مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۳، ص ۲۳–۳۱

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.52408.2508

q–آنالوگ و اعداد کاتالان

محمد رضا درفشه [۱]
[۱] دانشکدگان علوم، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران، ایران

دبیر مسئول: مهرداد نامداری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۳/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۱۵

چکیده: اعداد کاتالان C_n با فرمول $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ تعریف می‌شوند. در این مقاله، پس از بیان تاریخچه پیدایش این اعداد در ترکیبیات و معرفی q–آنالوگ آن‌ها، نشان می‌دهیم که C_n با درجه یک سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه متقارن S_{2n} برابر است. علاوه بر این، ثابت می‌کنیم که اگر $C_n(q)$ نمایانگر q–آنالوگ عدد کاتالان باشد، عبارت $q^n C_n(q)$ با درجه یک سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه خطی عام $\mathrm{GL}_{2n}(q)$ مطابقت دارد.

واژه‌های کلیدی: اعداد کاتالان، q–آنالوگ، سرشت تحویل‌ناپذیر، گروه متقارن، گروه خطی عام.
رده‌بندی ریاضی: 05A19, 05A30, 20C30, 20C33.

۱ مقدمه

منظور از q–آنالوگ یک قضیه، اتحاد یا عبارت ریاضی، حالت تعمیم‌یافته‌ای از آن است که شامل پارامتر q بوده، به‌گونه‌ای که در حد $q \to 1$ (یا جایگذاری $q = 1$)، قضیه، اتحاد یا عبارت اولیه بازتولید می‌شود. این مفهوم در ترکیبیات جبری و نظریه نمایش کاربرد گسترده‌ای دارد.
برای هر عدد صحیح مثبت n، عدد گاوسی n–ام، فاکتوریل گاوسی و ضرایب دوجمله‌ای گاوسی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + \cdots + q + 1,$$
$$[n]_q! = [1]_q[2]_q \dots [n]_q,$$
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!}.$$

به‌وضوح، با میل کردن $q \to 1$ داریم:

$$\lim_{q\to 1}[n]_q = n, \quad \lim_{q\to 1}[n]_q! = n!, \quad \lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}.$$

[۱] محمد رضا درفشه
(M.R. Darafsheh) darafsheh@ut.ac.ir

تعبیر هندسی این تساوی‌ها به این صورت است: فرض کنید V یک فضای برداری n-بعدی روی میدان متناهی $\mathbb{F}_q$ باشد. تعداد زیرفضاهای یک‌بعدی V برابر با $\frac{q^n-1}{q-1}$ است که در حالت $q \to 1$، به تعداد زیرمجموعه‌های تک‌عضوی از مجموعه n-عضوی $S = \{1, 2, \dots, n\}$ میل می‌کند. همچنین، تعداد زیرفضاهای k-بعدی V برابر است با:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q![k]_q!} = \frac{(q^n-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\cdots(q-1)},$$

که در حد $q \to 1$، برابر با $\binom{n}{k}$، یعنی تعداد زیرمجموعه‌های k-عضوی از S است.

به عنوان مثالی دیگر، اگر U یک زیرفضای m-بعدی از V باشد، تعداد زیرفضاهای ℓ-بعدی W در V به‌طوری که $U \cap W = \{0\}$ باشد، برابر با $\begin{bmatrix} n-m \\ \ell \end{bmatrix}_q \cdot q^{\ell m}$ است. این عبارت در حد $q \to 1$ به $\binom{n-m}{\ell}$ میل می‌کند که متناظر با تعداد زیرمجموعه‌های ℓ-عضوی از S و مجزا از زیرمجموعه m-عضوی مفروض است.

۲ اعداد کاتالان

اعداد کاتالان که به نام یوجین شارل کاتالان نام‌گذاری شده‌اند، از بنیادی‌ترین دنباله‌ها در ترکیبیات شمارشی هستند.

