مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۱۱۵–۱۲۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.50713.2417

شناسایی عملگرهای اتساع روی فضاهای بسوف ناهمسان‌گرد

جهانگیر چشم‌آور [۱]

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵ ، تهران، ایران

دبیر مسئول: امیرحسین صنعت پور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۲۲

چکیده: در این مقاله، ساختار عملگرهای اتساع که روی فضاهای بسوف ناهمسان‌گرد $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ اعمال می‌شوند و با یک ماتریس انبساطی $A \in GL(d,\mathbb{R})$ مرتبط‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا نشان می‌دهیم که گروه ماتریس‌های اتساع که با سیستم A- موجک سازگار هستند، دقیقاً با مرکزساز A در $GL(d,\mathbb{R})$ منطبق است. سپس، تمام ماتریس‌های $C \in GL(d,\mathbb{R})$ را مشخص می‌کنیم که برای آن‌ها عملگر اتساع نرمال شده به صورت $D_C f(x) = |\det C|^{-1} f(C^{-1}x)$ روی فضای $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ کراندار باشد. در نهایت نشان می‌دهیم که عملگر D_C یک ایزومرفیسم روی فضای $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ ایجاد می‌کند اگر و تنها اگر پوشش‌های فرکانسی تولیدشده توسط A و ماتریس مزدوج‌شده آن یعنی $A_C := C^{-T}AC^{T}$ به مفهوم فضاهای تجزیه معادل باشند.

واژه‌های کلیدی: عملگر اتساع، فضای بسوف ناهمسان‌گرد، ماتریس انبساطی، موجک، شبه نرم A- موجک.

رده‌بندی ریاضی: 46E35, 42B35, 42C40, 42C15

۱ مقدمه و نمادها

فضاهای بسوف ناهمسان‌گرد $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ [۲] که با استفاده از یک ماتریس انبساطی $A \in GL(d,\mathbb{R})$ [۳] تعریف می‌شوند، به عنوان مفاهیمی اساسی در آنالیز هارمونیک و پردازش سیگنال‌ها ظاهر می‌شوند. این فضاها توسط اشمایسر [۴] و تریبل [۵] [۵]، دینتلمن [۶] و فارکاس [۷] [۳، ۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. سپس این کلاس از فضاهای تابعی توسط بونیک [۸] [۱] در سال ۲۰۰۵ توسیع یافتند که شامل ماتریس‌های اتساع

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(J.Cheshmavar) j_cheshmavar@pnu.ac.ir

[2] anisotropic Besov spaces
[3] expansive matrix
[4] Schmeisser
[5] Triebel
[6] Dintelmann
[7] Farkas
[8] Bownik

انبساطی دلخواه نیز می‌باشد. این فضاها، فضاهای بسوف همسان‌گرد کلاسیک را با وارد کردن یک مقیاس‌گذاری جهت‌دار تعمیم می‌دهند، و در نتیجه چارچوبی انعطاف‌پذیر برای نمایش ناهمسان‌گردی‌های هندسی در داده‌ها و توابع فراهم می‌کنند، مقالات [۲، ۶] را ببینید. ساختار اصلی این فضاها، بر اساس مفهوم سیستم A- موجک است که امکان تجزیه و بازسازی را از طریق اتساع‌ها و انتقال‌ها که توسط ماتریس A انجام می‌گیرد، فراهم می‌کند [۲]. برای بینش‌های نظری و همچنین کاربردها، بررسی گروه تبدیلات خطی که به طور پیوسته یا ایزومرفیسم بر این فضاهای بسوف ناهمسان‌گرد عمل می‌کنند، اهمیت بسزائی دارد. خصوصا، مطالعه عملگرهای اتساع به صورت زیر

$$D_C f(x) := |\det C|^{-1/2} f(C^{-1}x), \quad C \in GL(d,\mathbb{R}), \tag{۱.۱}$$

