مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۱۲۴–۱۴۴

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2026.50122.2383

یک روش عددی بر پایهٔ توابع کلاهی مکعبی برای حل دسته‌ای از معادلات انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری مبتنی بر حرکت براونی کسری چندبعدی

زهرا زارعی، افشین بابائی[1]، سمیه نعمتی و حسن رنجبر

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

دبیر مسئول: محسن زیوری رضاپور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۰۹

چکیده: در این مقاله، یک روش عددی بر پایهٔ توابع کلاهی مکعبی برای حل دسته‌ای از معادلات انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری ارائه می‌شود که این معادلات توسط حرکت براونی کسری چندبعدی با پارامتر هرست $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ هدایت می‌شوند. مشتق کسری از نوع کاپوتو در نظر گرفته می‌شود. ابتدا، تقریبی از مشتق کاپوتوی تابع مجهول با ضرایب نامشخص براساس توابع پایه‌ای در نظر گرفته می‌شود. سپس، با توجه به این تقریب و خواص مشتق کاپوتو و انتگرال ریمان–لیوویل، تقریبی برای جواب و سایر توابع موجود در معادله معرفی می‌شود. با جایگذاری این تقریب‌ها در معادله و با استفاده از نقاط گره‌ای مناسب به‌همراه تقریب پسرو برای شبیه‌سازی نویز گاوسی کسری، معادلهٔ مد نظر به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌شود. دستگاه حاصل با توجه به خواص توابع کلاهی مکعبی و ماتریس عملیاتی انتگرال آنها، دارای پیچیدگی محاسباتی پایینی است. با حل این دستگاه، تقریبی از جواب مسئله به دست می‌آید. در ادامه، تحلیل خطای روش بررسی شده و در پایان، چند مثال عددی برای تأیید کارایی روش پیشنهادی ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری، حرکت براونی کسری چندبعدی، توابع کلاهی مکعبی، ماتریس عملیاتی.

رده‌بندی ریاضی: 60H05; 60H30; 60H20; 60H35

[1] نویسنده مسئول مقاله

رایانامه:
z.zarei05@umail.umz.ac.ir (Z. Zarei), babaei@umz.ac.ir (A. Babaei), s.nemati@umz.ac.ir (S. Nemati), h.ranjbar@umail.umz.ac.ir (H. Ranjbar)

۱ مقدمه

مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، مهندسی و زیستی به کمک معادلات تابعی انجام می‌شود. این معادلات طیف گسترده‌ای از روابط ریاضی ازجمله معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات انتگرال، معادلات انتگرال–دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل کسری را شامل می‌شوند. ازآنجاکه در بسیاری از موارد حل تحلیلی این معادلات امکان‌پذیر نیست، توسعهٔ روش‌های عددی دقیق و کارآمد همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. در این زمینه، روش‌های متنوعی نظیر روش هم‌مکانی ماتریس لِرچ [۶]، روش موجک [۳، ۲۷، ۳۱]، روش بی‌اسپلاین مرتبهٔ پنجم [۳۶] و روش گالرکین [۱، ۲] ارائه شده‌اند. در دهه‌های اخیر، با گسترش مدل‌سازی تصادفی و توسعهٔ محاسبات عددی، توجه پژوهشگران از معادلات تعینی به معادلات تصادفی معطوف شده است. این معادلات ابزاری مؤثر برای توصیف پدیده‌های تصادفی در حوزه‌های مختلفی همچون فیزیک [۸]، مهندسی [۱۲]، زیست‌شناسی [۱۸]، ریاضی مالی [۷، ۲۶] و اقتصاد [۳۳] هستند. با توجه به دشواری حل تحلیلی این معادلات، روش‌های عددی متعددی برای تقریب پاسخ آن‌ها توسعه یافته است؛ ازجمله روش‌های هم‌مکانی [۳۵]، ماتریس‌های عملیاتی [۱۷]، ماتریس عملیاتی لوکاس [۲۹]، ماتریس عملیاتی جینوچی [۳۰]، چندجمله‌ای‌های اویلر [۲۱]، روش بی‌اسپلاین مرتبهٔ پنجم [۳۲] و روش‌های مبتنی بر توابع کلاهی [۱۵]. اخیراً، معادلات تصادفی کسری به‌دلیل توانایی در مدل‌سازی پدیده‌های دارای حافظهٔ بلندمدت و رفتارهای غیرمحلی، به‌ویژه در حضور مشتق‌های کسری از نوع کاپوتو، مورد توجه قرار گرفته‌اند. حل تحلیلی این معادلات معمولاً امکان‌پذیر نیست؛ ازاین‌رو، محققان رویکردهای عددی گوناگونی را پیشنهاد کرده‌اند. برای نمونه، روش اویلر [۹]، روش مبتنی بر توابع بی‌اسپلاین مکعبی [۲۰] و روش تفاضلات متناهی [۱۶] ازجمله روش‌های متداول هستند.

مؤمن‌زاده و همکاران [۲۳] با بهره‌گیری از توابع کلاهی اصلاح‌شده، روشی عددی برای حل معادلات انتگرال ایتو–ولترای تصادفی با چندجمله تصادفی ارائه کردند و نشان دادند که این روش در مقایسه با روش‌های مبتنی بر توابع بلاک پالس از دقت بالاتری برخوردار است. میرزایی و صمدیار [۲۲] نیز با استفاده از همین نوع توابع برای حل معادلات انتگرال ولترا–فردهلم تصادفی دوبعدی به مرتبهٔ همگرایی $O(h^{۳})$ دست یافتند. در همین راستا، شریفی و بصیرت [۲۸] در بررسی معادلات انتگرال ایتو–ولترای تصادفی غیرخطی، نتایجی با دقت مشابه گزارش کردند. همچنین، هاشمی و همکاران [۱۴] با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال تصادفی مبتنی بر توابع کلاهی، معادلات انتگرال ایتو–ولترای تصادفی خطی را تحلیل کرده و به مرتبهٔ $O(h^{۲})$ دست یافتند. در ادامهٔ این روند مؤمن‌زاده و همکاران [۲۴] با به‌کارگیری نوع اصلاح‌شده و بهبودیافتهٔ توابع کلاهی در قالب ماتریس عملیاتی، معادلات انتگرال ایتو–ولترای تصادفی با چند جمله تصادفی را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که مرتبهٔ خطای روش پیشنهادی با استفاده از این دو نوع تابع پایه‌ای به‌ترتیب $O(h^{۳})$ و $O(h^{۴})$ است و از نظر دقت و کارایی، بر روش‌های مبتنی بر توابع کلاهی معمولی و بلاک پالس برتری دارد.

اگرچه توابع کلاهی مکعبی از دقت و همگرایی بالایی برخوردارند و در مقایسه با سایر توابع پایه‌ای کلاهی نتایج دقیق‌تری ارائه می‌دهند، اما به‌کارگیری آن‌ها با پیچیدگی محاسباتی بیشتری همراه است. این توابع به‌دلیل ساختار مکعبی خود، نیازمند عملیات عددی سنگین‌تر و حافظهٔ بیشتری برای ذخیره و پردازش داده‌ها هستند. همچنین اعمال شرایط مرزی در آن‌ها، به‌ویژه در مسائل دارای مرزهای پیچیده یا نامتقارن، دشوارتر از روش‌های ساده‌تر است. با وجود این چالش‌ها، دقت بالا، رفتار هموار در نقاط گره‌ای، همگرایی مرتبهٔ $O(h^{۴})$ و ساختار منظم ماتریسی موجب می‌شود توابع کلاهی مکعبی همچنان یکی از گزینه‌های مؤثر و قابل اعتماد برای حل عددی معادلات تصادفی با ساختارهای پیچیده و پدیده‌های دارای حافظهٔ بلندمدت باشند. به‌طور کلی، انتخاب توابع پایه‌ای مناسب نقش بسزایی در افزایش پایداری و دقت روش‌های عددی دارد. ازاین‌رو، در پژوهش حاضر برای دستیابی به دقت بالاتر و همگرایی بهتر، از توابع کلاهی مکعبی استفاده شده است.

هدف اصلی این پژوهش، ارائهٔ روش عددی جدید مبتنی بر توابع کلاهی مکعبی برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری است که توسط حرکت براونی کسری چندبعدی با پارامتر هرست $H \in \left(\frac{۱}{۲}, ۱\right)$ هدایت می‌شوند. معادلهٔ مورد بررسی به‌شکل زیر بیان می‌شود:

(۱.۱)

$$\begin{cases} {}_{۰}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = f\left(t, x(t)\right) + \sum_{i=۱}^{r} g_i\left(t, x(t)\right)\dot{B}_i^{H_i}(t) + \int_{۰}^{t} k\left(t, \tau, x(\tau)\right)\mathrm{d}\tau, \quad t \in [۰, T], \\ x(۰) = x_{۰}, \end{cases}$$

که در آن $x(t)$ یک فرآیند تصادفی تعریف شده روی فضای احتمال کامل $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است، ${}_{۰}^{C}D_{t}^{\alpha}$ مشتق کسری کاپوتو از مرتبهٔ $۰ < \alpha \leq ۱$ را نشان می‌دهد و $\dot{B}_i^{H_i}(t)$ نویز سفید کسری با پارامتر هرست $\frac{۱}{۲} < H_i < ۱$ است. توابع k ، f و g_iها توابع حقیقی پیوسته و معلوم هستند. $x_{۰}$ مقدار اولیهٔ ثابت غیرتصادفی است. برای حل معادلهٔ فوق، از خواص تحلیلی و محاسباتی توابع کلاهی مکعبی استفاده می‌شود.

ساختار مقاله به‌صورت زیر تنظیم شده است: در بخش ۲ مقدماتی دربارهٔ حرکت براونی کسری، حسابان کسری و ویژگی‌های توابع کلاهی مکعبی ارائه می‌شود. در بخش ۳، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری معرفی می‌گردد. بخش ۴ به معرفی روش عددی پیشنهادی برای معادلهٔ (۱.۱) اختصاص دارد. در بخش ۵ تحلیل خطای روش ارائه می‌شود و در بخش ۶ مثال‌های عددی برای ارزیابی کارایی روش آورده شده است. نهایتاً، نتایج و جمع‌بندی در بخش ۷ مطرح می‌شود.

۲ مفاهیم اساسی

در این بخش، به‌صورت مختصر حرکت براونی کسری، برخی مفاهیم اولیه در حسابان کسری و خواص توابع کلاهی مکعبی معرفی می‌شوند. در نظریهٔ احتمال فرآیند حرکت براونی کسری تعمیمی از فرآیند حرکت براونی است. برخلاف حرکت براونی کلاسیک نموهای حرکت براونی کسری لزوماً مستقل نیستند.

تعریف ۱.۲. ([۱۰]). فرض کنید $B(t)$ یک حرکت براونی کلاسیک باشد. حرکت براونی کسری را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$B^H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H+\frac{1}{2}\right)}\left[\int_{-\infty}^{0}\left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}B(s) + \int_{0}^{t}(t-s)^{H-\frac{1}{2}}\mathrm{d}B(s)\right],$$

که در آن Γ تابع گاما است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

$H \in (0,1)$ پارامتر هرست نامیده می‌شود و به‌ازای $H = \frac{1}{2}$ حرکت براونی از نوع کلاسیک را خواهیم داشت.