برای این اعداد تعابیر گوناگونی وجود دارد؛ به‌گونه‌ای که در کتاب [۶]، بیش از ۲۱۴ ساختار ترکیبیاتیِ معادل برای آن‌ها بیان شده است. عدد کاتالان nام به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

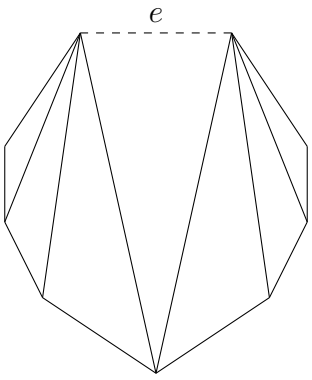
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

یکی از تعابیر هندسی مشهور این اعداد، مسئله مثلث‌بندی چندضلعی‌های محدب است. فرض کنید P_{n+2} یک چندضلعی محدب با $n+2$ رأس باشد. یک مثلث‌بندی از P_{n+2}، افراز این چندضلعی به n مثلث با استفاده از $n-1$ قطر غیرمتقاطع در نقاط درونی است. تعداد روش‌های متمایز برای این کار دقیقاً برابر با عدد کاتالان C_n است. جملات نخستین این دنباله عبارت‌اند از:

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad \dots$$

رابطه بازگشتی برای محاسبه C_n

فرض کنید P_{n+3} یک $(n+3)$-ضلعی محدب در صفحه باشد.



ضلع e از P_{n+3} را در نظر بگیرید و فرض کنید T یک مثلث‌بندی از P_{n+3} باشد. در این صورت، دقیقاً یک مثلث از T وجود دارد که ضلع e را در بر می‌گیرد. با حذف این مثلث، دو چندضلعی مثلث‌بندی‌شده Q_1 و Q_2 به‌دست می‌آیند که تنها در یک رأس مشترک‌اند.

اگر Q_i دارای $a_i + 2$ رأس باشد، آنگاه $a_1 + a_2 = n$. ممکن است یکی از اعداد a_1 یا a_2 برابر صفر باشد؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که مثلثِ شامل e، یکی از اضلاع دیگر P_{n+3} را نیز در بر بگیرد. در این حالت، یکی از دو چندضلعی حاصل در واقع یک ۲-ضلعی در نظر گرفته می‌شود که تنها یک مثلث‌بندی دارد؛ ازاین‌رو می‌نویسیم $C_0 = 1$.

برعکس، اگر دو چندضلعی مثلث‌بندی‌شده با $a_۱ + ۲$ و $a_۲ + ۲$ رأس داده شده باشند، می‌توان آن‌ها را در امتداد یک رأس مشترک و با افزودن ضلع e به یک $(n + ۳)$-ضلعی مثلث‌بندی‌شده تبدیل کرد. از آنجا که برای Q_i به تعداد C_{a_i} مثلث‌بندی وجود دارد، رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید:

$$C_{n+۱} = \sum_{k=۰}^{n} C_k C_{n-k}. \tag{۱.۲}$$

تابع مولد برای محاسبه C_n

گزاره ۱.۲. اگر $C(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} C_n x^n$ باشد، آنگاه

$$C(x) = \frac{۱ - \sqrt{۱ - ۴x}}{۲x}.$$

اثبات. طرفین رابطه (۱.۲) را در x^n ضرب کرده و روی $n \geqslant ۰$ جمع می‌کنیم. در نتیجه:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} C_{n+۱} x^n = \frac{C(x) - ۱}{x}.$$

از سوی دیگر، ضریب x^n در $C(x)^۲$ برابر با $\sum_{k=۰}^{n} C_k C_{n-k}$ است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{C(x) - ۱}{x} &= C(x)^۲ \\ &\Longrightarrow xC(x)^۲ - C(x) + ۱ = ۰ \\ &\Longrightarrow C(x) = \frac{۱ - \sqrt{۱ - ۴x}}{۲x}. \end{aligned}$$

اگر علامت مثبت را انتخاب کنیم، آنگاه

$$\sqrt{۱ - ۴x} = ۱ - ۲x + \cdots \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{۱}{x} - ۱ + \cdots,$$

که با تعریف $C(x)$ سازگار نیست. پس:

$$C(x) = \frac{۱ - \sqrt{۱ - ۴x}}{۲x}.$$ □

گزاره ۲.۲.

$$C_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n} = \frac{(۲n)!}{n!(n+۱)!}.$$

اثبات. از بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{۱ - ۴x} = (۱ - ۴x)^{۱/۲} &= \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۱/۲}{n} (-۴x)^n \\ \Rightarrow \quad C(x) &= \frac{۱}{۲x}\left(۱ - \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۱/۲}{n} (-۴x)^n\right) \\ &= -\frac{۱}{۲} \sum_{n=۰}^{\infty} \binom{۱/۲}{n+۱} (-۴)^{n+۱} x^n. \end{aligned}$$