سوالات طبیعی‌ای را درباره ماتریس‌هایی که نرم فضای بسوف را حفظ می‌کنند و عملگرهای خطی کراندار که روی $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ ایجاد می‌کنند، مطرح می‌سازد. در این مقاله، ابتدا زیرگروه اتساع $\mathrm{Dil}(A)$ از $GL(d,\mathbb{R})$ را که با سیستم A- موجک مرتبط است، شناسایی کرده و نشان می‌دهیم که دقیقاً برابر با مرکزساز A است، یعنی مجموعه‌ای از ماتریس‌هایی که با A جابجا می‌شوند (گزاره‌ء ۱.۲ را ببینید). این نتیجه‌ء ساختاری، محدودیت‌های جبری حاکم بر اتساع های ناهمسان‌گرد سازگار با ماتریس مقیاس داده‌شده را روشن می‌کند. سپس، تمام ماتریس‌های اتساع C را مشخص می‌کنیم که عملگر D_C برای آن‌ها بر فضای بسوف همگن ناهمسان‌گرد $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ کراندار باشد (گزاره‌ء ۳.۲ را ببینید). این رویکرد نشان می‌دهد که این ماتریس‌ها به طور کامل به تعامل بین اتساع A و ماتریس C مرتبطاند، و شرایط لازم و کافی برای کرانداری را فراهم می‌کنند. در پایان، با استفاده از چارچوب فضاهای تجزیه [۹] که در منابع [۲، ۶] اشاره شده‌اند، یک معیار ایزومرفیسمی را اثبات می‌کنیم، بدین معنی که به ازای هر α, p, q، عملگر D_C یک ایزومرفیسم بر $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ ایجاد می‌کند اگر و تنها اگر پوشش فرکانسی [۱۰] القاشده توسط A با پوشش القاشده توسط ماتریس مزدوج‌شده $A_C := C^{-T}AC^T$ معادل باشد (گزاره‌ء ۴.۲ را ببینید). این نتیجه، ارتباط اساسی بین ویژگی‌های هندسی و رفتار تابعی-تحلیلی عملگرهای اتساع را برقرار می‌سازد و دیدگاه جامعی درباره‌ء مقیاس ناهمسان‌گردی در فضاهای بسوف فراهم می‌کند. همچنین، این نتیجه پیوندی بنیادی بین ساختار جبری و هندسه فضای فرکانسی در فضاهای تابعی ناهمسان‌گرد را آشکار می‌سازد. همه‌ء نمادها و مفاهیم تخصصی این مقاله از منبع [۲] آورده شده است. خصوصا، $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ نمایانگر فضای توابع شوارتس [۱۱] و $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ دوگان آن، یعنی فضای توزیع‌های ملایم شده [۱۲] است. همچنین، منظور از $a \asymp b$ این است که a و b با ثابت‌های ضربی قابل مقایسه و هم ارزند، یعنی، ثابت‌های مثبت A و B وجود دارند به‌طوری که $A.b \le a \le B.b$.

تعریف ۱.۱. [۲] ماتریس $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ را ماتریس انبساطی گویند، اگر همه‌ء مقادیر ویژه‌ء آن (احتمالاً مختلط) دارای شرط $|\lambda| > 1$ باشند.

تعریف ۲.۱. [۲] اگر $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ یک ماتریس انبساطی باشد، تابع $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ را یک A- موجک گویند اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\mathrm{supp}(\widehat{\psi}) \subset [-1,1]^d \setminus \{0\}$

ب) $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi}((A^T)^{-j}\xi)\right| > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

تعریف ۳.۱. [۲] فرض کنید A ماتریسی انبساطی، $\alpha \in \mathbb{R}$ و $0 < q \le \infty$ باشد. فضای دنباله‌ای $\ell^q_{v_{\alpha,A}}(\mathbb{Z})$ شامل همه‌ء دنباله‌های $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ است، به طوری که $(|\det(A)|^{\alpha j}c_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^q$ و این فضا با (شبه)نرم طبیعی آن مجهز می‌شود.

تعریف فضاهای بسوف ناهمسان‌گرد مبتنی بر ماتریس‌های انبساطی است. در خصوص ساختار این فضاها از منبع [۲] استفاده شده است.

تعریف ۴.۱. [۲] فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}$، $0 < p,q \le \infty$، A یک ماتریس انبساطی و ψ یک A- موجک با مکمل پائین گذر ψ_0 باشد. برای $j \in \mathbb{Z}$ فرض کنید: $\psi_j(x) := |\det(A)|^j \psi(A^j x)$. برای $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ (شبه)نرم بسوف ناهمسان‌گرد همگن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} := \left\| \left(\|f * \psi_j\|_p \right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q_{v_{\alpha,A}}},$$

در اینجا $\|\cdot\|_p$ به معنی (شبه)نرم فضای $L^p(\mathbb{R}^d)$ است. فضای $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ شامل تمام توزیع‌های ملایم شده f است به‌طوری‌که:

$$\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} < \infty$$

[9] decomposition spaces
[10] frequency covering
[11] Schwartz functions
[12] tempered distributions

تعریف **۵.۱**. [۲] یک شبه‌نرم A- همگن، نگاشت بورل $\rho_A : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ است که در شرایط زیر صدق کند:

الف) (صفر بودن فقط در مبدأ): $\rho_A(x) = 0 \iff x = 0$

ب) ($A-$ همگنی): $\rho_A(Ax) = |\det(A)|\rho_A(x)$

ج) (نامساوی مثلثی): ثابت $C > 0$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\rho_A(x + y) \le C\left(\rho_A(x) + \rho_A(y)\right).$$

۲ نتایج اصلی

مجموعهء زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{Dil}(A) := \left\{C \in GL(d, \mathbb{R}) : \ D_C : \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) \to \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) \text{ ایزومرفیسم است}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ p, q \in (0, \infty]\right\}.$$

گزاره **۱.۲**. فرض کنید $A \in GL(d, \mathbb{R})$ ماتریسی انبساطی و ψ یک A- موجک باشد. خانوادهء $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_j(x) := |\det A|^j \psi(A^j x),$$

آنگاه مجموعهء $\mathrm{Dil}(A)$ یک زیرگروه از $GL(d, \mathbb{R})$ و دقیقاً با مرکزساز A برابر است، یعنی:

$$\mathrm{Dil}(A) = Z(A) := \{C \in GL(d, \mathbb{R}) \ : \ AC = CA\}.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathrm{Dil}(A)$ یک زیرگروه $GL(d, \mathbb{R})$ است. چون $D_I f = f$، بنابراین $I \in \mathrm{Dil}(A)$. اگر $C \in \mathrm{Dil}(A)$، آنگاه D_C ایزومرفیسم و معکوس آن $D_{C^{-1}}$ است. بنابراین، $C^{-1} \in \mathrm{Dil}(A)$. اگر $C_1, C_2 \in \mathrm{Dil}(A)$، آنگاه $D_{C_1 C_2} = D_{C_1} \circ D_{C_2}$ نیز یک ایزومرفیسم است، بنابراین $C_1 C_2 \in \mathrm{Dil}(A)$. در نتیجه $\mathrm{Dil}(A) \le GL(d, \mathbb{R})$.
اکنون به بخش اصلی قضیه می‌پردازیم، ثابت می‌کنیم که $C \in \mathrm{Dil}(A)$ اگر و تنها اگر $AC = CA$، یعنی $C \in Z(A)$.
فرض کنید $C \in Z(A)$، یعنی $AC = CA$. برای $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$، داریم:

$$(D_C f) * \psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} D_C f(y) \psi_j(x - y)\, dy.$$

با تغییر متغیر $y = Cz \Rightarrow dy = |\det C| dz$ داریم:

$$(D_C f) * \psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \psi_j(x - Cz)\, dz.$$

بنابراین

$$(D_C f) * \psi_j(x) = (f * (\psi_j \circ C))(C^{-1}x).$$

با گرفتن نرم L^p داریم:

$$\|(D_C f) * \psi_j\|_{L^p} = |\det C|^{\frac{1}{p}-1} \cdot \|f * (\psi_j \circ C)\|_{L^p},$$

از آنجا که $AC = CA$، داریم:

$$\psi_j \circ C = |\det A|^j \psi(A^j C \cdot) = |\det A|^j \psi(CA^j \cdot),$$

بنابراین تبدیل $\psi_j \to \psi_j \circ C$ فقط شامل تغییر خطی است و ویژگی‌های محلی‌سازی فرکانسی حفظ می‌شوند. برای توضیح بیشتر، بدین معنی که وقتی تبدیل خطی C را به مجموعه‌ای از توابع خاص اعمال می‌کنیم، رفتار این توابع به‌طور کلی تغییر نمی‌کند (در مورد محلی سازی فرکانسی) و اثر آن تنها به تغییرات محدود در هم‌پوشانی و ثابت‌هایی که به C بستگی دارند، محدود می‌شود. در واقع مجموعهء $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$

یک خانواده لی‌تل‌وود–پلی [۱۳] است که با A سازگار است. بدین معنی که خانوادهء توابع ψ_j به‌طور خاص با ساختار A تنظیم شده‌اند. وقتی تبدیل C را به این توابع اعمال می‌کنیم و مجموعهء $\{\psi_j \circ C\}_{j\in\mathbb{Z}}$ را می‌سازیم، این مجموعه نیز همان ویژگی‌ها را دارد و تنها ممکن است هم‌پوشانی بین اعضای این مجموعه محدود باشد (یعنی تغییرات در دقت یا هم‌پوشانی‌های بسیار زیاد پیش نمی‌آید). وقتی تبدیل خطی C را به ψ_j اعمال می‌کنیم (یعنی $\psi_j \circ C$)، فرکانس‌های آن تغییر نمی‌کند، به جز اینکه تابع به‌وسیلهء یک تغییر خطی تحت تأثیر قرار می‌گیرد. این بدین معنی است که، از نظر محلی سازی فرکانسی و با یک تغییرات خاص ناشی از C، $\psi_j \circ C$ همان رفتار ψ_j را دارد. در نتیجه:

$$\|f * (\psi_j \circ C)\|_{L^p} \asymp \|f * \psi_j\|_{L^p} .$$

همچنین چون $AC = CA$، ساختار اتساع حفظ شده و وزن‌های $v_{\alpha,A}(j) = |\det A|^{\alpha j}$ بدون تغییر باقی می‌مانند. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \|D_C f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} &= \Big\| \big(v_{\alpha,A}(j)\|(D_C f) * \psi_j\|_{L^p}\big)_j \Big\|_{\ell^q} \\ &\asymp |\det C|^{\frac{1}{p}-1} \Big\| \big(v_{\alpha,A}(j)\|f * \psi_j\|_{L^p}\big)_j \Big\|_{\ell^q} \\ &= |\det C|^{\frac{1}{p}-1} \|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} . \end{aligned}$$

چون $|\det C|^{\frac{1}{p}-1} > 0$ است، بنابراین D_C یک ایزومرفیسم روی $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ است، به عبارت دیگر $C \in \mathrm{Dil}(A)$. اکنون فرض کنید $C \in \mathrm{Dil}(A)$، یعنی

$$D_C : f \mapsto |\det C|^{-1} f(C^{-1}\cdot) ,$$

یک ایزومرفیسم بر روی فضای $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ باشد. ماتریس جدید $A' \in GL(d,\mathbb{R})$ را به‌صورت $A' := C^{-1}AC$ تعریف می‌کنیم. حال توجه کنید که

$$D_C \circ D_A = D_{CAC^{-1}} \circ D_C = D_{A'} \circ D_C ,$$

این بیان می‌کند که عملگر A تحت مزدوج‌سازی با C به عملگر A' تبدیل می‌شود. از آنجا که $C \in \mathrm{Dil}(A)$ در نتیجه:

$$D_C : \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) \to \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$$

یک ایزومرفیسم است، اما همچنین داریم:

$$D_C \circ D_{A^j} = D_{(CAC^{-1})^j} \circ D_C = D_{(A')^j} \circ D_C ,$$

بنابراین ترکیب با D_{A^j} تحت D_C مزدوج می‌شود، و در نتیجه

$$D_C : \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) \longrightarrow \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A')$$

یک ایزومرفیسم است. در واقع به طور دقیق‌تر، برای هر تابع $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ داریم:

$$D_C f \in \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A') \iff f \in \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) .$$

اما از قبل داریم $D_C : \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) \to \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ یک ایزومرفیسم است. بنابراین، با استفاده از انتقال‌پذیری

$$\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) = \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A'), \quad \forall \alpha, p, q . \tag{۱.۲}$$

همچنین، با استفاده از نظریهء رده‌بندی فضاهای بسوف همگنِ ناهمسان‌گرد (همان‌گونه که در منبع [۲] آمده است)، اگر

$$\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) = \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(B), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, 1 \le p, q \le \infty ,$$

و ماتریس‌های A, B هر دو انبساطی باشند، آنگاه $A = B$. از آنجا که هر دو ماتریس A و $A' = C^{-1}AC$ انبساطی هستند، از فرمول (۱.۲) نتیجه می گیریم که

$$A = A' = C^{-1}AC \quad \Rightarrow \quad AC = CA ,$$

و بنابراین $C \in Z(A)$. □

[13] Littlewood-Paley

در گزارهء بعدی، به تحلیل دقیق عملگر اتساع D_C روی فضاهای بسوف ناهمسان‌گرد $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ می‌پردازیم و شرایطی را تعیین می‌کنیم که تحت آن این عملگر یک عملگر خطی کراندار باقی می‌ماند. ابتدا چند نکتهء زیر را داریم:

ملاحظه **۲.۲**. الف) این‌که D_C فضاهای $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ را برای همهء α, p, q حفظ می‌کند، شرطی بسیار قوی است. این شرط عملاً می‌گوید که ساختار تجزیهء فرکانسی به‌طور کامل تحت تبدیلات C ناورداست. این اتفاق فقط زمانی می‌افتد که C با A جابجایی‌پذیر باشد، یعنی $AC = CA$.

ب) این نتیجه، تعامل عمیقی بین ساختار جبری (مرکزسازها در گروه ماتریسی) و هندسه‌ی فضاهای تابعی (به طریق نظریهء پوشش‌های فرکانسی و فضاهای تجزیه) را نشان می‌دهد.

