مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۳، ص ۱–۱۰

شاپا چاپی: ۸۰۸۸–۲۲۵۱
DOI: 10.22055/jamm.2026.50721.2418

بررسی همیلتونی بودن گراف‌های ۲–همبند فاقد سه‌تایی‌های خاص به عنوان زیرگراف القایی

سنا امام [۱]
و زهره مستقیم [۱] *

[۱] دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
دبیر مسئول: سعید علیخانی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۱۵

چکیده: در این مقاله، شرایط کافی برای همیلتونی بودن گراف‌های ۲–همبند بررسی شده است. به طور خاص، نشان داده شده است که اگر یک گراف G با مرتبه‌ای به اندازهٔ کافی بزرگ فاقد برخی زیرگراف‌های القایی مشخص باشد، همیلتونی خواهد بود. همیلتونی بودن گراف‌ها یکی از مسائل چالش‌برانگیز در نظریهٔ گراف است که تشخیص آن برای گراف‌های دلخواه، در حالت کلی دشوار و از نظر محاسباتی پیچیده است. از این رو، بررسی گراف‌هایی که فاقد ساختارهای خاص هستند، می‌تواند ابزار مناسبی برای یافتن شرایط کافی جهت تضمین وجود دور همیلتونی باشد. نتایج اصلی تحقیق بیان می‌کنند که هر گراف ۲–همبند که زیرگراف‌های القایی $K_{1,4}$، P_5 و Z_1 را شامل نشود، همیلتونی است. همچنین، اگر یک گراف ۲–همبند فاقد زیرگراف‌های القایی $K_{1,4}$، P_4 و B_2 یا نیز $K_{1,4}$، P_4 و $J_2(m)$ باشد، خاصیت همیلتونی را خواهد داشت. اثبات این نتایج مبتنی بر برهان خلف و تحلیل دقیق زیرگراف‌های القایی در ساختار گراف است.

واژه‌های کلیدی: گراف همیلتونی، R –آزاد، زیرگراف القایی، دور همیلتونی.

رده‌بندی ریاضی: 05C45

۱ مقدمه

همیلتونی بودن گراف‌ها یکی از مسائل بنیادی در نظریهٔ گراف است که دارای کاربردهای گسترده‌ای در علوم کامپیوتر، بهینه‌سازی ترکیبیاتی، طراحی شبکه‌های ارتباطی، سیستم‌های حمل‌ونقل و مسائل مسیریابی است.

*زهره مستقیم
(Z. Mostaghim) mostaghim@iust.ac.ir, (S. Emam) sana_emam@mathdep.iust.ac.ir

یک گراف را همیلتونی می‌نامیم اگر شامل یک دور همیلتونی باشد؛ یعنی دوری که از تمام رأس‌های گراف عبور کرده و هر رأس را دقیقاً یک‌بار ملاقات کند. تعیین اینکه یک گراف همیلتونی است یا خیر، یکی از مسائل مشهور و چالش‌برانگیز در نظریهٔ گراف محسوب می‌شود، چرا که وجود یک دور همیلتونی وابسته به ساختار داخلی گراف و ویژگی‌های ترکیبیاتی آن است. از آنجایی که هیچ معیار کلی و ساده‌ای برای تشخیص همیلتونی بودن یک گراف دلخواه وجود ندارد، پژوهشگران این حوزه روش‌های مختلفی را برای بررسی این ویژگی پیشنهاد کرده‌اند. یکی از روش‌های رایج، بررسی گراف‌هایی است که فاقد برخی زیرگراف‌های القایی خاص هستند. در واقع، حضور برخی زیرگراف‌های مشخص ممکن است ساختار گراف را به گونه‌ای تغییر دهد که همیلتونی بودن آن از بین برود. بنابراین، مطالعهٔ گراف‌های SR- آزاد، یعنی گراف‌هایی که هیچ زیرگراف القایی از مجموعه $\{S, R\}$ ندارند، می‌تواند به یافتن شرایط کافی برای همیلتونی بودن کمک کند.

در این زمینه، نتایج کلاسیکی وجود دارد که پایه بسیاری از پژوهش‌های بعدی را شکل داده‌اند. به‌ویژه فادری[†] و گولد[‡] [۳–۵] و بروسک[§] [۱] مجموعه‌ای از جفت‌ها و سه تایی‌های ممنوعه را بررسی و طبقه‌بندی کرده‌اند و نشان داده‌اند که نبود این زیرگراف‌ها در گراف‌های ۲-همبند، همیلتونی بودن آنها را تضمین می‌کند. این مطالعه سرآغاز جریان پژوهشی مهمی در نظریهٔ گراف بوده که تاکنون نیز ادامه یافته است. از سوی دیگر، تلاش‌های پژوهشگران دیگری همچون شی[¶][۶] ، ژنگ[۱][۷] و چریان[**][۲] در زمینهٔ طبقه‌بندی جفت‌های ممنوعه و تعمیم‌های بعدی آن، چهارچوبی فراهم آورده است که امکان شناسایی خانواده‌های گسترده‌تری از زیرگراف‌های ممنوعه را میسر می‌سازد. در سال‌های اخیر، تحقیقات متعددی بر شرایط تکمیلی همچون استقامت گراف متمرکز شده و نتایج تازه‌ای در ارتباط با گراف‌های همیلتونی ارائه کرده‌اند. این دستاوردها نشان می‌دهند که مطالعهٔ زیرگراف‌های ممنوعه همچنان موضوعی پویا و فعال در پژوهش‌های معاصر است.

