مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۱۰۵–۱۱۴

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.51570.2458

پایداری هایرز–اولام $f-i$–همریختی–مشتق‌های متعامد مرتبط با سیستم معادلات جمعی– درجه دوم– درجه سوم متعامد

پرستو هیئتیان نائینی [۱] [۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷، تهران، ایران

دبیر مسئول: محسن زیوری رضاپور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۲۰

چکیده: مقاله حاضر به معرفی مفهوم جدیدی به نام سیستم‌های معادلات تابعی درجه اول–درجه دوم–درجه سوم متعامد که بر روی جبرهای باناخ متعامد تعریف شده‌اند، می‌پردازد. پس از آن، مفهوم $f-i$–همریختی–مشتق‌های متعامد را با $i \in \{۱, ۲, ۳\}$ معرفی می‌کنیم. در نهایت، با استفاده از یک روش نقطه ثابت، پایداری هایرز–اولام را برای این سیستم‌های معادلات تابعی درجه اول–درجه دوم–درجه سوم متعامد و $f-i$–همریختی مشتق‌های متعامد، با استفاده از توابع کنترل اصلی بر روی جبرهای باناخ متعامد، اثبات می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: سیستم معادلات جمعی– درجه دوم– درجه سوم متعامد، $f - i$–همریختی–مشتق متعامد، پایداری هایرز–اولام، جبرهای باناخ متعامد.

رده‌بندی ریاضی: 47B47; 17B40; 39B72; 47H10

۱ تاریخچه و تعاریف

در سال ۱۹۴۰، اولام [۲۰] در دانشگاه ویسکانسین سخنرانی‌ای ارائه داد و در آن چند مسئله حل‌نشده ریاضی را مطرح کرد که یکی از آن‌ها به پایداری همریختی ها اختصاص داشت. این پرسش زمینه‌ساز علاقه گسترده به مسائل پایداری و مطالعه معادلات تابعی شد. هایرز [۷] در سال ۱۹۴۱ به سوال اولام برای نگاشت‌های جمعی روی فضاهای باناخ پاسخ داد و بدین‌ترتیب مفهوم پایداری هایرز–اولام پدید آمد. در سال ۱۹۷۸، ت. م. راسیاس [۱۹] نتیجه هایرز را تعمیم داد و جمله کنترلی اصلی را با عبارت $\theta(\|u\|^p + \|v\|^p)$ به‌جای قبلی قرار داد، با ثابت‌های $p < ۱$ و $\theta > ۰$، که پایداری عمومی‌شده را برقرار ساخت. سپس در سال ۱۹۸۲، ج. م. راسیاس [۱۸] جمله کنترلی متفاوتی از شکل $\theta(\|u\|^p \cdot \|v\|^p)$ با $\theta > ۰$ و $p < ۱$ پیشنهاد کرد و بدین‌ترتیب خانواده جدیدی از کنترل‌های مجاز را معرفی نمود. در پی آن، در سال ۱۹۹۴ گاوروتا [۶] تابع کنترل معرفی شده توسط ت. م. راسیاس را با یک تابع کنترل کلی‌تر $\varphi(u, v)$ جایگزین کرد و پایداری هایرز–اولام را در این چارچوب منعطف‌تر مورد مطالعه قرار داد. برای نمونه، در سال ۲۰۲۵، ایزدی و سامعی [۸] مفهوم معادله

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(P. Heiatian Naeini) parastoo.heiatiannaeini@pnu.ac.ir

تابعی s–جنسن متعامد تعمیم یافته روی جبرهای باناخ لی متعامد معرفی کرده، خواص جمعی آن را با حفظ متعامد مورد بررسی قرار دادند و همچنین همریختی–مشتق های سه تایی متعامد مرتبط با معادله تابعی s–جنسن متعامد تعمیم یافته را توصیف کرده‌اند به طوریکه با روش نقاط ثابت تحت شرط‌های متعامد، پایداری هایرز–اولام و ابرپایداری آنها را بررسی کرده‌اند. برای اطلاعات بیشتر به مراجع [۱۰، ۱۱، ۱۳] مراجعه کنید.

به‌دنبال اهمیت محوری معادلات دیفرانسیل در علوم و مهندسی، پژوهش درباره پایداری هایرز–اولام برای معادلات دیفرانسیل از اوبلوزا [۱۵] در سال ۱۹۹۳ آغاز شد. در سال ۱۹۹۸، آلسینا و گر [۲] نتایجی درباره نگاشت‌های مشتق‌پذیر ارائه کردند و از آن زمان تاکنون کاربردهای فراوانی در معادلات دیفرانسیل و اپراتورها توسعه یافته است؛ برای نمونه، در سال ۲۰۲۱، ماجانی [۱] پایداری دستگاه معادلات اویلر–لاگرانژ مکعبی را در فضاهای ۲–نرمدار ناارشمیدسی ثابت کرده و همچنین پایداری هایرز–اولام آن را در فضاهای ۲–نرم ناارشمیدسی احتمالی منگر بررسی کرده است. در سال ۲۰۲۴، کشاورز و همکاران [۱۲] مفهوم جدیدی از معادلات دیفرانسیل و اپراتورها روی فضاهای هاردی وزندار معرفی کرده، حدتابع‌پذیری ایشان را بررسی و نتایج پایداری هایرز–اولام را اثبات نمودند و مثال‌هایی برای روشن‌شدن شروط پایداری و ناپایداری ارائه دادند.

