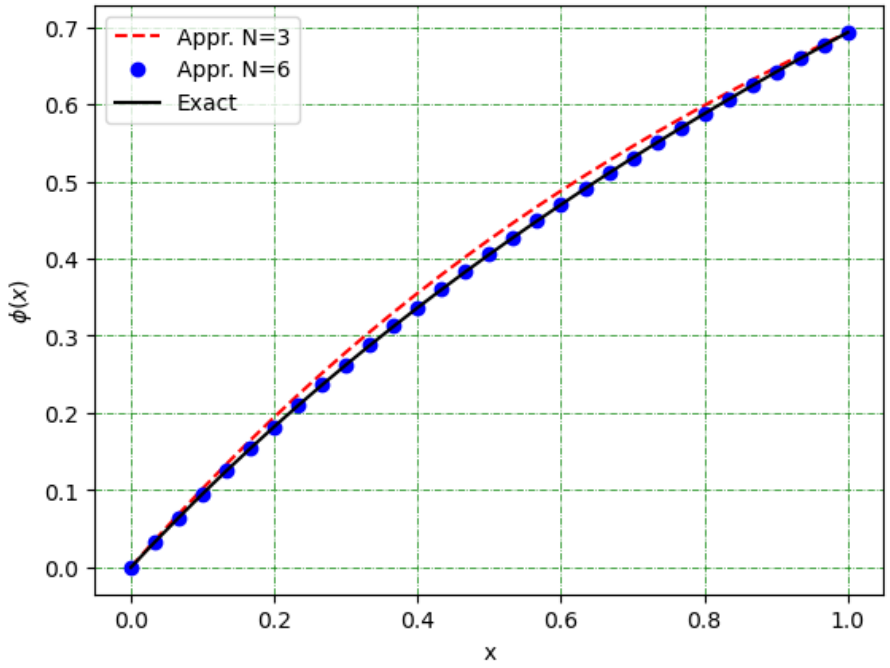
$$\phi(x) = \ln(x+۱).$$

ما از روش پیشنهادی در بخش ۴ برای حل این معادله مرزی غیرخطی استفاده کرده‌ایم و خطاهای $L_w^۲$ را برای چندین مقدار از N در جدول ۴ گزارش کرده‌ایم. به نظر می‌رسد که روش عددی در بخش ۴ به یک سیستم غیرخطی منتهی می‌شود و برای حل این سیستم غیرخطی باید از یک روش حل مناسب استفاده کرد. ما از روش نیوتن برای حل سیستم غیرخطی در محاسبات خود استفاده کرده‌ایم.

N	خطا-$L_w^۲(۰,۱)$	زمان اجرا(ثانیه)	N	خطا-$L_w^۲(۰,۱)$	زمان اجرا(ثانیه)
۳	$۲٫۵۳ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۴۵۹	۸	$۳٫۶۷ \times ۱۰^{-۷}$	۳٫۲۲۰۰
۴	$۳٫۵۴ \times ۱۰^{-۳}$	۰٫۱۳۳۹	۹	$۲٫۸۷ \times ۱۰^{-۸}$	۶٫۷۴۱۷
۵	$۳٫۲۲ \times ۱۰^{-۴}$	۰٫۳۳۹۶	۱۰	$۳٫۶۲ \times ۱۰^{-۹}$	۱۳٫۳۴۶۹
۶	$۸٫۵۴ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۷۰۹۹	۱۱	$۷٫۵۳ \times ۱۰^{-۹}$	۲۶٫۵۰۴۳
۷	$۴٫۰۵ \times ۱۰^{-۶}$	۱٫۹۰۴۹	۱۲	$۲٫۲۳ \times ۱۰^{-۱۱}$	۲۲٫۵۴۶۱
نتایج مراجع:		$۶٫۵ \times ۱۰^{-۵}$[۱۰]		$۲٫۲ \times ۱۰^{-۸}$[۲۸]	