با مقایسه‌ی ضرایب x^n در دو طرف، به‌دست می‌آید:

$$C_n = -\frac{۱}{۲}\binom{۱/۲}{n+۱}(-۴)^{n+۱}.$$

از تعریف ضریب دوجمله‌ای تعمیم‌یافته:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-۱)\dots(n-m+۱)}{m!},$$

داریم:

$$\binom{۱/۲}{n+۱} = \frac{\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}-۱)\cdots(\frac{۱}{۲}-n)}{(n+۱)!},$$

و در نتیجه:

$$C_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}.$$

□

در ادامه، برخی از مشهورترین تعابیر ترکیبیاتیِ اعداد کاتالان را بیان می‌کنیم و بدون ورود به اثبات تفصیلی، ماهیت هر یک را به‌اختصار همراه با مثال توضیح می‌دهیم.

قضیه **۳.۲**. برای هر $n \geq ۰$، عدد کاتالان C_n با هر یک از کمیت‌های زیر برابر است:

(i) تعداد مثلث‌بندی‌های یک $(n+۲)$-ضلعی محدب؛

(ii) تعداد درخت‌های دودویی کامل با n رأس داخلی؛

(iii) تعداد درخت‌های صفحه‌ای ریشه‌دار با $n+۱$ رأس؛

(iv) تعداد دنباله‌های رأی به طول $۲n$؛

(v) تعداد روش‌های پرانتزگذاری کامل یک عبارت با $n+۱$ عامل؛

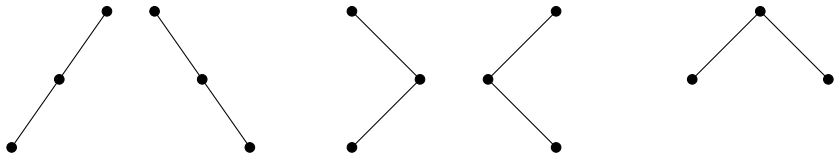
(vi) تعداد مسیرهای دایک به طول $۲n$.

اثبات. برای اثبات هم‌ارزی این تعابیر و بررسی تناظرهای دوسویی میان آن‌ها، به مرجع [۶] رجوع شود. □

در ادامه به تشریح و ارائه مثال برای برخی از موارد فوق می‌پردازیم:

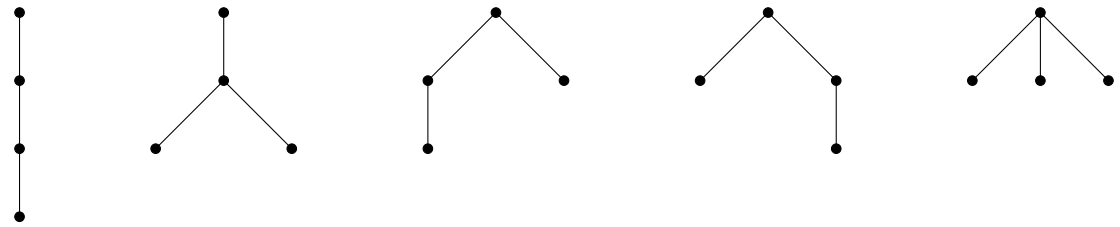
(ii) درخت‌های دودویی کامل: یک درخت دودویی کامل به‌صورت بازگشتی چنین تعریف می‌شود: درخت تهی $\emptyset$ یک درخت دودویی است و هر درخت دودویی ناتهی از یک رأس ریشه و دو زیردرخت چپ و راست تشکیل می‌شود که هر یک خود یک درخت دودویی‌اند. در این تعبیر، عدد کاتالان C_n تعداد درخت‌های دودویی کامل با n رأس داخلی را می‌شمارد.

مثال **۴.۲**. برای $n = ۳$، دقیقاً $C_۳ = ۵$ درخت دودویی کامل با ۳ رأس داخلی وجود دارد:



(iii) درخت‌های صفحه‌ای ریشه‌دار: یک درخت صفحه‌ای ریشه‌دار P یا از یک رأس منفرد v (به‌عنوان ریشه) تشکیل می‌شود، یا شامل رأسی ریشه‌ای v است که به دنباله‌ای مرتب از درخت‌های صفحه‌ای ریشه‌دار $(P_1, \dots, P_m)$ با $m \geq 1$ متصل است. در این ساختار، ترتیب زیردرخت‌ها اهمیت دارد و C_n تعداد این درخت‌ها با $n+1$ رأس را مشخص می‌کند.

