مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۳، ص ۳۲–۴۲

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.50736.2419

مطالعهء برخی شاخص‌های توپولوژیکی گراف ناجابجایی

مریم جهاندیده خانقشلاقی [۱] [۱] و سارا شکرالهی یانچشمه [۲]

[۱] گروه ریاضی، واحد ماهشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران
[۲] گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

دبیر مسئول: محمدرضا درفشه

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۷/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۲۰

چکیده: گراف ناجابجایی یک گروه متناهی و ناآبلی G با نماد $(\Gamma(G))$ گرافی است که مجموعهء رئوس آن برابر با $(G-(ZG))$ می‌باشد. در این گراف، دو راس متمایز $x,y\in V(\Gamma(G))$ مجاورند هرگاه شرط $xy\neq yx$ برقرار باشد. در این مقاله، شاخص‌های توپولوژیکی $F-Leap$، F_1-Leap و زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول و دوم برای گراف ناجابجایی گروه G مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. این شاخص‌ها بر اساس معیارهایی همچون فواصل میان رئوس، عدد اتصال، درجهء رئوس و عدد خروج از مرکز یک راس مورد تحلیل و محاسبه می‌شوند. نتایج این پژوهش می‌تواند در درک بهتر ویژگی‌های ساختاری گروه‌ها و ارتباط آن‌ها با شاخص‌های گرافی نقش مؤثری ایفا کند.

واژه‌های کلیدی: گراف ناجابجایی؛ شاخص $F-Leap$، شاخص F_1-Leap، شاخص‌های زاگرب، شاخص‌های زاگرب تعمیم یافته.

رده‌بندی ریاضی: 20D60; 05C25; 05C07; 05C12; 20E99

۱ مقدمه

در این مقاله G یک گروه متناهی و ناآبلی در نظر گرفته می‌شود. مرکز گروه G که با $Z(G)$ نمایش داده می‌شود، زیرگروه نرمالی از G است و به صورت $\mathrm{Z(G)}=\{g\in G \mid \forall x\in G,\ xg=gx\}$ تعریف می‌گردد.

برای هر x در G، زیرگروه مرکز ساز x در G که با $(C_G(x))$ نشان داده می‌شود، زیرگروهی از G است که به صورت $\{g\in G \mid xg=gx\}$ بیان می‌شود. همچنین به ازای هر x در G، کلاس تزویج x، با نماد $class(x)$، به صورت

$$class(x)=\left\{g^{-1}xg \;\middle|\; g\in G\right\}.$$

[۱] مریم جهاندیده خانقشلاقی
(M. Jahandideh) m.jahandideh.kh@iau.ac.ir

می‌باشد. اگر $k(G)$ تعداد کلاس‌های تزویج گروه G و $\{x_i\}_{i=1}^{k(G)}$ نماینده‌های متمایز این کلاس‌ها باشند، همواره رابطهء $G = \bigcup_{i=1}^{k(G)} class(x_i)$ برقرار است [۱۴].
یک گراف $H = (V(H), E(H))$ شامل یک مجموعهء غیرتهی $V(H)$ از رئوس و یک مجموعهء $E(H)$ از یال‌ها است. اگر یال e دو راس x, y را به هم متصل کند، می‌نویسیم $e = \{x, y\} \in E(H)$. گراف H را متناهی نامند هرگاه هر دو مجموعهء $V(H)$ و $E(H)$ متناهی باشند.
گراف H را ساده می‌نامند اگر هر یال دقیقاً دو رأس متمایز را به یکدیگر متصل کند و هیچ دو یال متمایزی رأس‌های مشترک نداشته نباشند.
در هر گراف H، طول کوتاه‌ترین مسیر میان هر دو راس $x, y \in V(H)$ با نماد $d(x, y)$ نشان داده می‌شود که آن را فاصلهء دو راس x, y می‌گویند. همچنین، تعداد رئوسی از مجموعه $V(H)$ را که فاصله آن‌ها از یک راس مشخص x برابر با ۲ باشد، عدد اتصال راس x می‌نامند که با نماد $d_2(x)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$d_2(x) = |\{y \in V(H) \mid d(y, x) = 2\}| .$$