معادله تابعی $L(u+v) = L(u) + L(v)$، به‌عنوان معادله جمعی شناخته می‌شود و هر تابعی که این رابطه را برقرار سازد نگاشت جمعی نامیده می‌شود. با الهام از این مفهوم و معادله جنسن، در سال ۲۰۲۵، کفایتی و همکاران [۹]، ρ–معادله تابعی متعامد جنسن را معرفی کردند. معادله $Q(u+v) + Q(u-v) = ۲Q(u) + ۲Q(v)$، به‌عنوان معادله درجه دوم شناخته می‌شود و در سال ۲۰۲۵، پارک و همکاران [۱۶]، سیستم معادلات درجه دوم تابعی را ارائه دادند و پایداری هایرز–اولام را برای معادله معرفی شده با روش نقطه ثابت به اثبات رساندن. معادله $C(u+۳v) + C(u-۳v) = ۹(C(u+v) + C(u-v)) - ۱۶C(u)$، به‌عنوان معادله درجه سوم شناخته می‌شود و در سال ۲۰۲۱، بداغی و همکاران [۴]، جواب عمومی یک معادله تابعی درجه سوم n–بعدی را معرفی و پایداری تعمیم‌یافته هایرز–اولام این معادله تابعی را در فضاهای نرم‌دار فازی با استفاده از روش مستقیم و نقطه ثابت مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۰۶، میرزاویرزی و مصلحیان [۱۴] مفهوم σ–مشتق به صورت رابطه $g(uv) = \sigma(u)g(v) + g(u)\sigma(v)$ را برقرار می‌سازد، که در آن σ، $\mathbb{C}$–خطی است. سپس در ۲۰۱۹، پارک و همکاران [۱۷] یک نامساوی تابعی $s-$جمعی را معرفی کرده و با استفاده از روش نقاط ثابت و روش مستقیم، نتایج پایداری هایرز–اولام را برای آن نامساوی و برای همریختی–مشتق‌ها اثبات نمودند.

در پژوهشی در سال ۲۰۱۷، اسحاقی گرجی و همکاران [۵] مفهوم مجموعه متعامد را معرفی کردند و بدین‌وسیله مفهوم متعامد را روی فضای نرمدار تعمیم دادند. بر پایه این کار، در سال ۲۰۱۸ بحرینی و همکاران [۳] قضیه نقطه ثابت دیاز–مارگولیس را برای این نوع مجموعه‌ها تعمیم دادند و با استفاده از قضیه نقطه ثابت متعامد، نتایج پایداری هایرز–اولام را اثبات کردند.

تعریف ۱.۱. [۵] فرض کنید مجموعه‌ای غیرتهی A و یک رابطه دوتایی $\perp \subseteq A \times A$ داده شده باشد. زوج $(A, \perp)$ را مجموعه متعامد (یا O–مجموعه) می‌نامیم هرگاه شرط زیر برقرار باشد: وجود داشته باشد

$$\exists u\ (\forall v; v \perp u) \quad \text{یا} \quad (\forall v; u \perp v),$$

برقرار باشد.

حال اگر $(A, \perp)$ را همراه با یک فضای متریک تعمیم‌یافته (A, d) در نظر بگیریم، ساختار ترکیبی $(A, \perp, d)$ را فضای متریک تعمیم‌یافته متعامد می‌نامیم.

در یک فضای متریک متعامد $(A, \perp, d)$ داریم:

۱. توالی $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ را دنباله متعامد (O–دنباله) می‌نامیم اگر برای هر n یا $u_n \perp u_{n+۱}$ برقرار باشد یا $u_{n+۱} \perp u_n$ برقرار باشد.

۲. نگاشت $g : A \to A$ را در نقطه $u \in A$، $\perp$–پیوسته می‌نامیم اگر برای هر O–دنباله $\{u_n\}$ که به u همگرا شود، $g(u_n)$ به $g(u)$ همگرا شوند. توجه کنید که هر تابع پیوسته، در هر نقطه $\perp$–پیوسته است.

۳. فضای $(A, \perp, d)$ را کامل با خاصیت متعامد (O–کامل) می‌گوییم اگر هر O–دنباله کوشی در A به نقطه‌ای در A همگرا شود.

۴. نگاشت $g : A \to A$ را $\perp$–حافظ می‌نامیم اگر از $u \perp v$ همیشه نتیجه شود $g(u) \perp g(v)$.

۵. نگاشت $g : A \to A$ را انقباضی متعامد با ثابت لیپ‌شیتز $۰ < \lambda < ۱$ می‌نامیم اگر هرگاه $u \perp v$ باشد، داشته باشیم

$$d(gu, gv) \leq \lambda\, d(u, v).$$

در تعریف بعدی به مفهوم جدید سیستم معادلات جمعی– درجه دوم– درجه سوم با خاصیت متعامد می پردازیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار متعامد باشند. نگاشت‌های $f, g : X \to Y$ را یک سیستم معادلات جمعی– درجه دوم– درجه سوم با خاصیت متعامد گوییم اگر در رابطه‌ی زیر صادق باشند

$$\begin{cases} f(۲u+v) + f(۲u-v) = ۲^{i-۲}[g(u+v) + g(u-v) + ۶g(u)], \\ g(۲u+v) + g(۲u-v) = ۲^{i-۲}[f(u+v) + f(u-v) + ۶f(u)], \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که در رابطه‌ی فوق $u, v \in X$، با شرط $u \perp v$ و برای $i \in \{۱, ۲, ۳\}$، سه حالت زیر را داریم

۱) وقتی که $i = ۱$، نگاشت‌های f و g در رابطه‌ی (۱.۱) صدق می‌کنند جمعی متعامد هستند.