حرکت براونی کسری دارای ویژگی‌های زیر است [۱۳]:

- حرکت براونی کسری یک فرآیند گاوسی پیوسته با میانگین صفر و تابع همبستگی زیر است:

$$Cov\left(B^H(s), B^H(t)\right) = \frac{1}{2}\left(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

- برای همهٔ $t \geq 0$، $B^H(0) = 0$ و $\mathbb{E}(B^H(t)) = 0$.
- $B^H(t)$ دارای نموهای همگن است.
- $\mathbb{E}|B^H(t) - B^H(s)|^2 = |t-s|^{2H}$.
- $B^H(t)$ دارای مسیرهای پیوسته است.

تعریف ۲.۲. ([۱۱]). توابع $\nu[\eta,\eta']$ دسته ای از توابع q هستند که بر روی $[\eta,\eta'] \times \Omega$ تعریف شده و در خواص زیر صدق می‌کنند:

الف) q یک تابع $\beta \times \mathcal{F}$ اندازه‌پذیر است.

ب) تابع q با فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار است.

ج) به ازای $s,t \in [\eta \times \eta']$ ، $\int_{\eta}^{\eta'}\int_{\eta}^{s}\mathbb{E}\left[q^2(s)\right]|s-t|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s \leq \infty$.

لم ۳.۲. ([۵]). اگر $\frac{1}{2} < H < 1$، آنگاه

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_{0}^{t} w(s)\mathrm{d}B^H(s)\right)^2\right] &= \int_{0}^{t}\mathbb{E}\left[(w(s))^2\right](\mathrm{d}s)^{2H} \\ &= 2H(2H-1)\int_{0}^{t}\int_{0}^{\tau}(\tau-s)^{2(H-1)}\mathbb{E}\left[(w(s))^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

تعریف ۴.۲. با فرض اینکه $\alpha > 0$، $n \in \mathbb{N}$ و $x(t)$ یک تابع پیوسته با مقادیر حقیقی تعریف شده بر روی $[0,\infty)$ باشد مشتق کسری کاپوتو از مرتبهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_{0}^{t}\frac{x^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}\mathrm{d}\tau, & n-1 < \alpha < n, \\ x^{(n)}(t), & \alpha = n. \end{cases}$$

تعریف ۵.۲. انتگرال کسری ریمان-لیوویل سمت چپ ${}_{۰}I_t^\alpha$ از مرتبهٔ $\alpha \in \mathbb{R}^+$ برای یک تابع x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{۰}I_t^\alpha x(t) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_{۰}^{t} \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{۱-\alpha}} \mathrm{d}\tau, \quad t > ۰. $$

برای دو عملگر تعریف‌شده در بالا قاعدهٔ ترکیب زیر برقرار است:

$$ {}_{۰}I_t^\alpha \left({}_{۰}^{C}D_t^\alpha x(t) \right) = x(t) - \sum_{m=۰}^{\lceil \alpha \rceil - ۱} x^{(m)}(۰) \frac{t^m}{m!}. \tag{۱.۲} $$

۱.۲ توابع کلاهی مکعبی و خواص آن‌ها

تعریف ۶.۲. ([۱۹]). فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و مضرب سه باشد و $h = \dfrac{T}{n}$. توابع کلاهی مکعبی بر روی بازهٔ $[۰, T]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$ \phi_۰(t) = \begin{cases} \dfrac{-۱}{۶h^۳}(t-h)(t-۲h)(t-۳h), & ۰ \le t \le ۳h, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت}, \end{cases} $$

اگر $i = ۳k+۱$ و $k = ۰, ۱, \ldots, \dfrac{n}{۳} - ۱$، آنگاه:

$$ \phi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۲h^۳}(t-(i-۱)h)(t-(i+۱)h)(t-(i+۲)h), & (i-۱)h \le t \le (i+۲)h, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت}, \end{cases} $$

اگر $i = ۳k+۲$ و $k = ۰, ۱, \ldots, \dfrac{n}{۳} - ۱$، آنگاه:

$$ \phi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{-۱}{۲h^۳}(t-(i-۲)h)(t-(i-۱)h)(t-(i+۱)h), & (i-۲)h \le t \le (i+۱)h, \\ ۰, & \text{درغیر این صورت}, \end{cases} $$

اگر $i = ۳k$ و $k = ۱, \ldots, \dfrac{n}{۳} - ۱$، آنگاه:

$$ \phi_i(t) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۶h^۳}(t-(i-۳)h)(t-(i-۲)h)(t-(i-۱)h), & (i-۳)h \le t \le ih, \\ \dfrac{-۱}{۶h^۳}(t-(i+۱)h)(t-(i+۲)h)(t-(i+۳)h), & ih \le t \le (i+۳)h, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت}, \end{cases} $$

و

$$ \phi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{۱}{۶h^۳}(t-(T-h))(t-(T-۲h))(t-(T-۳h)), & T-۳h \le t \le T, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت}. \end{cases} $$

توابع کلاهی مکعبی در فضای $L^۲[۰, T]$ مستقل خطی هستند. علاوه‌براین، با استفاده از تعریف این توابع، خواص زیر برقرار است:

$$ \phi_i(jh) = \begin{cases} ۱, & i = j, \\ ۰, & i \ne j, \end{cases} \tag{۲.۲} $$

$$\sum_{i=0}^{n} \phi_i(t) = 1.$$

تابع دلخواه $x \in L^2[0,T]$ با استفاده از توابع کلاهکی مکعبی به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$x(t) \simeq x_n(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(t) = A^T \Phi(t), \tag{۳.۲}$$

$$\Phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)]^T, \tag{۴.۲}$$

$$A = [a_0, a_1, \ldots, a_n]^T,$$

به‌طوری‌که $a_i = x(ih)$.

۳ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری توابع کلاهی مکعبی

در این بخش، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای توابع کلاهی مکعبی معرفی می‌شود. بدین‌ترتیب قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱.۳. ([۲۵]) فرض کنید $\Phi(t)$ بردار توابع کلاهی مکعبی باشد که در معادلهٔ (۴.۲) آمده است و $\alpha > 0$ آنگاه:

$${}_0I_t^{\alpha} \Phi(t) \simeq P^{(\alpha)} \Phi(t), \tag{۱.۳}$$

در آن $P^{(\alpha)}$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبهٔ $(n+1)$ بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P^{\alpha} = \chi_{\alpha,h} \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{n-3} & \eta_{n-2} & \eta_{n-1} \\ 0 & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 & \cdots & \xi_{n-4} & \xi_{n-3} & \xi_{n-2} \\ 0 & \beta_{-2} & \beta_{-1} & \beta_0 & \cdots & \beta_{n-5} & \beta_{n-4} & \beta_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \xi_{-1} & \xi_0 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{-2} & \beta_{-1} & \beta_0 \end{bmatrix},$$

که $\chi_{\alpha,h} = \dfrac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+4)}$ و

$$\gamma_d = \begin{cases} d^{\alpha}[-d^3 + 2q^2(3+\alpha) - \frac{11}{6}d(2+\alpha)(3+\alpha) + (1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)], & 1 \le d \le 3, \\ d^{\alpha}[-d^3 + 2d^2(3+\alpha) - \frac{11}{6}d(2+\alpha)(3+\alpha) + (1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)] & \\ +(d-3)^{\alpha+1}[d^2 + d(\alpha-3) + 2 + \frac{1}{3}\alpha(\alpha-4)], & 4 \le d \le n, \end{cases}$$

$$\eta_d = \begin{cases} (d+1)^{\alpha+1}[3d^2 - 9d - 5d\alpha + 6 + 3\alpha^2 + 10\alpha], & 0 \le d \le 2, \\ (d+1)^{\alpha+1}[3d^2 - 9d - 5d\alpha + 6 + 3\alpha^2 + 10\alpha] & \\ +(d-2)^{\alpha+1}[-3d^2 - 4d\alpha + 3 - \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha], & 3 \le d \le n-1, \end{cases}$$

$$\xi_d = \begin{cases} (d+۲)^{\alpha+۱}[-۳d^۲ + ۴d\alpha + ۳ - \frac{۳}{۲}\alpha^۲ + \frac{۱}{۲}\alpha], & -۱ \le d \le ۱, \\ (d+۲)^{\alpha+۱}[-۳d^۲ + ۴d\alpha + ۳ - \frac{۳}{۲}\alpha^۲ + \frac{۱}{۲}\alpha] & \\ +(d-۱)^{\alpha+۱}[۳d^۲ + ۹d + ۵d\alpha + ۶ + ۳\alpha^۲ + ۱۰\alpha], & ۲ \le d \le n-۲, \end{cases}$$

$$\beta_d = \begin{cases} (d+۳)^{\alpha+۱}[d^۲ + ۳q - d\alpha + ۲ + \frac{۱}{۳}\alpha^۲ - \frac{۴}{۳}\alpha], & -۲ \le d \le ۰, \\ (d+۳)^{\alpha+۱}[d^۲ + ۳d - d\alpha + ۲ + \frac{۱}{۳}\alpha^۲ - \frac{۴}{۳}\alpha] & \\ -d^{\alpha}[۲d^۳ + ۲۲d + \frac{۵۵}{۳}d\alpha + \frac{۱۱}{۳}\alpha^۲ d], & ۱ \le d \le ۳, \\ (d+۳)^{\alpha+۱}[d^۲ + ۳d - d\alpha + ۲ + \frac{۱}{۳}\alpha^۲ - \frac{۴}{۳}\alpha] & \\ -d^{\alpha}[۲d^۳ + ۲۲d + \frac{۵۵}{۳}d\alpha + \frac{۱۱}{۳}\alpha^۲ d] & \\ (d-۳)^{\alpha+۱}[d^۲ - ۳d + d\alpha + ۲ + \frac{۱}{۳}\alpha^۲ - \frac{۴}{۳}\alpha], & ۴ \le d \le n-۳. \end{cases}$$

اگر تابعی با استفاده از توابع کلاهی مکعبی طبق رابطهٔ (۳.۲) تقریب زده شود، آنگاه ${}_{\circ}I_t^{\alpha}x(t)$ با استفاده از معادله (۱.۳) به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$${}_{\circ}I_t^{\alpha}x(t) \simeq {}_{\circ}I_t^{\alpha}x_n(t) \simeq A^T P^{(\alpha)}\Phi(t).$$

۴ روش عددی

در این بخش، یک روش عددی مبتنی بر توابع کلاهی مکعبی برای حل مسئله (۱.۱) بررسی می‌شود. این روش معادلهٔ انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری داده شده را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل می‌کند.

