مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال xxxx، دوره xx، شماره x، ص xxx–xxx

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: xxxx

راهبرد بهینه برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری میانگین–واریانس چنددوره‌ای در یک بازار با تغییر رژیم غیرمارکوف با طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری نامعین

رضا کیخائی [۱]
گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر خوانسار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

دبیر مسئول: . . . . . .

تاریخ دریافت: xxx تاریخ پذیرش: xxx

چکیده: در مدل‌های کلاسیک انتخاب سبد سرمایه‌گذاری در بازارهای با تغییر رژیم مارکوفی، فرض اساسی بر وابستگی بازده دارایی‌ها به وضعیت کنونی بازار است. به‌عنوان یک محدودیت مهم، این مدل‌ها حافظه‌ی تاریخی و وضعیت‌های گذشته‌ی بازار را که تأثیر بسزایی بر بازدهی دارئی‌ها و تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاران دارند، نادیده می‌گیرند. برای رفع این محدودیت و انطباق بیشتر با واقعیت‌های بازار، مدل‌های تغییر رژیم غیرمارکوفی، مسیر وضعیت‌های گذشته‌ی بازار را نیز در فرضیات خود لحاظ می‌کنند. در این مقاله، مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه‌ی میانگین–واریانس چنددوره‌ای در بازاری با تغییر رژیم غیرمارکوفی و با طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری نامعین مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این راستا، فرض شده است که تصمیم سرمایه‌گذاران برای باقی ماندن در بازار یا خروج از آن، همزمان به وضعیت بازار و نیز عوامل بیرونی وابسته است. این مسئله در چارچوب یک مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی تصادفی فرمول‌بندی شده و با به‌کارگیری روش برنامه‌ریزی پویا، راه‌حل تحلیلی بهینه‌ی آن به دست آمده است.

واژه‌های کلیدی: سبد سرمایه‌گذاری، مدل میانگین–واریانس، تغییر رژیم غیر مارکوف، برنامه‌ریزی پویا، زمان خروج.

رده‌بندی ریاضی: 90C39; 91G10

۱ پیش‌گفتار

چارچوب نظری مدیریت سبد سرمایه بر مبنای معیار میانگین–واریانس، که نخستین بار در قالب یک مدل تک‌دوره‌ای توسط مارکویتز ارائه شد [۱۹]، به‌عنوان سنگ‌بنای نظریه‌ی سبد سرمایه‌ی مدرن شناخته می‌شود. در این مدل، هدف سرمایه‌گذار، یافتن توازن بهینه بین بازده مورد انتظار و میزان ریسک (که با واریانس بازده‌ها سنجیده می‌شود) است؛ به‌گونه‌ای که یا برای سطح مشخصی از بازده، کمترین ریسک ممکن تحمل شود، یا در ازای یک حد مجاز ریسک، بیشترین بازده به‌دست آید. توصیه‌ی کلیدی این مدل، کاهش ریسک غیرسیستماتیک از طریق تشکیل سبدی متنوع از دارایی‌هاست؛ استراتژی که در ادبیات مالی با عبارت "همه‌ی سرمایه را در یکجا متمرکز نکن" شناخته می‌شود. این مدل در اصل، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه است که به‌طور همزمان در پی مدیریت دو متغیر متعارض ریسک و بازده است. با این

[۱] نویسنده مسئول مقاله
r.keykhaei@khc.ui.ac.ir

حال، توسعه‌ی یک مدل چنددوره‌ای برای این معیار، به دلیل خاصیت غیرتفکیک‌پذیر عملگر واریانس در چارچوب برنامه‌ریزی پویا، یعنی عدم برابری $\mathbb{V}\mathrm{ar}[\mathbb{V}\mathrm{ar}[.|I_t]|I_s] \neq \mathbb{V}\mathrm{ar}[.|I_s]$ برای مجموعه‌ی اطلاعاتی تو در تو $I_s \subset I_t$، برای دهه‌ها مسکوت مانده بود. گام کلیدی در شکستن این بن‌بست نظری، توسط لی و انگ [۱۵] برداشته شد. آن‌ها با تبدیل مسئله‌ی اصلی به یک مسئله‌ی کمکی تفکیک‌پذیر، موفق به استخراج جواب تحلیلی برای آن به کمک روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی شدند. این دستاورد، محرک موجی از پژوهش‌های بعدی در این حوزه گردید که به بررسی انواع مختلفی از مسائل کاربردی با فرضیات و مدل‌سازی‌های گوناگون پرداختند. از جمله‌ی این مطالعات می‌توان به مدل کنترل ریسک ورشکستگی [۳۶]، مدل مدیریت دارایی–بدهی [۱۴]، مدل دارای محدودیت‌های میاندوره‌ای [۷] و مدل با قید عدم استقراض [۸] اشاره نمود.

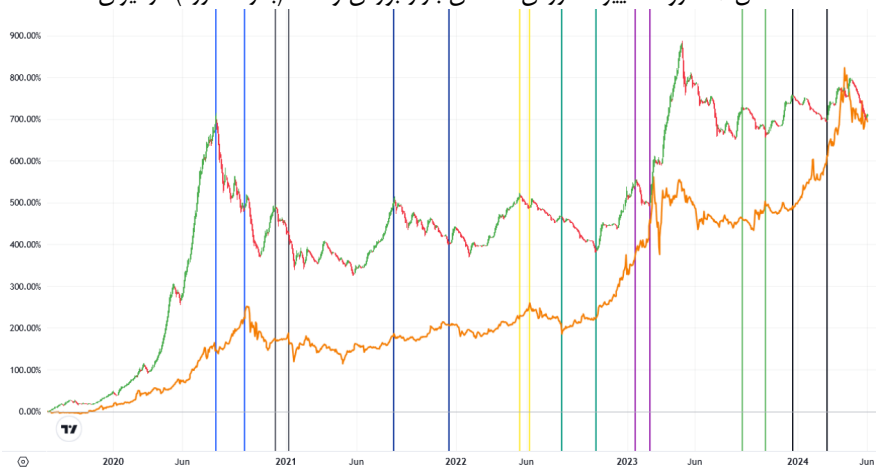
در مراحل اولیه‌ی این پژوهش‌ها، از جمله کارهای یادشده، فرض بر این بود که بازار تنها در یک وضعیت ثابت عمل می‌کند و بازده دارایی‌ها در دوره‌های مختلف، مستقل از یکدیگر هستند. به‌مرور زمان و برای واقعی‌تر کردن مدل، مفهوم تغییر رژیم مورد توجه قرار گرفت. در این چارچوب، فرض می‌شود که بازار می‌تواند در چندین وضعیت یا رژیم متفاوت (مانند وضعیت‌های گاوی و خرسی) عمل کند و بازده دارایی‌ها در هر لحظه، تابعی از رژیم حاکم بر بازار است. انتقال بین این رژیم‌های از پیش تعریف‌شده نیز معمولاً توسط یک زنجیر مارکوف مدل‌سازی می‌شود. در این راستا، مطالعات متعددی به بررسی مسئله‌ی بهینه‌سازی سبد چنددوره‌ای در محیط تغییر رژیم پرداخته‌اند که از آن جمله می‌توان به پژوهش‌های چاکماک و ازکیچی [۳]، چن و یانگ [۵]، وو و زنگ [۲۷]، وو و چن [۲۸] و همچنین کار اخیر بیان و ژانگ [۲] اشاره کرد.

اگرچه در اکثر مطالعات، افق سرمایه‌گذاری برای ساده‌سازی مسئله، قطعی و از پیش مشخص در نظر گرفته می‌شود، اما در عمل، بسیاری از سرمایه‌گذاران با این واقعیت مواجه هستند که طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری و زمان خروج از بازار، ماهیتی غیرقطعی و تصادفی دارد. این عدم قطعیت در تاریخ خروج می‌تواند تحت تاثیر عوامل گوناگونی قرار گیرد. از یک سو، عوامل بیرونی مستقل از بازار، مانند بروز بیماری، فوت سرمایه‌گذار، یا نیازهای مالی ناگهانی، می‌توانند زمان خروج را رقم بزنند. از سوی دیگر، عوامل درونی مرتبط با خود بازار، از قبیل شرایط نامساعد اقتصادی یا دستیابی به سطح معینی از ثروت، نیز در این تصمیم‌گیری مؤثر هستند. در مواردی که خروج از بازار به شرایط آن وابسته است، سرمایه‌گذار ممکن است معیار خود را بر اساس یک زمان توقف تعریف کند که کاملا توسط اطلاعات بازار تعیین می‌شود. با این حال، می‌توان این مفهوم را تعمیم داد و زمان خروجی را در نظر گرفت که علاوه بر اطلاعات بازار، به رویدادهای تصادفی خارج از بازار نیز وابسته باشد. برای نمونه، یک سرمایه‌گذار ممکن است در شرایط نامساعد بازار، تنها در صورت ظهور یک فرصت سرمایه‌گذاری جذاب در بازاری دیگر (نظیر مسکن یا ارزهای دیجیتال)، که خود پدیده‌ای تصادفی است، اقدام به خروج نماید. در میان پژوهش‌ها با زمان خروج مستقل می‌توان به یااو و همکاران [۳۲]، یی و همکاران [۳۴]، وو و لی [۲۹]، لاندریالت و همکاران [۱۳]، گی و همکاران [۱۰] و کیخائی [۱۲] اشاره کرد. در خصوص زمان توقف به‌عنوان معیار خروج می‌توان به کاراتزاس و وانگ [۱۱] و تعمیم آن می‌توان به بلانشت و همکاران [۱]، یو [۳۵]، وو و همکاران [۳۰]، یی [۳۳]، الوی و همکاران [۱۸]، پنگ و چن [۲۰] و لیو و همکاران [۱۶] اشاره کرد.

چارچوب کلاسیک تغییر رژیم مارکوفی مرتبه‌ی اول، با وجود پیشرفت چشمگیر، از یک محدودیت ساختاری بنیادی رنج می‌برد: خاصیت بی‌حافظه بودن. این چارچوب با فرض اینکه توزیع آتی بازار تنها به وضعیت کنونی وابسته است، تاریخچه‌ی تاثیرگذار فرآیند بازار را نادیده می‌گیرد. این فرضیه اغلب در تضاد با واقعیت مالی است، جایی که انتظارات سرمایه‌گذاران و رفتار بازار توسط تجربیات گذشته شکل می‌گیرد. برای مثال، یک رکود کوتاه‌مدت بازار ممکن است به‌عنوان یک فرصت خرید در نظر گرفته شود، در حالی که یک رکود طولانی‌مدت می‌تواند موجی از ترس و فرار سرمایه را به دنبال داشته باشد. یک مدل مارکوفی مرتبه‌ی اول، که تنها برچسب "رکود" در لحظه‌ی حاضر را مشاهده می‌کند، قادر به تشخیص این تفاوت حیاتی نیست. پدیده‌هایی مانند مومنتوم (تکانه) و بازگشت به میانگین، ذاتا وابسته به مسیر هستند که این امر لزوم گنجاندن اطلاعات تاریخی را بیش از پیش نشان می‌دهد. با درنظرگیری این محدودیت، ادبیات نوظهوری پدیدار شده است که به بررسی مدل‌های غیرمارکوفی و وابسته به مسیر برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری میانگین–واریانس در زمان پیوسته می‌پردازد. این مدل‌ها فرض می‌کنند که پارامترهای بازار نه بر اساس وضعیت فعلی، بلکه بر اساس اطلاعات تاریخی تعیین می‌شوند [۴، ۲۱، ۲۴–۲۶]. با این حال، این مدل‌ها در فضای زمان گسسته که برای بسیاری از تصمیم‌گیری‌های عملی مناسب‌تر است، توسعه نیافته‌اند. در حوزه‌ی زمان گسسته، مدل‌های تغییر رژیم مارکوفی با مرتبه‌ی بالا با موفقیت برای لحاظ کردن حافظه به کار گرفته شده‌اند، اما تمرکز آن‌ها عمدتا بر روی مسائل مالی دیگر مانند مدل‌سازی نرخ بهره، قیمت‌گذاری اختیار معامله و اندازه‌گیری ریسک بوده است [۶، ۲۲، ۲۳، ۳۱، ۳۷].