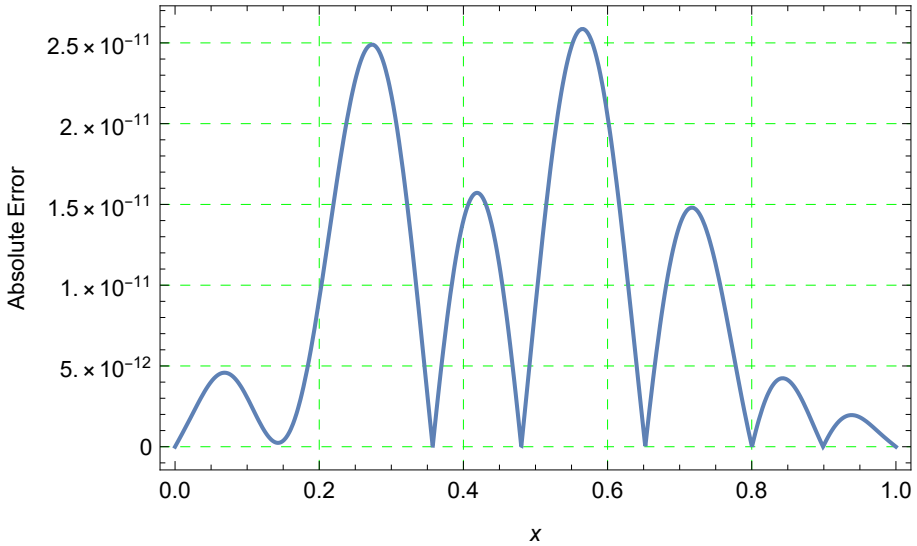
جدول ۴. خطاها برای مثال ۴.۶.

در ادامه نمودار مقایسه جواب دقیق مسئله مربوط به مثال ۴.۶ با جواب تقریبی به‌دست آمده آن از روش پیشنهادی، به ازای دو مقدار مختلف N، ارائه گردیده است.



نمودار مقایسه‌ای مثال ۴.۶: مقایسه جواب دقیق با جواب تقریبی به ازای $N = ۳$ و $N = ۶$.

نمودار خطای قدرمطلق جواب تقریبی مسئله مربوط به مثال ۴.۶ در زیر مشاهده می‌شود.



نمودار خطای مثال ۴.۶ به ازای $N = ۱۲$.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم همراه با شرایط مرزی، مبتنی بر روش‌های طیفی، پیشنهاد شده است. فرمول‌بندی ماتریسی روش تاو با استفاده از پایه‌های چبیشف برای تقریب حل مسائل مقدار مرزی خطی ارائه شده است. با استفاده از فرم معادله انتگرالی ولترا–فردهلم، تبدیل شده از معادله دیفرانسیل، این شرایط را فراهم می‌سازد تا با به‌کارگیری قضیه نقطه ثابت باناخ و روش پیکارد، وجود و یکتایی جواب مسئله اثبات شود و سپس همگرایی و مرتبه خطای این مسئله مورد بررسی قرار گیرد. همچنین از جمله دستاوردهای این پژوهش نمایش کاهش نمایی خطا می‌باشد.

فهرست منابع

[1] Abd-Elhameedi, W.M., Youssri, Y.H., and Gamal Atta, A., 2024. Tau algorithm for fractional delay differential equations utilizing seventh-kind Chebyshev polynomials. *Journal of Mathematical Modeling, 12* (2) , pp.277–299. doi: 10.22124/jmm.2024.25844.2295

[2] Folasade, A.A., Ojurongbe, T.A., Okunlola, K.A and Peter, O.J., 2021. Application of chebyshev polynomial basis function on the solution of volterra integro-differential equations using galerkin method. *Mathematics and Computational Sciences, 2*(4) , pp.41–51. doi:10.30511/mcs.2021.540133.1047

[3] Ahmad Khan, N., Sulaiman, M., Kumam, P. and Alarfaj, F.Kh., 2022. Application of Legendre polynomials based neural networks for the analysis of heat and mass transfer of a non-Newtonian fluid in a porous channel. *Advances in Continuous and Discrete Models*. (2). doi:10.1186/s13662-022-03676-x

[4] Caglar, H. and Caglar, N., 2008. Fifth-degree B-spline solution for a fourth-order parabolic partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation, 201*(1), pp.597–603. doi:10.1016/j.amc.2007.12.060

[5] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T., 2006. Spectral Methods Fundamentals in Single Domains. *Springer-Verlag*.