مجموعهٔ رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و تعداد آن را با $|V(G)|$ نشان می‌دهیم. مسیر و دور با n رأس را به ترتیب با P_n و C_n نشان می‌دهیم. اگر با حذف حداقل k رأس از گراف G ، گراف ناهمبند شود، گراف G را k -همبند می‌نامیم. زیرگرافی که از حذف یک مجموعه از رأس‌ها به‌دست می‌آید، زیرگراف القایی نامیده می‌شود. زیرگراف القایی روی رأس‌های $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ را به این صورت $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ نشان می‌دهیم. گراف دو بخشی کامل با دو مجموعهٔ m و n رأسی را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. در یک دور یا مسیر جهت را ساعتگرد در نظر گرفتیم و رأس قبل از رأس u را به‌صورت u^- و رأس بعد آن را به‌صورت u^+ نشان می‌دهیم. مطابق شکل ۱، گراف B_2[††] گرافی با ۴ رأس است که شامل دو دور با طول ۳ می‌باشد که دقیقاً یک یال مشترک دارند.

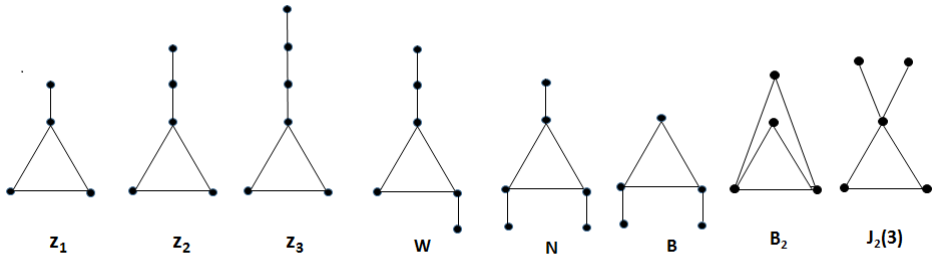
لم ۱.۱. (فن[‡‡]) اگر G یک گراف ساده k- همبند باشد، $x \in V(G)$ و $Y \subseteq V(G) \setminus x$ یک مجموعه از رأس‌ها باشد، اگر $k \leq |Y|$ آنگاه در گراف G، k مسیر داخلی رأس مجزا از x به Y وجود دارد که به k رأس متمایز از Y ختم می‌شود.

قضیه ۲.۱. [۳] فرض کنیم R یک گراف همبند و G یک گراف ۲-همبند باشد، آنگاه گراف R-آزاد G همیلتونی است اگر و تنها اگر R=P_3.

قضیه ۳.۱. [۳] فرض کنیم R, S ($R, S \neq P_3$) گراف‌های همبند باشند و G ($G \neq C_3$) یک گراف ۲-همبند باشد، آنگاه گراف RS -آزاد G همیلتونی است اگر و تنها اگر $R = K_{1,3}$ و S یکی از گراف‌های C_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 ، Z_1 ، Z_2 ، Z_3 ، B ، N یا W باشد.

---

† Faudree
‡ Gould
§ Brousek
¶ Shi
۱ Zheng
** Cheriyan
†† Book graph
‡‡ Fan



شکل ۱

۲ نتایج اصلی

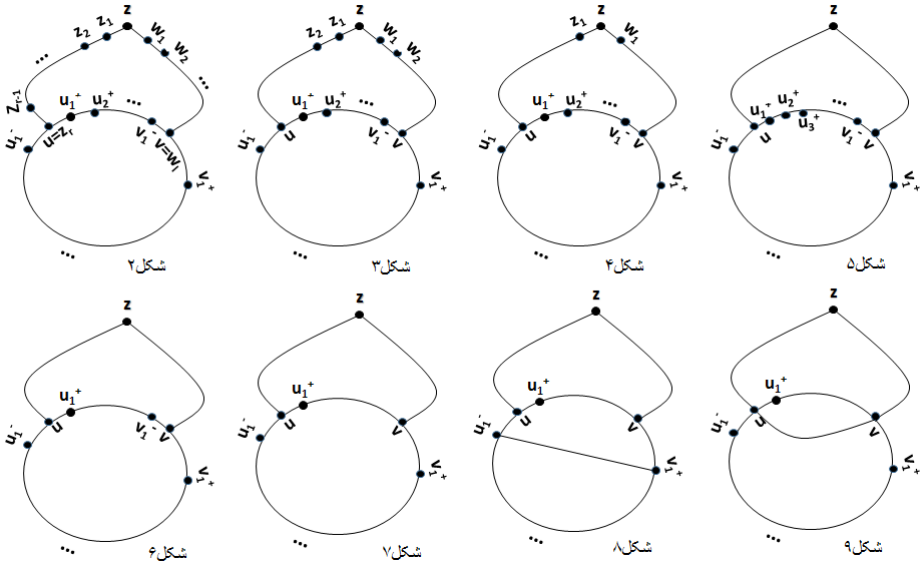
در این بخش قضیه ۱.۲، ۲.۲ و ۳.۲ از مقاله [۴] بدون استفاده از اعداد رمزی به روش برهان خلف و با استفاده از تحلیل ساختاری بر پایه دور بیشینه و موقعیت رأس‌های خارج از آن اثبات شده است و برای درک بهتر اثبات تصاویر گراف مرحله به مرحله ارائه شده‌اند.