با فرض غیر قطعی بودن طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری، وو و همکاران [۳۰] مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه را در چارچوب یک مدل مارکوف کلاسیک بررسی کرده‌اند. زمان خروج در این پژوهش به‌صورت درون‌زا (وابسته به بازار) و مشروط به وقوع یک رویداد تصادفی خارجی (مانند ظهور یک فرصت سرمایه‌گذاری جذاب در بیرون از بازار) مدل‌سازی شده است. با این حال، ماهیت بی‌حافظه‌ی مدل مارکوف، مانع از درنظرگیری تاثیر تاریخچه‌ی بازار بر بازده دارایی‌ها می‌شود. از سوی دیگر، کیخائی [۱۲] با معرفی یک مدل غیرمارکوفی، این محدودیت را با در نظر گرفتن وابستگی بازده دارایی‌ها به تاریخچه و مسیر گذشته‌ی بازار مرتفع ساخته است. اگرچه این مدل، واقعیت پیچیده‌تر وابستگی بازده‌ها را لحاظ می‌کند، اما در آن زمان خروج از بازار به‌صورت یک متغیر برون‌زا و مستقل از شرایط بازار فرض شده است. در این مقاله، ما قصد داریم هر دو پیشرفت فوق را در یک چارچوب یکپارچه ترکیب کنیم. هدف اصلی ما، تعمیم مدل وو و همکاران [۳۰] با گنجاندن فرض وابستگی بازده‌ها به مسیر (غیرمارکوفی) و به‌طور همزمان، تعمیم مدل کیخائی [۱۲] با درون‌زا کردن زمان خروج و وابسته کردن آن به وضعیت بازار و عوامل تصادفی خارجی است. بدین ترتیب، مدل حاضر، هم واقع‌بینانه‌تر است و هم دامنه‌ی کاربرد مدل‌های پیشین را گسترش می‌دهد. شواهد تاریخی بر اهمیت لحاظ کردن تاثیر حافظه بازار بر بازدهی سرمایه‌گذاری و همچنین تاثیر بازارهای موازی بر تصمیم

شکل ۱: روند تغییرات ارزش شاخص بازار بورس و طلا (با رنگ زرد) در ایران



سرمایه‌گذاران برای ترک بازار تاکید دارند. شکل ۱ روند تغییرات ارزش شاخص بازار بورس در ایران و ارزش طلا را به‌طور همزمان نمایش می‌دهد. در این شکل به وضوح تاثیر روندهای مستمر (چه صعودی و چه نزولی) بر جذب یا خروج سرمایه و در نتیجه سود یا زیان‌دهی سبدهای سرمایه مشاهده می‌شود. از سوی دیگر در مقاطعی، سیر صعودی ارزش طلا و به‌صورت همزمان کاهش ارزش شاخص بر روند خروج سرمایه از بازار سهام تاثیرگذار بوده است. از لحاظ نظری نشان خواهیم داد که چگونه نتایج هر دو پژوهش پیشین، به‌عنوان حالات خاصی از این مدل جامع‌تر قابل استنتاج هستند. برای دستیابی به این هدف، مسئله در قالب یک مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی تصادفی چنددوره‌ای فرمول‌بندی شده و با به‌کارگیری روش برنامه‌ریزی پویا و تکنیک ضرایب لاگرانژ راه‌حل تحلیلی آن استخراج می‌گردد.

ساختار این مقاله به‌صورت زیر تنظیم شده است: مدل‌بندی، فرضیات و همچنین معرفی مسئله‌ی بهینه‌سازی سبد میانگین–واریانس متناطر در بخش ۲ آورده شده‌اند. بخش ۳ به حل مسئله براساس روش برنامه‌ریزی پویای اختصاص داده شده است. استراتژی بهینه‌ی سرمایه‌گذاری و همچنین مرز موثر میانگین–واریانس در بخش ۴ ارائه شده‌اند. موارد خاص در بخش ۵ بررسی شده‌اند. در بخش ۶ با استفاده از یک مثال عددی نتایج مدل تحلیل شده است. نتیجه‌گیری و ارائه‌ی پیشنهادات جدید در بخش ۷ بیان شده است.

۲ مدل‌بندی و فرضیات

یک بازار مالی چنددوره‌ای با افق زمانی معین T را در نظر می‌گیریم که شامل $N+1$ دارایی ریسکی است. فرض کنیم X_n نشان‌دهنده‌ی وضعیت بازار در زمان n باشد. برای مثال، این وضعیت‌ها می‌توانند شامل موارد شناخته شده‌ای مانند گاوی (صعودی)، خرسی (نزولی) و یا راکد باشد. ویژگی متمایز و کلیدی این مدل که آن را در رده‌ی بازارهای با تغییر رژیم غیر مارکوف قرار می‌دهد، وابستگی بازدهی دارایی‌ها به مسیر کامل تاریخچه‌ی بازار و نه تنها وضعیت فعلی آن است. به‌طور مشخص، برای هر دوره $n = 0, 1, \dots, T-1$ و هر دارایی $k = 0, 1, \dots, N$، بازدهی دارایی kام در بازه زمانی $[n, n+1)$ به صورت متغیر تصادفی $R_n^k(X_0, \dots, X_n)$ مدل‌سازی می‌شود که مشروط بر مسیر کامل $(X_0, \dots, X_n)$ تعریف می‌شود. برای توصیف پویایی وضعیت‌های بازار، فرض می‌کنیم $\{X_n\}_{n=0}^T$ یک زنجیر مارکوف با فضای حالت متناهی $S = \{1, 2, \dots, L\}$ و ماتریس‌های انتقال وابسته به زمان Q_n (برای $n = 1, 2, \dots, T$) است، به‌طوری که:

$$Q_n(i_{n-1}, i_n) = \Pr(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}).$$

بردار بازدهی تمامی دارایی‌ها در دوره n را به صورت فشرده با R_n نشان می‌دهیم. برای ساده‌سازی نمادها و جلوگیری از تکرار، این نماد به‌طور ضمنی حاوی این فرض است که R_n تابعی از کل تاریخچه‌ی $(X_0, \dots, X_n)$ است. بنابراین، برای یک مسیر مشخص، داریم:

$$R_n = \left(R_n^0, R_n^1, \dots, R_n^N\right)',$$

که در آن $'$ نماد ترانهاده است. به‌طور مشابه، بردار بازدهی‌های مازاد دارایی‌های ریسکی نسبت به دارایی شماره صفر (که در حالت خاص یک دارایی بدون ریسک است) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_n^e = \left(R_n^1 - R_n^0, \dots, R_n^N - R_n^0\right)'.$$

در این مقاله فرضیات زیر را درباره‌ی زنجیر مارکوف و بازدهی دارایی‌ها برای مسیرهای مشاهده شده، در نظر می‌گیریم. در اینجا نماد $\mathbb{E}[.]$ بیانگر عملگر امید است.

(۱) برای هر $i_n, i_{n+1} \in S$، $Q_n(i_n, i_{n+1}) > 0$؛

(۲) $\mathbb{E}[R_n^e(i_0, \dots, i_n)] \neq (0, \dots, 0)'$؛

(۳) ماتریس $\mathbb{E}[R_n(i_0, \dots, i_n) R_n(i_0, \dots, i_n)']$ معین‌مثبت است؛

(۴) برای هر $n \neq m$، $R_n(i_0, \dots, i_n)$ مستقل از $R_m(j_0, \dots, j_m)$ است؛

(۵) $R_n(i_0, \dots, i_n)$ مستقل از وضعیت داده‌شده‌ی $X_{n+1} = i_{n+1}$ است.

برای $n = 0, 1, \dots, T-1$ و یک مسیر داده‌شده‌ی $(X_0, \dots, X_n) = (i_0, \dots, i_n)$، تعریف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
h_n &:= r_n^{e\prime} V_n^{-1} r_n^e, \\
g_n &:= r_n - r_n^{e\prime} V_n^{-1} U_n, \\
f_n &:= r_n^2 - U_n' V_n^{-1} U_n,
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
V_n(i_0, \dots, i_n) &:= \mathbb{E}\big[R_n^e(i_0, \dots, i_n) R_n^e(i_0, \dots, i_n)'\big], \\
U_n(i_0, \dots, i_n) &:= \mathbb{E}\big[R_n^0(i_0, \dots, i_n) R_n^e(i_0, \dots, i_n)\big], \\
r_n^e(i_0, \dots, i_n) &:= \mathbb{E}\big[R_n^e(i_0, \dots, i_n)\big], \\
r_n(i_0, \dots, i_n) &:= \mathbb{E}\big[R_n^0(i_0, \dots, i_n)\big], \\
r_n^2(i_0, \dots, i_n) &:= \mathbb{E}\big[(R_n^0(i_0, \dots, i_n))^2\big].
\end{aligned}
$$

تذکر: فرض (۱) بیان می‌کند که تمام وضعیت‌ها از یکدیگر در یک گام قابل دسترسی هستند. فرض (۲) بر عدم تباهیدگی بازدهی‌ها تاکید دارد. همچنین فرض (۳) بیان می‌کند که بازدهی هیچ یک از دارائی‌ها را نمی‌توان بر حسب ترکیب خطی از سایر آنها به‌دست آورد. به‌بیان دیگر هیچ دارائی مازادی در بازار وجود ندارد. در بسیاری از پژوهش‌ها فرض وجود یک دارائی بدون ریسک مانند اوراق قرضه و یا دارائی بانکی در مدل لحاظ می‌شود. در مدل حاضر، بدون کاستن از کلیت، به‌عنوان مثال می‌توان دارائی شماره ۰ را بدون ریسک فرض کرد. درنتیجه به‌ازای یک مسیر داده شده، بازدهی آن قطعی و واریانس بازدهی آن صفر خواهد بود. در این صورت $r_n = R_n^0$ و

$$
\begin{aligned}
h_n &:= r_n^{e\prime} V_n^{-1} r_n^e, \\
g_n &:= r_n(1 - h_n), \\
f_n &:= r_n^2(1 - h_n).
\end{aligned}
$$

اثبات لم زیر مشابه لم‌های ۲ و ۳ در [۳۰] است و بنابراین حذف شده است.

لم **۱.۲**. $V_n(i_0, \dots, i_n)$ یک ماتریس معین‌مثبت است. همچنین $h_n(i_0, \dots, i_n)$ و $f_n(i_0, \dots, i_n)$ اعداد حقیقی مثبت هستند.