ابتدا ${}_{\circ}^{C}D_t^{\alpha}x(t)$ را براساس توابع کلاهی مکعبی به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$${}_{\circ}^{C}D_t^{\alpha}x(t) \simeq A^T\Phi(t). \tag{۱.۴}$$

با اعمال انتگرال ریمان–لیوویل از مرتبهٔ α بر طرفین معادله (۱.۴) و با استفاده از خاصیت (۱.۲) و قضیهٔ ۱.۳ و شرط اولیهٔ داده شده در معادله (۱.۱) نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x(t) =_{\circ} I_t^{\alpha}\left(A^T\Phi(t)\right) + x(\circ) = \left(A^T P^{(\alpha)} + X_{\circ}^T\right)\Phi(t) = B^T\Phi(t). \tag{۲.۴}$$

در (۲.۴) از تقریب $x(\circ) \simeq X_{\circ}^T\Phi(t)$ استفاده شده است. همچنین،

$$X_{\circ} = [x_{\circ}, x_{\circ}, \ldots, x_{\circ}]^T, \qquad x_{\circ} = x(\circ),$$
$$B = \left(A^T P^{(\alpha)} + X_{\circ}^T\right)^T = [b_{\circ}, b_{۱}, \ldots, b_n]^T.$$

بدیهی است که b_iها بر اساس a_iها نوشته می‌شوند و $a_{\circ} = b_{\circ} = x_{\circ}$. با قرار دادن $t = jh$ برای $j = \circ, ۱, ۲, \ldots, n$ در معادله (۲.۴) و بهره‌گیری از ویژگی (۲.۲) رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x(jh) = b_j.$$

حال می‌توان تقریب توابع f، g_i و k را با استفاده از توابع کلاهی مکعبی به‌صورت نوشت:

$$f\left(t,x(t)\right)\simeq\sum_{j=0}^{n}f\left(jh,b_j\right)\phi_j(t)=F^T\Phi(t),\qquad F=\left[f(0,b_0),f(h,b_1),\ldots,f(nh,b_n)\right]^T, \tag{۳.۴}$$

$$g_i\left(t,x(t)\right)\simeq\sum_{j=0}^{n}g_i\left(jh,b_j\right)\phi_j(t)=G_i^T\Phi(t),\qquad G_i=\left[g_i(0,b_0),g_i(h,b_1),\ldots,g_i(nh,b_n)\right]^T, \tag{۴.۴}$$

$$k\left(t,\tau,x(\tau)\right)\simeq\sum_{j=0}^{n}k(t,jh,b_j)\phi_i(\tau)=K^T(t)\Phi(\tau),\quad K(t)=\left[k(t,0,b_0),k(t,h,b_1),\ldots,k(t,nh,b_n)\right]^T. \tag{۵.۴}$$

در ادامه با استفاده از یک فرمول پسرو، $\dot{B}_i^{H_i}(jh)$ به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\dot{B}_i^{H_i}(jh)\approx\frac{{B_i}^{H_i}(jh)-{B_i}^{H_i}((j-1)h)}{h}.$$

با قرار دادن $t=jh$ و با جایگذاری تقریب بالا و تقریب‌های (۳.۴)، (۴.۴) و (۵.۴) در معادلهٔ (۱.۱) ، معادلهٔ زیر حاصل می‌گردد:

$$A^T\Phi(jh)=F^T\Phi(jh)+\sum_{i=0}^{r}G_i^T\Phi(jh)\frac{{B_i}^{H_i}(jh)-{B_i}^{H_i}((j-1)h)}{h}+K^T(jh)P^{(1)}\Phi(jh),$$
$$j=1,2,\ldots,n,$$

که منجر به دستگاه زیر می‌شود:

$$A^T\Phi(jh)-F^T\Phi(jh)-\sum_{i=0}^{r}G_i^T\Phi(jh)\frac{{B_i}^{H_i}(jh)-{B_i}^{H_i}((j-1)h)}{h}-K^T(jh)P^{(1)}\Phi(jh)=0,$$
$$j=1,2,\ldots,n.$$

پس از حل این دستگاه معادلات غیرخطی با استفاده از روش‌های تکراری و به دست آوردن مؤلفه‌های a_1 تا a_n و سپس جایگذاری آنها در رابطهٔ (۲.۴)، جواب تقریبی مسئلهٔ (۱.۱) به دست می‌آید.

۵ تحلیل خطا

در این بخش، خطای روش ارائه شده در بخش قبل تحلیل خواهد شد. قبل از این کار، چند لم و قضیهٔ مورد نیاز بیان می‌شود. ابتدا لم معروف گرانوال را یادآوری می‌کنیم.

لم ۱.۵. ([۴]) فرض کنید $z_1,z_2,\gamma\in[0,+\infty)$. همچنین فرض کنید $Q:[0,T]\to[0,+\infty)$ نگاشتی اندازه‌پذیر باشد به‌طوری‌که

$$Q(t)\leq z_1+z_2\int_0^t(t-s)^{\gamma-1}Q(s)\mathrm{d}s.$$

آنگاه داریم

$$Q(t)\leq z_1E_\gamma\left(t(z_2\Gamma(\gamma))^{\frac{1}{\gamma}}\right),$$

به‌طوری‌که $E_\gamma(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n\gamma}}{\Gamma(1+n\gamma)}$.

حال می‌توانیم همگرایی روش عددی معرفی شده در بخش قبل را اثبات کنیم.

قضیه ۲.۵. فرض کنید x جواب دقیق مسئلهٔ (۱.۱) و $\tilde{x}_n$ جواب تقریبی حاصل از روش عددی ارائه شده در بخش قبل باشد. همچنین، فرض کنید $k \in C^{۴}([۰,T]\times[۰,T]\times\mathbb{R})$ و $f, g_i \in C^{۴}([۰,T]\times\mathbb{R})$ در شرط‌های لیپشیتز زیر صدق کنند:

$$|f(t,u)-f(t,\tilde{u})| \le \beta_{۱}|u-\tilde{u}|, \tag{۱.۵}$$
$$|g_i(t,u)-g_i(t,\tilde{u})| \le \beta_{i۲}|u-\tilde{u}|, \quad i=۱,۲,\dots,r, \tag{۲.۵}$$
$$|k(t,\tau,V)-k(t,\tau,\tilde{V})| \le \beta_{۳}|V-\tilde{V}|, \tag{۳.۵}$$

به‌طوری‌که $\beta_{۱}$، $\beta_{i۲}$ و $\beta_{۳}$ ثابت‌های حقیقی مثبت هستند.

اثبات. جواب دقیق و جواب تقریبی به‌ترتیب در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$ {}_{۰}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = f\left(t,x(t)\right) + \sum_{i=۱}^{r} g_i\left(t,x(t)\right)\dot{B}_i^{H_i}(t) + \int_{۰}^{t} k\left(t,\tau,x(\tau)\right)\mathrm{d}\tau, \tag{۴.۵}$$
$$ {}_{۰}^{C}D_t^{\alpha}\tilde{x}_n(t) = f\left(t,\tilde{x}_n(t)\right) + \sum_{i=۱}^{r} g_i\left(t,\tilde{x}_n(t)\right)\dot{B}_i^{H_i}(t) + \int_{۰}^{t} k\left(t,\tau,\tilde{x}_n(\tau)\right)\mathrm{d}\tau. \tag{۵.۵}$$

با کم کردن (۵.۵) از (۴.۵) و با توجه به خطی بودن عملگر مشتق کسری کاپوتو داریم:

$$\begin{aligned} {}_{۰}^{C}D_t^{\alpha}\left(x(t)-\tilde{x}_n(t)\right) =& f(t,x(t)) - f\left(t,\tilde{x}_n(t)\right) \\ &+ \sum_{i=۱}^{r}\left(g_i\left(t,x(t)\right) g_i\left(t,\tilde{x}_n(t)\right)\right)\dot{B}_i^{H_i}(t) \\ &+ \int_{۰}^{t}\left(k\left(t,\tau,\tilde{x}(\tau)\right) - k\left(t,\tau,\tilde{x}_n(\tau)\right)\right)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

حال عملگر ریمان–لیوویل را بر طرفین معادلهٔ بالا اعمال و با استفاده از (۱.۲) و داشتن $\tilde{x}_n(۰) = x(۰)$، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x(t)-\tilde{x}_n(t) =& \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\left(f\left(s,x(s)\right)-f\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right)\mathrm{d}s \\ &+ \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\left[\sum_{i=۰}^{r}\left(g_i\left(s,x(s)\right)-g_i\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right)\frac{\mathrm{d}B^{H_i}(s)}{\mathrm{d}s}\right]\mathrm{d}s \\ &+ \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\left[\int_{۰}^{t}\left(k\left(s,\tau,x(\tau)\right)-k\left(s,\tau,\tilde{x}_n(\tau)\right)\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

و با استفاده از نامساوی $\left(\sum_{\mathcal{L}=۱}^{l} w_{\mathcal{L}}\right)^{۲} \le l\sum_{\mathcal{L}=۱}^{l} w_{\mathcal{L}}^{۲}$ داریم:

$$\begin{aligned} |x(t)-\tilde{x}_n(t)|^{۲} \le& ۳\left|\frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\left(f\left(s,x(s)\right)-f\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right)\mathrm{d}s\right|^{۲} \\ &+ ۳\left|\frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\sum_{i=۱}^{r}\left(g_i\left(s,x(s)\right)-g_i\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right)\mathrm{d}B_i^{H_i}(s)\right|^{۲} \\ &+ ۳\left|\frac{۱}{\Gamma(\alpha)}\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\left[\int_{۰}^{t}\left(k\left(s,\tau,x(\tau)\right)-k\left(s,\tau,\tilde{x}_n(\tau)\right)\right)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}s\right|^{۲}. \end{aligned}$$

با امید گرفتن از دو طرف نامساوی فوق و استفاده از شرط هولدر داریم:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x(t)-\tilde{x}_n(t)|^{۲} \leq{}& \frac{۳T}{(\Gamma(\alpha))^{۲}}\int_{۰}^{t}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|f\left(s,x(s)\right)-f\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right|^{۲}\mathrm{d}s\\ &+\frac{۳}{(\Gamma(\alpha))^{۲}}\mathbb{E}\left|\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\sum_{i=۱}^{r}\left(g_i\left(s,x(s)\right)-g_i\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right)\mathrm{d}B_i^{H_i}(s)\right|^{۲}\\ &+\frac{۳T^{۲}}{(\Gamma(\alpha))^{۲}}\int_{۰}^{t}\int_{۰}^{s}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|k\left(s,\tau,x(\tau)\right)-k\left(s,\tau,\tilde{x}_n(\tau)\right)\right|^{۲}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{۶.۵}$$

در ادامه به کمک لم ۳.۲ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|\int_{۰}^{t}(t-s)^{\alpha-۱}\sum_{i=۱}^{r}\left(g_i\left(s,x(s)\right)-g_i\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right)\mathrm{d}B_i^{H_i}(s)\right|^{۲}=۲H_i(۲H_i-۱)\times\\ &\int_{۰}^{t}\int_{۰}^{\tau}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}(\tau-s)^{۲(H_i-۱)}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=۱}^{r}\left(g_i\left(s,x(s)\right)-g_i\left(s,\tilde{x}_n(s)\right)\right)\right)^{۲}\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \tag{۷.۵}$$