۲) در حالتی که $i = ۲$، هر دو نگاشت در رابطه‌ی (۱.۱) صدق می‌کنند درجه دوم متعامد هستند.

۳) در حالتی که $i = ۳$، هر دو نگاشت در رابطه‌ی (۱.۱) صدق می‌کنند درجه سوم متعامد هستند.

در تعریف بعدی، مفهوم جدید $f - i$–همریختی–مشتق متعامد روی جبرهای باناخ متعامد به دست می‌آید.

۱) اگر $i = ۱$، یک نگاشت $f - ۱$–همریختی–مشتق $\mathbb{C}$–خطی متعامد است.

۲) اگر $i = ۲$، یک $f - ۲$–همریختی–مشتق درجه دوم متعامد است.

۳) اگر $i = ۳$، یک $f - ۳$–همریختی–مشتق درجه سوم متعامد است.

تعریف **۳.۱**. فرض کنید A یک جبر باناخ متعامد، $f : A \to A$ یک i–همریختی متعامد و $g : A \to A$ یک i–نگاشت متعامد باشد که برای هر $u, v \in A$ با شرط $u \perp v$ و برای $i \in \{۱, ۲, ۳\}$، حالت‌های زیر را داریم

۱) در حالتی که g، $\mathbb{C}$–خطی متعامد باشد یک f–۱–همریختی–مشتق متعامد نامیده می‌شود در صورتی که در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$g(u)g(v) = f(u)g(v) + g(u)f(v)$$

۲) وقتی که g درجه دوم متعامد باشد یک f–۲–همریختی–مشتق متعامد نامیده می‌شود در صورتی که در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$g(u)g(v) = f(u)g(v) + g(u)f(v)$$

۳) وقتی که g درجه سوم متعامد باشد یک f–۳–همریختی–مشتق متعامد نامیده می‌شود در صورتی که در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$g(u)g(v) = f(u)g(v) + g(u)f(v)$$

قضیه **۴.۱**. [۳] فرض کنیم $(X, d, \perp)$ یک فضای متری تعمیم‌یافته O–کامل و $\mathscr{T} : X \to X$ یک $\perp$–حافظ، $\perp$–پیوسته و $\lambda - \perp$–انقباضی باشد طوری که $u \in X$، باشد که برای هر $v \in X$، $u \perp v$ یا $v \perp u$. فرض کنیم

$$u,\ \mathscr{T}(u),\ \mathscr{T}^{۲}(u),\ \dots,\ \mathscr{T}^{n}(u),\ \dots,$$

O–دنباله‌ی تقریبی متوالی با نقطه‌ی شروع u باشد. در این صورت برای هر $n \geq ۰$،

$$d(\mathscr{T}^{n}(u), \mathscr{T}^{n+۱}(u)) = \infty,$$

یا عدد صحیح مثبت $n_۰$، وجود دارد به طوری که برای هر $n > n_۰$،

$$d(\mathscr{T}^{n}(u), \mathscr{T}^{n+۱}(u)) < \infty.$$

اگر حالت دوم برقرار باشد، آنگاه

(۱) O–دنباله‌ی یکتای $\{\mathscr{T}^{n}(u)\}$ به یک نقطه‌ی ثابت u^* از $\mathscr{T}$ همگراست.

(۲) نقطه‌ثابت یکتای u^* از $\mathscr{T}$ به

$$X^* = \{v \in X : d(\mathscr{T}^{n}(u), v) < \infty\},$$

تعلق دارد.

(۳) به ازای هر $v \in X$، آن گاه

$$d(v, u^*) \leq \frac{۱}{۱ - \lambda} d(v, \mathscr{T}(v)).$$

در بخش بعدی ابتدا سیستم معادلات جمعی–درجه دوم–درجه سوم معادلات تابعی متعامد معرفی شده (۱.۱) را برای $i \in \{۱, ۲, ۳\}$ حل می کنیم به طوری برای $i = ۱$ یک سیستم معادلات جمعی معادلات تابعی متعامد است و برای $i = ۲$ سیستم معادلات درجه دوم معادلات تابعی متعامد است و در نهایت برای $i = ۳$ سیستم معادلات درجه سوم معادلات تابعی متعامد است. سپس با استفاده از قضیه‌ی نقطه‌ثابت پایداری هایرز–اولام سیستم معادلات جمعی–درجه دوم–درجه سوم معادلات تابعی متعامد روی جبرهای باناخ متعامد اثبات می‌کنیم. در پایان پایداری $f - i$–همریختی–مشتق متعامد روی جبرهای باناخ متعامد با دو تابع کنترل نوع گاوروتا و نوع راسیاس مورد بررسی قرار می دهیم.

۲ پایداری سیستم معادلات جمعی–درجه دوم–درجه سوم با خاصیت متعامد معادلات تابعی

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم A یک جبر باناخ متعامد است.
در ادامه نگاشت‌های f و g را در حالتی که برای $i=۱$ نگاشت‌هایی جمعی متعامد صادق در رابطه‌ی (۱.۱) و برای $i=۲$ و $i=۳$ به ترتیب درجه دوم متعامد و درجه سوم متعامد هستند، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

لم ۱.۲. فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار متعامد هستندو دو نگاشت $f,g : X \to Y$ صادق در رابطه‌ی (۱.۱) باشند. آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) برای $i=۱$ دو نگاشت جمعی متعامد هستند.