قضیه ۱.۲. اگر گراف G از مرتبهٔ n با n به اندازه کافی بزرگ، ۲-همبند و $K_{1,4}P_5Z_1$-آزاد باشد، آنگاه G همیلتونی است.

اثبات. فرض کنیم گراف G همیلتونی نباشد و C ($V(C) \geq 6$ برای ۴ $V(C) =$ و ۵ $V(C) =$) دو گراف از مرتبه ۵ و ۶ وجود دارند که در قضیه صدق نمی‌کنند.) طولانی‌ترین دور در گراف G باشد. بنابراین رأسی از گراف G مانند z وجود دارد که $z \notin V(C)$. چون G ، ۲-همبند است، بنابر لم فن، z با دو مسیر رأس مجزای P_1 و P_2 به دور C متصل است. $P_1 : zz_1z_2 \dots z_r = u$ و $P_2 : zl_1l_2 \dots l_k = v$ و $u, v \in V(C)$ (شکل۲). فرض کنیم P_1 و P_2 کوتاهترین مسیر از z به u و v است. فرض می‌کنیم z با هیچ مسیری به رأس‌های بین $[u, v]$ (باتوجه به شکل۲، منظور مجموعه رأس‌های $\{u_1^+, u_2^+, \dots, v_1^-\}$ است.) در دور C متصل نیست. این فرض از کلیت مسأله کم نمی‌کند، یعنی ما آن دو مسیر از رأس z به دور C را در نظر می‌گیریم که نزدیک‌ترین اتصال را داشته باشند. رأس z نمی‌تواند با این دو مسیر به دو رأس متوالی از دور C متصل باشد، چون با طولانی‌ترین دور بودن C در تناقض است. گراف G، P_5-آزاد است، پس مسیر $P_i(i = 1, 2)$ از مرتبه حداکثر ۴ است.
فرض کنیم $|V(P_1)| =$ ۴ بنابراین با توجه به شکل۳، $\langle z, z_1, z_2, u, u_1^+ \rangle \cong P_5$ و هیچ کدام از رأس‌های این مسیر نمی‌توانند مجاور باشند، بنابراین با P_5-آزاد بودن گراف G، در تناقض است و $|V(P_1)| <$ ۴.
فرض کنیم $|V(P_1)| =$ ۳. به‌دلیل اینکه C را طولانی‌ترین دور گراف در نظر گرفتیم بین $[u, v]$ باید حداقل دو رأس وجود داشته باشد، با توجه به شکل ۴، $\langle z, z_1, u, u_1^+, u_2^+ \rangle \cong P_5$ که با P_5-آزاد بودن گراف G، در تناقض است، بنابراین باید حداقل دو رأس از آن مجاور باشند، تنها رأس‌های u و u_2^+ می‌توانند مجاور باشند که نتیجه می‌دهد $\langle u_1^+, u_2^+, u, z_1 \rangle \cong Z_1$ و به تناقض می‌رسیم. برای P_2 نیز مشابه P_1 ثابت می‌شود. بنابراین z با دو رأس u و v از C مجاور است.
اگر بین $[u, v]$ بیش از دو رأس وجود داشته باشد، با توجه به شکل ۵، $\langle z, u, u_1^+, u_2^+, u_3^+ \rangle \cong P_5$ هیچ دو رأسی از آن نمی‌توانند مجاور باشند در نتیجه به تناقض می‌رسیم و بین $[u, v]$ حداکثر دو رأس وجود دارد.
همان‌طور که در شکل ۶، دیده می‌شود $\langle u_1^-, u, u_1^+, v_1^-, v \rangle \cong P_5$، بنابراین باید حداقل دو رأس از آن مجاور باشند.
u_1^- مجاور u_1^+ نیست چون زیرگراف القایی Z_1 ایجاد می‌شود.
u_1^- مجاور v_1^- نیست زیرا با طولانی‌ترین دور بودن C در تناقض است.
u_1^- با v مجاور نیست به‌دلیل اینکه زیرگراف القایی $K_{1,4}$ ایجاد می‌شود و هیچ دو رأسی از $\{u_1^-, v_1^-, z, v_1^+\}$ نمی‌توانند مجاور باشند.
u مجاور v_1^- و v مجاور u_1^+ نیست چون زیرگراف القایی Z_1 ایجاد می‌شود، پس u و v مجاورند و زیرگراف القایی Z_1 ایجاد می‌شود.
در این صورت باید v مجاور u_1^+ و u مجاور v_1^- باشد که $\langle u, u_1^+, v_1^-, z \rangle$ و $\langle u_1^+, v_1^-, v, z \rangle$ زیرگراف القایی Z_1 هستند،

پس به تناقض می‌رسیم و فقط یک رأس بین $[u,v]$ می‌تواند وجود داشته باشد.