با جایگذاری (۷.۵) در (۶.۵) و استفاده از نامساوی‌های (۱.۵)، (۲.۵) و (۳.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|x(t)-\tilde{x}_n(t)|^{۲} \leq{}& \frac{۳\beta_{۱}T}{(\Gamma(\alpha))^{۲}}\int_{۰}^{t}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|x(s)-\tilde{x}_n(s)\right|^{۲}\mathrm{d}s\\ &+\frac{۳H_i(۲H_i-۱)r^{۲}\beta_{i۲}}{(\Gamma(\alpha))^{۲}}\int_{۰}^{t}\int_{۰}^{\tau}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}(\tau-s)^{۲(H_i-۱)}\mathbb{E}\left|x(s)-\tilde{x}_n(s)\right|^{۲}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &+\frac{۳\beta_{۳}T^{۲}}{(\Gamma(\alpha))^{۲}}\int_{۰}^{t}\int_{۰}^{s}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|x(\tau)-\tilde{x}_n(\tau)\right|^{۲}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{۸.۵}$$

به کمک محاسبات زیر

$$\begin{aligned}&\int_{۰}^{t}\int_{۰}^{\tau}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}(\tau-s)^{۲(H_i-۱)}\mathbb{E}\left|x(s)-\tilde{x}_n(s)\right|^{۲}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &=\int_{۰}^{t}\int_{s}^{t}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}(\tau-s)^{۲(H_i-۱)}\mathbb{E}\left|x(s)-\tilde{x}_n(s)\right|^{۲}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\ &=\int_{۰}^{t}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|x(s)-\tilde{x}_n(s)\right|^{۲}\int_{s}^{t}(\tau-s)^{۲(H_i-۱)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\\ &=\frac{۱}{۲H_i-۱}\int_{۰}^{t}(t-s)^{۲(\alpha+H_i)-۳}\mathbb{E}\left|x(s)-\tilde{x}_n(s)\right|^{۲}\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{۹.۵}$$

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{t}\int_{۰}^{s}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|x(\tau)-\tilde{x}_n(\tau)\right|^{۲}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s &= \int_{۰}^{t}\mathbb{E}\left|x(\tau)-\tilde{x}_n(\tau)\right|^{۲}\int_{\tau}^{t}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{۱}{۲\alpha-۱}\int_{۰}^{t}(t-\tau)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|x(\tau)-\tilde{x}_n(\tau)\right|^{۲}\mathrm{d}\tau\\ &=\frac{۱}{۲\alpha-۱}\int_{۰}^{t}(t-s)^{۲(\alpha-۱)}\mathbb{E}\left|x(s)-\tilde{x}_n(s)\right|^{۲}\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{۱۰.۵}$$

و در نظر گرفتن تساوی

$$\Upsilon(\alpha)=۹\max\left(\frac{\beta_{۱}T}{(\Gamma(\alpha))^{۲}},\frac{H_ir^{۲}\beta_{i۲}}{(\Gamma(\alpha))^{۲}},\frac{\beta_{۳}T^{۲}}{(۲\alpha-۱)(\Gamma(\alpha))^{۲}}\right),$$

رابطهٔ (۸.۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbb{E}|x(t)-\tilde{x}_n(t)|^{۲} \leq \Upsilon(\alpha)\int_{۰}^{t}(t-s)^{۲(\alpha+H_i)-۳}\mathbb{E}\,|x(s)-\tilde{x}_n(s)|^{۲}\,\mathrm{d}s. \qquad (۱۱.۵)$$

حال به کمک لم ۱.۵ نتیجه به‌شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$\mathbb{E}|x(t)-\tilde{x}_n(t)|^{۲}=۰.$$

بنابراین، خطای $\mathbb{E}|x(t)-\tilde{x}_n(t)|^{۲}$ به ازای $n\to\infty$ به صفر میل می‌کند و $\tilde{x}_n(t)\to x(t)$. این نتیجه اثبات قضیه را کامل می‌کند. □

۶ مثال عددی

در این بخش، به‌منظور نشان دادن دقت و کارایی روش پیشنهادی، چند معادلهٔ انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری با حرکت براونی کسری چندبعدی در نظر گرفته شده و روش پیشنهادی برای حل آنها اعمال می‌شود. لازم به ذکر است، به‌دلیل در دسترس نبودن جواب دقیق، پاسخ عددی حاصل از روش عددی با در نظر گرفتن $n=۹۹$ به‌عنوان معیار مقایسه انتخاب شده است. برنامه‌های مربوط به این مثال‌ها به کمک نرم‌افزار متمتیکا نوشته و اجرا شده‌اند.

مثال ۱.۶. ([۳۴]). برای مثال ابتدا معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر می‌گیریم:

$${}_{۰}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t)=\left(\frac{۱}{۳۰}\right)^{۲}x(t)(x^{۲}(t)-۱)+\frac{۱}{۳۰}(۱-x^{۲}(t))\dot{B}^{H}(t),\qquad ۰\leq t\leq ۱.$$

این معادله با شرط اولیهٔ $x(۰)=\frac{۱}{۱۰۰}$ و $\alpha=۱$ دارای جواب دقیقی بصورت زیر است

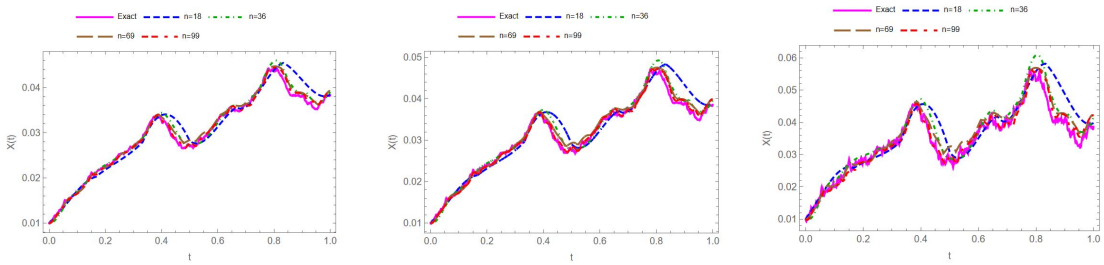
$$x(t)=\tanh\left(\frac{۱}{۳۰}B^{H}(t)+arctanh(\frac{۱}{۱۰۰})\right).$$

با توجه به مدل ارائه شده در (۱.۱) در این مثال $k(t,\tau,x(\tau))=۰$ است.

با در نظر گرفتن مقادیر $H=\frac{۶}{۱۰},\frac{۳}{۴},\frac{۸}{۱۰}$ ، $\alpha=۱$ و $n=۱۸,۳۶,۶۹,۹۹$ به حل این مثال می‌پردازیم. نتایج حاصل از مقایسهٔ جواب‌های دقیق و تقریبی همراه با مقادیر قدرمطلق خطا برای $\alpha=۱$ و $H=\frac{۶}{۱۰}$ به‌ترتیب در شکل ۱(آ) و جدول ۱ ارائه شده‌اند. همچنین نمودار قدرمطلق خطا برای $n=۹۹$ در شکل ۳(آ) نمایش داده شده است. به‌طور مشابه شکل ۱(ب) و جدول ۲ به‌ترتیب شامل نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی و مقادیر قدرمطلق خطا برای $\alpha=۱$ و $n=۱۸,۳۶,۶۹,۹۹,$ و $H=\frac{۳}{۴}$ هستند و نمودار قدرمطلق خطا برای $n=۹۹$ در شکل ۳(ب) نشان داده شده است. در ادامه شکل ۱(ج) و جدول ۳ به‌ترتیب نتایج مربوط به جواب‌های دقیق و تقریبی و نیز مقادیر قدرمطلق خطا را برای $H=\frac{۸}{۱۰}$ ،$n=۱۸,۳۶,۶۹,۹۹$ و $\alpha=۱$ نشان می‌دهند. نمودار قدرمطلق خطا برای $n=۹۹$ نیز در شکل ۳(ج) قابل مشاهده است. علاوه‌براین، معادله برای حالت $H=\frac{۸}{۱۰}$، $\alpha=\frac{۳}{۴}$ و $n=۱۸,۳۶,۶۹,۹۹$ نیز مورد بررسی قرار گرفته است. نمودارهای مربوط به جواب‌های دقیق و تقریبی، نمودار قدرمطلق خطا و همچنین مقادیر عددی خطا به‌ترتیب در شکل‌های ۲، ۴ و جدول ۴ گزارش شده‌اند.

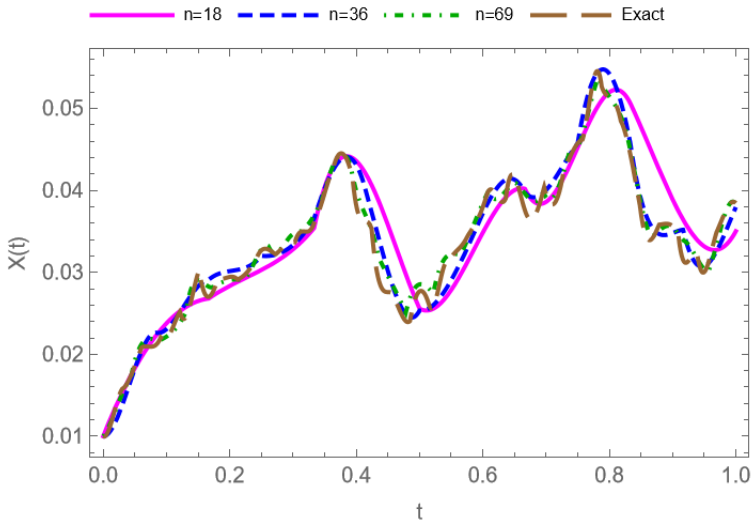
در مثال ۱.۶، به‌منظور ارزیابی دقت و همگرایی روش پیشنهادی رفتار خطا برای مقادیر مختلف پارامتر هرست H و مرتبهٔ مشتق کسری α مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج جداول ۱–۳ نشان می‌دهند که با افزایش تعداد نقاط گره‌ای n، مقدار قدرمطلق خطا به‌صورت یکنواخت کاهش می‌یابد؛ این روند تأییدی بر همگرایی روش پیشنهادی است. برای مثال، در حالت $\alpha=۱$ و $H=\frac{۶}{۱۰}$، مقدار خطا در بازهٔ زمانی $t\in[۰,۱]$ با افزایش n از ۱۸ به ۹۹ کاهش یافته است. این رفتار در سایر مقادیر H نیز مشاهده می‌شود. همچنین مقایسهٔ نتایج برای مقادیر مختلف پارامتر هرست نشان می‌دهد که با افزایش H از $\frac{۶}{۱۰}$ به $\frac{۸}{۱۰}$، مقدار خطا اندکی کاهش می‌یابد. این امر بیانگر آن است که روش پیشنهادی در فرآیندهایی با همبستگی بلندمدت بیشتر (یعنی مقادیر بزرگ‌تر H) از دقت بالاتری برخوردار است.