۲) برای $i=۲$ دو نگاشت درجه دوم متعامد هستند.

۳) برای $i=۳$ دو نگاشت درجه سوم متعامد هستند.

اثبات. فرض کنید f و g در رابطه‌ی (۱.۱) صدق کنند. در رابطه‌ی (۱.۱)، قرار می‌دهیم $u=v=۰$ که از آن نتیجه می‌گیریم $f(۰)=g(۰)=۰$.
اگر قرار دهیم $v=۰$ آن‌گاه برای هر $u\in X$ رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} f(۲u)=۲^i g(u) \\ g(۲u)=۲^i f(u) \end{cases} \tag{۱.۲}$$

با توجه به رابطه‌ی (۱.۲) برای $i=۱$ داریم $f(-v)=-f(v)$. نتیجه‌ای مشابه برای $g(v)$ به دست می‌آوریم.
با قرار دادن $i=۲$ در رابطه (۱.۲) داریم $f(-v)=f(v)$. نتیجه‌ای مشابه برای $g(v)$ نیز به دست می‌آوریم.
در اخر اگر در رابطه (۱.۲)، قرار دهیم $i=۳$ خواهیم داشت $f(-v)=-f(v)$. همچنین برای $g(v)$ نتیجه مشابه ای دست می‌آید.
روابط بالا نشان می‌دهد وقتی که $i=۱$، f و g جمعی متعامد هستند و زمانی که $i=۲$ و $i=۳$ به ترتیب درجه دوم متعامد و درجه سوم متعامد هستند □

در ادامه تابع کنترل نوع گاوروتا را برای سیستم معادلات جمعی–درجه دوم–درجه سوم با خاصیت متعامد در معادلات تابعی تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\gamma_i : A^۲ \to [۰,\infty)$ باشد و برای ثابت $۰<\tau<۱$ و برای هر $u,v\in A$ با شرط $u\perp v$، داریم

$$\gamma_i\left(\frac{u}{۲},\frac{v}{۲}\right)\le\frac{\tau}{۲^i}\gamma_i(u,v). \tag{۲.۲}$$

اگر در رابطه‌ی (۲.۲) قرار دهیم $u=v=۰$ آن‌گاه $\gamma_i(۰,۰)=۰$. حال با استفاده از همین رابطه داریم

$$\lim_{j\to\infty}۲^{ij}\gamma_i\left(\frac{u}{۲^j},\frac{v}{۲^j}\right)=۰. \tag{۳.۲}$$

بر اساس مفاهیمی که تا اینجا بیان کرده‌ایم، در قضیه‌ی بعدی به مطالعه پایداری هایرز–اولام سیستم معادلات جمعی–درجه دوم–درجه سوم با خاصیت متعامد معادلات تابعی روی جبرهای باناخ متعامد می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲. فرض کنید نگاشت $\gamma_i : A^۲ \to [۰,\infty)$ در رابطه‌ی (۲.۲) صدق کند و نگاشت‌های f و g تعریف شده بر A را داریم به طوری که

$$\begin{cases} \|f(۲u+v)+f(۲u-v)-۲^{i-۲}[g(u+v)+g(u-v)+۶g(u)]\|\le\gamma_i(u,v), \\ \|g(۲u+v)+g(۲u-v)-۲^{i-۲}[f(u+v)+f(u-v)+۶f(u)]\|\le\gamma_i(u,v) \end{cases} \tag{۴.۲}$$

بنابراین i–نگاشت‌های یکتای $T,J : A\to A$ وجود دارند به طوری که

$$\|f(u)-T_i(u)\|\le\frac{\tau}{۲^{i+۱}(۱-\tau)}\gamma_i(u,۰) \quad و \quad \|g(u)-J_i(u)\|\le\frac{\tau}{۲^{i+۱}(۱-\tau)}\gamma_i(u,۰), \tag{۵.۲}$$

اثبات. در رابطه‌ی (۴.۲) از قرار دادن $u = v = ۰$ داریم

$$\begin{cases} \|f(۰) + f(۰) - ۲^{i-۲}[g(۰) + g(۰) + ۶g(۰)]\| \leq \gamma_i(۰, ۰), \\ \|g(۰) + g(۰) - ۲^{i-۲}[f(۰) + f(۰) + ۶f(۰)]\| \leq \gamma_i(۰, ۰) \end{cases}$$

بنابراین $f(۰) = g(۰) = ۰$. مجدد با قرار دادن $v = ۰$ در رابطه‌ی (۴.۲) به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} \|۲f(۲u) - ۲^{i+۱}g(u)\| \leq \gamma_i(u, ۰), \\ \|۲g(۲u) - ۲^{i+۱}f(u)\| \leq \gamma_i(u, ۰) \end{cases}$$

به عنوان نتیجه

$$\begin{cases} \left\|f(u) - ۲^i f(\frac{u}{۲})\right\| \leq \frac{۱}{۲}\gamma_i\left(\frac{u}{۲}, ۰\right), \\ \left\|g(u) - ۲^i g(\frac{u}{۲})\right\| \leq \frac{۱}{۲}\gamma_i\left(\frac{u}{۲}, ۰\right) \end{cases} \tag{۶.۲}$$