ج) شرط برابری فضاها برای همهء پارامترها (یعنی همه‌ی α, p, q) حیاتی است. اگر فقط برای پارامترهای خاصی برقرار باشد، ممکن است A و A' متفاوت باشند.

اکنون هدف این است که تمام ماتریس‌های $C \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ را بیابیم که برای آن‌ها D_C به‌صورت عملگری کراندار روی فضاهای $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ عمل کند. یعنی، $\|D_C f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} \leq M \|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)}$.

گزاره **۳.۲**. فرض کنید $A \in GL(d, \mathbb{R})$ یک ماتریس انبساطی، ψ یک A- موجک، $0 < p, q \leq \infty$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ ثابت باشد. عملگر اتساع D_C را برای $C \in GL(d, \mathbb{R})$ در نظر بگیرید. آنگاه مجموعهء ماتریس‌های C که برای آن‌ها D_C یک عملگر خطی کران‌دار روی $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ تعریف می‌کند، مجموعهء توان‌های A^{-1} به شکل $\{A^{-m} : m \in \mathbb{Z}\}$ است. به عبارت دیگر، عملگرهای D_C روی $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ کران‌دار هستند اگر و تنها اگر عدد صحیح m وجود داشته باشد به طوری که C به شکل A^{-m} باشد.

اثبات. نشان می‌دهیم که عملگر D_C روی $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ کران‌دار است اگر و تنها اگر یک نگاشت یک‌به‌یک $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که:

$$(A^*)^{-j}(C^{-1})^* = (A^*)^{-\pi(j)} ,$$

و وزن‌های دنباله‌ای $v_{\alpha,A}$ و $v_{\alpha,A} \circ \pi^{-1}$ نرم‌های وزنی ℓ^q معادل را تعریف کنند. برای شروع، داریم:

$$(D_C f)(x) = |\det C|^{-1} f(C^{-1}x) .$$

بنابراین،

$$(D_C f) * \psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (D_C f)(y)\psi_j(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} |\det C|^{-1} f(C^{-1}y)\psi_j(x-y)\, dy .$$

با تغییر متغیر $z = C^{-1}y$، $dy = |\det C| dz$. در نتیجه داریم:

$$(D_C f) * \psi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\psi_j(x - Cz)\, dz = (f * \tilde{\psi}_j)(C^{-1}x) ,$$

که در آن $\tilde{\psi}_j(z) := \psi_j(Cz)$. از آنجا که نرم L^p در رابطه $\|g \circ C^{-1}\|_p = |\det C|^{1/p}\|g\|_p$ صدق می‌کند، در نتیجه:

$$\|(D_C f) * \psi_j\|_p = \|(f * \tilde{\psi}_j)(C^{-1}\cdot)\|_p = |\det C|^{1/p}\|f * \tilde{\psi}_j\|_p .$$

برای تبدیل فوریه $\psi_j(x) = |\det A|^j \psi(A^j x)$ ، داریم:

$$\widehat{\psi_j}(\xi) = \widehat{\psi}\big((A^*)^{-j}\xi\big) .$$

از آنجا که $\tilde{\psi}_j(z) = \psi_j(Cz)$ ، داریم:

$$\widehat{\tilde{\psi}_j}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iz\cdot\xi}\psi_j(Cz)\, dz = |\det C|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iC^{-1}y\cdot\xi}\psi_j(y)\, dy ,$$

اما $C^{-1}y \cdot \xi = y \cdot (C^{-1})^*\xi$ بنابراین:

$$\widehat{\tilde{\psi}_j}(\xi) = |\det C|^{-1}\widehat{\psi_j}\big((C^{-1})^*\xi\big) = |\det C|^{-1}\widehat{\psi}\big((A^*)^{-j}(C^{-1})^*\xi\big) .$$

درنتیجه:

$$\operatorname{supp}(\widehat{\tilde{\psi}_j}) \subseteq \{\xi : (A^*)^{-j}(C^{-1})^*\xi \in \operatorname{supp}(\widehat{\psi})\} .$$

تکیه‌گاه $\widehat{\psi_k}$ به صورت زیر است:

$$\operatorname{supp}(\widehat{\psi_k}) = (A^*)^k(\operatorname{supp}(\widehat{\psi})) .$$

برای اینکه $\tilde{\psi}_j$ مانند $\psi_{\pi(j)}$ رفتار کند، تکیه‌گاه‌ها باید یکسان باشند، یعنی یک نگاشت یک‌به‌یک $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که:

$$\operatorname{supp}(\widehat{\tilde{\psi}_j}) = \operatorname{supp}(\widehat{\psi_{\pi(j)}}) .$$