در شکل‌های ۱(آ)–۱(ج)، انطباق نزدیک میان پاسخ‌های دقیق و تقریبی، به‌ویژه برای مقادیر بزرگ‌تر n، این موضوع را به‌صورت بصری تأیید می‌کند. نمودارهای ۳(آ)–۳(ج) نیز نشان می‌دهند که خطای محلی در طول بازهٔ زمانی دارای نوسانات محدودی بوده و در نزدیکی نقاط انتهایی به مقدار ناچیزی میل می‌کند. در حالت $\alpha=\frac{۳}{۴}$ و $H=\frac{۸}{۱۰}$، رفتار مشابهی مشاهده می‌شود. هرچند در این حالت جواب تحلیلی در دسترس نیست، نتایج حاصل از $n=۹۹$ به‌عنوان مبنای مقایسه در نظر گرفته شده است.



(ا) $H = \frac{۶}{۱۰}$ (ب) $H = \frac{۳}{۴}$ (ج) $H = \frac{۸}{۱۰}$.

شکل ۱: نمودار جواب‌های تقریبی و دقیق به‌ازای $\alpha = ۱$ و $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹, ۹۹$ برای مثال ۱.۶.

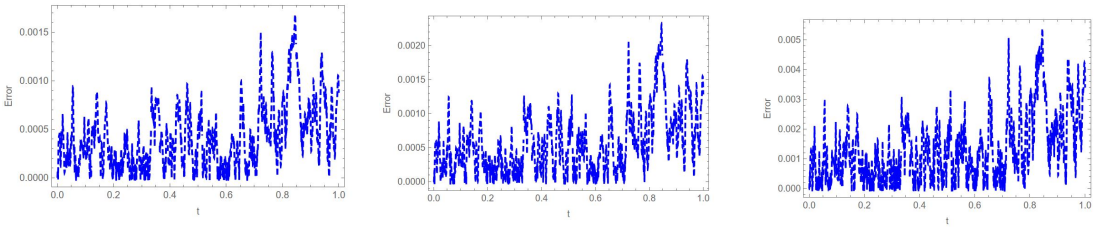


شکل ۲: نمودار جواب‌های تقریبی و دقیق به‌ازای $H = \frac{۸}{۱۰}$، $\alpha = \frac{۳}{۴}$ و $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹$ برای مثال ۱.۶.

جدول ۱: قدر مطلق خطا به‌ازای $H = \frac{۶}{۱۰}$ و $\alpha = ۱$ برای مثال ۱.۶.

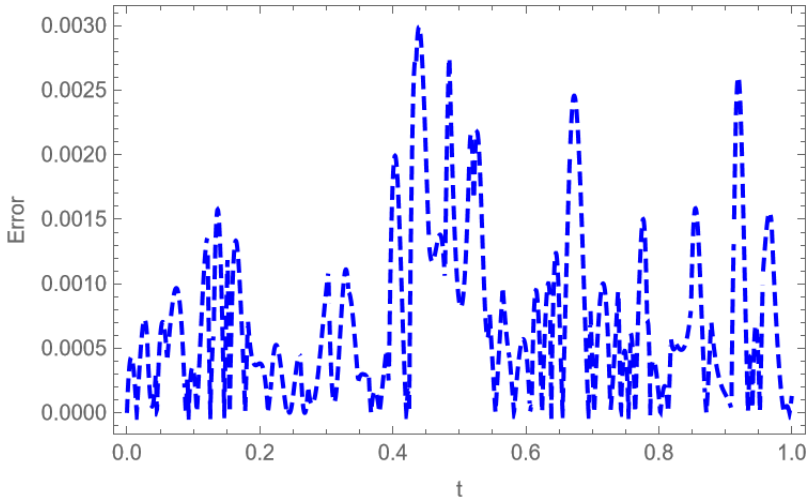
t	$n = ۱۸$	$n = ۳۶$	$n = ۶۹$	$n = ۹۹$
۰	۰	۰	۰	
۰٫۱	$۳٫۲۷۴۱۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۷۳۵۴۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۰۵۵۳۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۵٫۷۴۹۰۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۲	$۹٫۰۴۴۷۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۲۲۷۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۴۶۸۷۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۸۹۱۲۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۳	$۱٫۵۵۴۱۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۲۹۱۸۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۶۸۹۵۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۷٫۵۶۳۹۷ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۴	$۳٫۳۴۰۷۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۵٫۰۳۱۴۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۹۹۱۲۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۲۲۷۴۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۵	$۲٫۸۹۲۴۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۹٫۸۳۷۸۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۴۷۰۲۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۶۳۷۰۷ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۶	$۱٫۶۹۰۹۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۶۹۶۷۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۳۴۴۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۳۷۹۶۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۷	$۳٫۹۰۷۳۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۲۰۱۰۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۶٫۰۳۶۱۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۳۳۸۸۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۸	$۲٫۸۷۶۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۹۲۹۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۰۱۲۰۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۰۴۶۳۶ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۹	$۸٫۷۷۸۹۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۹۳۶۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۶۴۵۸۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۲۴۴۳۸ \times ۱۰^{-۳}$
۱	$۱٫۱۷۲۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۹۲۷۰۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۴۵۲۰۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۳۹۶۱ \times ۱۰^{-۳}$

همان‌گونه که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، با افزایش n مقدار خطا به‌طور منظم کاهش یافته که این موضوع تأییدی دیگر بر همگرایی روش پیشنهادی است. به‌طور کلی، نتایج مثال عددی نخست نشان می‌دهد که روش عددی مبتنی بر توابع کلاهی مکعبی نه‌تنها برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی از مرتبهٔ صحیح بلکه در حالت کسری نیز از دقت بالا و پیچیدگی محاسباتی پایین برخوردار است.



(ا) $H = \frac{۶}{۱۰}$. (ب) $H = \frac{۳}{۴}$. (ج) $H = \frac{۸}{۱۰}$.

شکل ۳: نمودار خطای روش به‌ازای $\alpha = ۱$ و $n = ۹۹$ برای مثال ۱.۶.



شکل ۴: نمودار خطای روش به‌ازای $H = \frac{۸}{۱۰}$، $H = \frac{۳}{۴}$ و $\alpha = ۶۹$ برای مثال ۱.۶.

جدول ۲: قدر مطلق خطا به‌ازای $H = \frac{۳}{۴}$ و $\alpha = ۱$ برای مثال ۱.۶.

t	$n = ۱۸$	$n = ۳۶$	$n = ۶۹$	$n = ۹۹$
۰	۰	۰	۰	
۰٫۱	$۸٫۱۹۶۶۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۶۵۴۲۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۵٫۸۳۰۱۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۹۶۴۴۳ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۲	$۸٫۳۹۵۰۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۲۶۱۳۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۷۳۶۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۲۰۳۰۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۳	$۱٫۱۱۵۳۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۲۹۹۷۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۱۱۰۰۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۵۹۴۱۷ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۴	$۱٫۶۵۲۸۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۳۴۳۹۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۶۲۳۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۵۳۹۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۵	$۱٫۵۷۷۶۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۵۰۲۷۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۸۸۹۴۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۳۳۱۶۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۶	$۱٫۴۸۶۹۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۶۶۴۲۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۷٫۸۶۴۶۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۰۶۲۲۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۷	$۵٫۸۵۳۲۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۸۱۶۹۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۷۰۵۱۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۴۶۸۸۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۸	$۶٫۷۷۵۵۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۲۰۱۸۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۶۲۳۶۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۴۸۶۲ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۹	$۴٫۷۳۲۷۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۷۸۷۳۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۱۷۷۸۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۹٫۴۱۶۷۸ \times ۱۰^{-۴}$
۱	$۳٫۲۰۰۲۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۰۶۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۳۸۱۵۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۲۸۳۰۲ \times ۱۰^{-۳}$

مثال ۲.۶. معادلهٔ

$$ {}_{۰}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = ۲x(t) + tx^{۳}(t)\dot{B}^{H}(t) + \int_{۰}^{t} e^{t}\tau x(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad ۰ \leq t \leq ۱, $$

را با شرط اولیهٔ $x(۰) = \frac{۳}{۱۰۰}$ در نظر می‌گیریم.

جدول ۳: قدر مطلق خطا به‌ازای $H = \frac{۸}{۱۰}$ و $\alpha = ۱$ برای مثال ۱.۶.

t	$n = ۱۸$	$n = ۳۶$	$n = ۶۹$	$n = ۹۹$
۰	۰	۰	۰	
۰٫۱	$۳٫۸۲۳۹۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۳۵۹۸۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۰۸۰۱۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۴۵۳۷۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۲	$۷٫۹۲۹۹۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۴۷۸۳۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۹۶۳۵۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۴۸۱۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۳	$۹٫۹۰۸۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۳۰۳۷۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۱۳۵۸۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۹۴۴۳ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۴	$۱٫۲۲۹۹۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۷۴۴۳۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۱۵۱۱۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۲۴۹۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۵	$۱٫۲۱۹۰۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۲۷۶۳۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۳۵۸۹۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۵٫۲۸۸۱۱ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۶	$۱٫۳۳۳۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۲۱۳۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۹۸۵۰۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۱۹۰۸ \times ۱۰^{-۵}$
۰٫۷	$۵٫۸۵۲۸۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۱۴۲۳۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۸٫۲۱۴۸۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۲٫۱۹۷۵۱ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۸	$۳٫۲۳۱۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۲۷۵۸۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۵۱۱۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۹۴۶۳۵ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۹	$۳٫۷۱۲۰۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۶٫۶۳۱۰۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۸٫۶۹۰۰۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۷۹۱۶۵ \times ۱۰^{-۴}$
۱	$۱٫۵۵۳۶۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۷٫۰۰۹۳۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۹٫۵۹۰۸۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۸٫۷۵۷۴۳ \times ۱۰^{-۴}$

جدول ۴: قدر مطلق خطا به‌ازای $H = \frac{۸}{۱۰}$ و $\alpha = \frac{۳}{۴}$ برای مثال ۱.۶.

t	$n = ۱۸$	$n = ۳۶$	$n = ۶۹$
۰	۰	۰	۰
۰٫۱	$۱٫۹۵۲۵۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۲۳۳۸۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۲۹۶۹۸ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۲	$۱٫۰۸۸۷۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۰۸۴۱۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۸۳۰۹۴ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۳	$۹٫۰۲۶۰۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۶۹۱۹۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۹٫۶۱۹۶۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۴	$۵٫۴۵۰۱۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۹۷۰۶۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۸۰۶۹۲ \times ۱۰^{-۳}$
۰٫۵	$۲٫۰۹۰۳۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۳۴۱۱۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۵۲۹۹۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۶	$۳٫۱۲۱۶۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۷۳۶۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۴٫۹۵۲۱۷ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۷	$۹٫۳۳۶۲۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۵٫۰۰۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۳٫۸۵۷۰۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۸	$۶٫۴۶۲۰۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۹۱۶۷۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۲۷۶۸۷ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۹	$۳٫۲۵۶۵۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۶۴۵۲۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۴۵۴۱۹ \times ۱۰^{-۴}$
۱	$۳٫۴۳۰۷۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۴٫۸۸۶۲۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۳۱۹۷۳ \times ۱۰^{-۴}$

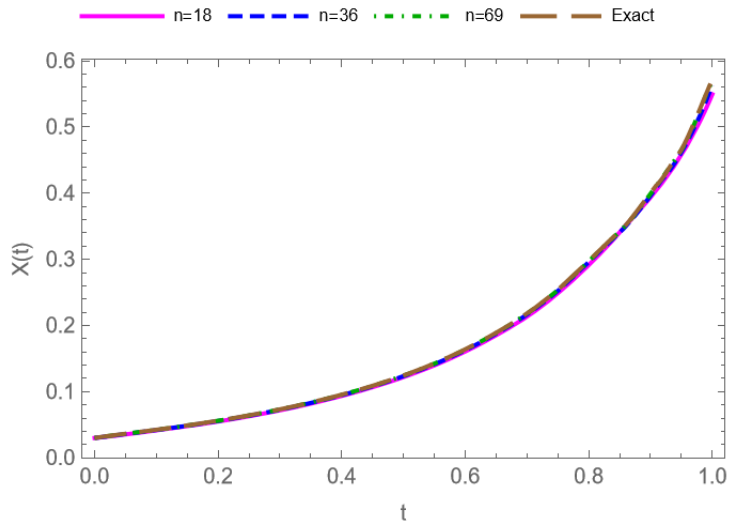
این معادله برای مقادیر $H = \frac{۹}{۱۰}$، $\alpha = \frac{۸}{۱۰}$ و $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹$ بررسی شده است. شکل ۵ و جدول ۵ نتایج عددی را نشان می‌دهند و شکل ۶ نیز نمایانگر نمودار قدر مطلق خطا به‌ازای $n = ۶۹$ است.