فرض کنید $\Psi := \{f : A \to A|\ \ f(۰) = ۰\}$. متر d روی Ψ را با استفاده از $f, g \in \Psi$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$d(f, g) = \inf\{k \in \mathbb{R}^+ :\ \|f(u) - g(u)\| \leq k\gamma_i(u, ۰)\ \forall u \in A\}.$$

(Ψ, d) یک فضای متریک تعمیم‌یافته متعامد است. i–نگاشت متعامد $\Phi : \Psi \to \Psi$ را فرض کنید به طوری که در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$\Phi f(u) = ۲^i f\left(\frac{u}{۲}\right) \quad \forall\, u \in A.$$

فرض کنید $f, g \in (\Psi, d)$ باشند به طوری که $d(f, g) = k$ بنابراین به دست می‌آوریم

$$\|f(u) - g(u)\| \leq \varepsilon\gamma_i(u, ۰).$$

در نتیجه برای هر $u \in A$ و $d(\Phi f, \Phi g) \leq \tau\varepsilon$ داریم

$$\|\Phi f(u) - \Phi g(u)\| = \left\|۲^i f\left(\frac{u}{۲}\right) - ۲^i g\left(\frac{u}{۲}\right)\right\| \leq ۲^i\varepsilon\gamma_i\left(\frac{u}{۲}, ۰\right) \leq \tau\varepsilon\gamma_i(u, ۰)$$

یعنی

$$d(\Phi f, \Phi g)) \leq \tau d(f, g), \quad \forall\, f, g \in \Psi.$$

تابع Φ یک تابع پیوسته است. اگر O–دنباله $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ در Ψ به $f \in \Psi$ همگرا شود، آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$، $\tau > ۰$ با $۰ < \tau < \varepsilon$ و $j \in \mathbb{N}$ وجود دارد،

$$\|f_j(u) - f(u)\| \leq \tau\gamma_i(u, ۰),$$

برای همه $u \in A$. به طور مشابه، همین امر برای O–دنباله $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ نیز صادق است. با استفاده از رابطه‌ی (۶.۲) رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$d(f, \Phi f) \leq \frac{\tau}{۲^{i+۱}(۱-\tau)}\gamma_i(u, ۰) \text{ و } d(g, \Phi g) \leq \frac{\tau}{۲^{i+۱}(۱-\tau)}\gamma_i(u, ۰).$$

با پذیرفتن نقطه‌ثابت متغیر که منجر به یک نقطه‌ثابت یکتا برای Φ می‌شود، نتیجه می‌گیریم نگاشت‌های f و g تعریف شده از A به A وجود دارند به طوری که برای هر $u \in A$ و $i \in \{۱, ۲, ۳\}$ داریم

$$f(u) = ۲^i f\left(\frac{u}{۲}\right) \qquad \text{و} \qquad g(u) = ۲^i g\left(\frac{u}{۲}\right) \tag{۷.۲}$$

اعداد حقیقی مثبت α و δ وجود دارند به طوری که

$$\|f(u) - T(u)\| \leq \alpha\gamma_i(u, ۰) \quad \text{و} \quad \|g(u) - J(u)\| \leq \delta\gamma_i(u, ۰).$$

وقتی که $j \to \infty$، $d(\Phi^j f, T) \to 0$ و $d(\Phi^j g, J) \to 0$ که برای $i \in \{1, 2, 3\}$ و هر $u \in A$ رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌دهد

$$\lim_{j\to\infty} 2^{ij} f\left(\frac{u}{2^j}\right) = T(u) \quad \text{و} \quad \lim_{j\to\infty} 2^{ij} g\left(\frac{u}{2^j}\right) = J(u),$$

حال از نامساوی‌های $d(f, T) \le \frac{1}{1-\tau} d(f, \Psi f)$ و $d(g, J) \le \frac{1}{1-\tau} d(g, \Psi g)$ نامساوی‌های زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\|f(u) - T(u)\| \le \frac{1}{2^{i+1}(\tau^{-1}-1)} \gamma_i(u, 0) \quad \text{و} \quad \|g(u) - J(u)\| \le \frac{1}{2^{i+1}(\tau^{-1}-1)} \gamma_i(u, 0),$$

به طور مشابه از روابط (۳.۲) و (۴.۲) برای هر $u, v \in A$ با شرط $u \perp v$ و برای $i \in \{1, 2, 3\}$، رابطه‌ی زیر را داریم

$$\begin{aligned}
&\left\| T(2u+v) + T(2u-v) - 2^{i-2}[J(u+v) + J(u-v) + 6J(u)] \right\| \\
&= \lim_{j\to\infty} 2^{ij} \left(\left\| f(\frac{2u+v}{2^j}) + f(\frac{2u-v}{2^j}) - 2^{i-2}\left[g(\frac{u+v}{2^j}) + g(\frac{u-v}{2^j}) + 6g(\frac{u}{2^j}) \right] \right\| \right) \\
&= \lim_{j\to\infty} 2^{ij} \omega\left(\frac{u}{2^j}, \frac{v}{2^j}\right) = 0
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$T(2u+v) + T(2u-v) = 2^{i-2}[J(u+v) + J(u-v) + 6J(u)].$$

بنا به لم ۱.۲، نگاشت‌های $T, J : A \to A$، i-نگاشت متعامد هستند؛ که نشان می‌دهد در حالتی که $i = 1$، نگاشت‌های f و g جمعی متعامد و در حالتی که $i = 2$ و $i = 3$ به ترتیب درجه دوم و درجه سوم متعامد هستند. و اثبات کامل است. □

در ادامه بررسی خواهیم کرد که آیا قضیه‌ی ۲.۲ می‌تواند پایداری هایرز-اولام را برای سیستم معادلات جمعی-درجه دوم-درجه سوم با خاصیت متعامد، تحت تابع کنترل نوع راسیاس تضمین نماید یا خیر. به طور دقیق‌تر $\gamma_i(u, v)$ را با $\mu(\|u\|^s + \|v\|^s)$ جایگزین می‌کنیم که $s > i$ و μ یک ثابت حقیقی نامنفی است.