مثال ۵.۲. برای $n = 3$، تعداد $C_3 = 5$ درخت صفحه‌ای ریشه‌دار با ۴ رأس به‌صورت زیر است:



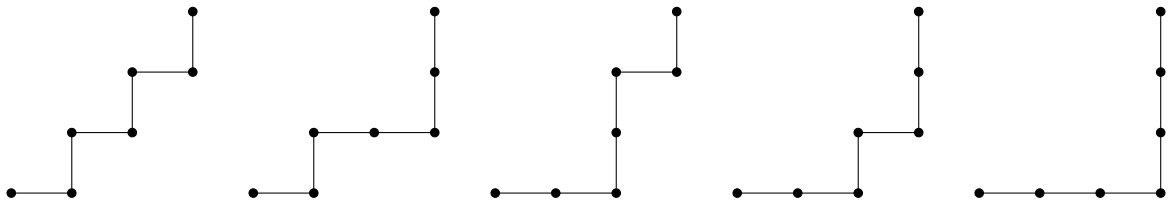
(iv) دنباله‌های رأی: دنباله رأی دنباله‌ای به طول $2n$ متشکل از n عدد ۱ و n عدد -1 است، به‌طوری‌که مجموع تمامی جملات برابر با صفر بوده و هر مجموع جزئی آن نامنفی باشد.

مثال ۶.۲. برای $n = 3$، دنباله‌های رأی به طول ۶ عبارت‌اند از:

$$(1,1,1,-1,-1,-1), \quad (1,1,-1,1,-1,-1), \quad (1,1,-1,-1,1,-1),$$
$$(1,-1,1,1,-1,-1), \quad (1,-1,1,-1,1,-1).$$

(vi) مسیرهای دایک: یک مسیر دایک به طول $2n$، مسیری در شبکه $\mathbb{Z}^2$ از مبدأ $(0,0)$ به $(2n,0)$ با گام‌های صعودی $(1,1)$ و نزولی $(1,-1)$ است، به‌گونه‌ای که مسیر هرگز به زیر محور افقی نرسد.

مثال ۷.۲. برای $n = 3$، تعداد $C_3 = 5$ مسیر دایک به طول ۶ در زیر رسم شده‌اند:



۳ q–آنالوگ اعداد کاتالان

q–آنالوگ اعداد کاتالان را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_n(q) = \frac{1}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q.$$

با بهره‌گیری از ویژگی‌های ضرایب گاوسی، اتحادهای زیر برقرار هستند:

$$\begin{bmatrix} 2n \\ n+1 \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = [n]_q C_n(q),$$
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q + q^m \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q + q^{n-m} \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q,$$
$$\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} 2n \\ n+1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^n}{[n+1]_q} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q = q^n C_n(q).$$

با توجه به اینکه $C_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$، مشاهده می‌شود که $\lim_{q\to ۱} C_n(q) = C_n$؛ بنابراین $C_n(q)$ یک q-آنالوگ برای اعداد کاتالان است. همچنین، اتحادهای زیر برای اعداد کاتالان برقرار است:

$$C_n = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n} = \frac{(۲n)!}{(n+۱)!n!} = \prod_{k=۲}^{n}\frac{n+k}{k},$$

$$C_n = \binom{۲n}{n} - \binom{۲n}{n+۱} = \frac{۱}{۲n+۱}\binom{۲n+۱}{n} = \frac{۲(۲n-۱)}{n+۱}C_{n-۱}.$$

۴ چند مثال دیگر

جایگشتی از گروه متقارن S_n را که فاقد هرگونه نقطه ثابت باشد، یک پریش[۲] می‌نامند. تعداد کل پریش‌های گروه متقارن S_n با $\mathcal{D}_n$ نشان داده می‌شود و برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n &= n!\left(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \cdots + (-۱)^n\frac{۱}{n!}\right)\\ &= n!\sum_{k=۰}^{n}\frac{(-۱)^k}{k!},\end{aligned}$$

که در آن طبق تعریف $۰! = ۱$ است. در [۸]، q-آنالوگِ $\mathcal{D}_n$ به‌صورت زیر معرفی شده است:

$$\mathcal{D}_n(q) = [n]_q!\sum_{k=۰}^{n}(-۱)^k\frac{q^{\binom{k}{۲}}}{[k]_q!}.$$

در همین راستا، در [۵]، q-آنالوگِ قضایای ویلسون و فرما مطرح و اثبات شده است.