حال فرض می‌کنیم که سرمایه‌گذار در زمان ۰ در وضعیت اولیه‌ی i_0 با ثروت اولیه‌ی w_0 وارد بازار مالی می‌شود و برنامه‌ی سرمایه‌گذاری برای T دوره‌ی متوالی تنظیم می‌کند. سبد سرمایه‌گذاری در زمان n را با $\pi_n := (\pi_n^1, \pi_n^2, \dots, \pi_n^N)' \in \mathbb{R}^N$ نشان می‌دهیم که در آن π_n^k مقدار مبلغی است که در دارایی k–ام (بدون در نظر گرفتن دارائی ۰–ام) سرمایه‌گذاری شده است. توجه داشته باشید که یک استراتژی سرمایه‌گذاری T–دوره‌ای، دنباله‌ای از سبدها به‌صورت $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{T-1}\}$ است. در ادامه ثروت سرمایه‌گذار در زمان n تحت استراتژی π را با W_n^π نشان می‌دهیم. در اینجا، $\pi_n^0 = W_n^\pi - \sum_{k=1}^N \pi_n^k$ مقدار سرمایه‌گذاری شده در دارایی ۰–ام در زمان n است. در این صورت، دینامیک ثروت تحت استراتژی π به‌صورت زیر به‌دست می‌آید،

$$
W_{n+1}^\pi = W_n^\pi R_n^0(X_0, \dots, X_n) + \pi_n' R_n^e(X_0, \dots, X_n), \quad n = 0, 1, \dots, T-1.
$$

فرمول‌بندی بالا به این معنی است که فرآیند ثروت خودتامین است و هیچ عامل خارجی باعث افزایش (به‌صورت واریز) و یا کاهش (به‌صورت برداشت) سطح ثروت نمی‌شود. در اینجا فرض می‌کنیم که

(۶) متغیرهای تصادفی $R_n(i_\circ,\dots,i_n)$ و X_{n+1} مستقل از ثروت داده‌شده‌ی $W_n^\pi = w_n$ هستند. به‌بیان دیگر، ثروت سرمایه‌گذاران خرد تاثیری بر عملکرد بازار ندارد.

در ابتدا یک مدل سرمایه‌گذاری با افق زمانی معین T را در نظر گرفتیم. اما در واقعیت، ممکن است سرمایه‌گذار به دلایل مرتبط با وضعیت بازار مالی و یک عامل خارجی، در زمان تصادفی $\tau_\circ \in \{\circ,1,2,\dots\}\cup\{\infty\}$ از بازار خارج شود. در اینجا ∞ به معنی عدم وقوع است. با توجه به تصادفی بودن زمان $\tau_\circ$، ممکن است سرمایه‌گذار قبل از زمان T از سرمایه‌گذاری خود صرف‌نظر کند. در این صورت، زمان واقعی خروج، که با τ نشان داده می‌شود، برابر با $\tau := \min(T,\tau_\circ)$ است. فرض می‌کنیم برای هر وضعیت اولیه‌ی $X_\circ = i_\circ$، داریم

$$\sum_{n=\circ}^{T} \Pr(\tau = n \mid X_\circ = i_\circ) = 1.$$

مشابه با پژوهش لی و همکاران [۳۰]، فرض می‌کنیم که احتمال شرطی خروج از بازار در زمان n، به وضعیت فعلی بازار یعنی X_n بستگی دارد. این به این معنی است که احتمال خروج به وضعیت فعلی بازار حساس است. فرض کنیم $\mathcal{F}_n := \sigma\{X_t; \circ \le t \le n\}$، σ–میدان نشان‌دهنده اطلاعات وضعیت‌های بازار از ابتدا تا زمان n باشد. فرآیند تصادفی $\{\xi_n; n = \circ,1,2,\dots,T\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\xi_n := \begin{cases} \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{\tau_\circ = n\}} \big| X_n\big] = \Pr(\tau_\circ = n \big| X_n), & n = \circ,1,\dots,T-1, \\ \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{\tau_\circ \ge T\}} \big| X_T\big] = \Pr(\tau_\circ \ge T \big| X_T), & n = T, \end{cases}$$

که در آن $\mathbb{1}\{\cdot\}$ بیانگر تابع مشخصه است. با توجه به تعریف $\tau = \min(T,\tau_\circ)$، می‌توانیم بنویسیم

$$\xi_n = \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{\tau = n\}} \big| X_n\big] = \Pr(\tau = n \big| X_n),\ n = \circ,1,\dots,T.$$

برای $n = \circ,1,\dots,T$، احتمال خروج وابسته به وضعیت i_n را با نماد زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_n(i_n) := \mathbb{E}\big[\xi_n \big| X_n = i_n\big] = \Pr(\tau = n \big| X_n = i_n).$$

مشابه با پژوهش لی و همکاران [۳۰]، فرض‌های زیر را درخصوص زمان خروج لحاظ می‌کنیم:

(۷) $\Pr(\tau = T) > \circ$. همچنین، برای $n = \circ,1,\dots,T$، فرض می‌کنیم

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}\{\tau = n\} \mid \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}[\mathbb{1}\{\tau = n\} \mid X_n].$$

علاوه‌براین، برای وضعیت داده‌شده‌ی X_n، احتمال خروج در زمان n مستقل از ثروت در زمان n است.

منطقی است که فرض کنیم $\Pr(\tau = T) > \circ$، یا به عبارت معادل $\Pr(\tau_\circ \ge T) > \circ$. در غیر این صورت با احتمال یک، $\tau \le T-1$ است و بنابراین در نظر گرفتن T به‌عنوان افق اولیه‌ی سرمایه‌گذاری بی‌معنی است. در این صورت، وجود دارد $i_T \in S$ طوری که $P_T(i_T) > \circ$. از سوی دیگر فرض ۷ بیان می‌کند که

$$\Pr(\tau = n \mid X_\circ, X_1, \dots, X_T) = \Pr(\tau = n \mid X_n),$$

و به این معناست که احتمال خروج در زمان n تنها تحت تأثیر وضعیت فعلی X_n است و نه وضعیت‌های بازار در زمان‌های آینده یا گذشته. در نهایت فرض می‌کنیم:

(۸) فروش استقراضی مجاز است و هزینه معامله برای خرید و فروش دریافت نمی‌شود.

در ادامه ما از نمادهای $\mathbb{E}_\circ[.] := \mathbb{E}[. \mid X_\circ = i_\circ; W_\circ^\pi = w_\circ]$ و $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\circ[.] := \mathbb{E}_\circ[.]^2 - \mathbb{E}_\circ[.]^2$ برای نمایش امید و واریانس شرطی تحت شرایط اولیه‌ی $i_\circ$ و $w_\circ$ استفاده می‌کنیم. با استفاده از رویکرد میانگین–واریانس، مسئله‌ی انتخاب چنددوره‌ای سبد بهینه با زمان خروج تصادفی را می‌توان از طریق مسئله‌ی بهینه‌سازی زیر فرمول‌بندی کرد:

$$P(\mu): \begin{cases} \min\limits_{\pi} \ \mathbb{V}\mathrm{ar}_\circ\big[W_\tau^\pi\big] \\ \quad \mathbb{E}_\circ\big[W_\tau^\pi\big] = \mu, \\ \quad W_{n+1}^\pi = W_n^\pi R_n^\circ(X_\circ,\dots,X_n) + \pi_n' R_n^e(X_\circ,\dots,X_n), \quad n = \circ,1,\dots,T-1. \end{cases}$$

در مسئله‌ی $P(\mu)$، یک سرمایه‌گذار به‌دنبال یافتن بهترین استراتژی سرمایه‌گذاری است به‌طوری که ریسک سرمایه‌گذاری یعنی واریانس ثروت نهایی در زمان خروج به حداقل برسد تحت این شرط که ثروت نهایی مورد انتظار برابر با سطح مطلوب μ بوده و دینامیک ثروت نیز خود تامین باشد.

با توجه به تعریف واریانس و خطی بودن عملگر امید، می‌توان مسئله‌ی $P(\mu)$ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P(\mu):\begin{cases}\min\limits_{\pi} \ \mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)^{\tau}\big]\\ \quad \mathbb{E}_{\circ}\big[W_{\tau}^{\pi}-\mu\big]=\circ,\\ \quad W_{n+\tau}^{\pi}=W_{n}^{\pi}R_{n}^{\circ}(X_{\circ},\dots,X_{n})+\pi_{n}'R_{n}^{e}(X_{\circ},\dots,X_{n}), \quad n=\circ,\tau,\dots,T-\tau.\end{cases}$$

با شرط‌کردن بر اطلاعات بازار و تعیین زمان خروج و همچنین استفاده از فرض ۷ می‌توانیم بنویسیم،

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\circ}[W_{\tau}^{\pi}-\mu] =&\mathbb{E}_{\circ}\big[\mathbb{E}[W_{\tau}^{\pi}-\mu|\,\mathcal{F}_{\circ}]\big]\\ =&\mathbb{E}_{\circ}\big[\mathbb{E}[(W_{\circ}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}=\circ\}}|\,\mathcal{F}_{\circ}]\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[\mathbb{E}[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}\geq\tau\}}|\,\mathcal{F}_{\circ}]\big]\\ =&\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\circ}^{\pi}-\mu)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}=\circ\}}|\,\mathcal{F}_{\circ}]\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}\geq\tau\}}\big]\\ =&\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\circ}^{\pi}-\mu)\xi_{\circ}\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[\mathbb{E}[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}\geq\tau\}}|\,\mathcal{F}_{\tau}]\big]\\ =&\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\circ}^{\pi}-\mu)\xi_{\circ}\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[\mathbb{E}[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}=\tau\}}|\,\mathcal{F}_{\tau}]\big]\\ &+\mathbb{E}_{\circ}\big[\mathbb{E}[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}\geq\tau\}}|\,\mathcal{F}_{\tau}]\big]\\ =&\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\circ}^{\pi}-\mu)\xi_{\circ}\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}=\tau\}}|\,\mathcal{F}_{\tau}]\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}\geq\tau\}}\big]\\ =&\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\circ}^{\pi}-\mu)\xi_{\circ}\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\xi_{\tau}\big]+\mathbb{E}_{\circ}\big[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)\mathbb{1}_{\{\tau_{\circ}\geq\tau\}}\big]\\ &\vdots\\ =&\sum_{n=\circ}^{T}\mathbb{E}_{\circ}\big[\xi_{n}(W_{n}^{\pi}-\mu)\big].\end{aligned}$$

به‌طور مشابه داریم،

$$\mathbb{E}_{\circ}[(W_{\tau}^{\pi}-\mu)^{\tau}]=\sum_{n=\circ}^{T}\mathbb{E}_{\circ}[\xi_{n}(W_{n}^{\pi}-\mu)^{\tau}].$$

بنابراین، می‌توان مسئله‌ی $P(\mu)$ را به‌عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی با افق زمانی معین به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$P(\mu):\begin{cases}\min\limits_{\pi} \ \mathbb{E}_{\circ}\big[\sum\limits_{n=\circ}^{T}\xi_{n}(W_{n}^{\pi}-\mu)^{\tau}\big]\\ \quad \mathbb{E}_{\circ}\big[\sum\limits_{n=\circ}^{T}\xi_{n}(W_{n}^{\pi}-\mu)\big]=\circ,\\ \quad W_{n+\tau}^{\pi}=W_{n}^{\pi}R_{n}^{\circ}(X_{\circ},\dots,X_{n})+\pi_{n}'R_{n}^{e}(X_{\circ},\dots,X_{n}), \quad n=\circ,\tau,\dots,T-\tau.\end{cases}$$