نتیجه ۳.۲. فرض کنید نگاشت‌های f و g تعریف شده از A به A در رابطه‌ی زیر صدق کنند

(۸.۲)
$$\begin{cases} \|f(2u+v) + f(2u-v) - 2^{i-2}[g(u+v) + g(u-v) + 6g(u)]\| \le \mu(\|u\|^s + \|v\|^s), \\ \|g(2u+v) + g(2u-v) - 2^{i-2}[f(u+v) + f(u-v) + 6f(u)]\| \le \mu(\|u\|^s + \|v\|^s) \end{cases}$$

آن‌گاه وجود دارند $T, J : A \to A$، i-نگاشت‌های متعامد یکتا هستند به طوری که

$$\|f(u) - T(u)\| \le \frac{\mu}{2(2^s - 2^i)} \|u\|^s$$

$$\|g(u) - J(u)\| \le \frac{\mu}{2(2^s - 2^i)} \|u\|^s$$

اثبات. اثبات مشابه روش قضیه‌ی ۲.۲ است با این شرط که $\tau = 2^{i-s}$. □

در ملاحظه بعدی پایداری سیستم معادلات جمعی-درجه دوم-درجه سوم با خاصیت متعامد برای معادلات تابعی با تابع کنترل نوع JMR-راسیاس بر جبرهای باناخ متعامد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ملاحظه ۴.۲. فرض کنید نگاشت‌های f و g تعریف شده از A به A در رابطه‌ی زیر صدق کنند

(۹.۲)
$$\begin{cases} \|f(2u+v) + f(2u-v) - 2^{i-2}[g(u+v) + g(u-v) + 6g(u)]\| \le \mu(\|u\|^s . \|v\|^s), \\ \|g(2u+v) + g(2u-v) - 2^{i-2}[f(u+v) + f(u-v) + 6f(u)]\| \le \mu(\|u\|^s . \|v\|^s) \end{cases}$$

آن‌گاه وجود دارند $T, J : A \to A$، i-نگاشت‌های متعامد یکتا هستند به طوری که برای هر $u, v \in A$، با شرط $u \perp v$، $0 \le s < \frac{1}{2}$ و $i \in \{1, 2, 3\}$ داریم

$$\|f(u) - T(u)\| \le \frac{\mu}{2(2^s - 2^i)} \|u\|^s$$

$$\|g(u) - J(u)\| \le \frac{\mu}{2(2^s - 2^i)} \|u\|^s$$

۳ پایداری $i-f$–همریختی–مشتق متعامد

در سراسر این بخش، فرض می‌کنیم A یک جبر باناخ متعامد باشد.
ابتدا برای بیان اولین قضیه‌ی این بخش با در نظر گرفتن قضیه‌ی ۲.۲ از بخش قبل می‌خواهیم پایداری i–همریختی–مشتق متعامد با تابع کنترل از نوع گاوروتا را که تعریف شده بین فضاهای باناخ متعامد است مورد بررسی قرار دهیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\sigma : A^۲ \to [۰, \infty)$ که برای $\tau < ۱$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\sigma\left(\frac{u}{۲}, \frac{v}{۲}\right) \leq \frac{\tau}{۲^{۲i}}\sigma(u, v), \tag{۱.۳}$$

برای $i \in \{۱, ۲, ۳\}$، فرض می‌کنیم نگاشت‌های f_i و g_i تعریف شده از A به A در رابطه‌ی (۴.۲) صدق کند و روابط زیر نیز برقرار باشند

$$\|f_i(uv) - f_i(u)f_i(v)\| \leq \sigma(u, v), \tag{۲.۳}$$

و

$$\|g_i(u)g_i(v) - f_i(u)g_i(v) - g_i(u)f_i(v)\| \leq \sigma(u, v) \tag{۳.۳}$$

آن‌گاه برای $i = ۱, ۲, ۳$ نگاشت‌های یکتای $k_i : A \to A$ و h_i وجود دارند به طوری که در رابطه‌ی (۵.۲) صدق می‌کنند و h_i، نگاشت‌هایی i–همریختی و k_i نگاشتی $i-f$–همریختی–مشتق متعامد است.