در شکل ۷ دیده می‌شود $\langle u_1^-, u, u_1^+, v, v_1^+\rangle \cong P_5$ پس نتیجه می‌گیریم، u_1^- مجاور v_1^+ است (شکل۸) یا u مجاور v است (شکل۹). اگر u_1^- مجاور v_1^+ باشد، $\langle z, u, u_1^-, v_1^+, v_2^+\rangle \cong P_5$ هیچ دو رأسی از آن نمی‌توانند مجاور باشند، بنابراین به تناقض خواهیم رسید و u_1^- مجاور v_1^+ نیست. اگر u مجاور v باشد، پس باید u_1^- مجاور v و v_1^+ مجاور u باشد، در این صورت
$\langle v, u, u_1^-, u_2^-\rangle \cong Z_1$ پس باید u_2^- به u یا v مجاور باشد که زیرگراف القایی Z_1 ایجاد شده و تناقض است. درنتیجه بین $[u,v]$ در دور C هیچ رأسی وجود ندارد و با طولانی‌ترین دور بودن C در تناقض است. بنابراین گراف G همیلتونی است.



□

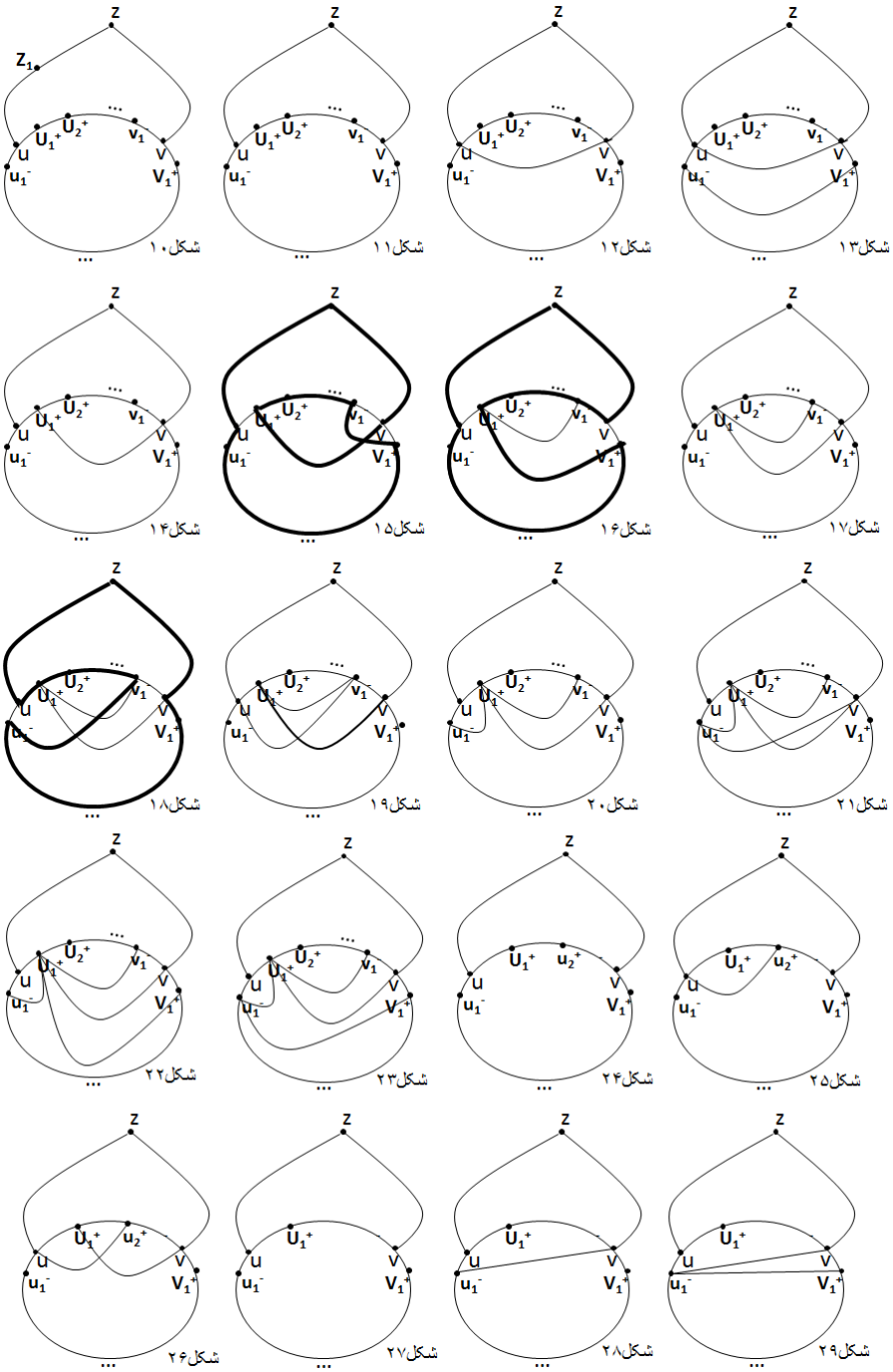
قضیه ۲.۲. اگر گراف G از مرتبهٔ n با n به اندازه کافی بزرگ، ۲-همبند و $K_{1,4}P_4B_2$ -آزاد باشد، آنگاه G همیلتونی است.