برای حل مسئله‌ی $P(\mu)$ از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کنیم. برای این منظور ضریب لاگرانژ $\tau\lambda\in\mathbb{R}$ را متناظر با قید امید بازدهی مطلوب معرفی کرده و مسئله‌ی کمکی زیر را تنظیم می‌کنیم:

$$P(\mu,\lambda):\begin{cases}\min\limits_{\pi} \ \mathbb{E}_{\circ}\big[\sum\limits_{n=\circ}^{T}\xi_{n}(W_{n}^{\pi}-\mu)^{\tau}\big]+\tau\lambda\mathbb{E}_{\circ}\big[\sum\limits_{n=\circ}^{T}\xi_{n}(W_{n}^{\pi}-\mu)\big]\\ \quad W_{n+\tau}^{\pi}=W_{n}^{\pi}R_{n}^{\circ}(X_{\circ},\dots,X_{n})+\pi_{n}'R_{n}^{e}(X_{\circ},\dots,X_{n}), \quad n=\circ,\tau,\dots,T-\tau.\end{cases}$$

با تعریف $d:=\lambda-\mu$ و $d_{\circ}:=\mu^{\tau}-\tau\lambda\mu$، مسئله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$P(\mu,\lambda):\begin{cases}\min\limits_{\pi} \ \mathbb{E}_{\circ}\big[\sum\limits_{n=\circ}^{T}\big(\xi_{n}(W_{n}^{\pi})^{\tau}+\tau d\xi_{n}W_{n}^{\pi}\big)+d_{\circ}\big]\\ \quad W_{n+\tau}^{\pi}=W_{n}^{\pi}R_{n}^{\circ}(X_{\circ},\dots,X_{n})+\pi_{n}'R_{n}^{e}(X_{\circ},\dots,X_{n}), \quad n=\circ,\tau,\dots,T-\tau.\end{cases}$$

شکل ۲: برنامه‌ریزی پویا (پس‌رو)



برای سادگی، ثابت $d_\circ$ را حذف و مسئله‌ی زیر را تنظیم می‌کنیم:

$$\tilde{P}(\mu,\lambda):\begin{cases}\min\limits_{\pi}\ \mathbb{E}_\circ\Big[\sum\limits_{n=\circ}^{T}\big(\xi_n(W_n^\pi)^{۲}+۲d\xi_nW_n^\pi\big)\Big]\\ \quad W_{n+۱}^\pi=W_n^\pi R_n^\circ(X_\circ,\dots,X_n)+\pi_n' R_n^e(X_\circ,\dots,X_n),\quad n=\circ,۱,\dots,T-۱.\end{cases}$$

به‌وضوح، $\tilde{P}(\mu,\lambda)$ و $P(\mu,\lambda)$ دارای جواب بهینه‌ی یکسان هستند.

۳ برنامه‌ریزی پویا

در این پژوهش از روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی برای حل مسئله‌ی $\tilde{P}(\mu,\lambda)$ استفاده می‌کنیم. این روش بر اساس مفاهیم بنیادی چون تابع ارزش و معادله‌ی بلمن استوار است. این روش به‌ویژه زمانی مفید است که فرآیند تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای باشد، زیرا امکان تجزیه‌ی مسئله به زیرمسائل کوچک‌تر و قابل مدیریت را فراهم می‌کند. در برنامه‌ریزی پویا، تابع ارزش $v_n(X_n)$ معمولا نشان‌دهنده‌ی کمینه‌ی (یا بیشینه‌ی) هزینه (یا پاداش) از زمان n به بعد تحت متغیر وضعیت (تصادفی) X_n در زمان n است. مسئله با در نظر گرفتن هدف بهینه‌سازی از زمان $\circ$ تحت وضعیت اولیه‌ی $X_\circ=x_\circ$ به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$v_\circ(x_\circ)=\min_{u_\circ,\dots,u_{T-۱}}\mathbb{E}\left[\sum_{n=\circ}^{T-۱}c_n(X_n,u_n)+c_T(X_T)\right]$$

که در آن $c_n(X_n,u_n)$ هزینه در زمان n، $c_T(X_T)$ هزینه‌ی پایانی و u_nها متغیرهای تصمیم هستند. تابع ارزش $v_n(x_n)$ مقدار بهینه را از زمان n به بعد تحت وضعیت فعلی $X_n=x_n$ نشان می‌دهد، یعنی:

$$v_n(x_n)=\min_{u_n,\dots,u_{T-۱}}\mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{T-۱}c_k(X_k,u_k)+c_T(X_T)\mid X_n=x_n\right].$$

درنهایت v_n و $v_{n+۱}$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$v_n(x_n)=\min_{u_n}\mathbb{E}\left[c_n(x_n,u_n)+v_{n+۱}(X_{n+۱})\mid X_n=x_n\right].$$

این رابطه، که به معادله‌ی بلمن معروف است، همراه با شرط پایانی $v_T(x_T)=c_T(x_T)$، ارتباط بین توابع ارزش در مراحل متوالی زمانی را نشان می‌دهد و یکی از ویژگی‌های کلیدی برنامه‌ریزی پویا در مسائل بهینه‌سازی چندمرحله‌ای تصادفی است. معادله‌ی بلمن به روش بازگشتی حل می‌شود، که در آن محاسبات از شرط پایانی $v_T(x_T)=c_T(x_T)$ آغاز شده و به‌صورت معکوس تا گام زمانی $n=\circ$ ادامه می‌یابد تا سیاست بهینه $\{u_n^*\}_{n=\circ}^{T-۱}$ به‌دست آید (شکل (۲) را مشاهده کنید).

در ادامه مفاهیم فوق را بر اساس فرمول‌بندی ارائه شده برای مسئله‌ی $\tilde{P}(\mu,\lambda)$ بازنویسی می‌کنیم. برای مسیر مشخص $(i_\circ,\dots,i_n)$ و مقدار ثروت w_n، $(n+۲)$-تایی مرتب $(i_\circ,\dots,i_n;w_n)$ بیانگر وضعیت در زمان n است. تابع ارزش در زمان n $(=n$ $\circ,۱,\dots,T-۱)$ متناظر با این وضعیت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v_n(i_\circ,\dots,i_n;w_n):=\min_{\pi_n,\dots,\pi_{T-۱}}\mathbb{E}_{i_\circ,\dots,i_n;w_n}\Big[\sum_{k=n}^{T}\big(\xi_k(W_k^\pi)^{۲}+۲d\xi_kW_k^\pi\big)\Big],\qquad(۱.۳)$$

که در آن $\mathbb{E}_{i_0,\dots,i_n;w_n}[.] := \mathbb{E}[. \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n; W_n^\pi = w_n]$. برای استخراج معادله‌ی بلمن و یافتن ارتباط بین v_n و v_{n+1} به‌صورت پس‌رو برای $n = 0, 1, \dots, T-1$، مطابق با فرضیات مدل داریم:

$$\begin{aligned} & v_n(i_0, \dots, i_n; w_n) \\ & = \min_{\pi_n} \mathbb{E}\big[\xi_n w_n^2 + 2d\xi_n w_n + v_{n+1}(i_0, \dots, i_n, X_{n+1}; W_{n+1}^\pi) | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n, W_n^\pi = w_n\big] \\ & = P_n(i_n) w_n^2 + 2dP_n(i_n) w_n \\ & + \min_{\pi_n} \sum_{i_{n+1} \in \mathbb{S}} Q_{n+1}(i_n, i_{n+1}) \mathbb{E}\big[v_{n+1}\big(i_0, \dots, i_{n+1}; W_n^\pi R_n^0(i_0, \dots, i_n) + \pi_n' R_n^e(i_0, \dots, i_n)\big)\big], \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

که در آن شرط مرزی به‌صورت زیر است:

$$v_T(i_0, \dots, i_T; w_T) = P_T(i_T) w_T^2 + 2dP_T(i_T) w_T. \tag{۳.۳}$$

یافتن این توابع ارزش و کنترل بهینه‌ی متناظر با آنها مستلزم محاسبات طولانی و پیچیده است. برای ساده‌سازی محاسبات لازم است چند مفهوم و نماد ماتریسی را معرفی کنیم. برای این منظور ابتدا برخی از مفاهیم و نمادهای ماتریسی معرفی شده در کیخائی [۱۲] را بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم $m, n \in \mathbb{N}$ و $2 \le m \le n$. همچنین، فرض کنیم A یک ماتریس $\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{m \text{ بار}}$ بعدی و B یک ماتریس $\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{n \text{ بار}}$ بعدی باشد. منظور از $(A \bullet B)$ و $\overline{B}$ به‌ترتیب ماتریس‌های $\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{n \text{ بار}}$ و $\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{(n-1) \text{ بار}}$ بعدی با مولفه‌های زیر است:

$$(A \bullet B)(i_1, \dots, i_n) := A(i_{n-m+1}, \dots, i_n) B(i_1, \dots, i_n),$$
$$\overline{B}(i_1, \dots, i_{n-1}) := \sum_{i_n \in S} B(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n).$$

متناظر با $n, k \in \mathbb{N}$ و $1 \le n < k$، فرض کنیم $A_{k-n}, \dots, A_k$ ماتریس‌های $L \times L$ بعدی، $B_{k-n}, \dots, B_{k-1}$ ماتریس‌های $\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{(k-j+1) \text{ بار}}$ بعدی و α_k ماتریس $\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{(k+1) \text{ بار}}$ بعدی باشند. برای ساده‌نویسی تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \overline{\prod_{j=k-n}^{k-1} (A_j \bullet B_j) \bullet (A_k \bullet \alpha_k)} := \\ & \overline{((A_{k-n} \bullet B_{k-n}) \bullet (\dots \bullet \overline{((A_{k-1} \bullet B_{k-1}) \bullet \overline{(A_k \bullet \alpha_k)})} \dots))} \end{aligned} \tag{۴.۳}$$

که یک ماتریس $\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{(k-n) \text{ بار}}$ بعدی است. برای ابهام‌زدایی قرار می‌دهیم

$$\overline{\prod_{\varnothing}(A_j \bullet B_j) \bullet (A_k \bullet \alpha_k)} := \overline{(A_k \bullet \alpha_k)}.$$

همچنین در ادامه فرض می‌کنیم $\prod_\varnothing(.) := I$ و $\sum_\varnothing(.) := 0$، که در آن I و 0 به‌ترتیب بیانگر ماتریس‌های همانی و صفر هستند. ما از لم‌های مفید زیر در طول مقاله استفاده می‌کنیم. برای مشاهده‌ی اثبات آنها می‌توانید به کیخائی [۱۲] مراجعه کنید.