با جایگذاری داریم:

$$(A^*)^{-j}(C^{-1})^*\operatorname{supp}(\widehat{\psi}) = (A^*)^{-\pi(j)}\operatorname{supp}(\widehat{\psi}) .$$

با توجه به این که $\operatorname{supp}(\widehat{\psi})$ ثابت است، $(A^*)^{-j}(C^{-1})^* = (A^*)^{-\pi(j)}$ روی تکیه‌گاه برقرار است. بنابراین:

$$(C^{-1})^* = (A^*)^{j-\pi(j)} .$$

از آنجا که سمت چپ این معادله از j مستقل است، این تنها در صورتی ممکن است که نگاشت $j \mapsto j - \pi(j)$ ثابت، مثلاً برابر با m باشد. بنابراین $\pi(j) = jm$ و $(C^{-1})^* = (A^*)^m$. به طور معادل، $C^* = (A^*)^{-m}$. اکنون بسوف نرم $D_C f$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\|D_C f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} = \left\|(\|(D_C f) * \psi_j\|_p)_{j\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q_{v_{\alpha,A}}} .$$

از محاسبات بالا و معادله نرم L^p ، داریم:

$$\|(D_C f) * \psi_j\|_p = |\det C|^{1/p}\|f * \tilde{\psi}_j\|_p = |\det C|^{1/p}\|f * \psi_{\pi(j)}\|_p .$$

با تغییر اندیس $i = \pi(j)$ داریم:

$$\|D_C f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} = |\det C|^{1/p}\left\|(\|f * \psi_i\|_p)_{i\in\mathbb{Z}}\right\|_{\ell^q_{v_{\alpha,A}\circ\pi^{-1}}} .$$

اکنون به یاد می‌آوریم که $v_{\alpha,A}(j) = |\det A|^{\alpha j}$ ، بنابراین:

$$(v_{\alpha,A} \circ \pi^{-1})(i) = |\det A|^{\alpha\pi^{-1}(i)} .$$

معادل بودن نرم‌ها $\|\cdot\|_{\ell^q_{v_{\alpha,A}}} \approx \|\cdot\|_{\ell^q_{v_{\alpha,A}\circ\pi^{-1}}}$ برقرار است اگر و فقط اگر وزن‌ها با یک عامل کران‌دار تفاوت داشته باشند، یعنی ثابت‌های $c, C > 0$ وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که:

$$c \le \frac{v_{\alpha,A}(j)}{v_{\alpha,A}(\pi(j))} = |\det A|^{\alpha(j-\pi(j))} \le C, \quad \forall j .$$

از آنجا که $\pi(j) = j - m$، این نسبت برابر $|\det A|^{\alpha m}$ است که مقداری ثابت است، بنابراین نرم‌ها معادل هستند. در نهایت، D_C کران‌دار است اگر و تنها اگر $C^* = (A^*)^{-m}$، این یعنی $C = (A^{-1})^m = A^{-m}$. بنابراین، مجموعهء تمام ماتریس‌های این‌چنینی به صورت زیر است:

$$Powers(A^{-1}) := \{A^{-m} : m \in \mathbb{Z}\} .$$

□

در پایان این بخش، ادعای اصلی در مورد عملگرهای اتساع روی فضاهای بسوف ناهمسان‌گرد را از دیدگاه فضاهای تجزیه بررسی و اثبات می‌کنیم. نشان می‌دهیم که عملگر اتساع D_C یک ایزومرفیسم روی فضاهای $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ برای همهء پارامترها (p, q, α) است اگر و فقط اگر پوشش های فرکانسی زیر در فضای تجزیه، معادل باشند:

$$\mathcal{Q}_A = \{A^j Q_0\}_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \mathcal{Q}_{A_C} = \{A_C^j Q_0\}_{j\in\mathbb{Z}} , \tag{۲.۲}$$

که در اینجا $A_C := C^{-T}AC^T$.

گزاره **۴.۲**. فرض کنید $A \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ یک ماتریس انبساطی و $C \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ دلخواه باشد. ماتریس A_C را به‌صورت $A_C := C^{-T}AC^T$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $Q_\circ \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\circ\}$ یک مجموعه باز کراندار و ثابت باشد. پوشش‌های فرکانسی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Q}_A := \{A^j Q_\circ : j \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathcal{Q}_{A_C} := \{A_C^j Q_\circ : j \in \mathbb{Z}\}\ .$$

آنگاه عملگر اتساع $D_C f(x) := \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A) \to \dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ برای همهء پارامترهای $\alpha \in \mathbb{R},\ \circ < p,q \le \infty$ یک هومومرفیسم است اگر و فقط اگر پوشش‌های $\mathcal{Q}_A$ و $\mathcal{Q}_{A_C}$ به معنای فضای تجزیه معادل باشند.