اثبات. فرض کنیم گراف G همیلتونی نبوده و C طولانی‌ترین دور در گراف G باشد. بنابراین رأسی از گراف G مانند z وجود دارد که $z \notin V(C)$. چون G ، ۲-همبند است، بنابر لم فن، z با دو مسیر رأس مجزای P_1 و P_2 به دور C متصل است. $P_1 : zz_1z_2\dots z_r = u$ و $P_2 : zl_1l_2\dots l_k = v$ و $u, v \in V(C)$ فرض کنیم P_1 و P_2 کوتاهترین مسیر از z به u و v است. رأس z نمی‌تواند با این دو مسیر به دو رأس متوالی از دور C متصل باشد، چون با طولانی‌ترین دور بودن C در تناقض است. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم z با هیچ مسیری به رأس‌های بین $[u,v]$ نیست.
چون گراف G، P_4 -آزاد است، پس مسیر $P_i (i = 1, 2)$ از مرتبهٔ حداکثر ۳ است. با توجه به شکل ۱۰، $\langle z, z_1, u, u_1^+\rangle \cong$
P_4 که با P_4 -آزاد بودن گراف G در تناقض است. بنابراین رأس z با دو رأس v و u از دور C مجاور است.
اگر بین $[u,v]$ در دور C بیش از ۳ رأس وجود داشته باشد (شکل ۱۱)، $\langle v, z, u, u_1^+\rangle \cong P_4$ بنابراین u مجاور v یا u_1^+ مجاور v است.
اگر u مجاور v باشد (شکل ۱۲)، $\langle u_1^-, u, v, v_1^+\rangle \cong P_4$. بنابراین حداقل یکی از این سه حالت باید برقرار شود؛
حالت اول: u_1^- مجاور v باشد. پس $\langle u_1^-, u, v, z\rangle \cong B_2$ و چون z مجاور u_1^- نمی‌تواند باشد پس این حالت امکان پذیر نیست.
حالت دوم: v_1^+ مجاور u باشد. پس $\langle v_1^+, u, v, z\rangle \cong B_2$ و چون z مجاور v_1^+ نمی‌تواند باشد پس این حالت امکان پذیر نیست.
حالت سوم : u_1^- مجاور v_1^+ باشد (شکل ۱۳). پس $\langle u_1^-, v_1^+, v, z\rangle \cong P_4$ و چون هیچکدام از رأس‌های نامجاور در این مسیر نمی‌توانند مجاور باشند پس این حالت هم امکان پذیر نیست. بنابراین u مجاور v نیست.

پس u_1^+ مجاور v است. با توجه به شکل ۱۴، $\langle z, v_1^+, v_1^-, u_1^+, v\rangle \cong K_{1,4}$ بنابراین حداقل یکی از حالت‌های زیر باید برقرار شود؛
حالت اول: v_1^+ مجاور v_1^- باشد. با توجه به شکل ۱۵، با بزرگترین دور بودن C در تناقض است.
حالت دوم: v_1^+ مجاور u_1^+ باشد. با توجه به شکل ۱۶، با بزرگترین دور بودن C در تناقض است.
بنابراین باید (حالت سوم) v_1^- مجاور u_1^+ باشد. با توجه به شکل ۱۷، $\langle u_1^-, u, u_1^+, v_1^-\rangle \cong P_4$.
v_1^- مجاور u_1^- نیست، با توجه به شکل ۱۸، اگر $v_1^- \sim u_1^-$ با بزرگترین دور بودن C در تناقض است.
v_1^- و u مجاور نیستند، زیرا با توجه به شکل ۱۹، $\langle u_1^+, v_1^-, v, u\rangle \cong B_2$، در قسمت قبل ثابت کردیم u مجاور v نیست، بنابراین با B_2 -آزاد بودن G در تناقض است.
بنابراین باید u_1^+ مجاور u_1^- باشد. با توجه به شکل ۲۰، $\langle u_1^-, u_1^+, v, v_1^+\rangle \cong P_4$.
u_1^- مجاور v نیست زیرا با توجه به شکل ۲۱، $\langle u_1^+, u_1^-, v, u\rangle \cong B_2$ و $u \nsim v$ نیست، بنابراین با B_2 -آزاد بودن G در تناقض است.
u_1^+ مجاور v_1^+ نیست، در غیر این‌صورت با توجه به شکل ۲۲، با بزرگترین دور بودن C در تناقض است.
با توجه به شکل ۲۳، $\langle z, v, v_1^+, u_1^-\rangle \cong P_4$ و هیچکدام از رأس‌های نامجاور در این مسیر نمی‌توانند مجاور باشند، بنابراین v_1^+ مجاور u_1^- نیست.

پس حداکثر دو رأس بین $[u, v]$ در دور C وجود دارد. با توجه به شکل ۲۴، $\langle z, u, u_1^+, u_2^+\rangle \cong P_4$ بنابراین با P_4-آزاد بودن گراف G در تناقض است، در نتیجه u مجاور u_2^+ است. در شکل ۲۵، مشاهده می‌شود. $\langle z, v, u_2^+, u_1^+\rangle \cong P_4$ بنابراین v مجاور u_1^+ است. با توجه به شکل ۲۶، $\langle u_1^+, u_2^+, u, v\rangle \cong B_2$ بنابراین باید u مجاور v باشد که با توجه به قسمت‌های قبلی اثبات ممکن نیست.