لم ۱.۳. برای $n \ge 0$،

$$\begin{aligned} & \overline{\prod_{j=k-n}^{k-1} (A_j \bullet B_j) \bullet (A_k \bullet \alpha_k)}(i_0, \dots, i_{k-n-1}) = \\ & \sum_{i_{k-n} \in \mathbb{S}} \dots \sum_{i_{k-1} \in \mathbb{S}} \sum_{i_k \in \mathbb{S}} A_{k-n}(i_{k-n-1}, i_{k-n}) B_{k-n}(i_0, \dots, i_{k-n}) \dots A_{k-1}(i_{k-2}, i_{k-1}) B_{k-1}(i_0, \dots, i_{k-1}) \\ & \times A_k(i_{k-1}, i_k) \alpha_k(i_0, \dots, i_k). \end{aligned}$$

لم **۲.۳**. فرض کنیم $\{\beta_n\}_{n=0}^{T}$ و $\{\theta_n\}_{n=0}^{T-1}$ دنباله‌هایی از ماتریس‌های $\underbrace{L\times L\times\cdots\times L}_{(n+1)\text{ بار}}$ بعدی و $\{A_n\}_{n=1}^{T}$ دنباله‌ای از ماتریس‌های $L\times L$ بعدی باشند. همچنین فرض کنیم $\{\alpha_n\}_{n=0}^{T}$ دنباله‌ای از ماتریس‌های $\underbrace{L\times L\times\cdots\times L}_{(n+1)\text{ بار}}$ باشد که مؤلفه‌های آن به‌صورت بازگشتی با شرط مرزی $\alpha_T = \beta_T$ به‌شکل زیر تعریف شده‌اند:

$$\alpha_n(i_0,\ldots,i_n) = \beta_n(i_0,\ldots,i_n) + \theta_n(i_0,\ldots,i_n)\overline{(A_{n+1}\bullet\alpha_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n).$$

آنگاه به‌صورت صریح داریم:

$$\alpha_n(i_0,\ldots,i_n) = \beta_n(i_0,\ldots,i_n) + \theta_n(i_0,\ldots,i_n)\sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(A_j\bullet\theta_j)\bullet(A_k\bullet\beta_k)}(i_0,\ldots,i_n).$$

قضیه‌ی اساسی زیر ساختار کلی توابع ارزش در رابطه‌ی (۱.۳) و کنترل بهینه‌ی متناظر با آنها را مشخص می‌کند.

قضیه **۳.۳**. توابع ارزش مسئله‌ی $\tilde{P}(\mu,\lambda)$ و کنترل بهینه‌ی متناظر با آنها به‌شکل زیر هستند:

$$v_n(i_0,\ldots,i_n;w_n) = a_n(i_0,\ldots,i_n)w_n^2 + b_n(i_0,\ldots,i_n)w_n + c_n(i_0,\ldots,i_n), \tag{۵.۳}$$

$$\pi_n^*(i_0,\ldots,i_n;w_n) = -V_n(i_0,\ldots,i_n)^{-1}\Big[w_nU_n(i_0,\ldots,i_n) + \frac{\overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n)}{2\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n)}r_n^e(i_0,\ldots,i_n)\Big], \tag{۶.۳}$$

که در آن مقادیر a_n، b_n و c_n در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned}
a_n(i_0,\ldots,i_n) &= P_n(i_n) + f_n(i_0,\ldots,i_n)\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n),\\
b_n(i_0,\ldots,i_n) &= 2dP_n(i_n) + g_n(i_0,\ldots,i_n)\overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n),\\
c_n(i_0,\ldots,i_n) &= e_n(i_0,\ldots,i_n) + \overline{(Q_{n+1}\bullet c_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n),\\
e_n(i_0,\ldots,i_n) &:= -\frac{\Big(\overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n)\Big)^2}{4\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\ldots,i_n)}h_n(i_0,\ldots,i_n).
\end{aligned}$$

اثبات. برای $n=T$، با توجه به شرط مرزی (۳.۳) داریم: $a_T(i_0,\ldots,i_T) = P_T(i_T)$، $b_T(i_0,\ldots,i_T) = 2dP_T(i_T)$ و

$c_T(i_\circ,\dots,i_T)=\circ$. اثبات را با استفاده از معادله‌ی (۲.۳) و استقرا به روش پسرو پیش می‌بریم. ابتدا برای $n=T-۱$ داریم

(۷.۳)

$$
\begin{aligned}
&v_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱};w_{T-۱})=P_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}^۲+۲dP_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}\\
&\quad+\min_{\pi_{T-۱}}\mathbb{E}\Big\{\sum_{i_T\in\mathbb{S}}Q_T(i_{T-۱},i_T)v_T\big(i_\circ,\dots,i_T;w_{T-۱}R^\circ_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})+\pi'_{T-۱}R^e_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big)\Big\}\\
&=P_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}^۲+۲dP_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}\\
&\quad+\min_{\pi_{T-۱}}\mathbb{E}\Big\{\sum_{i_T\in\mathbb{S}}Q_T(i_{T-۱},i_T)a_T(i_\circ,\dots,i_T)\big[w_{T-۱}R^\circ_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})+\pi'_{T-۱}R^e_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big]^۲\\
&\quad+\sum_{i_T\in\mathbb{S}}Q_T(i_{T-۱},i_T)b_T(i_\circ,\dots,i_T)\big[w_{T-۱}R^\circ_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})+\pi'_{T-۱}R^e_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big]\\
&\quad+\sum_{i_T\in\mathbb{S}}Q_T(i_{T-۱},i_T)c_T(i_\circ,\dots,i_T)\Big\}\\
&=P_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}^۲+۲dP_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}\\
&\quad+\min_{\pi_{T-۱}}\mathbb{E}\Big\{\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big[w_{T-۱}R^\circ_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})+\pi'_{T-۱}R^e_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big]^۲\\
&\quad+\overline{(Q_T\bullet b_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big[w_{T-۱}R^\circ_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})+\pi'_{T-۱}R^e_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big]\\
&\quad+\overline{(Q_T\bullet c_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\Big\}\\
&=P_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}^۲+۲dP_{T-۱}(i_{T-۱})w_{T-۱}\\
&\quad+\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})r_{T-۱}^۲(i_\circ,\dots,i_{T-۱})w_{T-۱}^۲+\overline{(Q_T\bullet b_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})r_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})w_{T-۱}\\
&\quad+\overline{(Q_T\bullet c_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\\
&\quad+\min_{\pi_{T-۱}}\Big\{\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\pi'_{T-۱}V_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\pi_{T-۱}\\
&\quad+\pi'_{T-۱}\big[۲\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})w_{T-۱}U_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\\
&\quad+\overline{(Q_T\bullet b_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})r^e_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

همان‌طور که در توضیحات فرض ۷ اشاره شد، وجود دارد $i_T\in\mathbb{S}$ طوری که $P_T(i_T)>\circ$. حالا فرض ۱ تضمین می‌کند که $\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})>\circ$. از آنجا که طبق لم ۱.۲ ماتریس $V_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})$ معین‌مثبت است، بنابراین تابع هدف مسئله‌ی مینیمم‌سازی ظاهر شده در انتهای رابطه‌ی (۷.۳) دارای ماتریس هسین معین‌مثبت است. با معادل قراردادن بردار گرادیان و بردار صفر (به‌عنوان شرط لازم و کافی بهینگی)، به جواب بهینه‌ی زیر می‌رسیم:

$$
\begin{aligned}
&\pi^*_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱};w_{T-۱})=\\
&-V_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})^{-۱}\Big[w_{T-۱}U_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})+\frac{\overline{(Q_T\bullet b_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})}{۲\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})}r^e_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\Big].
\end{aligned}
$$

با جایگذاری جواب فوق در رابطه‌ی (۷.۳) و ساده‌سازی عبارات خواهیم داشت،

$$
v_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱};w_{T-۱})=a_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})w_{T-۱}^۲+b_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})w_{T-۱}+c_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱}),
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
a_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})&=P_{T-۱}(i_{T-۱})+f_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱}),\\
b_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})&=۲dP_{T-۱}(i_{T-۱})+g_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})\overline{(Q_T\bullet b_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱}),\\
c_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})&=-\frac{(\overline{(Q_T\bullet b_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱}))^۲}{۴\overline{(Q_T\bullet a_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})}h_{T-۱}(i_\circ,\dots,i_{T-۱})+\overline{(Q_T\bullet c_T)}(i_\circ,\dots,i_{T-۱}).
\end{aligned}
$$

توجه داشته باشید که قضیه‌ی ۱.۲ تضمین می‌کند که $a_{T-1}(i_0,\dots,i_{T-1}) > 0$. حال فرض کنیم که روابط (۵.۳) و (۶.۳) برای $n+1$ برقرار هستند و $a_{n+1}(i_0,\dots,i_{n+1}) > 0$. سپس برای n داریم،

(۸.۳)

$$
\begin{aligned}
&v_n(i_0,\dots,i_n;w_n) = P_n(i_n)w_n^2 + 2dP_n(i_n)w_n \\
&\quad + \min_{\pi_n} \mathbb{E}\Big\{ \sum_{i_{n+1}\in\mathbb{S}} Q_{n+1}(i_n,i_{n+1}) v_{n+1}\big(i_0,\dots,i_{n+1}; w_n R_n^*(i_0,\dots,i_n) + \pi_n' R_n^e(i_0,\dots,i_n)\big)\Big\} \\
&= P_n(i_n)w_n^2 + 2dP_n(i_n)w_n \\
&\quad + \min_{\pi_n} \mathbb{E}\Big\{ \sum_{i_{n+1}\in\mathbb{S}} Q_{n+1}(i_n,i_{n+1}) a_{n+1}(i_0,\dots,i_{n+1})\big[w_n R_n^*(i_0,\dots,i_n) + \pi_n' R_n^e(i_0,\dots,i_n)\big]^2 \\
&\quad + \sum_{i_{n+1}\in\mathbb{S}} Q_{n+1}(i_n,i_{n+1}) b_{n+1}(i_0,\dots,i_{n+1})\big[w_n R_n^*(i_0,\dots,i_n) + \pi_n' R_n^e(i_0,\dots,i_n)\big] \\
&\quad + \sum_{i_{n+1}\in\mathbb{S}} Q_{n+1}(i_n,i_{n+1}) c_{n+1}(i_0,\dots,i_{n+1})\Big\} \\
&= P_n(i_n)w_n^2 + 2dP_n(i_n)w_n \\
&\quad + \min_{\pi_n} \mathbb{E}\Big\{ \overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n)\big[w_n R_n^*(i_0,\dots,i_n) + \pi_n' R_n^e(i_0,\dots,i_n)\big]^2 \\
&\quad + \overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\dots,i_n)\big[w_n R_n^*(i_0,\dots,i_n) + \pi_n' R_n^e(i_0,\dots,i_n)\big] + \overline{(Q_{n+1}\bullet c_{n+1})}(i_0,\dots,i_n)\Big\} \\
&= P_n(i_n)w_n^2 + 2dP_n(i_n)w_n \\
&\quad + \overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n) r_n^2(i_0,\dots,i_n) w_n^2 + \overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\dots,i_n) r_n(i_0,\dots,i_n) w_n \\
&\quad + \overline{(Q_{n+1}\bullet c_{n+1})}(i_0,\dots,i_n) \\
&\quad + \min_{\pi_n} \Big\{ \overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n)\pi_n' V_n(i_0,\dots,i_n)\pi_n \\
&\quad + \pi_n'\big[2\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n) w_n U_n(i_0,\dots,i_n) + \overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\dots,i_n) r_n^e(i_0,\dots,i_n)\big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مسئله‌ی مینیمم‌سازی ظاهر شده در انتهای رابطه‌ی (۸.۳) مشابه با مسئله‌ی مینیمم‌سازی ظاهر شده در انتهای رابطه‌ی (۷.۳) است. مجددا $\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n) > 0$ و $V_n(i_0,\dots,i_n)$ معین‌مثبت است. بنابراین، جواب آن موجود و به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\pi_n^*(i_0,\dots,i_n;w_n) = \\
&-V_n(i_0,\dots,i_n)^{-1}\big[w_n U_n(i_0,\dots,i_n) + \frac{\overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\dots,i_n)}{2\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n)} r_n^e(i_0,\dots,i_n)\big].
\end{aligned}
$$

جایگذاری جواب بهینه‌ی فوق در رابطه‌ی (۸.۳) نتیجه می‌دهد

$$
v_n(i_0,\dots,i_n;w_n) = a_n(i_0,\dots,i_n)w_n^2 + b_n(i_0,\dots,i_n)w_n + c_n(i_0,\dots,i_n),
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
a_n(i_0,\dots,i_n) &= P_n(i_n) + f_n(i_0,\dots,i_n)\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n), \\
b_n(i_0,\dots,i_n) &= 2dP_n(i_n) + g_n(i_0,\dots,i_n)\overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\dots,i_n), \\
c_n(i_0,\dots,i_n) &= -\frac{(\overline{(Q_{n+1}\bullet b_{n+1})}(i_0,\dots,i_n))^2}{4\overline{(Q_{n+1}\bullet a_{n+1})}(i_0,\dots,i_n)} h_n(i_0,\dots,i_n) + \overline{(Q_{n+1}\bullet c_{n+1})}(i_0,\dots,i_n).
\end{aligned}
$$

توجه کنید که $a_n(i_0,\dots,i_n) > 0$. حال بنابر استقرا، احکام قضیه برقرار هستند. □

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر a_n، b_n و c_n در قضیه‌ی ۳.۳ به‌صورت ضمنی در قالب روابط بازگشتی بیان شده‌اند. نتایج ارائه‌شده در قسمت مفاهیم و نمادهای ماتریسی، فرم صریح جملات عمومی را مشخص می‌کنند. نتیجه زیر احکام قضیه‌ی ۳.۳ را کامل می‌کند.