اثبات. فرض کنید $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. تبدیل فوریه عملگر اتساع D_C، در رابطهء زیر صدق می‌کند:

$$\widehat{D_C f}(\xi) = \widehat{f}(C^T\xi)\ . \tag{۳.۲}$$

که از تغییر متغیر در انتگرال فوریه بصورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(C^{-1}x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi i Cy\cdot\xi}|\det C|^{-1}\,dy = \widehat{f}(C^T\xi)\ .$$

نرم بسوف از طریق محلی‌سازی در حوزهء فرکانس تعریف می‌شود. فرض کنید $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ یک افراز قابل قبول و کراندار واحد [۱۴] $(BAPU)$ متناسب با پوشش $\mathcal{Q}_A$ باشد. یعنی برای هر $\varphi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{\circ\})$،

$$\mathrm{supp}(\varphi_j) \subset A^j Q_\circ, \quad \sum_j \varphi_j(\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{\circ\}\ .$$

برای جزئیات بیشتر مفهوم $(BAPU)$ به [۲] مراجعه کنید. آنگاه نرم بسوف $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} := \left\| \left(\|\mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{f})\|_{L^p} \right)_{j\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^q_{v_{\alpha,A}}}\ .$$

با استفاده از رابطهء (۳.۲) داریم:

$$\varphi_j(\xi)\widehat{D_C f}(\xi) = \varphi_j(\xi)\widehat{f}(C^T\xi)\ .$$

حال تابع جدید $\psi_j(\eta) := \varphi_j((C^T)^{-1}\eta$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری که:

$$\varphi_j(\xi)\widehat{f}(C^T\xi) = \psi_j(\eta)\widehat{f}(\eta)\ ,$$

که در آن $\eta = C^T\xi$. بنابراین، داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi_j \widehat{D_C f}) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j \widehat{f}) = f * \check{\psi}_j,$$

که در آن $\check{\psi}_j$ تبدیل فوریهء معکوس ψ_j است، و در نتیجه:

$$\|D_C f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)} = \left\| \left(\|f * \check{\psi}_j\|_{L^p} \right)_j \right\|_{\ell^q_{v_{\alpha,A}}}\ .$$

با استفاده از ساختار، تکیه‌گاه هر ψ_j به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{supp}(\psi_j) = C^T \cdot \mathrm{supp}(\varphi_j) \subseteq C^T A^j Q_j = C^T A^j Q_\circ\ .$$

این بدان معناست که تکیه‌گاه به مجموعه‌های زیر منتقل شده است:

$$Q_\circ = (C^T A (C^T)^{-1})^j \cdot C^T Q_\circ = (A_C)^j \cdot Q'_\circ\ ,$$

[14] bounded admissible partition of unity

که در آن $Q'_\circ := C^T Q_\circ$ و $A_C := C^{-T} A C^T$.

بنابراین، پوشش جدید مرتبط با $D_C f$ به‌صورت $\mathcal{Q}' := \{(A_C)^j Q'_\circ : j \in \mathbb{Z}\}$ است که دقیقاً Q_{A_C} است. اکنون یک نتیجهء کلیدی از نظریه فضاهای تجزیه را به‌یاد می‌آوریم (برای جزئیات بیشتر به [۲، ۶] مراجعه کنید): اگر دو پوشش $\mathcal{Q} = \{Q_j\},\ \mathcal{P} = \{P_j\}$ در شرط زیر صدق کنند:

$$\exists\, L > \circ : \forall j, \exists k \text{ با } Q_j \subset P_k \text{ و } \#\{j : Q_j \cap P_k \neq \emptyset\} \leq L\ ,$$

آنگاه فضاهای تجزیهء ساخته‌شده نسبت به $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{P}$ با نرم‌های معادل یکسان هستند. بعلاوه، اگر یک تبدیل خطی وارون‌پذیر T وجود داشته باشد به‌طوریکه $\mathcal{P} = T\mathcal{Q} := \{TQ_j\}$، آنگاه $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$. بنابراین:

$$\mathcal{Q}_{A_C} = \{(A_C)^j Q_\circ\}, \quad \mathcal{Q}' = \{(A_C)^j Q'_\circ\}\ ,$$