حال فرض کنید n یک عدد طبیعی، $\Omega = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $\lambda = (\lambda_۱, \ldots, \lambda_k)$ یک افراز از n باشد $(\lambda \vdash n)$ به‌طوری‌که $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ \geq \cdots \geq \lambda_k > ۰$. به ازای هر $۰ < m \leq n$، زیرمجموعه‌ای مانند $\Omega(m) \subseteq \Omega$ با اندازهٔ m را در نظر می‌گیریم. یک λ-پرچم در Ω، زنجیره‌ای از زیرمجموعه‌ها به‌صورت زیر است:

$$\Omega(\lambda_۱) \subset \Omega(\lambda_۱ + \lambda_۲) \subset \cdots \subset \Omega(\lambda_۱ + \cdots + \lambda_k) = \Omega$$

به‌طوری‌که $|\Omega(\sum_{j=۱}^{i}\lambda_j)| = \sum_{j=۱}^{i}\lambda_j$. تعداد کل λ-پرچم‌ها در Ω برابر است با ضریب چندجمله‌ای:

$$\binom{n}{\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_k} = \frac{n!}{\lambda_۱!\,\lambda_۲!\cdots\lambda_k!}.$$

گروه متقارن S_n بر مجموعه تمام λ-پرچم‌ها عمل می‌کند و سرشت جایگشتیِ حاصل، که با φ_λ نشان داده می‌شود، درجه‌ای برابر با عدد فوق دارد.

حال فرض کنید V یک فضای برداری n-بعدی روی میدان متناهی $\mathbb{F}_q$ (با q عضو) باشد و $\mathrm{GL}_n(q)$ گروه خطی عام روی V را نشان دهد. با استفاده از مفاهیم مشابه، یک λ-پرچم در V به‌صورت زنجیری از زیرفضاها تعریف می‌شود:

$$V_۱ \subset V_۲ \subset \cdots \subset V_k = V$$

به‌طوری‌که $\dim V_i = \sum_{j=۱}^{i}\lambda_j$ برای هر $۱ \leq i \leq k$. تعداد کل λ-پرچم‌ها در فضای برداری V برابر با ضریب چندجمله‌ای گاوسی زیر است:

$$\begin{bmatrix} n \\ \lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[\lambda_۱]_q!\,[\lambda_۲]_q!\cdots[\lambda_k]_q!}.$$

[۲] Derangement

گروه $\mathrm{GL}_n(q)$ نیز بر مجموعه تمام λ-پرچم‌ها در V عمل می‌کند و از این عمل، سرشت جایگشتیِ χ_λ پدید می‌آید. واضح است که با میل کردن $q \to ۱$، تعداد λ-پرچم‌ها در V به تعداد λ-پرچم‌ها در Ω میل می‌کند؛ بنابراین تعداد λ-پرچم‌ها در V یک q-آنالوگ طبیعی برای تعداد λ-پرچم‌ها در Ω است.

بر اساس قضیه‌ای از اشتاینبرگ، سرشت‌های χ_λ و φ_λ هر یک به‌صورت مجموعی از سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های متناظر خود تجزیه می‌شوند. به این منظور، افراز $\lambda = (n-m, m)$ از n را با شرط $۰ \le m \le \frac{n}{۲}$ در نظر می‌گیریم. در حالت خاص اگر $m = ۰$ باشد، آنگاه $\varphi_\lambda = ۱_{S_n}$ و $\chi_\lambda = ۱_{\mathrm{GL}_n(q)}$ سرشت‌های بدیهی (همانی) گروه‌های متناظر خواهند بود که در مورد گروه متقارن این مؤلفه را با $[n]$ و در مورد گروه خطی عام آن را با $\chi^{(n)}$ نشان می‌دهیم.

از سوی دیگر، میان افرازهای عدد n و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر S_n یک تناظر یک‌به‌یک برقرار است. اگر μ افرازی از n باشد، سرشت تحویل‌ناپذیر متناظر با μ را با $[\mu]$ نشان می‌دهیم. بنابراین، نتایج زیر حاصل می‌شوند:

لم ۱.۴. برای سرشت جایگشتیِ φ_λ با $\lambda = (n-m, m)$ داریم:

$$\varphi_\lambda = [n] + [n-۱, ۱] + \cdots + [n-m, m], \qquad ۰ \le m \le \frac{n}{۲},$$

که در آن $[n-k, k]$، برای $۰ \le k \le \frac{n}{۲}$، سرشت‌های تحویل‌ناپذیر S_n از درجه $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-۱}$ می‌باشند.