اثبات. با قرار دادن $u = v = ۰$ در رابطه‌ی (۱.۳) داریم $\sigma(۰, ۰) = ۰$. مجدد از رابطه‌ی (۱.۳) برای هر $j \in \mathbb{N}$ نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{j\to\infty} ۲^{۲ij}\sigma(\frac{u}{۲^j}, \frac{v}{۲^j}) = ۰.$$

با استفاده از اثبات قضیه‌ی ۲.۲ برای $i = ۱, ۲, ۳$ نگاشت‌های h_i و k_i را از A به A تعریف می‌کنیم به طوری که در روابط زیر صدق کنند

$$h_i(u) = \lim_{j\to\infty} ۲^{ij} f_i\left(\frac{u}{۲^j}\right), \text{ و } k_i(u) = \lim_{j\to\infty} ۲^{ij} g_i\left(\frac{u}{۲^j}\right) \tag{۴.۳}$$

با استفاده از تعاریف و روابط (۱.۳)، (۲.۳) و (۳.۳) در کنار هم رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\|h_i(uv) - h_i(u)h_i(v)\| &= \lim_{j\to\infty} ۲^{۲ij}\left\|f_i\left(\frac{u}{۲^j}\frac{v}{۲^j}\right) - f_i\left(\frac{u}{۲^j}\right) f_i\left(\frac{v}{۲^j}\right)\right\| \\ &\leq \lim_{j\to\infty} ۲^{۲ij}\sigma\left(\frac{u}{۲^j}, \frac{v}{۲^j}\right) = ۰\end{aligned}$$

بنابراین $h_i(uv) = h_i(u)h_i(v)$. در نتیجه برای $i = ۱, ۲, ۳$، h_i i–همریختی بین جبرهای باناخ متعامد است. برای k_i داریم

$$\begin{aligned}&\|k_i(u)k_i(v) - h_i(u)k_i(v) - k_i(u)h_i(v)\| \\ &= \lim_{j\to\infty} ۲^{۲ij}\left\|g_i\left(\frac{u}{۲^j}\right) g_i\left(\frac{v}{۲^j}\right) - f_i\left(\frac{u}{۲^j}\right) g_i\left(\frac{v}{۲^j}\right) - g_i\left(\frac{u}{۲^j}\right) f_i\left(\frac{v}{۲^j}\right)\right\| \\ &\leq \lim_{j\to\infty} ۲^{۲ij}\sigma\left(\frac{u}{۲^j}, \frac{v}{۲^j}\right) = ۰.\end{aligned}$$

بنابراین $k_i(u)k_i(v) = h_i(u)k_i(v) + k_i(u)h_i(v)$. در نتیجه k_i نیز یک $i-f$–همریختی–مشتق متعامد روی فضاهای باناخ متعامد A است. □

در ادامه، پایداری هایرز–اولام را با استفاده از تابع کنترل نوع راسیاس برای $i-f$–همریختی–مشتق متعامد و قضیه‌ی نقطه‌ثابت مورد بررسی قرار می‌دهیم. با پذیرفتن قضیه‌ی ۱.۳، کافیست تابع کنترل نوع راسیاس را وقتی که $s > i$ و $\mu \geq ۰$، جایگزین کنیم.

نتیجه **۲.۳**. فرض کنید نگاشت‌های f_i و g_i تعریف شده بین فضاهای باناخ متعامد A برای $i = ۱, ۲, ۳$ در رابطه‌ی (۸.۲) صدق کند و روابط زیر نیز برای $i = ۱, ۲, ۳$ برقرار باشد

$$\|f_i(uv) - f_i(u)f_i(v)\| \leq \mu(\|u\|^s + \|v\|^s)$$

و

$$\left\|g_i(u)g_i(v) - f_i(u)g_i(v) + g_i(u)f_i(v)\right\| \leq \mu(\|u\|^s + \|v\|^s)$$

آن‌گاه نگاشت‌های یکتای $h_i, k : A \to A$ برای $i = ۱, ۲, ۳$ وجود دارند به طوری که در رابطه‌ی (۵.۲) صدق می‌کنند و h_i برای i $i = ۱, ۲, ۳$-همریختی هستند و k_i یک $f - i$-همریختی-مشتق متعامد است.

در پایان در آخرین ملاحظه این مقاله پایداری $f - i$-همریختی-مشتق متعامد را تحت تابع کنترل نوع JMR-راسیاس بر جبرهای باناخ متعامد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ملاحظه **۳.۳**. فرض کنید f_i و g_i نگاشت‌های تعریف شده بین فضاهای باناخ متعامد A، صادق در رابطه‌ی (۹.۲) باشد و برای $i = ۱, ۲, ۳$ روابط زیر برقرار باشند

$$\|f_i(uv) - f_i(u)f_i(v)\| \leq \mu(\|u\|^s.\|v\|^s)$$

و

$$\left\|g_i(u)g_i(v) - f_i(u)g_i(v) + g_i(u)f_i(v)\right\| \leq \mu(\|u\|^s.\|v\|^s)$$

آن‌گاه برای $i = ۱, ۲, ۳$ نگاشت‌های متعامد یکتای h_i و k_i تعریف شده بین فضاهای باناخ متعامد وجود دارند که صادق در رابطه‌ی (۵.۲) است و h_i، i-همریختی متعامد و k_i یک $f - i$-همریختی-مشتق متعامد است.

فهرست منابع

[۱] ماجانی، حمید، ۱۴۰۰ . بررسی پایداری دستگاهی از معادلات تابعی اویلر-لاگرانژ مکعبی در فضاهای ۲-نرمدار ناارشمیدسی. مجله مدلسازی پیشرفته ریاضی، ۱(۱۱)، صص. ۲۴ - ۱۱. doi:۱۶۸۵.۲۸۵۱۳.۲۰۲۰/jamm.۲۲۰۵۵.۱۰

[2] Alsina, C., and Ger, R., 1998. On Some Inequalities and Stability Results Related to the Exponential Function. *Journal of Inequalities and Applications, 2*(4), pp.373–380. doi:10.1155/s102558349800023x.