درجهء یک راس x در گراف H با نماد $\deg(x)$ برابر با تعداد یال‌های گذرنده از آن راس است. عدد خروج از مرکز هر راس x در گراف H که با نماد $e(x)$ مشخص می‌شود، برابر است با :

$$e(x) = Max\{d(x, y) \mid y \in V(H)\} .$$

علاوه بر این، قطر گراف H با نماد $diam(H)$ نمایش داده می‌شود، مطابق زیر است [۳]:

$$diam(H) = Max\{e(x) \mid x \in V(H)\} .$$

به هر گروه متناهی G، می‌توان گراف‌های ساده متعددی نسبت داد که هر یک ساختاری متفاوت دارند.
در این مقاله، به بررسی گرافی با نام گراف ناجابجایی می‌پردازیم. گراف ناجابجایی گروه متناهی G با نماد $\Gamma(G)$ نمایش داده می‌شود. مجموعهء رئوس و مجموعه یال‌های این گراف به ترتیب با $V(\Gamma(G))$ و $E(\Gamma(G))$ نشان داده و $V(\Gamma(G)) = G - Z(G)$ به طوری که $Z(G)$ مرکز گروه G است. هر دو راس متمایز $x, y \in V(\Gamma(G))$ مجاورند اگر و تنها اگر $xy \neq yx$. به بیان دیگر،

$$\{x, y\} \in E(\Gamma(G)) \leftrightarrow xy \neq yx.$$

گراف ناجابجایی یک گروه متناهی نخستین بار توسط پال اردوش معرفی گردید [۱۳]. با توجه به متناهی بودن دو مجموعهء $V(\Gamma(G))$ و $E(\Gamma(G))$، گراف ناجابجایی یک گراف متناهی خواهد بود. در ادامه، به معرفی شاخص‌های توپولوژیکی و انواع آن‌ها پرداخته می‌شود.
گراف مولکولی، نمایش ریاضی یک مولکول به‌صورت یک گراف ساده و متناهی است که در آن رئوس متناظر با اتم یال‌ها متناظر با پیوندهای شیمیایی میان آن‌ها می‌باشند. شاخص‌های توپولوژیکی، کمیت‌هایی عددی هستند که از گراف‌های مولکولی ترکیبات شیمیایی استخراج شده ویژگی‌هایی نظیر درجهء رئوس و فواصل میان آن‌ها را بازتاب می‌دهند. این شاخص‌ها تحت یکریختی گراف‌ها پایا بوده و تغییر نمی‌کنند. این شاخص‌ها کاربرد گسترده‌ای در بررسی روابط میان ساختار مولکولی و خواص فیزیکی و شیمیایی ترکیبات دارند [۱۵]. نخستین شاخص توپولوژیکی مبتنی بر فاصله، در سال ۱۹۴۷ توسط وینر معرفی گردید [۱۷] و تاکنون در حوزه‌های مختلفی از جمله شیمی و زیست شناسی مورد استفاده قرار گرفته است. امروزه می‌توان به کاربردهای متنوع شاخص توپولوژیکی در زمینه‌های گوناگون همچون شیمی، علم نانو و علوم پزشکی اشاره کرد، حوزه‌هایی که این کمیت‌ها در آن‌ها به‌عنوان ابزارهایی کارآمد برای مطالعهء ویژگی‌های ترکیبات و سیستم‌های پیچیده به شمار می‌روند.
شاخص‌های زاگرب نوع اول و نوع دوم برای نخستین بار در سال ۱۹۷۰ معرفی شدند [۶–۸]. جهاندیده و سارمین هانیزا در سال ۲۰۱۵، برای نخستین بار این شاخص‌ها را برای گراف ناجابجایی گروه متناهی G محاسبه نمودند [۱۰]. همچنین، ووکیچویچ و گراواچ [۱۶] و به دنبال آن قربانی و حسین زاده [۵]، اولین شاخص زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول، نوع دوم را ارائه کردند که در آن‌ها عدد خروج از مرکز رئوس جایگزین درجه راس‌ها می‌شود [۴، ۹]. فرض کنید H یک گراف متناهی دلخواه باشد، در این صورت، شاخص زاگرب نوع اول و زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول را به ترتیب با $M_1(H)$ و $M_1^*(H)$ نشان داده و به‌صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$M_1(H) = \sum_{x \in V(H)} (\deg(x))^2.$$

$$M_1^*(H) = \sum_{x \in V(H)} (e(x))^2.$$

همچنین شاخص زاگرب نوع دوم و زاگرب تعمیم یافتهء نوع دوم به ترتیب با نمادهای $M_۲(H)$ و $M_۲^*(H)$ نمایش داده می‌شوند و به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$M_۲(H) = \sum_{\{x,\, y\}\in E(H)} \deg(x)\deg(y).$$