که در آن $Q'_\circ = C^T Q_\circ$. از آنجا که $Q_\circ$ و $Q'_\circ$ با یک تبدیل دوسویی خطی مرتبط هستند و $Q_\circ \subset \mathbb{R}^d \setminus \{\circ\}$، در نتیجه:

$$\mathcal{Q}_{A_C} \sim \mathcal{Q}' \sim \mathcal{Q}_A \iff \text{فضاهای تجزیهء مربوطه برابر باشند}\ .$$

از آنجا که نرم‌های فضای تجزیه توسط پوشش فرکانسی و $BAPU$ تعیین می‌شوند و $BAPU$ تبدیل‌شده $\{\psi_j\}$ نیز هموار و تابع $\mathcal{Q}_{A_C}$ است، داریم:

$$\|D_C f\|_{\dot{B}^\alpha_{p,q}(A)} \asymp \|f\|_{\dot{B}^\alpha_{p,q}(A)}\ ,$$

اگر و تنها اگر پوشش‌های فرکانسی $\mathcal{Q}_A$ و $\mathcal{Q}_{A_C}$ معادل باشند، یعنی $\mathcal{Q}_A \sim \mathcal{Q}_{A_C}$. بنابراین D_C برای هر (p, q, α) یک هومومرفیسم روی $\dot{B}^\alpha_{p,q}(A)$ است. □

در کاربرد، برای بررسی این‌که آیا عملگر اتساع D_C ساختار فضای $\dot{B}^\alpha_{p,q}(A)$ را تغییر نمی‌دهد، کافیست بررسی کنیم که آیا پوشش های فرکانسی $\mathcal{Q}A$ و $\mathcal{Q}A_C$ معادل هستند یا نه. این بررسی به‌جای تحلیل دقیق توابع، به سطح ساختار فرکانسی کلی فضای تابعی منتقل می‌شود.

۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله، ماتریس‌هایی که برای آنها عملگر های اتساع روی فضاهای بسوف کراندارند، مشخص گردید، همچنین شرط لازم و کافی برای ایزومرفیسم بودن چنین عملگرهایی برحسب پوشش‌های فرکانسی تولید شده توسط ماتریس انبساطی متناظر و مزدوج شده آن به مفهوم فضاهای تجزیه بدست آمد.

فهرست منابع

[1] Bownik, M., 2005. Atomic and molecular decompositions of anisotropic Besov spaces, *Math. Z.*, 250 **3**, pp. 539–571. doi: 10.1007/s00209-005-0765-1

[2] Cheshmavar, J. and Führ, H., 2020. A classification of anisotropic Besov spaces, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **49** pp. 863-896. doi: 10.1016/j.acha.2019.04.006

[3] Dintelmann, P., 1995. Classes of Fourier multipliers and Besov-Nikolskij spaces, *Math. Nachr.*, **173** pp. 115–130. doi: 10.1002/mana.19951730108

[4] Farkas, W., 2000. Atomic and subatomic decompositions in anisotropic function spaces, *Math. Nachr.*, **209** pp. 83–113. doi: 10.1002/(SICI)1522-2615(200001)209:1

[5] Schmeisser, H.J. and Triebel, H., *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Ltd., Chicheste, 1987.

[6] Voigtlaender, F., 2023. *Embeddings of decomposition spaces*, Memoirs of the American Math. Soc. **287**, pp. 1-253. doi: Not available.

CHARACTERIZATION OF DILATION OPERATORS ON ANISOTROPIC BESOV SPACES

Jahangir Cheshmavar [15]

Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O.Box: 19395-4697, Tehran, Iran

Communicated by: Amir Hossain Sanatpour

Received: 25 September 2025 Accepted: 12 June 2026

Abstract: In this paper, we investigate the structure of dilation operators acting on anisotropic homogeneous Besov spaces $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ associated with an expansive matrix $A \in GL(d,\mathbb{R})$. We first establish that the group of dilation matrices compatible with the A-wavelet system coincides with the centralizer of A in $GL(d,\mathbb{R})$. We then characterize all matrices $C \in GL(d,\mathbb{R})$ for which the normalized dilation operator $D_C f(x) = |\det C|^{-1} f(C^{-1}x)$ is bounded on $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$. Finally, we show that D_C induces an isomorphism on $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}(A)$ for all parameters (α, p, q) if and only if the frequency coverings generated by A and by the conjugated matrix $A_C := C^{-T}AC^{T}$ are equivalent in the sense of decomposition spaces.

Keywords: Dilation operator, Anisotropic Besov space, Expansiv matrix, Wavelet, A-homogeneous quasi-norm.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[15]Corresponding author
E-mail addresses: (J. Cheshmavar) j_cheshmavar@pnu.ac.ir