نتیجه **۴.۳**. فرم صریح برای مقادیر a_n، b_n و c_n در قضیه‌ی ۳.۳ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_n(i_0,\dots,i_n) = P_n(i_n) + f_n(i_0,\dots,i_n)\sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet f_j)\bullet(Q_k\bullet \hat{P}_k)}(i_0,\dots,i_n),$$

$$b_n(i_0,\dots,i_n) = 2dP_n(i_n) + 2dg_n(i_0,\dots,i_n)\sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet g_j)\bullet(Q_k\bullet \hat{P}_k)}(i_0,\dots,i_n),$$

$$c_n(i_0,\dots,i_n) = e_n(i_0,\dots,i_n) + \sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet 1_j)\bullet(Q_k\bullet e_k)}(i_0,\dots,i_n),$$

که در آن $\hat{P}_n(i_0,\dots,i_n) := P_n(i_n)$، $1_n(i_0,\dots,i_n) = 1$، $e_T(i_0,\dots,i_T) = c_T(i_0,\dots,i_T) = 0$ و

$$e_n(i_0,\dots,i_n) = -d^2\frac{\left[\sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet g_j)\bullet(Q_k\bullet \hat{P}_k)}(i_0,\dots,i_n)\right]^2}{\sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet f_j)\bullet(Q_k\bullet \hat{P}_k)}(i_0,\dots,i_n)}h_n(i_0,\dots,i_n)$$

برای $n = 0,1,\dots,T-1$. آنگاه،

$$\begin{aligned}\pi_n^*(i_0,\dots,i_n;w_n) = -V_n(i_0,\dots,i_n)^{-1}\Big[&w_nU_n(i_0,\dots,i_n)\\ &+ d\frac{\sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet g_j)\bullet(Q_k\bullet \hat{P}_k)}(i_0,\dots,i_n)}{\sum_{k=n+1}^{T}\overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet f_j)\bullet(Q_k\bullet \hat{P}_k)}(i_0,\dots,i_n)}r_n^e(i_0,\dots,i_n)\Big].\end{aligned} \tag{۹.۳}$$

اثبات. لم‌های ۱.۳ و ۲.۳ احکام را برای a_n، b_n، e_n و درنهایت c_n نتیجه می‌دهند. درخصوص $a_n(i_0,\dots,i_n)$ کافیست قرار دهیم:

$$\beta_n(i_0,\dots,i_n) = \hat{P}_n(i_0,\dots,i_n),\quad (n = 0,1,\dots,T).$$

درخصوص $b_n(i_0,\dots,i_n)$ کافیست قرار دهیم:

$$\beta_n(i_0,\dots,i_n) = 2d\hat{P}_n(i_0,\dots,i_n),\quad (n = 0,1,\dots,T).$$

در انتها، برای محاسبه‌ی $c_n(i_0,\dots,i_n)$ کافیست قرار دهیم:

$$\beta_n(i_0,\dots,i_n) = 1_n(i_0,\dots,i_n),\quad (n = 0,1,\dots,T-1).$$

□

۴ استراتژی بهینه و مرز موثر

در بخش قبل حل مسئله‌ی کمکی $\tilde{P}(\mu,\lambda)$ را بررسی کردیم. در این بخش به مسئله‌ی اصلی $P(\mu)$ بازگشته و استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه‌ی مرتبط با آن را با استفاده از حل مسئله‌ی کمکی $\tilde{P}(\mu,\lambda)$ و قضیه‌ی دوگانگی لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.

یادآوری می‌کنیم که $v_0(i_0;w_0)$ مقدار بهینه‌ی مسئله‌ی $\tilde{P}(\mu,\lambda)$ تحت شرایط اولیه‌ی $X_0 = i_0$ و $W_0^\pi = w_0$ است. سپس، تحت این شرایط، مقدار بهینه‌ی مسئله‌ی $P(\mu,\lambda)$ برابر با $v_0(i_0;w_0) + d_0$ است. اکنون، طبق نتیجه ۴.۳ داریم:

$$\begin{aligned}v_0(i_0;w_0) + d_0 =& a_0(i_0)w_0^2 + b_0(i_0)w_0 + c_0(i_0) + d_0\\ =& a_0(i_0)w_0^2 + 2db(i_0)w_0 - d^2c(i_0) + d_0\\ =& a_0(i_0)w_0^2 + 2(\lambda-\mu)b(i_0)w_0 - (\lambda-\mu)^2c(i_0) + \mu^2 - 2\lambda\mu,\end{aligned} \tag{۱.۴}$$

که در آن

$$a_۰(i_۰) = P_۰(i_۰) + f_۰(i_۰)\Big[\sum_{k=۱}^{T}\overline{\prod_{j=۱}^{k-۱}}(Q_j \bullet f_j) \bullet (Q_k \bullet \hat{P}_k)(i_۰)\Big],$$

$$b(i_۰) = P_۰(i_۰) + g_۰(i_۰)\Big[\sum_{k=۱}^{T}\overline{\prod_{j=۱}^{k-۱}}(Q_j \bullet g_j) \bullet (Q_k \bullet \hat{P}_k)(i_۰)\Big],$$

$$c(i_۰) = \hat{e}_۰(i_۰) + \sum_{k=۱}^{T-۱}\overline{\prod_{j=۱}^{k-۱}}(Q_j \bullet \mathbf{۱}_j) \bullet (Q_k \bullet \hat{e}_k)(i_۰),$$

و $\hat{e}_n := -(۱/d^۲)e_n$. در اینجا، $c(i_۰)$ را با استفاده از نماد $\hat{e}_n$ و این حقیقت که $e_T(i_۰,\dots,i_T) = \hat{e}_T(i_۰,\dots,i_T) = ۰$ است، بازنویسی کرده‌ایم.

تابع حقیقی مقدار $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ را برحسب متغیر λ به‌صورت $L(\lambda) := v_۰(i_۰; w_۰) + d_۰$ آورده شده در تساوی (۱.۴) تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbb{V}\mathrm{ar}_۰^*(\mu) := \mathbb{V}\mathrm{ar}_۰\big[W_\tau^{\pi^*}\big]$، که در آن π^* جواب بهینه‌ی مسئله‌ی $P(\mu)$ است. طبق قضیه‌ی دوگانگی لاگرانژ (به مرجع [۱۷] مراجعه کنید) داریم:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_۰^*(\mu) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}} L(\lambda).$$

همان‌طور که قبلا اشاره شد، بر اساس فرض ۷، یک $i_T \in \mathbb{S}$ وجود دارد طوری که $P_T(i_T) > ۰$ است. اکنون فرض ۱ تضمین می‌کند که برای هر مسیر $(i_۰,\dots,i_{T-۱})$، $\overline{(Q_T \bullet \hat{P}_T)}(i_۰,\dots,i_{T-۱}) > ۰$. همچنین، از لم ۱.۲ می‌دانیم که $h_{T-۱}(i_۰,\dots,i_{T-۱}) > ۰$. بنابراین،

$$\hat{e}_{T-۱}(i_۰,\dots,i_{T-۱}) = \overline{(Q_T \bullet \hat{P}_T)}(i_۰,\dots,i_{T-۱})h_{T-۱}(i_۰,\dots,i_{T-۱}) > ۰.$$

مجددا، فرض ۱ تضمین می‌کند که

$$\overline{\prod_{j=۱}^{T-۲}}(Q_j \bullet \mathbf{۱}_j) \bullet (Q_{T-۱} \bullet \hat{e}_{T-۱})(i_۰)$$
$$= \sum_{i_۱\in\mathbb{S}} \dots \sum_{i_{T-۱}\in\mathbb{S}} Q_۱(i_۰,i_۱)\dots Q_{T-۱}(i_{T-۲},i_{T-۱})\hat{e}_{T-۱}(i_۰,\dots,i_{T-۱}) > ۰.$$

بنابراین

$$c(i_۰) \geq \overline{\prod_{j=۱}^{T-۲}}(Q_j \bullet \mathbf{۱}_j) \bullet (Q_{T-۱} \bullet \hat{e}_{T-۱})(i_۰) > ۰.$$

این بدان معناست که $L(\lambda)$ یک تابع به‌طور اکید مقعر است و درنتیجه یک نقطه ماکسیمم یکتا در

$$\lambda^* = \frac{b(i_۰)w_۰ - \mu}{c(i_۰)} + \mu$$

دارد. جایگذاری λ^* در رابطه‌ی (۱.۴) نتیجه زیر را به همراه دارد:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}_۰^*(\mu) = L(\lambda^*) = \frac{۱ - c(i_۰)}{c(i_۰)}\Big(\mu - \frac{b(i_۰)w_۰}{۱ - c(i_۰)}\Big)^۲ + \Big(a_۰(i_۰) - \frac{(b(i_۰))^۲}{۱ - c(i_۰)}\Big)w_۰^۲. \qquad (۲.۴)$$

برای به‌دست آوردن استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه‌ی π^* برای مسئله‌ی $P(\mu)$، کافی است مقدار

$$d = \lambda^* - \mu = \frac{b(i_۰)w_۰ - \mu}{c(i_۰)}$$

را در رابطه‌ی (۹.۳) جایگذاری کنیم. به‌وضوح π^* منجر به مینیمم واریانس $\mathbb{V}\mathrm{ar}_۰^*(\mu)$ به‌دست آمده در (۲.۴) می‌شود.