$$M_۲^*(H) = \sum_{\{x,\, y\}\in E(H)} \mathrm{e}(x)\,\mathrm{e}(y).$$

از جمله سایر شاخص‌های توپولوژیکی می‌توان به شاخص‌های جهش یافتهء $F-leap$ و $F_۱-leap$ اشاره کرد که برای نخستین بار توسط کولی در سال ۲۰۱۸ معرفی شدند [۲، ۱۱، ۱۲]. مبنای تعریف این شاخص‌های توپولوژیکی جهش یافته، عدد اتصال رئوس است که به‌صورت ذیل تعریف می‌شوند:

$$FL(H) = \sum_{x\in V(H)} {d_۲}^۳(x).$$

$$F_۱L(H) = \sum_{\{x,\, y\}\in E(H)} {d_۲}^۲(x) + {d_۲}^۲(y).$$

شاخص‌های توپولوژیکی که براساس عدد اتصال رئوس تعریف می‌شوند، شاخص‌های جهشی نامیده می‌شوند.
هدف اصلی این مقاله محاسبهء شاخص‌های توپولوژیکی شامل $F-leap$، $F_۱-leap$، زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول و دوم برای گراف ناجابجایی یک گروه متناهی و ناآبلی G، می‌باشد. با توجه به این که شاخص‌های توپولوژیکی ذکر شده بر پایهء عدد اتصال رئوس، درجهء رئوس، عدد خروج از مرکز و فواصل میان رئوس تعریف شده‌اند، می‌توان نشان داد که مقادیر آن‌ها در گراف ناجابجایی یک گروه G با تعداد عناصر مرکز گروه $Z(G)$، تعداد اعضای گروه G و تعداد کلاس‌های تزویج گروه G رابطهء مستقیمی دارند.

۲ پیش نیازها

در این بخش، لم‌ها و نتایج اولیه درباره ساختار گراف ناجابجایی گروه‌های متناهی ارائه شده است.

لم ۱.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. برای گراف ناجابجایی $\Gamma(G)$ خواص زیر برقرار است:
الف) درجهء راس x از گراف ناجابجایی $\Gamma(G)$ برابر است:

$$\deg(x) = |G| - |C_G(x)|,$$

به طوری که $C_G(x)$ مرکز ساز x در گروه G است.
ب) تعداد یال‌های $\Gamma(G)$ برابر است:

$$|E(\Gamma(G))| = \frac{۱}{۲}|G|\,(|G| - k(G)),$$

به‌طوری که $k(G)$ تعداد کلاس‌های تزویج گروه G است.
ج) قطر گراف ناجابجایی $\Gamma(G)$ برابر ۲ است. به عبارت دیگر، $diam(\Gamma(G)) = ۲$.

برهان. برای دیدن جزئیات اثبات، به مرجع [۱] مراجعه شود.

لم ۲.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. آن‌گاه

$$\sum_{x\notin Z(G)} |C_G(x)| = |G|\,(k(G) - |Z(G)|).$$

برهان. برای دیدن جزئیات اثبات، به مرجع [۱۰] مراجعه شود.

لم ۳.۲. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. آن‌گاه برای هر $x\in V(\Gamma(G))$، $d_۲(x) = |C_G(x)| - |Z(G)| - ۱$.
برهان. با توجه به تعریف $d_۲(x)$، واضح است.

۳ نتایج و بحث

قضیه **۱.۳**. فرض کنید G یک گروه متناهی و t تعداد نمایندگان غیر مرکزی کلاس‌های تزویج گروه G باشد. آن‌گاه شاخص $F-leap$ گراف ناجابجایی $\Gamma(G)$ برابر است با:

$$FL\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|^{۲}-۳\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|+۳\left(\left|Z(G)\right|+۱\right)^{۲}\left|G\right|\left(t\right)$$

$$-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^{۳}\left(\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|\right).$$

برهان. ابتدا فرض کنید $n=\left|V(\Gamma\left(G\right)\right|=\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|$ و $V\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\{x_{۱},\ x_{۲},\ \ldots,\ x_{n}\}$. با توجه به تعریف شاخص $F-Leap$ و لم ۳.۲ ، داریم:

$$FL\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\sum_{x\in V(\Gamma(G))}d_{۲}{}^{۳}\left(x\right)=\sum_{i=۱}^{n}d_{۲}{}^{۳}\left(x_{i}\right)=\sum_{i=۱}^{n}\left(\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\right)^{۳}$$

در ادامه می‌توان نوشت:

$$FL\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\sum_{i=۱}^{n}[\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۳}-۳\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۲}\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)+۳\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^{۲}$$

$$-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^{۳}]$$

$$=\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۳}-۳\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۲}+۳(\left|Z\left(G\right)\right|+۱)^{۲}\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|$$

$$-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^{۳}\left(\left|G\right|-\left|Z(G)\right|\right).$$