[6] Chen, Y. and Tang,T., 2010. Convergence analysis of the Jacobi spectral collocation methods for Volterra integral equations with a weakly singular kernel. *Math. Comp., 79*, pp.147–167. doi:10.1090/S0025-5718-09-02269-8

[7] Ghoreishi, F. and Hadizadeh, M., 2009. Numerical computation of the Tau approximation for the Volterra–Hammerstein integral equations. *Numer. Algorithms, 52*, pp.541–559. doi:10.1007/s11075-009-9297-9

[8] Hajji, M.A. and Al-Khaled, K., 2014. Numerical methods for nonlinear fourth-order boundary value problems with applications. *International Journal of Computer Mathematics, 85* (1), pp.83–104. doi:10.1080/00207160701363031

[9] Hussain, K.A., Ismail, F. and Senu, N., 2016. Direct numerical method for solving a class of fourth-order partial differential equation. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 12*(2), pp.1257–1272. doi:10.1002/sapm1938171123

[10] El-Gamel, M., Behiry, S.H. and Hashish, H., 2003. Numerical method for the solution of special nonlinear fourth-order boundary value problems. *Appl. Math. Comput., 145*, pp.717–734. doi:10.1016/S0096-3003(03)00269-8

[11] Lanczos, C., 1938. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *J. Math. Phys., 17*, pp.123–199. doi:10.1002/sapm1938171123

[12] Li, X. and Tang, T., 2012. Convergence analysis of Jacobi spectral collocation methods for Abel-Volterra integral equations of second kind. *Front. Math. China, 7*, pp.69–84. doi:10.1007/s11464-012-0170-0

[13] Loghmani, G.B. and Alavizadeh, S.R., 2007. Numerical solution of fourth-order problems with separated boundary conditions. *Appl. Math. Comput., 191*, pp.571–581. doi:10.1016/j.amc.2007.02.116

[14] Magdy Abdelghany E., Abd-Elhameed, W.M., Mahrous Moatimid, G., Youssri, Y.H. and Gamal Atta, A., 2023. A Tau Approach for Solving Time-Fractional Heat Equation Based on the Shifted Sixth-Kind Chebyshev Polynomials. *Symmetry, 15*, pp.581–594. doi:10.3390/sym15030594

[15] Manyonge, A.W., Odongo, B.A., Owego, D.O., Opiyo, R.O. and Onyango, Th.M., 2023. On the Numerical Solution of Boundary Value Problem (BVP) of the Ordinary Differential Equation (ODE)-The Case of Steady-State Bio-Heat Equation with Combined HeatTransfer Coefficient by Pseudo-Spectral Collocation Method. *European Journal of Engineering and Technology Research, 8*(5), September. doi:10.24018/ejeng.2023.8.5.3068

[16] Mat Salleh, N.S., 2024. Spectral Tau Method with Legendre Polynomials to Approximate Second Order Boundary Value Problem. *International Journal of Academic Research in Accounting, Finance & Management Sciences, 14*(4), pp.475-496. doi:10.6007/IJARAFMS/v14-i4/22984

[17] Mollahasani, N., 2023. A shifted fractional-order Hahn functions Tau method for time-fractional PDE with nonsmooth solution. *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, 13*(4), pp.672–694. doi:10.22067/ijnao.2023.81716.1238

[18] Nurunnabi Sohel, Md. , Shafiqul Islam, Md. and Kamrujjaman, Md., 2022. Galerkin Method and Its Residual Correction with Modified Legendre Polynomials. *Contemporary Mathematics*. doi: 10.37256/cm.3220221385

[19] Ortiz, E.L., 1969. The Tau method. *SIAM J. Numer. Anal., 6*, pp.480–492.