در بهینه‌سازی سبد سرمایه تحت مدل میانگین–واریانس، هدف اصلی یافتن استراتژی‌های بهینه‌ی موثر و درنهایت مرز موثر است. استراتژی π^* موثر است اگر استراتژی دیگری مانند π وجود نداشته باشد طوری که

$$\mathbb{E}_\circ\left[W_\tau^{\pi}\right] \geq \mathbb{E}_\circ\left[W_\tau^{\pi^*}\right] \qquad \text{و} \qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}_\circ\left[W_\tau^{\pi}\right] \leq \mathbb{V}\mathrm{ar}_\circ\left[W_\tau^{\pi^*}\right],$$

که در آن حداقل یکی از نامساوی‌ها به‌صورت اکید برقرار است. به بیان دیگر، استراتژی موثر است اگر استراتژی دیگری با ریسک (بازدهی) کمتر یا مساوی (بیشتر یا مساوی) ولی با بازدهی (ریسک) بیشتر (کمتر) از آن موجود نباشد. به زوج $\left(\mathbb{E}_\circ\left[W_\tau^{\pi^*}\right], \mathbb{V}\mathrm{ar}_\circ\left[W_\tau^{\pi^*}\right]\right)$ یک نقطه موثر در صفحه‌ی میانگین–واریانس گویند. مرز موثر، مکان‌هندسی تمام نقاط موثر به ازای μهای متفاوت است. رابطه‌ی (۲.۴) نشان می‌دهد که نمودار $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\circ^*(\mu)$ به‌صورت یک سهمی نسبت به متغیر μ ظاهر می‌شود. این بدان معناست که متناظر با هر استراتژی بهینه با $\mu < \frac{b(i_\circ)w_\circ}{1-c(i_\circ)}$، یک استراتژی بهینه با همان ریسک ولی بازدهی بیشتر وجود دارد. بنابراین مرز موثر میانگین–واریانس مربوط به مسئله‌ی $P(\mu)$، شاخه سمت راست این سهمی متناظر با $\mu \geq \frac{b(i_\circ)w_\circ}{1-c(i_\circ)}$ است. از آنجا که مرسوم است در رسم مرز موثر جای محورهای میانگین و واریانس را جابجا می‌کنند، در نتیجه در هنگام رسم نمودار، مرز موثر شاخه‌ی بالایی این سهمی به حساب می‌آید. نکته‌ی آخر اینکه، معادله‌ی (۲.۴) نشان می‌دهد کمترین ریسک بهینه‌ی ممکن، موسوم به مینیمم واریانس سرتاسری، حاصل از استراتژی بهینه‌ی متناظر با بازدهی مورد انتظار $\mu = \frac{b(i_\circ)w_\circ}{1-c(i_\circ)}$ است. این μ، مقدار $d = \frac{b(i_\circ)w_\circ}{c(i_\circ)-1}$ را نتیجه می‌دهد.

موارد فوق را در قضیه‌ی اساسی زیر جمع‌بندی می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم $\mu \geq \frac{b(i_\circ)w_\circ}{1-c(i_\circ)}$.

(۱) استراتژی بهینه‌ی موثر متناظر با مسئله‌ی $P(\mu)$ توسط رابطه‌ی (۹.۳) به‌دست می‌آید که در آن

$$d = \frac{b(i_\circ)w_\circ - \mu}{c(i_\circ)}. \tag{۳.۴}$$

(۲) مرز موثر میانگین–واریانس متناظر با مقادیر متفاوت μ در مسئله‌ی $P(\mu)$، توسط رابطه‌ی (۲.۴) به‌دست می‌آید.

(۳) مینیمم واریانس سرتاسری برابر با $\sigma^2_{\min} = \left(a_\circ(i_\circ) - \frac{(b(i_\circ))^2}{1-c(i_\circ)}\right)w_\circ^2$ متناظر با امید بازدهی $\mu_{\min} = \frac{b(i_\circ)w_\circ}{1-c(i_\circ)}$، توسط استراتژی (۹.۳) به‌دست می‌آید که در آن

$$d = \frac{b(i_\circ)w_\circ}{c(i_\circ) - 1}.$$

تذکر: با توجه به وابستگی پارامترهای مدل به سرتاسر مسیر از لحظه‌ی آغازین، یافتن جواب بهینه دچار پیچیدگی محاسباتی خصوصا در ابعاد بالا خواهد بود. از آنجا که با گذر زمان تاثیر گذشته‌های دور بر بازدهی دارائی‌ها کمرنگ می‌شود، در عمل تنها چند دوره‌ی اخیر موثر برای برآورد کردن پارامترها استفاده می‌شود. برای مثال می‌توان به علاقه‌ی سرمایه‌گذاران به استفاده از میانگین متحرک‌های هفتگی یا ده روزه اشاره کرد. از این رو با تقلیل و فشرده‌سازی مسیرها به مسیرهای موثر کوتاه‌تر، می‌توان از پیچیدگی محاسباتی مسئله کاست.

۵ موارد خاص

در این بخش، مدل تغییر رژیم مارکوف و همچنین زمان خروج مستقل را به‌عنوان مورد خاص بررسی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم نتایج به‌دست آمده در برخی پژوهش‌های پیشین، با فرمول‌بندی یکسان و یا مرتبط با مدل حاضر، به‌عنوان موارد خاص از نتایج ما قابل حصول هستند.

۱.۵ تغییر رژیم مارکوف

در این قسمت فرض می‌کنیم بازدهی دارایی‌ها، وابسته به مسیر نه، بلکه وابسته به وضعیت فعلی بازار هستند. فرض کنیم $R_n^k(i_n)$ بازدهی دارایی k–ام در دوره‌ی n تحت وضعیت فعلی $X_n = i_n$ بازار است. در این صورت نمادهای ما به‌صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
R_n(i_n) &:= \big(R_n^{\circ}(i_n), R_n^{۱}(i_n), \dots, R_n^{N}(i_n)\big)',\\
R_n^e(i_n) &:= \big(R_n^{۱}(i_n) - R_n^{\circ}(i_n), \dots, R_n^{N}(i_n) - R_n^{\circ}(i_n)\big)',\\
h_n(i_n) &:= r_n^e(i_n)' V_n(i_n)^{-۱} r_n^e(i_n),\\
g_n(i_n) &:= r_n(i_n) - r_n^e(i_n)' V_n(i_n)^{-۱} U_n(i_n),\\
f_n(i_n) &:= r_n^{۲}(i_n) - U_n(i_n)' V_n(i_n)^{-۱} U_n(i_n),
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
V_n(i_n) &:= \mathbb{E}\big[R_n^e(i_n) R_n^e(i_n)'\big],\\
U_n(i_n) &:= \mathbb{E}\big[R_n^{\circ}(i) R_n^e(i_n)\big],\\
r_n^e(i_n) &:= \mathbb{E}\big[R_n^e(i_n)\big],\ r_n(i_n) := \mathbb{E}\big[R_n^{\circ}(i_n)\big],\ r_n^{۲}(i_n) := \mathbb{E}\big[(R_n^{\circ}(i_n))^{۲}\big].
\end{aligned}
$$

برای ایجاد تمایز با مدل اصلی و همچنین سادگی مقایسه با نتایج سایر پژوهش‌ها، برخی از نمادهای مرسوم را بیان می‌کنیم. فرض کنیم که A و B ماتریس‌های $L \times L$ بعدی و α و $\mathbb{۱} = (۱, \dots, ۱)'$ بردارهای ستونی L–بعدی هستند. ماتریس A_α را به‌عنوان یک ماتریس $L \times L$ تعریف می‌کنیم که در آن $A_\alpha(i,j) = A(i,j)\alpha(j)$. می‌توان مشاهده کرد که $\overline{A} = A\mathbb{۱}$ است. همچنین $\overline{AB} = AB\mathbb{۱} = A\overline{B}$ و $\overline{A_\alpha} = A\alpha$. به‌منظور ساده‌نویسی، برای ماتریس A_n و بردار α_n تعریف می‌کنیم $A_{\alpha_n} := (A_n)_{\alpha_n}$.
پارامترهای لازم برای محاسبه‌ی سبدهای بهینه را می‌توان به کمک لم ۱.۳ و نمادهای اشاره‌شده در بالا به‌دست آورد. برای مثال:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\prod_{j=n+۱}^{T-۱}{}^{\bullet} (Q_j \bullet g_j) \bullet (Q_T \bullet \hat{P}_T)}(i_{\circ}, \dots, i_n)\\
&= \sum_{i_{n+۱} \in \mathbb{S}} \cdots \sum_{i_{T-۱} \in \mathbb{S}} \sum_{i_T \in \mathbb{S}} Q_{n+۱}(i_n, i_{n+۱}) g_{n+۱}(i_{\circ}, \dots, i_{n+۱}) \dots Q_{T-۱}(i_{T-۲}, i_{T-۱}) g_{T-۱}(i_{\circ}, \dots, i_{T-۱})\\
&\quad \times Q_T(i_{T-۱}, i_T) \hat{P}_T(i_{\circ}, \dots, i_T)\\
&= \sum_{i_{n+۱} \in \mathbb{S}} \cdots \sum_{i_{T-۱} \in \mathbb{S}} \sum_{i_T \in \mathbb{S}} Q_{n+۱}(i_n, i_{n+۱}) g_{n+۱}(i_{n+۱}) \dots Q_{T-۱}(i_{T-۲}, i_{T-۱}) g_{T-۱}(i_{T-۱})\\
&\quad \times Q_T(i_{T-۱}, i_T) P_T(i_T)\\
&= \sum_{i_{n+۱} \in \mathbb{S}} \cdots \sum_{i_{T-۱} \in \mathbb{S}} Q_{g_{n+۱}}(i_n, i_{n+۱}) \dots Q_{g_{T-۱}}(i_{T-۲}, i_{T-۱}) \sum_{i_T \in \mathbb{S}} Q_{P_T}(i_{T-۱}, i_T)\\
&= \sum_{i_{n+۱} \in \mathbb{S}} \cdots \sum_{i_{T-۱} \in \mathbb{S}} Q_{g_{n+۱}}(i_n, i_{n+۱}) \dots Q_{g_{T-۱}}(i_{T-۲}, i_{T-۱}) \overline{Q_{P_T}}(i_{T-۱})\\
&= \Big(\big(\prod_{j=n+۱}^{T-۱} Q_{g_j}\big)\overline{Q_{P_T}}\Big)(i_n)\\
&= \overline{\Big(\big(\prod_{j=n+۱}^{T-۱} Q_{g_j}\big) Q_{P_T}\Big)}(i_n),
\end{aligned}
$$

که به‌وضوح به وضعیت فعلی i_n وابسته است. به‌طور مشابه داریم:

$$
\overline{\prod_{j=n+۱}^{T-۱}{}^{\bullet} (Q_j \bullet f_j) \bullet (Q_T \bullet \hat{P}_T)}(i_{\circ}, \dots, i_n) = \overline{\Big(\big(\prod_{j=n+۱}^{T-۱} Q_{f_j}\big) Q_{P_T}\Big)}(i_n).
$$

آنگاه، سبد بهینه در زمان n تحت شرایط $X_n = i_n$ و $W_n^\pi = w_n$ به‌صورت زیر است:

$$
\pi_n^*(i_n; w_n) = -V_n(i_n)^{-۱}\Big[w_n U_n(i_n) + d \frac{\sum_{k=n+۱}^{T} \overline{\big((\prod_{j=n+۱}^{k-۱} Q_{g_j}) Q_{P_k}\big)}(i_n)}{\sum_{k=n+۱}^{T} \overline{\big((\prod_{j=n+۱}^{k-۱} Q_{f_j}) Q_{P_k}\big)}(i_n)} r_n^e(i_n)\Big].
$$