با توجه به لم ۲.۲، در ادامه خواهیم داشت:

$$FL\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۳}-۳\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۲}+۳(\left|Z\left(G\right)\right|+۱)^{۲}$$

$$\left|G\right|\left(k\left(G\right)\left|Z\left(G\right)\right|\right)-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^{۳}\left(\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|\right).\qquad(۱)$$

برای دستیابی به نتیجهء اصلی، می‌توان دو عبارت $\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۳}$ و $\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۲}$ را محاسبه نمود.
از آنجا که $G=\bigcup_{i=۱}^{t}class\left(a_{i}\right)\bigcup Z\left(G\right)$ (a_{i} نماینده‌های کلاس‌های تزویج گروه G) و به‌ازای هر x_{i} در $G-Z\left(G\right)$، $۱\leq j\leq t$ چنان وجود دارد که $x_{i}\in class\left(a_{j}\right)$ و $\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|=\left|C_{G}\left(a_{j}\right)\right|$. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۲}=\sum_{i=۱}^{t}\left|class\left(a_{i}\right)\right|\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|^{۲}=\sum_{i=۱}^{t}\frac{\left|G\right|}{\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|^{۲}=\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|.$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n}\left|C_{G}\left(x_{i}\right)\right|^{۳}=\sum_{i=۱}^{t}\left|class\left(a_{i}\right)\right|\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|^{۳}=\sum_{i=۱}^{t}\frac{\left|G\right|}{\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|^{۳}=\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|^{۲}.$$

با جایگذاری روابط فوق در عبارت (۱) نتیجه می‌شود که:

$$FL\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|^{۲}-۳\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_{G}\left(a_{i}\right)\right|$$

$$+۳\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^{۲}\left|G\right|\left(t\right)-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^{۳}\left(\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|\right).$$

قضیه **۲.۳**. فرض کنید G یک گروه متناهی و t تعداد نمایندگان غیر مرکزی کلاس‌های تزویج گروه G باشد. آن‌گاه شاخص $F_۱-leap$ گراف ناجابجایی $\Gamma(G)$ برابر است با:

$$F_۱L\left(\Gamma\left(G\right)\right)=-\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_G\left(a_i\right)\right|^۲+\left|G\right|\left(\left|G\right|+۲\left|Z\left(G\right)\right|+۲\right)\sum_{i=۱}^{t}\left|C_G\left(a_i\right)\right|-۲|G|^۲$$

$$\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\left(t\right)+\left|G\right|\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\left(\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|\right)-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\left|G\right|t.$$

برهان. می‌دانیم $|V(\Gamma\left(G\right)|=|G|-|Z\left(G\right)|=n$ و $V\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\{x_۱,\ x_۲,\ \ldots,\ x_n\}$. با توجه به تعریف شاخص $F_۱-Leap$ و با استفاده از لم ۱.۲ داریم:

$$\begin{aligned}F_۱L\left(\Gamma\left(G\right)\right) &= \sum_{\{x,\ y\}\in E(\Gamma(G))} d_۲^{\ ۲}\left(x\right)+d_۲^{\ ۲}\left(y\right)\\ &= \sum_{\{x,\ y\}\in E(\Gamma(G))} deg(x)d_۲^۲(x)\\ &= \sum_{i=۱}^{n}(|G|-|C_G(x_i)|)(|C_G(x_i)|-(|Z(G)+۱))^۲\end{aligned}$$

با بسط عبارت فوق، خواهیم داشت:

$$F_۱L\left(\Gamma\left(G\right)\right)=\left|G\right|\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۲-۲\left|G\right|\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|+\left|G\right|\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲$$

$$\left(\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|\right)-\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۳+۲\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۲-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|$$

$$=\left|G\right|\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۲-۲|G|^۲\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\left(k\left(G\right)-\left|Z\left(G\right)\right|\right)+\left|G\right|\left(\left|Z(G)\right|+۱\right)^۲\left(\left|G\right|-\left|Z(G)\right|\right)$$

$$-\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۳+۲\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۲-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\left|G\right|\left(k\left(G\right)-\left|Z(G)\right|\right).$$