در مثال ۲.۶، رفتار خطا برای مقادیر $\alpha = \frac{۸}{۱۰}$ و $H = \frac{۹}{۱۰}$ و تعداد نقاط گره‌ای مختلف بررسی شده است. نتایج جدول ۵ نشان می‌دهند که با افزایش n، مقدار خطا به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد؛ به‌عنوان نمونه، در $t = ۱$ مقدار خطا از $۲٫۲۳۰۶۱ \times ۱۰^{-۲}$ برای $n = ۱۸$ به $۱٫۵۵۵۷۵ \times ۱۰^{-۳}$ برای $n = ۶۹$ کاهش یافته است. این روند بیانگر همگرایی روش پیشنهادی است. شکل‌های ۵ و ۶ نیز انطباق خوب بین جواب تقریبی، مرجع و کاهش نوسانات خطا در طول بازهٔ زمانی را تأیید می‌کنند. بنابراین، روش عددی مبتنی بر توابع کلاهی مکعبی حتی در حضور مؤلفه‌های انتگرالی و نویز کسری ضربی نیز از دقت مناسبی برخوردار است.

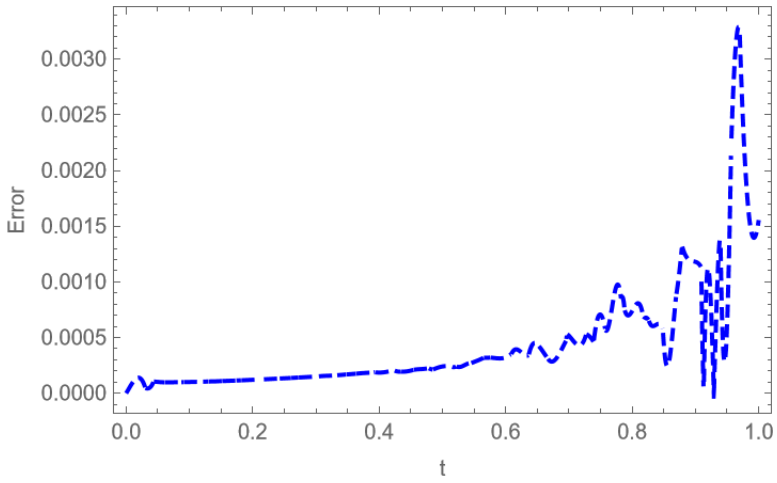
مثال ۳.۶. معادلهٔ

$$ {}_{۰}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = (t+۱)x(t) + \mathrm{e}^{t}x^{۳}(t)\dot{B}_{۱}^{H_{۱}}(t) + tx^{۳}(t)\dot{B}_{۲}^{H_{۲}}(t) + \int_{۰}^{t}(t-\tau)\sin\left(x(\tau)\right)\mathrm{d}\tau, \quad ۰ \le t \le ۱, $$

را با شرط اولیه $x(۰) = \frac{۲}{۱۰۰}$ و پارامترهای $\alpha = \frac{۹}{۱۰}$، $H_{۱} = \frac{۷}{۱۰}$ و $H_{۲} = \frac{۳}{۴}$ در نظر می‌گیریم. روش عددی پیشنهادی برای مقادیر $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹$ به‌کار گرفته می‌شود. نمودار نتایج عددی و خطاها به‌ترتیب در شکل‌های ۷ و ۸ و مقادیر خطا در جدول ۶ آمده‌اند. براساس داده‌های جدول، با افزایش نقاط گره‌ای، مقدار خطا به‌صورت یکنواخت کاهش می‌یابد که نشان‌دهندهٔ همگرایی روش پیشنهادی است.



شکل ۵: نمودار جواب‌های تقریبی و دقیق به‌ازای $H = \frac{۹}{۱۰}$، $\alpha = \frac{۸}{۱۰}$ و $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹$ برای مثال ۲.۶.

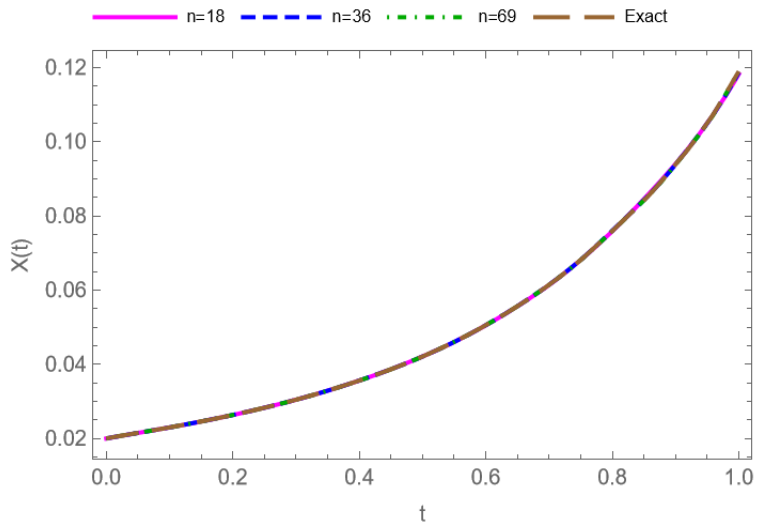


شکل ۶: نمودار خطای روش به‌ازای $H = \frac{۹}{۱۰}$، $\alpha = \frac{۸}{۱۰}$ و $n = ۶۹$ برای مثال ۲.۶.

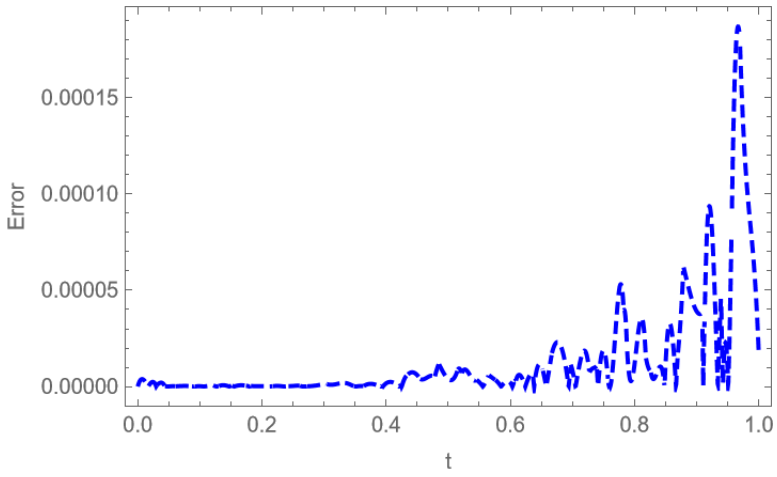
جدول ۵: قدر مطلق خطا به‌ازای $H = \frac{۹}{۱۰}$ و $\alpha = \frac{۸}{۱۰}$ برای مثال ۲.۶.

t	$n = ۱۸$	$n = ۳۶$	$n = ۶۹$
۰	۰	۰	۰
۰٫۱	۹٫۳۶۳۱۳ × ۱۰$^{-۴}$	۴٫۰۶۵۴۲ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۰۰۷۷۳ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۲	۱٫۲۰۹۰۵ × ۱۰$^{-۳}$	۴٫۷۹۳۸۳ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۲۰۵۸۶ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۳	۱٫۵۰۰۱۷ × ۱۰$^{-۳}$	۵٫۹۹۸۱۴ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۴۹۶۶۷ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۴	۱٫۸۶۸۲۱ × ۱۰$^{-۳}$	۷٫۴۱۷۷۸ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۸۵۳۳۴ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۵	۲٫۴۴۸۴۷ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۰۱۰۵۸ × ۱۰$^{-۳}$	۲٫۴۰۴۴۸ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۶	۳٫۳۰۹۷۲ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۳۲۷۴۹ × ۱۰$^{-۳}$	۳٫۲۱۴۲۹ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۷	۴٫۹۴۳ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۶۸۴۱۵ × ۱۰$^{-۳}$	۵٫۱۶۵۹۷ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۸	۶٫۱۶۹۶۷ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۶۶۰۲۶ × ۱۰$^{-۳}$	۷٫۳۹۳۲۳ × ۱۰$^{-۴}$
۰٫۹	۶٫۵۵۵۱۸ × ۱۰$^{-۳}$	۴٫۰۶۰۷ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۱۸۰۳۲ × ۱۰$^{-۳}$
۱	۲٫۲۳۰۶۱ × ۱۰$^{-۲}$	۸٫۵۷۲۳۸ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۵۵۵۷۵ × ۱۰$^{-۳}$

شکل ۸ نشان می‌دهد که بیشترین خطا در انتهای بازهٔ زمانی رخ می‌دهد که ناشی از ماهیت غیرمحلی مشتق کسری است. تطابق مناسب نتایج برای مقادیر مختلف n در شکل ۷ دقت و کارایی روش را در تقریب مسیرهای تصادفی تأیید می‌کند.



شکل ۷: نمودار جواب‌های تقریبی و دقیق به‌ازای $H_1 = \frac{۷}{۱۰}$، $H_2 = \frac{۳}{۴}$، $\alpha = \frac{۹}{۱۰}$ و $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹$ برای مثال ۳.۶.



شکل ۸: نمودار خطای روش به‌ازای $H_1 = \frac{۷}{۱۰}$، $H_2 = \frac{۳}{۴}$، $\alpha = \frac{۹}{۱۰}$ و $n = ۶۹$ برای مثال ۳.۶.