گزاره ۲.۴. عدد کاتالان C_n برابر با درجه‌ی یک سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه متقارن است.

اثبات. گروه متقارن $S_{۲n}$ را در نظر گرفته و افراز $\lambda = (n, n) \vdash ۲n$ را انتخاب می‌کنیم. طبق لم ۱.۴، گروه $S_{۲n}$ دارای سرشت تحویل‌ناپذیری از درجه

$$\binom{۲n}{n} - \binom{۲n}{n-۱} = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n} = C_n$$

است. بنابراین، C_n برابر با درجه یک سرشت تحویل‌ناپذیر از $S_{۲n}$ است. □

مشابه ساختار فوق، سرشت جایگشتی χ_λ از گروه $\mathrm{GL}_n(q)$ نیز تجزیه متناظری دارد:

لم ۳.۴. برای افراز $\lambda = (n-m, m)$ با شرط $۰ \le m \le \frac{n}{۲}$ از n داریم:

$$\chi_\lambda = \chi^{(n)} + \chi^{(n-۱,۱)} + \cdots + \chi^{(n-m,m)},$$

که در آن $\chi^{(n-k,k)}$ یک سرشت تحویل‌ناپذیر از $\mathrm{GL}_n(q)$ با درجه $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} n \\ k-۱ \end{bmatrix}_q$ است.

گزاره ۴.۴. فرض کنید $C_n(q) = \frac{۱}{[n+۱]_q}\begin{bmatrix} ۲n \\ n \end{bmatrix}_q$، q-آنالوگِ عدد کاتالان C_n باشد. در این صورت، کمیت $q^n C_n(q)$ برابر با درجه یک سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه خطی عام $\mathrm{GL}_{۲n}(q)$ است.

اثبات. افراز $\lambda = (n, n)$ از $۲n$ را در نظر بگیرید. طبق لم ۳.۴، گروه $\mathrm{GL}_{۲n}(q)$ دارای سرشت تحویل‌ناپذیری با درجه زیر است:

$$\begin{bmatrix} ۲n \\ n \end{bmatrix}_q - \begin{bmatrix} ۲n \\ n-۱ \end{bmatrix}_q = q^n C_n(q).$$

پس $q^n C_n(q)$ درجه سرشت تحویل‌ناپذیر $\chi^{(n,n)}$ از $\mathrm{GL}_{۲n}(q)$ است. به‌علاوه، با میل کردن $q \to ۱$، این درجه مستقیماً به C_n میل می‌کند. □

فهرست منابع

[1] M. R. Darafsheh, Geometric characters of general linear groups, *New Frontiers in Hyperstructures*, edited by T. Vougiouklis, Molise, Italy, (1995), 189–199.

[2] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press, New York, 1978.

[3] G. D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 682, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1978. https://doi.org/10.1007/BFb0067708

[4] G. D. James, *Representations of General Linear Groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 94, Cambridge University Press, 1984. https://doi.org/10.1017/CBO9780511661921

[5] H. Pan and Y. Sun, A q-analogue of Wilson's congruence, *Advances in Applied Mathematics*, 130 (2021), Article 102228. https://doi.org/10.1016/j.aam.2021.102228

[6] R. P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015. https://doi.org/10.1017/CBO9781139871495

[7] R. Steinberg, A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 71 (1951), 274–282. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1951-0043784-0

[8] M. L. Wachs, On q-derangement numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106 (1989), 273–278. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1989-0937015-6

q-Analogue and the Catalan Numbers

M.R. Darafsheh[3]

(1) Science Schools, School of Mathematics, Statistics and Computer Sciences, Faculty of Science, University of Tehran, Tehran, Iran

Communicated by: Mehrdad Namdari

Received: 18 June 2026 Accepted: 6 September

Abstract: Catalan numbers are defined by the formula $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. In this paper, after a brief historical overview of these numbers in mathematics and the introduction of their q-analogue, we show that C_n is equal to the degree of an irreducible character of the symmetric group S_{2n}. Furthermore, we prove that if $C_n(q)$ represents the q-analogue of the Catalan number, then the expression $q^n C_n(q)$ corresponds to the degree of an irreducible character of the general linear group $\mathrm{GL}_{2n}(q)$.

Keywords: Catalan numbers, q-analogue, irreducible character, symmetric group, general linear group.
(MSC 2020): 05A19, 05A30, 20C30, 20C33.

©2026 Tehran University of Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[3]Corresponding author
E-mail addresses: (M.R. Darafsheh) darafsheh@ut.ac.ir