با توجه به $G=\bigcup_{i=۱}^{t}class\left(a_i\right)\bigcup Z\left(G\right)$ و $k\left(G\right)=t+|Z(G)|$، نتیجه می‌شود:

$$F_۱L\left(\Gamma\left(G\right)\right)=-\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۳+\left(\left|G\right|+۲\left|Z\left(G\right)\right|+۲\right)\sum_{i=۱}^{n}\left|C_G\left(x_i\right)\right|^۲-۲|G|^۲\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)$$

$$\left(k\left(G\right)-\left|Z\left(G\right)\right|\right)+\left|G\right|\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\left(\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|\right)-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\left|G\right|\left(k\left(G\right)-\left|Z\left(G\right)\right|\right)$$

$$=-\left|G\right|\sum_{i=۱}^{t}\left|C_G\left(a_i\right)\right|^۲+\left|G\right|\left(\left|G\right|+۲\left|Z\left(G\right)\right|+۲\right)\sum_{i=۱}^{t}\left|C_G\left(a_i\right)\right|-۲|G|^۲\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)\left(t\right)$$

$$+\left|G\right|\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\left(\left|G\right|-\left|Z\left(G\right)\right|\right)-\left(\left|Z\left(G\right)\right|+۱\right)^۲\left|G\right|t.$$

قضیه **۳.۳**. فرض کنید G یک گروه متناهی و $\{a_i\}_{i=۱}^{t}$ نمایندگان غیر مرکزی کلاس‌های تزویج گروه G باشند. آن‌گاه، شاخص زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول گراف ناجابجایی گروه G براساس ساختار گروه، در یکی از دو حالت زیر محاسبه می‌گردد:

الف) اگر مرتبهء گروه G فرد باشد، آن گاه $M_۱^{\ *}\left(\Gamma\left(G\right)\right)=۴(|G|-|Z(G)|)$.

ب) اگر به‌ازای $1\leq i\leq m<t$ ، $o(a_i)=|C_G(a_i)|=2$، آن‌گاه

$$M_1^*(\Gamma(G))=\frac{m|G|}{2}+4|G|\sum_{i=m+1}^{t}\frac{1}{|C_G(a_i)|}.$$

برهان. با استفاده از لم ۱.۲ قسمت (ج)، به راحتی می‌توان دید که به ازای هر g در $G-Z(G)$، $e(g)=1$ یا $e(g)=2$.
اگر $e(g)=1$، آن‌گاه بین راس g و تمامی رئوس گراف ناجابجایی گروه G یک یال وجود دارد. این موضوع نشان دهندهء آن است که $g=g^{-1}$ و $o(g)=2$. برای محاسبهء شاخص زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول، دو حالت مختلف در نظر گرفته می‌شوند:
الف. می‌دانیم $G=\bigcup_{i=1}^{t}class(a_i)\bigcup Z(G)$ و با توجه به فرد بودن مرتبه گروه، به‌ازای هر i خواهیم داشت:

$$a_i\neq a_i^{-1},\ e(a_i)=2.$$

$$M_1^*(\Gamma(G))=\sum_{x\epsilon V(\Gamma(G))}(e(x))^2=4(|G|-|Z(G)|).$$

ب. فرض کنید $x\in G$ و $o(x)=2$، اگر $|C_G(x)|=2$، آن‌گاه $e(x)=1$ و در غیر این‌صورت $e(x)=2$. با توجه به مفروضات قضیه، خواهیم داشت:

$$M_1^*(\Gamma(G))=\sum_{x\epsilon V(\gamma(G))}(e(x))^2=\sum_{i=1}^{m}|class(a_i)|e(a_i)+\sum_{i=m+1}^{t}|class(a_i)|e(a_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}|class(a_i)|+4\sum_{i=m+1}^{t}|class(a_i)|=\frac{m|G|}{2}+4|G|\sum_{i=m+1}^{t}\frac{1}{|C_G(a_i)|}.$$

قضیه **۴.۳**. فرض کنید G یک گروه متناهی و $\{a_i\}_{i=1}^{t}$ نمایندگان غیر مرکزی کلاس‌های تزویج گروه G باشند. آن‌گاه، شاخص زاگرب تعمیم یافتهء نوع دوم گراف ناجابجایی گروه G براساس ساختار گروه، در یکی از دو حالت زیر محاسبه می‌گردد:
الف) اگر مرتبهء گروه G فرد باشد، آن‌گاه $M_2^*(\Gamma(G))=4|E(\Gamma(G))|$.
ب) اگر به ازای $1\leq i\leq m<t$ ، $o(x_i)=|C_G(x_i)|=2$، آن‌گاه

$$M_2^*(\Gamma(G))=4|E(\Gamma(G))|-\frac{3m|G|}{4}\left(\frac{m|G|}{2}-1\right)-m|G|^2\sum_{i=m+1}^{t}\frac{1}{|C_G(a_i)|}.$$