[20] Pourbabaee, M. and Saadatmandi, A., 2021. Collocation method based on Chebyshev polynomials for solving distributed order fractional differential equations. *Computational Methods for Differential Equations, 9*(3), pp.858–873. doi:10.22034/cmde.2020.38506.1695

[21] Qiu, W., Xu, D. and Guo, J., 2021. The Crank-Nicolson-type Sinc-Galerkin method for the fourth-order partial integro-differential equation with a weakly singular kernel. *Applied Numerical Mathematics, 159*, pp.239-258. doi:10.1016/j.apnum.2020.09.011

[22] Raheem, A., Afreen, A. and Khatoon, A., 2023. Oscillation and asymptotic behavior for fourth order neutral differential equations with mixed deviating arguments. *Caspian Journal of Mathematical Sciences, 12*(2), pp.243–257. doi:10.22080/cjms.2023.21174.1578

[23] Ramadan, M.A., Lashien, I.F. and Zahra, W., 2009. Quintic nonpolynomial spline solutions for fourth order two-point boundary value problem. *Commun. Nonlinear Sc. Numer. Simul., 14*, pp.1105-1114. doi:10.1016/j.cnsns.2007.12.008

[24] Rashidinia, J. and Golbabaee, A., 2005. Convergence of numerical solution of a fourth-order boundary value problem. *Appl. Math. Comput., 171*, pp.1296–1305. doi:10.1016/j.amc.2005.01.117

[25] Reinkenhof, J., 1977. Differentiation and integration using Bernstein's polynomials. *Int. J. Numer. Methods Engrg, 11*(10), pp.1627–1630. doi:10.1002/nme.1620111012

[26] Singh, I. and Singh, G., 2019. Numerical Study For Solving Fourth Order Ordinary Differential Equations. *International Journal for Research in Engineering Application & Management, 5*(1), pp.123-135. doi:10.18231/2454-9150.2019.0371

[27] Thongthai, W., Nonlaopon, K., Orankitjaroen, S. and Li, Ch., 2023. Generalized Solutions of Ordinary Differential Equations Related to the Chebyshev Polynomial of the Second Kind. *Mathematics 11*, pp.17–25. doi:10.3390/math11071725

[28] Twizzell, E.H. and Tirmizi, S.I.A., 1988. Multiderivative methods for nonlinear beam problems. *Commun. Appl. Numer. Methods, 4*, pp.43–50. doi:10.1002/cnm.1630040107

[29] Soltanalizadeh, B., 2012. Application of differential transformation method for solving a fourth-order parabolic partial differential equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics, 78*(3), pp.299–308.

[30] Usmani, R.A., 1992. The use of quartic splines in the numerical solution of a fourth-order boundary value problem. *J. Comput. Appl. Math., 44*(2), pp.187–200. doi:10.1016/0377-0427(92)90010-U

Solving FBVP in Banach Spaces: Analysis of Existence, Uniqueness and Error Estimation

Javad Shokri [2]

Department of Mathematics, Faculty of Science, Urmia University, P.O.Box 165, Urmia, Iran.

Communicated by: Abdolrahman Razani

Received: 21 April 2025 Accepted: 9 June 2026

Abstract: In this paper, we reformulate the fourth-order differential equation with boundary condition (FBVP) as a Volterra-Fredholm integral equation (VFIE). We establish the existence, uniqueness, and convergence of the solution within the VFIE framework using Picard's method, Banach's fixed-point theorem, and Schwarz's inequality. This study investigates the Tau method's performance when employing Legendre basis functions for solving FBVP. We develop an algebraic equivalent formulation of FBVP using the operational Tau matrix approach. Numerical experiments using the Tau method on linear and nonlinear FBVP demonstrate an exponential decrease in errors. Illustrative examples are given to verify the accuracy and performance of the proposed method. The numerical results include comparisons with existing results for the same problems, which clearly highlight the accuracy of the proposed Tau method.

Keywords: Banach spaces, Fixed point theorem, Fourth-order BVP, Tau method, Voltera-Fredholm equation.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author.
E-mail addresses: j.shokri@urmia.ac.ir (J. Shokri)