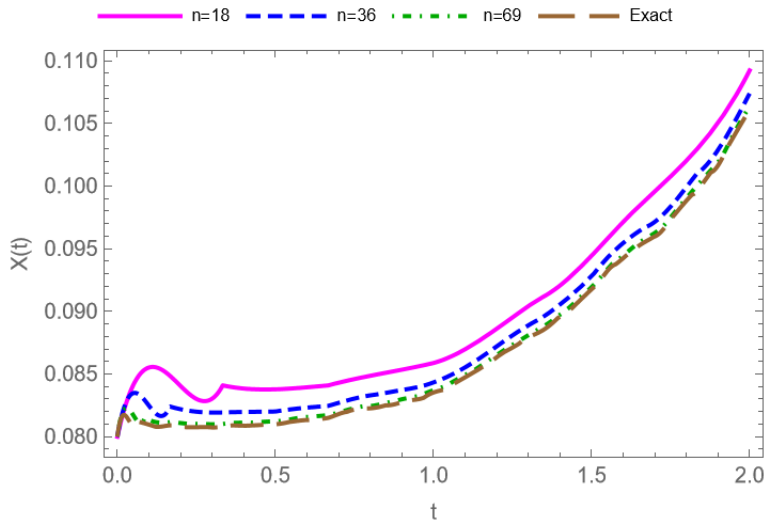
مثال ۴.۶. معادلهٔ انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری با حرکت براونی کسری چندبعدی به فرم

$$ {}_{۰}^{C}D_{t}^{\alpha}x(t) = t^{۲}\sin\left(x^{۳}(t)\right) + tx^{۳}(t)\dot{B}_{۱}^{H_{۱}}(t) + \cos(t)x^{۳}(t)\dot{B}_{۲}^{H_{۲}}(t) + \int_{۰}^{t} tx^{۲}(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad ۰ \le t \le ۲, $$

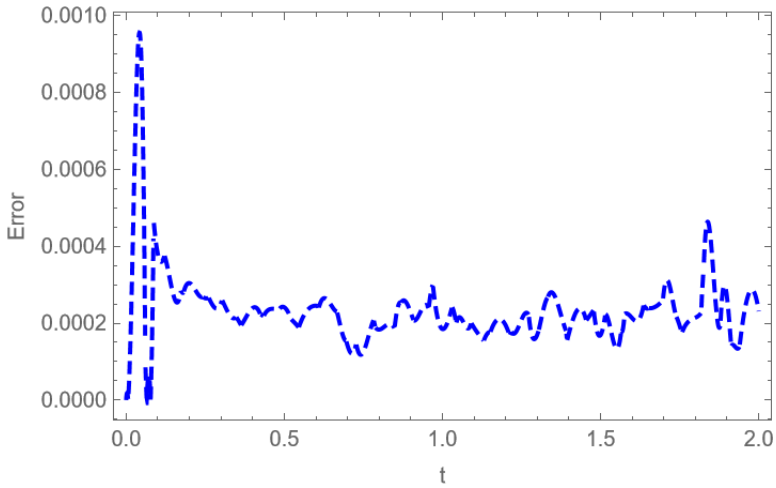
با شرط اولیهٔ $x(۰) = \frac{۸}{۱۰۰}$ و پارامترهای $H_1 = \frac{۱۷}{۲۰}$، $\alpha = \frac{۷}{۱۰}$ و $H_2 = \frac{۸}{۱۰}$ در نظر می‌گیریم. محاسبات عددی برای مقادیر $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹$ انجام شده است. نمودارهای جواب و خطای روش به‌ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ نمایش داده شده و مقادیر خطا در جدول ۷ آمده‌اند. همان‌گونه که از مقادیر جدول مشاهده می‌شود، افزایش تعداد نقاط گره‌ای موجب کاهش پیوستهٔ خطا می‌شود که حاکی از همگرایی روش پیشنهادی است. پراکندگی خطا در شکل ۱۰ نشان می‌دهد مقادیر خطا در بیشتر نقاط بازهٔ زمانی کوچک باقی می‌مانند و تنها در نواحی انتهایی افزایش اندکی دارند. این رفتار به‌ویژه در مسائل کسری با اثرات حافظه‌ای طبیعی است. تطابق مناسب منحنی‌های تقریبی در شکل ۹ بیانگر دقت بالای روش در تقریب رفتار تصادفی مسئلهٔ مورد مطالعه است.

جدول ۶: قدر مطلق خطا به‌ازای $H_1 = \frac{۷}{۱۰}$، $H_2 = \frac{۳}{۴}$ و $\alpha = \frac{۹}{۱۰}$ برای مثال ۳.۶.

t	$n = ۱۸$	$n = ۳۶$	$n = ۶۹$
۰	۰	۰	۰
۰٫۱	$۲٫۸۷۰۶۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۹۴۶۸۲ \times ۱۰^{-۷}$	$۱٫۵۳۸۳۸ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۲	$۱٫۴۳۸۷۴ \times ۱۰^{-۶}$	$۲٫۷۵۷۲۴ \times ۱۰^{-۷}$	$۱٫۶۲۹۲ \times ۱۰^{-۷}$
۰٫۳	$۱٫۵۸۵۶۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۵٫۷۱۴۰۴ \times ۱۰^{-۷}$	$۱٫۳۱۵۱۹ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۴	$۱٫۰۵۶۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۸٫۱۴۴۶۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۶۶۷۷۶ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۵	$۱٫۵۷۰۹۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۹٫۲۶۷۲۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۳٫۸۳۴۰۸ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۶	$۲٫۹۱۹۸۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۰۷۹۶۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۹۳۰۰۹ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۷	$۶٫۹۹۷۱۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۹۰۱۳۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۸٫۳۸۴۴۱ \times ۱۰^{-۶}$
۰٫۸	$۵٫۲۲۴۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۸٫۶۴۰۶۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۱۴۰۳۵ \times ۱۰^{-۵}$
۰٫۹	$۱٫۳۲۵۰۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۶٫۸۸۲۶۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۳٫۹۱۰۵۶ \times ۱۰^{-۵}$
۱	$۶٫۹۷۵۳۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۹۵۱۸۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۷۵۵۴۳ \times ۱۰^{-۵}$



شکل ۹: نمودار جواب‌های تقریبی و دقیق به‌ازای $H_1 = \frac{۱۷}{۲۰}$، $H_2 = \frac{۸}{۱۰}$، $\alpha = \frac{۷}{۱۰}$ و $n = ۱۸, ۳۶, ۶۹$ برای مثال ۴.۶.



شکل ۱۰: نمودار خطای روش به‌ازای $H_1 = \frac{۱۷}{۲۰}$، $H_2 = \frac{۸}{۱۰}$، $\alpha = \frac{۷}{۱۰}$ و $n = ۶۹$ برای مثال ۴.۶.

جدول ۷: قدر مطلق خطا به‌ازای $H_1 = \frac{۱۷}{۲۰}$، $H_2 = \frac{۸}{۱۰}$ و $\alpha = \frac{۷}{۱۰}$ برای مثال ۴.۶.

t	$n = ۱۸$	$n = ۳۶$	$n = ۶۹$
۰	۰	۰	۰
۰٫۱	$۴٫۵۵۸۷۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۵۱۱۸۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۸۰۱۳۱ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۲	$۳٫۲۶۰۶۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۴۰۶۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۳٫۰۴۱۳۱ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۳	$۲٫۳۰۲۹۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۸۹۶۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۵۲۶۷۷ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۴	$۲٫۹۶۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۹۷۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۳۹۴۵۸ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۵	$۲٫۷۸۷۲۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۱۳۷۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۴۱۳۰۳ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۶	$۲٫۶۱۴۷۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۹٫۹۰۱۴۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۴۵۲۹۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۷	$۲٫۵۰۳۲۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۹۶۱۳۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۴۱۷۰۳ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۸	$۲٫۵۹۸۴۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۳۶۶۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۸۳۳۴۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰٫۹	$۲٫۵۸۶۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۹٫۶۳۹۵۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲٫۲۶۹۲۸ \times ۱۰^{-۴}$
۱	$۲٫۳۵۴۵۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۰۸۳۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۸۴۸۰۵ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۱	$۲٫۲۳۵۵۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۷٫۹۱۶۸۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۸۸۰۹۳ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۲	$۲٫۲۷۸۸۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۸٫۷۶۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۹۴۳۷۵ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۳	$۲٫۴۸۰۰۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۹٫۵۰۵۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۷۰۵۵۲ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۴	$۲٫۴۹۷۷۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۹٫۷۴۵۶۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۷۳۷۵۴ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۵	$۲٫۶۷۵۷۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۹٫۹۶۰۲۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۹۱۳۹ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۶	$۲٫۸۹۲۷۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۲۰۹۱۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۱۲۹۷۸ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۷	$۳٫۵۹۸۲۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۶۹۴۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۸۱۸۵۲ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۸	$۳٫۱۹۵۸۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۸۴۶۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۱۴۳۴ \times ۱۰^{-۴}$
۱٫۹	$۳٫۴۰۴۲۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۲۳۹۲۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۶۵۳۸۲ \times ۱۰^{-۴}$
۲	$۳٫۱۳۸۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۱٫۳۰۱۶۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۲٫۳۱۰۲۸ \times ۱۰^{-۴}$

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش عددی نوین مبتنی بر توابع پایه‌ای کلاهی مکعبی، برای حل معادلات انتگرال–دیفرانسیل تصادفی کسری با مشتق کاپوتو و نویز ناشی از حرکت براونی کسری چندبعدی، ارائه شد. با بهره‌گیری از ویژگی‌های تحلیلی مشتق کاپوتو و انتگرال ریمان–لیوویل و استفاده از تقریب‌های مناسب، معادلات اصلی به دستگاهی از معادلات جبری با ساختار محاسباتی ساده تبدیل شدند. تحلیل خطای انجام‌شده نشان داد روش پیشنهادی در کنار پیچیدگی محاسباتی پایین، دقت مناسبی دارد. همچنین نتایج حاصل از مثال‌های عددی، کارایی و دقت بالای روش را تأیید و نشان دادند که روش نرخ همگرایی بالایی داشته و برای حل مؤثر این‌گونه معادلات یک ابزار قدرتمند محسوب می‌شود. با این حال، باید توجه داشت که تحلیل و آزمایش‌های عددی انجام‌شده براساس فرضیات استاندارد و در چارچوب معادلات با شرط اولیه صورت گرفته است. بررسی عملکرد روش در حضور انواع دیگر نویزهای تصادفی یا در مدل‌هایی با حافظه پیچیده‌تر می‌تواند در آینده مورد توجه قرار گیرد. با توجه به عملکرد مناسب روش ارائه‌شده می‌توان مسیرهای مختلفی را برای گسترش این پژوهش در نظر گرفت. از جمله گسترش روش برای معادلات با نویزهای غیرگاوسی یا حرکت‌های براونی کسری با پارامترهای متغیر در زمان، می‌تواند جنبه‌های کاربردی آن را افزایش دهد. پیاده‌سازی روش در مسائل مهندسی یا مالی واقعی که شامل عدم قطعیت و حافظه بلندمدت هستند نیز گامی مؤثر در راستای بهره‌گیری عملی از نتایج این تحقیق خواهد بود.