برهان. الف) با توجه به فرد بودن مرتبهء گروه، به ازای هر i ، $e(a_i)=2$. در این حالت به راحتی می‌توان شاخص زاگرب تعمیم یافتهء نوع دوم گراف ناجابجایی را محاسبه کرد.

$$M_2^*(\Gamma(G))=\sum_{\{x,\,y\}\epsilon E(\Gamma(G))}e(x)e(y)=\sum_{\{x,\,y\}\in E(\Gamma(G))}4=4|E(\Gamma(G))|.$$

ب) در این حالت، می‌توان مجموعه یال‌های گراف ناجابجایی گروه G را به سه زیر مجموعهء E_{11}، E_{12} و E_{22} به‌صورت ذیل افراز نمود و تعداد عناصر این سه مجموعه را محاسبه کرد.

$$E_{11}=\{xy\in E(\Gamma(G))\mid e(x)=e(y)=1\},|E_{11}|=\binom{\sum_{i=1}^{m}|class(a_i)|}{2}$$
$$=\binom{\frac{m|G|}{2}}{2}=\frac{m|G|}{4}\left(\frac{m|G|}{2}-1\right).$$

$$E_{12}=\{xy\in E(\Gamma(G))\mid e(x)=1,e(y)=2\},|E_{12}|=\left(\sum_{i=1}^{m}|class(a_i)|\right)\left(\sum_{i=m+1}^{t}|class(a_i)|\right)$$
$$=\frac{m|G|^2}{2}\sum_{i=m+1}^{t}\frac{1}{|C_G(a_i)|}.$$

$$E_{۲۲}=\{xy\in E\left(\Gamma\left(G\right)\right)\mid e\left(x\right)=e\left(y\right)=۲\},\ |E_{۲۲}|=|E\left(\Gamma\left(G\right)\right)|-|E_{۱۱}|-|E_{۱۲}|.$$

با استفاده از نتایج حاصل از محاسبات فوق، شاخص زاگرب تعمیم یافتهء نوع دوم تعیین می‌گردد.

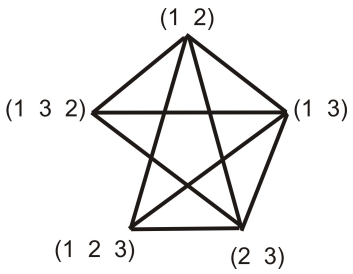
$$\begin{aligned}M_{۲}^{*}\left(\Gamma\left(G\right)\right)&=\sum_{\{x,\ y\}\epsilon E(\Gamma(G))}e\left(x\right)e\left(y\right)=|E_{۱۱}|+۲\,|E_{۱۲}|+۴|E_{۲۲}|\\&=|E_{۱۱}|+۲\,|E_{۱۲}|+۴\left(|E\left(\Gamma\left(G\right)\right)|-|E_{۱۱}|-|E_{۱۲}|\right)\\&=۴|E\left(\Gamma\left(G\right)\right)|-۳\,|E_{۱۱}|-۲\,|E_{۱۲}|\\&=۴|E\left(\Gamma\left(G\right)\right)|-\frac{۳m\,|G|}{۴}\left(\frac{m\,|G|}{۲}-۱\right)-m(|G|)^{۲}\sum_{i=m+۱}^{t}\frac{۱}{|C_{G}\left(a_{i}\right)|}.\end{aligned}$$

مثال **۵.۳**. فرض کنید $S_{۳}$ یک گروه متقارن از مرتبه ۶ باشد. برای رسم گراف ناجابجایی این گروه شناسایی دو مجموعهء رئوس و یال‌ها الزامی است. از اینرو خواهیم داشت:

$$V(\Gamma(S_{۳}))=S_{۳}-Z(S_{۳})=\{(۱\quad ۲),(۱\quad ۳),(۲\quad ۳),(۱\quad ۲\quad ۳),(۱\quad ۳\quad ۲)\}$$

$$E(\Gamma(S_{۳}))=\left\{\begin{array}{l}\{(۱\quad ۲),(۱\quad ۳)\},\{(۱\quad ۲),(۲\quad ۳)\},\{(۱\quad ۲),(۱\quad ۲\quad ۳)\},\\\{(۱\quad ۲),(۱\quad ۳\quad ۲)\},\{(۱\quad ۳),(۲\quad ۳)\},\{(۱\quad ۳),(۱\quad ۲\quad ۳)\},\\\{(۱\quad ۳),(۱\quad ۳\quad ۲)\},\{(۲\quad ۳),(۱\quad ۲\quad ۳)\},\{(۲\quad ۳),(۱\quad ۳\quad ۲)\},\end{array}\right\}$$