پس حداکثر یک رأس بین $[u, v]$ در دور C وجود دارد. با توجه به شکل ۲۷، $\langle v, z, u, u_1^-\rangle \cong P_4$. در صورتی که u و v مجاور باشند، $\langle u, v, z, u_1^+\rangle \cong B_2$ که با B_2-آزاد بودن گراف G در تناقض است. بنابراین v مجاور u_1^- است. با توجه به شکل ۲۸، $\langle z, u, u_1^-, u_1^+, v_1^+\rangle \cong K_{1,4}$، می‌دانیم v_1^+ مجاور u_1^+ نیست چون با بزرگترین دور بودن C در تناقض است. همچنین می‌دانیم u_1^+ مجاور u_1^- نیست چون با بزرگترین دور بودن C در تناقض است. بنابراین v_1^+ مجاور u_1^- است. با توجه به شکل ۲۹، $\langle z, u, u_1^-, v_1^+\rangle \cong P_4$ پس u مجاور v_1^+ است. $\langle u_1^-, v_1^+, u, v\rangle \cong B_2$ بنابراین باید u مجاور v باشد که با توجه به اثبات ممکن نیست. پس بین $[u, v]$ در دور C هیچ رأسی وجود ندارد و با طولانی‌ترین دور بودن C در تناقض است. بنابراین گراف G همیلتونی است.

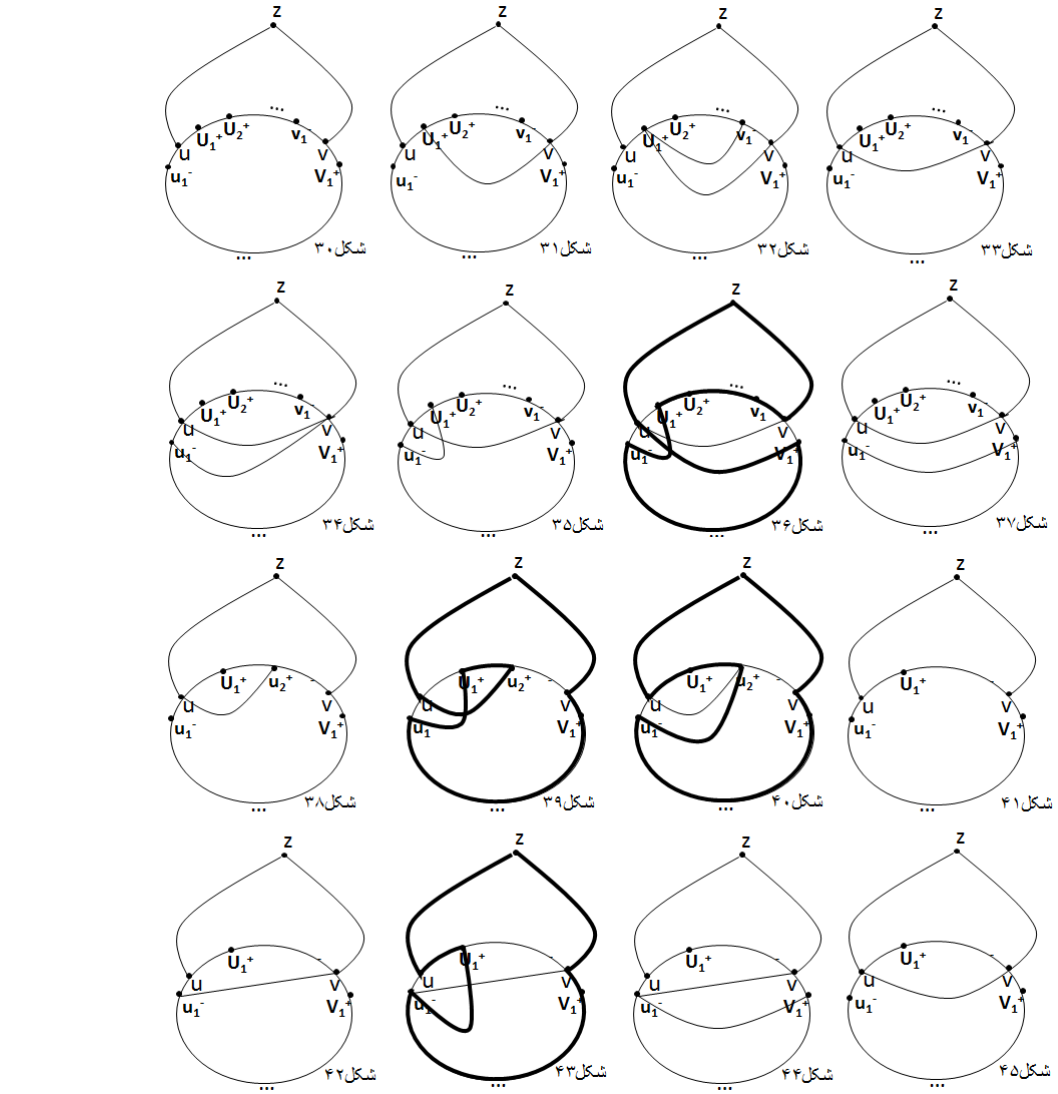


□

قضیه ۳.۲. اگر گراف G از مرتبهٔ n با n به اندازه کافی بزرگ، ۲-همبند و $K_{1,4}P_4J_2(m)$ -آزاد باشد، آنگاه G همیلتونی است.