[3] Bahraini, A., Askari, G., Eshaghi Gordji, M., and Gholami, R., 2018. Stability Hyperstability of Orthogonally $*$-m-Homomorphisms in Orthogonally Lie C^*-A andlgebras: A Fixed Point Approach. *J. Fixed Point Theory Appl., 22*, 89. doi:10.1007/s11784-018-0571-0.

[4] Bodaghi, A., Pinelas, S., Vediyappan, G., and Gunesekaran, K., 2020. An n-Dimensional Cubic Functional Equation and its Hyers–Ulam Stability. *The Journal of Analysis, 28*, pp.663–682. doi:10.1007/s41478-019-00178-0.

[5] Eshaghi Gordji, M., Ramezani, M., De La Sen, M., and Cho, Y.J., 2017. On Orthogonal Sets and Banach Fixed Point Theorems. *Fixed Point Theory, 18*(2), pp.569–578. doi:10.24193/fpt-ro.2017.2.45.

[6] Găvruta, P., 1994. A Generalization of the Hyers–Ulam–Rassias Stability of Approximately Additive Mappings. *J. Math. Anal. Appl., 184*(3), pp.431–436. doi:10.1006/jmaa.1994.1211.

[7] Hyers, D.H., 1941. On the Stability of the Linear Functional Equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 27*(4), pp.222–224. doi:10.1073/pnas.27.4.222.

[8] Izadi, J., and Samei, M.E., 2025. Solution and Hyperstability of Orthogonally Triple Lie Hom-Derivations. *Journal of Mathematical Extension, 19*(3). doi:0.30495/JME.2025.3227.

[9] Kefayati, Z., Abdeljawad, T., Mukheimer, A., and Alqudah, M.A., 2025. Orthogonal Generalized Lie Bracket of Triple Derivations: Properties and Stability. *Journal of Inequalities and Applications, 2025*, 69. doi:10.1186/s13660-025-03324-4.

[10] Keshavarz, V., and Heydari, M.T., 2024. Hyers–Ulam Stability of Solution for Generalized Lie Bracket of Derivations. *Journal of Mathematics, 2024*(1), 1015443. doi:10.1155/2024/1015443.

[11] Keshavarz, V., Heydari, M.T., and Anderson, D.R., 2025. Stability and Hyperstability of Ternary Hom-Multiplier on Ternary Banach Algebra. *Axioms, 14*(7), 494. doi:10.3390/axioms14070494.

[12] Keshavarz, V., Heydari, M.T., and Anderson, D.R., 2024. Hyers–Ulam Stabilities for mth Differential Operators on H^2_β. *Chaos, Solitons & Fractals, 179*, 114408. doi:10.1016/j.chaos.2023.114443.

[13] Kheawborisut, A., Paokanta, S., Senasukh, J., and Park, C., 2022. Ulam Stability of Hom-Ders in Fuzzy Banach Algebras. *AIMS Mathematics, 7*(9), pp.16556–16568. doi:10.3934/math.2022907.

[14] Mirzavaziri, M., and Moslehian, M.S., 2006. Automatic Continuity of σ-Derivations on C^*-Algebras. *Proc. Amer. Math. Soc., 134*(11), pp.3319–3327. doi:10.1090/S0002-9939-06-08484-3.

[15] Obloza, M., 1993. Hyers Stability of the Linear Differential Equation. *Rocznik Nauk. Dydakt. Prace Mat., 13*, pp.259–270.

[16] Park, C., Donganont, S., and Min, S.W., 2025. Quadratic f-Hom-Ders in Banach Algebra Related to System of Quadratic Functional Equations. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 18*(1), pp.57–79. doi:10.29020/nybg.ejpam.v18i1.5719.

[17] Park, C., Lee, J., and Zhang, X., 2019. Additive s-Functional Inequality and Hom-Derivations in Banach Algebras. *J. Fixed Point Theory Appl., 21*, 18. doi:10.1007/s11784-018-0652-0.

[18] Rassias, J.M., 1982. On Approximation of Approximately Linear Mappings by Linear Mappings. *J. Funct. Anal., 46*(1), pp.126–130. doi:10.1016/0022-1236(82)90048-9.

[19] Rassias, Th.M., 1978. On the Stability of the Linear Mapping in Banach Spaces. *Proc. Amer. Math. Soc., 72*(2), pp.297–300. doi:10.1090/S0002-9939-1978-0507327-1.

[20] Ulam, S.M., 1960. Problems in Modern Mathematics. Chapter IV, Science edn., Wiley, New York.

Hyers-Ulam stability of i-f-hom-ders associate with systems of additive-quadratic-cubic functional equations

Parastoo Heiatian Naeini[(1)] [2]

[(1)] Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P. O. Box 19395-4697, Tehran, Iran

Communicated by: Mohsen Zivari Rezapour

Received: 5 January 2026 Accepted: 10 May 2026

Abstract: There current paper deal to introduce a new concept called systems of orthogonally additive-quadratic-cubic functional equations defined on orthogonally Banach algebras. After that, we introduce the notion of an orthogonally i-f-hom-ders, with $i \in \{1, 2, 3\}$. Finally, using a fixed point method, we prove Hyers–Ulam stability for these systems of orthogonally additive-quadratic-cubic functional equations and orthogonally i-f-hom-ders, employing the main control functions on orthogonally Banach algebras.

Keywords: Orthogonally systems of orthogonally additive-quadratic-cubic functional equations, orthogonally i-f-hom-ders, Hyers-Ulam stability, Orthogonally Banach algebras.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (P. Heiatian Naeini) parastoo.heiatiannaeini@pnu.ac.ir