با توجه به دو مجموعهء فوق، گراف ناجابجایی گروه $S_{۳}$ عبارت است از:



همچنین

$$\begin{aligned}&d_{۲}\left(۱\quad ۲\right)=d_{۲}\left(۱\quad ۳\right)=d_{۲}\left(۲\quad ۳\right)=۰\\&d_{۲}\left(۱\quad ۲\quad ۳\right)=d_{۲}\left(۱\quad ۳\quad ۲\right)=۱\\&e\left(۱\quad ۲\right)=e\left(۱\quad ۳\right)=e\left(۲\quad ۳\right)=۱\\&e\left(۱\quad ۲\quad ۳\right)=e\left(۱\quad ۳\quad ۲\right)=۲\end{aligned}$$

با رسم گراف و داشتن مشخصات گروه $S_{۳}$ ، شاخص‌های $F-Leap$ ، $F_{۱}-Leap$ زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول و دوم محاسبه می‌شوند.

$$FL(\Gamma(S_{۳}))=\sum_{x\in V(\Gamma(S_{۳}))}d_{۲}^{۳}(x)=|G|\sum_{i=۱}^{t}|C_{G}(a_{i})|^{۲}-۳(|Z(G)|+۱)|G|\sum_{i=۱}^{t}|C_{G}(a_{i})|$$
$$+۳(|Z(G)+۱)^{۲}|G|t-(|Z(G)|+۱)^{۳}(|G|-|Z(G)|)=۲.$$

$$FL_۱(\Gamma(S_۳)) = \sum_{\{x,y\}\in E(\Gamma(S_۳))} d_۲^۲(x) + d_۲^۲(y) = -|G|\sum_{i=۱}^{t}|C_G(a_i)|^۲ + |G|(|G|$$
$$+۲|Z(G)+۲)\sum_{i=۱}^{t}|C_G(a_i)| - ۲|G|^۲(|Z(G)|+۱)t + |G|(|Z(G)|+۱)^۲(|G|-|Z(G)|)$$
$$-(|Z(G)|+۱)^۲|G|t = ۶.$$
$$M_۱^*(\Gamma(S_۳)) = \sum_{x\in V(\Gamma(S_۳))}(e(x))^۲ = \frac{m|G|}{۲} + ۴|G|\sum_{i=m+۱}^{t}\frac{۱}{|C_G(x_i)|} = ۱۱$$
$$M_۲^*(\Gamma(S_۳)) = \sum_{\{x,y\}\in E(\Gamma(S_۳))} e(x)e(y) = ۴|E(\Gamma(S_۳))| - \frac{۳m|G|}{۴}(\frac{m|G|}{۲} - ۱)$$
$$-m|G|^۲\sum_{i=m+۱}^{t}\frac{۱}{C_G(x_i)|} = ۱۵.$$

۴ نتیجه‌گیری

در این مطالعه، شاخص‌های توپولوژیکی مختلف، از جمله $F-Leap$، $F_۱-Leap$ ، و زاگرب تعمیم یافتهء نوع اول و دوم، برای گراف ناجابجایی گروه متناهی با ساختارهای تعیین شده مورد بررسی و محاسبه قرار گرفت. با بهره‌گیری از ساختار گروه G ، تعداد کلاس‌های تزویج گروه، و تعداد عناصر مرکز گروه، برای هر یک از شاخص‌ها، روابط دقیق و قابل محاسبه‌ای ارائه شد. یافته‌ها نشان می‌دهد که وابستگی این شاخص‌ها به اندازهء مرکزساز نماینده‌های کلاس‌های تزویج، تعداد عناصر مرکز گروه و تعداد کلاس‌های تزویج، نقش موثری در توصیف میزان انحراف گروه از آبلی بودن دارد. همچنین، نتایج بیان می‌کنند که این شاخص‌ها برای ساختارهای متفاوت گروه‌های متناهی قابل محاسبه هستند و مقایسهء آن‌ها با دیگرشاخص‌های توپولوژیکی به طور مستقیم امکان‌پذیر است.

فهرست منابع

[1] Abdollahi, A., Akbari S. and Maimani, H. R., 2006. Non- commuting graph of a group. *Journal of Algebra,* 298(2), pp. 468- 492. doi:10.1016/j.jalgebra.2006.02.015

[2] Asif, F., Zahid, Z. and Cancan, M., 2020. On some leap indices of Polycyclic Aromatic Hydrocarbons (PAHs). *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography,* 23(6), pp. 1269-1277. doi:10.1080/09720529.2020.1816696

[3] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*, North-Holland, New York.