اثبات. فرض کنیم گراف G همیلتونی نباشد و C طولانی‌ترین دور در گراف G باشد. بنابراین رأسی از گراف G مانند z وجود دارد که $z \notin V(C)$. چون G ، ۲-همبند است، بنابراین z با دو مسیر رأس مجزای P_1 و P_2 به دور C متصل است. $P_1 : zz_1z_2 \dots z_r = u$ و $P_2 : zl_1l_2 \dots l_k = v$ و $u, v \in V(C)$ فرض کنیم P_1 و P_2 کوتاهترین مسیر از z به u و v است. بدون کاستن از کلیت مسأله فرض می‌کنیم z با هیچ مسیری به رأس‌های بین $[u, v]$ نیست.
چون گراف G، P_4 -آزاد است. دقیقاً طبق اثبات قضیهٔ ۲.۲، رأس z با دو رأس v و u از دور C مجاور است (شکل ۳۰).

اگر بین $[u,v]$ در دور C حداقل سه رأس وجود داشته باشد، طبق اثبات قضیهٔ ۲.۲، v مجاور u است یا v مجاور u_1^+ است.
اگر v مجاور u_1^+ باشد (شکل ۳۱) $\langle v,z,v_1^-,v_1^+,u_1^+\rangle \cong K_{1,4}$ دقیقاً طبق اثبات قضیهٔ ۲.۲، v_1^+ مجاور v_1^- و v_1^+ مجاور u_1^+ نیست. بنابراین v_1^- مجاور u_1^+ است. باتوجه به شکل ۳۲، $\langle u_1^+,v_1^-,v,z,v_1^+\rangle \cong J_2(m)$ چون هیچکدام از رأس‌های نامجاور در زیرگراف القایی $J_2(m)$ نمی‌توانند مجاور باشند با $J_2(m)$ -آزاد بودن G در تناقض است.
لذا v مجاور u است (شکل ۳۳). بنابراین $\langle z,u,v,u_1^-,u_1^+\rangle \cong J_2(m)$ پس باید یکی از دو حالت زیر برقرار باشد؛
حالت اول: اگر u_1^- مجاور v باشد (شکل ۳۴). بنابراین $\langle v,z,v_1^-,v_1^+,u_1^-\rangle \cong K_{1,4}$.
دقیقاً طبق اثبات قضیهٔ ۲.۲، v_1^+ مجاور v_1^- نیست و v_1^- مجاور u_1^- نخواهد بود. زیرا با اینکه C بزرگترین دور گراف G است در تناقض خواهد بود.
v_1^+ مجاور u_1^- نیست چون $\langle u_1^-,v_1^+,v,z,v_1^-\rangle \cong J_2(m)$ بنابراین با $J_2(m)$ -آزاد بودن G در تناقض است.
حالت دوم: اگر u_1^- مجاور u_1^+ باشد (شکل ۳۵) $\langle v_1^+,v,u,u_1^-\rangle \cong P_4$.
v_1^+ مجاور u نیست. زیرا با توجه به شکل ۳۶، با بزرگترین دور بودن C در تناقض است.
v_1^+ مجاور u_1^- نیست (شکل ۳۷) در غیر این صورت $\langle z,v,v_1^+,u_1^-\rangle \cong P_4$ و هیچکدام از رأس‌های نامجاور در این مسیر نمی‌توانند مجاور باشند، بنابراین با P_4 -آزاد بودن G در تناقض است.
پس حداکثر دو رأس بین $[u,v]$ در دور C وجود دارد.
مطابق اثبات قضیهٔ ۲.۲، u مجاور u_2^+ است.
با توجه به شکل ۳۸، $\langle u,u_1^+,u_2^+,z,u_1^-\rangle \cong J_2(m)$.
با توجه به شکل ۳۹ و ۴۰، u_1^- مجاور u_1^+ و u_2^+ نیست. زیرا با اینکه C بزرگترین دور گراف G است در تناقض خواهد بود. بنابراین با $J_2(m)$ -آزاد بودن گراف G در تناقض است.
پس حداکثر یک رأس بین $[u,v]$ در دور C وجود دارد.
با توجه به شکل ۴۱، $\langle v,z,u,u_1^-\rangle \cong P_4$ پس باید یکی از دو حالت زیر برقرار باشد؛
حالت اول: اگر u_1^- مجاور v باشد (شکل ۴۲). بنابراین $\langle v,z,u_1^+,v_1^+,u_1^-\rangle \cong K_{1,4}$، v_1^+ مجاور u_1^+ نیست چون با بزرگترین دور بودن C در تناقض است. همچنین u_1^+ مجاور u_1^- نیست (شکل ۴۳) چون با بزرگترین دور بودن C در تناقض است. v_1^+ مجاور u_1^- نیست (شکل ۴۴) چون $\langle u_1^-,v_1^+,v,z,u_1^+\rangle \cong J_2(m)$ که با $J_2(m)$ -آزاد بودن گراف G در تناقض است.
حالت دوم: بنابراین باید u مجاور v باشد. با توجه به شکل ۴۵، $\langle v_1^+,v,u,u_1^-\rangle \cong P_4$ هیچکدام از رأس‌های غیرمجاور در این مسیر نمی‌توانند مجاور باشند. پس با P_4 -آزاد بودن گراف G در تناقض است.
پس بین $[u,v]$ در دور C هیچ رأسی وجود ندارد و این با طولانی‌ترین دور بودن C در تناقض است. بنابراین گراف G همیلتونی است.