فهرست منابع

[1] Assari, P., & Dehghan, M., 2019. A meshless local discrete Galerkin (MLDG) scheme for numerically solving two-dimensional nonlinear Volterra integral equations. *Applied Mathematics and Computation, 350*, pp.249-265. doi:10.1016/j.amc.2019.01.0133

[2] Assari, P., & Dehghan, M., 2019. A meshless local Galerkin method for solving Volterra integral

equations deduced from nonlinear fractional differential equations using the moving least squares technique. *Applied Numerical Mathematics, 143*, pp.276-299. doi:10.1016/j.apnum.2019.04.014

[3] Behera, S., & Ray, S. S., 2022. A wavelet-based novel technique for linear and nonlinear fractional Volterra–Fredholm integro-differential equations. *Computational and Applied Mathematics, 41*(2), pp.77. doi:10.1007/s40314-022-01772-y

[4] Blömker, D., & Jentzen, A., 2013. Galerkin approximations for the stochastic burgers equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis 51*(1), pp.694–715. doi:10.1137/110845756

[5] Caraballo, T., Garrido-Atienza, M. J., & Taniguchi, T., 2011. The existence and exponential behavior of solutions to stochastic delay evolution equations with a fractional Brownian motion. *Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications, 74*(11), pp.3671-3684. doi:10.1016/j.na.2011.02.047

[6] Cayan, S.,& Sezer, M., 2020. Lerch matrix collocation method for 2D and 3D Volterra type integral and second order partial integro differential equations together with an alternative error analysis and convergence criterion based on residual functions. *Turkish Journal of Mathematics, 44*(6), pp.2073-2098. doi:10.3906/mat-2004-81

[7] Chen, X., Hu, P., Shum, S., & Zhang, Y., 2016. Dynamic stochastic inventory management with reference price effects. *Operations Research, 64*(6), pp.1529-1536. doi:10.1287/opre.2016.1524

[8] Chen, X., Yang, L., Duan, J., & Karniadakis, G. E., 2021. Solving Inverse Stochastic Problems from Discrete Particle Observations Using the Fokker–Planck Equation and Physics-Informed Neural Networks. *SIAM Journal on Scientific Computing, 43*(3), pp.811-830. doi:10.1137/20M1360153

[9] Doan, T. S., Huong, P. T., Kloeden, P. E., & Vu, A. M., 2020. Euler–Maruyama scheme for Caputo stochastic fractional differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 380*, pp.112989. doi:10.1016/j.cam.2020.112989

[10] Duncan, T. E., Hu, Y., & Pasik-Duncan, B., 2000. Stochastic calculus for fractional Brownian motion I. Theory. *SIAM Journal on Control and Optimization, 38*(2), pp.582-612. doi:10.1137/S036301299834171X

[11] Ezzati, R., Khodabin, M., & Sadati, Z., 2014. Numerical implementation of stochastic operational matrix driven by a fractional Brownian motion for solving a stochastic differential equation. *Abstract and Applied Analysis, 2014*(1), pp.523163. doi:10.1155/2014/523163

[12] Fareed, A. F., Semary, M. S., & Hassan, H. N., 2022. Two semi-analytical approaches to approximate the solution of stochastic ordinary differential equations with two enormous engineering applications. *Alexandria Engineering Journal, 61*(12), pp.11935-11945. doi:10.1016/j.aej.2022.05.054

[13] Hashemi, B., Khodabin, M., & Maleknejad, K., 2017. Numerical solution based on hat functions for solving nonlinear stochastic Itô Volterra integral equations driven by fractional Brownian motion. *Mediterranean Journal of Mathematics, 14*, pp.24. doi:10.1007/s00009-016-0820-7

[14] Hashemi, B. H., Khodabin, M., & Maleknejad, K., 2017. Numerical method for solving linear stochasticIto-Volterra integral equations driven by fractional Brownian motion using hat functions. *Turkish Journal of Mathematics, 41*(3), pp.611-624. doi:10.3906/mat-1508-50

[15] Heydari, M. H., Hooshmandasl, M. R., Ghaini, F. M., & Cattani, C., 2014. A computational method for solving stochastic Itô–Volterra integral equations based on stochastic operational matrix for generalized hat basis functions. *Journal of Computational Physics, 270*, pp.402-415. doi:https:10.1016/j.jcp.2014.03.064

[16] Liu, X., & Yang, X., 2021. Mixed finite element method for the nonlinear time-fractional stochastic fourth-order reaction–diffusion equation. *Computers & Mathematics with Applications, 84*, pp.39-55. doi:10.1016/j.camwa.2020.12.004

[17] Maleknejad, K., Khodabin, M., & Rostami, M., 2012. A numerical method for solving m-dimensional stochastic Itô–Volterra integral equations by stochastic operational matrix. *Computers & mathematics with applications, 63*(1), pp.133-143. doi:10.1016/j.camwa.2011.10.079

[18] McKane, A. J., & Newman, T. J., 2004. Stochastic models in population biology and their deterministic analogs. *Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 70*(4), pp.041902. doi:10.1103/PhysRevE.70.041902

[19] Mirzaee, F., & Hamzeh, A., 2016. A computational method for solving nonlinear stochastic Volterra integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 306*, pp.166-178. doi:10.1016/j.cam.2016.04.012

[20] Mirzaee, F., & Alipour, S., 2020. Cubic B-spline approximation for linear stochastic integro-differential equation of fractional order. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 366*, pp.112440. doi:10.1016/j.cam.2019.112440

[21] Mirzaee, F., Samadyar, N., & Hoseini, S. F., 2018. Euler polynomial solutions of nonlinear stochastic Itô–Volterra integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 330*, pp.574-585. doi:10.1016/j.cam.2017.09.005

[22] Mirzaee, F., & Samadyar, N., 2020. Numerical solution of two dimensional stochastic Volterra–Fredholm integral equations via operational matrix method based on hat functions. *SeMA Journal, 77*(3), pp.227-241. doi:10.1007/s40324-020-00213-2

[23] Momenzade, N., Vahidi, A. R., & Babolian, E., 2018. A computational method for solving stochastic Itô–Volterra integral equation with multi-stochastic terms. *Mathematical Sciences, 12*(4), pp.295-303. doi:10.1007/s40096-018-0269-x

[24] Momenzadeh, N., Vahidi, A., & Babolian, E., 2023. A numerical method for solving stochastic Ito-Volterra integral equation with multi stochastic terms by modified hat functions and improved hat functions. *Mathematical Researches, 9*(1), pp.222–245.

[25] Nemati, S., & Lima, P. M., 2018, June. Numerical solution of a third-kind Volterra integral equation using an operational matrix technique. In *2018 European Control Conference (ECC)*, pp.3215-3220. doi:10.23919/ECC.2018.8550223

[26] Oksendal, B., 2013. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.

[27] Rahimkhani, P., & Heydari, M. H., 2025. Numerical investigation of Ψ-fractional differential equations using wavelets neural networks. *Computational and Applied Mathematics, 44*(2), pp.54. doi:10.1007/s40314-024-02965-3

[28] Sharafi, F., & Basirat, B., 2022. Numerical solution of nonlinear stochastic Itô–Volterra integral equation by stochastic modified hat function operational matrices. *Results in Applied Mathematics, 14*, pp.100260. doi:10.1016/j.rinam.2022.100260

[29] Singh, P. K., & Ray, S. S., 2023. An efficient numerical method based on Lucas polynomials to solve multi-dimensional stochastic Itô-Volterra integral equations. *Mathematics and Computers in Simulation, 203*, pp.826-845. doi:10.1016/j.matcom.2022.06.029

[30] Singh, P. K., & Saha Ray, S., 2024. A novel operational matrix method based on Genocchi polynomials for solving n-dimensional stochastic Itô–Volterra integral equation. *Mathematical Sciences, 18*(2), pp.305-315. doi:10.1007/s40096-022-00502-z

[31] Shiralashetti, S. C., & Kumbinarasaiah, S., 2020. Laguerre wavelets exact parseval frame-based numerical method for the solution of system of differential equations. *International Journal of Applied and Computational Mathematics, 6*(4), pp.101. doi:10.1007/s40819-020-00848-9

[32] Singh, P. K., & Ray, S. S., 2025. Numerical solution of stochastic Itô-Volterra integral equations driven by fractional Brownian motion using quintic B-spline collocation method. *Stochastic Analysis and Applications*, pp.258-272. doi:10.1080/07362994.2025.2453217

[33] Taheri, Z., Javadi, S., & Babolian, E., 2017. Numerical solution of stochastic fractional integro-differential equation by the spectral collocation method. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 321*, pp.336-347. doi:10.1016/j.cam.2017.02.027

[34] Wen, X., & Huang, J., 2021. A Haar wavelet method for linear and nonlinear stochastic Itô–Volterra integral equation driven by a fractional Brownian motion. *Stochastic Analysis and Applications, 39*(5), pp.926-943. doi:10.1080/07362994.2020.1858873

[35] Xu, X., Xiao, Y., & Zhang, H., 2020. Collocation methods for nonlinear stochastic Volterra integral equations. *Computational and Applied Mathematics, 39*(4), pp.330. doi:10.1007/s40314-020-01353-x

[36] Zhang, H., Han, X., & Yang, X., 2013. Quintic B-spline collocation method for fourth order partial integro-differential equations with a weakly singular kernel. *Applied Mathematics and Computation, 219*(12), pp.6565-6575. doi:10.1016/j.amc.2013.01.012

A Numerical Method Based on Cubic Hat Functions to Solve a Class of Fractional Stochastic Integro-Differential Equations Driven by Multi-Dimensional Fractional Brownian Motion

Zahra zarei, Afshin Babaei[2] , Somayeh Nemati, Hassan Ranjbar

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

Communicated by: Mohsen Zivari Rezapour

Received: 10 July 2025 Accepted: 30 June 2026

Abstract: In this paper, a numerical method based on cubic hat functions is presented for solving a class of fractional stochastic integro-differential equations driven by multidimensional fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. The fractional derivative is considered in the Caputo sense. First, an approximation of the Caputo derivative of the unknown function with unknown coefficients is constructed based on the basis functions. Then, using this approximation and the properties of the Caputo derivative and the Riemann-Liouville integral, approximations for the solution and other functions appearing in the equation are introduced. By substituting these approximations into the equation and using suitable nodal points along with a backward approximation for simulating the fractional Gaussian noise, the original equation is transformed into a system of algebraic equations. Due to the properties of the cubic hat functions and their operational matrix of integration, the resulting system has low computational complexity. Solving this system yields an approximation of the solution to the original problem. Furthermore, the error analysis of the proposed method is investigated. Finally, several numerical examples are provided to confirm the efficiency of the proposed method.

Keywords: Fractional stochastic integro-differential equations, Multi-Dimensional fractional Brownian motion, Cubic hat functions, Operational matrix.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author

E-mail addresses: (Z. Zarei) z.zarei05@umail.umz.ac.ir, (A. Babaei) babaei@umz.ac.ir, (S. Nemati) s.nemati@umz.ac.ir, (H. Ranjbar) h.ranjbar@umail.umz.ac.ir