[4] Cheng, S. and Wu, B., 2024. The first general Zagreb index of graphs and their line graphs. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 70(1), pp. 1937-1957. doi:10.1007/s12190-024-02036-0

[5] Ghorbani, M. and Hosseinzadeh, M. A., 2012. A new version of Zagreb indices. *Filomat*, 26(1), pp. 93-100. doi:10.2298/FIL 1201093G.

[6] Gutman, I., Milovanović, E. and Milovanović, I. 2020. Beyond the Zagreb indices. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17(1), pp. 74-85. doi:10.1016/j.akcej.2018.05.002

[7] Gutman, I., Ruščić, B., Trinajstić, N. and Wilcox, C. F., 1975. Graph theory and molecular orbitals XII. *The Journal of Chemical Physics,* 62(9), pp. 3399- 3405. doi:10.1063/1.430994

[8] Gutman, I. and Trinajstić, N., 1972. Graph theory and molecular orbitals, total $\pi-$electron energy of alternant hydrocarbons. *Chemical Physics Letters,* 17(4), pp. 535-538. doi:10.1016/0009-2614(72)85099-1

[9] Hayat, S. and Asmat, F., 2023. Sharp bounds on the generalized multiplicative first Zagreb index of graphs with application to QSPR modeling. *Mathematics,* 11(10), pp. 1-14. doi:10.3390/math11102245

[10] Jahandideh, M., Sarmin, N. H. and Omer, S. M. S., 2015. The topological indices of non- commuting graph of a finite group. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 105(1), pp. 27-38. doi:10.12732/ijpam. v105il.4

[11] Kulli, V., 2018. On F-leap indices and F-leap polynomials of some graphs. *International Journal of Mathematical Archive,* 9(12), pp. 41- 49.

[12] Mohammed, M. A., Haoer, R. S., Robert, J., Chidambaram, N. and Devadoss, N., 2020. F-leap index of some special classes of bridge and chain graphs. *Eurasian Chemical Communications,* 2(7), pp. 827-833. doi:10.33945/SAMI/ECC.2020.7.10

[13] Neumann, B. H. 1967. A problem of Paul Erdos on groups. *Journal of the Australian Mathematical Society,* A 21(4), pp. 467- 472. doi:10.1017/S1446788700019303

[14] Robinson, D. J. S., 1996. A course in the theory of groups (2^{rd} ed.). Springer.

[15] Sarmin, N. H., Alimon, N. I. and Erfanian, A., 2020. Topological indices of the non-commuting graph for generalized Quaternion group. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society,* 43(5), pp. 3361-3367. doi:10.1007/s40840-019-00872-z

[16] Vukičević, A. and Graovac, D., 2010. Note on the comparsion of the first and second normalized Zagreb accentricity indices. *Acta Chimica Slovenica,* 57(3), pp. 524-528.

[17] Wiener, H., 1947. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society,* 69(1), pp. 17-20.

Investigation of Certain Topological Indices in Non-commuting Graph

Maryam Jahandideh Khangheshlaghi[(1)] [2] and Sara Shokrolahi Yancheshmeh[(2)]

[(1)]Department of Mathematics, Mahs.C., Islamic Azad University, Mahshahr, Iran
[(2)] Department of Mathematics, Ahv.C., Islamic Azad University, Ahwaz, Iran

|Communicated by: Mohamadreza Darafsheh

Received: 29 September 2025 Accepted: 11 September 2026

Abstract: Let G be a finite non-abelian group. The non-commuting graph of G , denoted by $\Gamma(G)$, is defined as the graph whose vertex set is $G - Z(G)$, where two distinct vertices $x, y \in V(\Gamma(G))$ are adjacent whenever $xy \neq yx$. In this paper, several topological indices of $\Gamma(G)$ are investigated, including F-Leap, F_1-Leap, and the first and second generalized Zagreb. These indices are analyzed and calculated based on criteria such as distance between vertices, connectivity number, degree of vertices, and eccentricity number. The results of this research can play an effective role in better understanding the structural characteristics of groups and their relationship with topological indices.

Keywords: Non – commuting graph, $F - Leap$ index, $F_1 - Leap$ index, The Zagreb indices, The generalized Zagreb indices.
E-mail address: m.jahandideh.kh@iau.ac.ir
E-mail address: sa.shokrollahi@iau.ac.ir

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (Maryam Jahandideh Khangheshlaghi) m.jahandideh.kh@iau.ac.ir, (Sara Shokrolahi Yancheshmeh) sa.shokrollahi@iau.ac.ir