□

۳ نتیجه گیری

در این مقاله، همیلتونی بودن گراف‌های با مجموعه‌ای از زیرگراف‌های القایی ممنوع بررسی شد و سه قضیهٔ شناخته‌شده از ادبیات موجود با رویکردی متفاوت و ساختاری بازسازی گردید. تمرکز اصلی کار نه بر تغییر صورت نتایج، بلکه بر ارائه اثبات‌هایی منسجم و مبتنی بر تحلیل محلی مجاورت رأس‌ها بود؛ رویکردی که امکان بررسی هم‌زمان چند قید القایی را فراهم می‌کند.

یکی از جنبه‌های قابل‌توجه این بازسازی، ارائه اثبات‌هایی است که بدون استفاده مستقیم از ابزارهای وجودی مانند اعداد رمزی پیش می‌روند. این امر موجب شفاف‌تر شدن مسیر استدلال‌ها و کاهش وابستگی آنها به فرض‌های کمّی می‌شود. از این منظر، مقاله نشان می‌دهد که بسیاری از نتایج مبتنی بر شرایط رمزی را می‌توان با تحلیل‌های صرفاً ساختاری نیز به دست آورد. از سوی دیگر، یکنواخت‌سازی چارچوب اثبات‌ها برای قضایای مختلف، امکان مقایسهٔ دقیق‌تر نقش زیرگراف‌های القایی ممنوع را فراهم می‌کند و می‌تواند به‌عنوان الگویی برای مطالعهٔ کلاس‌های مشابه‌ای از گراف‌ها مورد استفاده قرار گیرد. انتظار می‌رود این رویکرد در بررسی سایر خانواده‌های گراف با قیدهای القایی متفاوت نیز قابل تعمیم باشد.

فهرست منابع

[1] Brousek, J., 2002. Forbidden triples for hamiltonicity. *Discrete Mathematics*, 251(1-3), pp.71-76. doi:10.1016/S0012-365X(01)00326-0

[2] Cheriyan, J., Hajebi, S., Qu, Z. and Spirkl, S., 2022. Minimal induced subgraphs of two classes of 2-connected non-Hamiltonian graphs. *Discrete Mathematics*, 345(7), p.112869. doi:10.1016/j.disc.2022.112869

[3] Faudree, R.J. and Gould, R.J., 1997. Characterizing forbidden pairs for hamiltonian properties. *Discrete Mathematics*, 173(1-3), pp.45-60. doi:10.1016/S0012-365X(96)00147-1

[4] Faudree, R., Gould, R. and Jacobson, M., 2005. Potential forbidden triples implying hamiltonicity: for sufficiently large graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 25(3), pp.273-289. doi:10.7151/dmgt.1281

[5] Faudree, R.J., Gould, R.J., Jacobson, M.S. and Lesniak, L.L., 2002. Characterizing forbidden clawless triples implying hamiltonian graphs. *Discrete Mathematics*, 249(1-3), pp.71-81. doi:10.1016/S0012-365X(01)00235-7

[6] Shi, L. and Shan, S., 2022. A note on hamiltonian cycles in 4-tough ($P_2 \cup kP_1$)-free graphs. *Discrete Mathematics*, 345(12), p.113081. doi:10.1016/j.disc.2022.113081

[7] Zheng, W., Broersma, H. and Wang, L., 2021. Toughness, Forbidden Subgraphs and Pancyclicity. *Graphs and Combinatorics*, 37(3), pp.839-866. doi:10.1007/s00373-021-02284-y

On the Hamiltonicity of 2-Connected Graphs Excluding Certain Triads as Induced Subgraphs

Sana Emam[(1)] and Zohreh Mostaghim[(1)] §§

[(1)] School of Mathematics and Computer Science, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Communicated by: Saeid Alikhani

Received: 29 September 2025 Accepted: 6 July 2026

Abstract: In this paper, we investigate sufficient conditions for Hamiltonicity of 2-connected graphs. In particular, we show that if a graph G of sufficiently large order is free of certain specified induced subgraphs, then it is Hamiltonian. Determining whether a graph is Hamiltonian is a challenging problem in graph theory and is known to be computationally hard. Therefore, studying graphs that exclude particular structures can serve as a useful tool for identifying sufficient conditions guaranteeing the existence of a Hamiltonian cycle. Our main results demonstrate every 2-connected graph is P_5-free, $K_{1,4}$-free, and Z_1-free is Hamiltonian. Moreover, we prove that a 2-connected graph is Hamiltonian if it contains no induced subgraphs isomorphic to either P_4, $K_{1,4}$ and B_2 or to P_4, $K_{1,4}$ and $J_2(m)$. The proofs are based on contradiction and a detailed analysis of induced subgraphs within the structure of the graph.

Keywords: Hamiltonian graph, R-free, Induced subgraph, Hamiltonian cycle.

©2026 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

§§Corresponding author
E-mail addresses: (Z. Mostaghim) mostaghim@iust.ac.ir, (S. emam) sana_emam@mathdep.iust.ac.ir