وو و همکاران [۳۰] نسخه‌ی زیر، موسوم به نسخه‌ی توازنی بین بازدهی و ریسک، از مسئله‌ی انتخاب سبد میانگین–واریانس را مورد مطالعه قرار دادند که در آن بازدهی دارایی‌ها و زمان خروج نامشخص، هر دو به وضعیت فعلی بازار وابسته هستند:

$$P(\omega): \begin{cases} \max\limits_{\pi} \mathbb{E}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi}\right] - \omega \mathbb{V}\mathrm{ar}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi}\right] \ (\omega > \circ) \\ \qquad W_{n+1}^{\pi} = W_{n}^{\pi} R_{n}^{\circ}(X_n) + \pi_n' R_n^{e}(X_n), \quad n = \circ, 1, \ldots, T-1. \end{cases}$$

در این فرمول‌بندی، ω پارامتر ریسک‌گریزی است و هرچه سرمایه‌گذار ریسک‌گریزتر باشد مقدار ω افزایش می‌یابد. همانطور که در منبع لی و انگ [۱۵] بیان شده است، $P(\omega)$ یک فرمول‌بندی معادل با $P(\mu)$ برای تولید استراتژی‌های موثر است. به بیان دیگر، مرز موثر متناظر با فرمولبندی $P(\omega)$ تولید شده توسط مقادیر مختلف ω و مرز موثر متناظر با فرمولبندی $P(\mu)$ تولید شده توسط مقادیر مختلف μ یکسان هستند. درواقع، اگر π^* جواب $P(\omega)$ باشد، آنگاه با فرض $\mu = \mathbb{E}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi^*}\right]$، π^* جواب $P(\mu)$ نیز هست. همچنین، در نقطه π^* به‌عنوان جواب بهینه‌ی مسئله‌ی $P(\omega)$ داریم:

$$\frac{\partial \mathbb{V}\mathrm{ar}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi}\right]}{\partial \mathbb{E}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi}\right]}\Big|_{\pi^*} = \frac{1}{\omega}.$$

باتوجه به مطالب فوق، از معادله‌ی (۲.۴) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{2(1 - c(i_\circ))}{c(i_\circ)}\left(\mathbb{E}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi^*}\right] - \frac{b(i_\circ)w_\circ}{1 - c(i_\circ)}\right).$$

پس از محاسبه‌ی $\mathbb{E}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi^*}\right]$ بر حسب ω و جایگذاری $\mu = \mathbb{E}_{\circ}\left[W_{\tau}^{\pi^*}\right]$ در (۳.۴) نتیجه می‌گیریم

$$d = \frac{1 + 2\omega b(i_\circ)w_\circ}{2\omega(c(i_\circ) - 1)}.$$

بنابراین، استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه برای مسئله‌ی $P(\omega)$ را می‌توان با جایگذاری مقدار فوق برای d در معادله‌ی (۹.۳) به‌دست آورد. این همان استراتژی است که توسط وو و همکاران [۳۰] ارائه شده است (قضیه‌ی ۲ و اثبات لم ۷ در این پژوهش را مشاهده کنید).

۲.۵ زمان خروج مستقل

در این قسمت، فرض می‌کنیم که زمان خروج نامشخص τ یک متغیر تصادفی برون‌زا و مستقل از وضعیت بازار با تابع جرم احتمال زیر است:

$$p_n := \mathrm{P}(\tau = n), \qquad n = 1, 2, \ldots, T.$$

برای راحتی، تعریف می‌کنیم $p_\circ := \circ$. این حالت توسط کیخائی [۱۲] مطالعه شده است. در واقع، فرض می‌کنیم که برای هر $n \in \{\circ, 1, \ldots, T\}$ و هر $i_n \in \mathbb{S}$ داریم، $P_n(i_n) = p_n$. سپس برای تمام مسیرهای $(i_\circ, \ldots, i_n)$ داریم، $\hat{P}_n(i_\circ, \ldots, i_n) = p_n$. حال با استفاده از لم ۱.۳ می‌توان پارامترهای مورد نیاز برای محاسبه‌ی سبدهای بهینه را به‌دست آورد. به‌عنوان مثال،

$$\begin{aligned}
&\overline{\prod_{j=n+1}^{T-1}{}^{\bullet}} (Q_j \bullet g_j) \bullet (Q_T \bullet \hat{P}_T)(i_\circ, \ldots, i_n) \\
&= \sum_{i_{n+1} \in \mathbb{S}} \cdots \sum_{i_{T-1} \in \mathbb{S}} \sum_{i_T \in \mathbb{S}} Q_{n+1}(i_n, i_{n+1}) g_{n+1}(i_\circ, \ldots, i_{n+1}) \ldots Q_{T-1}(i_{T-2}, i_{T-1}) g_{T-1}(i_\circ, \ldots, i_{T-1}) \\
&\quad \times Q_T(i_{T-1}, i_T) \hat{P}_T(i_\circ, \ldots, i_T) \\
&= \sum_{i_{n+1} \in \mathbb{S}} \cdots \sum_{i_{T-1} \in \mathbb{S}} \sum_{i_T \in \mathbb{S}} Q_{n+1}(i_n, i_{n+1}) g_{n+1}(i_\circ, \ldots, i_{n+1}) \ldots Q_{T-1}(i_{T-2}, i_{T-1}) g_{T-1}(i_\circ, \ldots, i_{T-1}) \\
&\quad \times p_T Q_T(i_{T-1}, i_T) \mathbb{1}_T(i_\circ, \ldots, i_T) \\
&= p_T \overline{\prod_{j=n+1}^{T-1}{}^{\bullet}} (Q_j \bullet g_j) \bullet (Q_T \bullet \mathbb{1}_T)(i_\circ, \ldots, i_n).
\end{aligned}$$

به‌طور مشابه،

$$\overline{\prod_{j=n+1}^{T-1}(Q_j \bullet f_j) \bullet (Q_T \bullet \hat{P}_T)}(i_0,\ldots,i_n) = p_T \overline{\prod_{j=n+1}^{T-1}(Q_j \bullet f_j) \bullet (Q_T \bullet \mathbf{1}_T)}(i_0,\ldots,i_n).$$

سپس، سبدهای بهینه توسط رابطه‌ی زیر مشخص می‌شوند:

$$\pi_n^*(i_0,\ldots,i_n;w_n) = -V_n(i_0,\ldots,i_n)^{-1}\Big[w_n U_n(i_0,\ldots,i_n) + d\frac{\sum_{k=n+1}^{T} p_k \overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet g_j) \bullet (Q_k \bullet \mathbf{1}_k)}(i_0,\ldots,i_n)}{\sum_{k=n+1}^{T} p_k \overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet f_j) \bullet (Q_k \bullet \mathbf{1}_k)}(i_0,\ldots,i_n)} r_n^e(i_0,\ldots,i_n)\Big].$$

این همان استراتژی بهینه است که توسط کیخائی [۱۲] ارائه شده است (نتیجه‌ی ۵ در این پژوهش را مشاهده کنید).

۶ مثال عددی

در این بخش، یک مثال عددی ارائه می‌دهیم تا مدل و روش یافتن استراتژیی بهینه و مرز موثر را توضیح دهیم. همچنین تاثیر احتمال‌های خروج و ماتریس انتقال را بر روی مرز موثر بررسی می‌کنیم. فرض کنیم که بازار شامل یک دارائی ریسکی و یک دارائی بدون ریسک و دارای دو وضعیت است، یعنی $\mathbb{S} = \{1,2\}$. در اینجا، حالت‌های ۱ و ۲ به ترتیب نمایانگر وضعیت صعودی (گاوی) و نزولی (خرسی) هستند. همچنین برای سادگی، فرض می‌کنیم زنجیر مارکوف زمان همگن با ماتریس احتمال انتقال مستقل از زمان $Q = \begin{pmatrix} ۰/۷ & ۰/۳ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{pmatrix}$ است. طول دوره‌ی سرمایه‌گذاری را برابر با $T = ۳$ در نظر می‌گیریم. پارامترهای بازدهی برای دارائی ریسکی وابسته به مسیر و برای دارائی بدون ریسک وابسته به وضعیت فعلی در نظر گرفته شده‌اند. این مقادیر در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، عملکرد خوب (بد) بازار در گذشته، بازدهی مورد انتظار دارائی ریسکی را برای دوره‌های آینده افزایش (کاهش) می‌دهد. همچنین، به صورت نسبی عملکرد خوب (بد) بازار در گذشته، ریسک بازدهی را کاهش (افزایش) می‌دهد.

جدول ۱: پارامترهای بازدهی برای دارائی ریسکی و دارائی بدون ریسک

n	$(i_0,\ldots,i_n)$	R_n^0	$\mathbb{E}[R_n^1]$	$\mathrm{Var}[R_n^1]$
۰	(۱)	۱/۰۲	۱/۰۵	۰/۰۱
	(۲)	۱/۰۱	۰/۹۳	۰/۰۳
۱	(۱,۱)	۱/۰۲	۱/۰۷	۰/۰۱۲
	(۱,۲)	۱/۰۱	۰/۹۷	۰/۰۲۵
	(۲,۱)	۱/۰۲	۱/۰۳	۰/۰۲
	(۲,۲)	۱/۰۱	۰/۹۱	۰/۰۳۵
۲	(۱,۱,۱)	۱/۰۲	۱/۰۹	۰/۰۱۳
	(۱,۱,۲)	۱/۰۱	۰/۹۸	۰/۰۲۳
	(۱,۲,۱)	۱/۰۲	۱/۰۳۵	۰/۰۱۹
	(۱,۲,۲)	۱/۰۱	۰/۹۳	۰/۰۳۴
	(۲,۱,۱)	۱/۰۲	۱/۰۶	۰/۰۱۴
	(۲,۱,۲)	۱/۰۱	۰/۹۶	۰/۰۲۶
	(۲,۲,۱)	۱/۰۲	۱/۰۲۵	۰/۰۲۵
	(۲,۲,۲)	۱/۰۱	۰/۹	۰/۰۴

فرض کنیم سرمایه‌گذار در زمان $t = ۰$، در وضعیت اولیه‌ی $i_0 = ۱$ با ثروت اولیه‌ی $w_0 = ۱۰۰$ وارد بازار می‌شود. مانند وو و همکاران [۳۰]، برای معرفی احتمال‌های خروج وابسته به وضعیت از جواب‌های دستگاه معادلات خطی زیر استفاده می‌کنیم. این دستگاه بر اساس شرط‌کردن بر روی وضعیت در لحظه‌ی خروج، برای زمان‌های مختلف از نگاه اولیه‌ی i_0 و خواص زنجیر مارکوف به‌صورت

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= 0, \\ Q^n(i_0,1)P_n(1) + Q^n(i_0,2)P_n(2) &= \tilde{P}_n, \quad n = 1,2,3, \end{aligned} \tag{۱.۶}$$

نوشته می‌شود. در دستگاه فوق، $\tilde{P}_n := \Pr(\tau = n|X_\circ = i_\circ)$ مقداری معلوم و Q^n توان n–ام ماتریس انتقال Q است. برای مثال فرض می‌کنیم $(\tilde{P}_\circ, \tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, \tilde{P}_۳) = (\circ, \circ/۳, \circ/۳, \circ/۴)$. این مقادیر احتمال به وضوح شرط $\sum_{n=\circ}^{۳} \Pr(\tau = n|X_\circ = i_\circ) = ۱$ را برآورده می‌سازند. این دستگاه معادلات تحت شرط $\circ \leq P_n(i_n) \leq ۱$ دارای چندین جواب است. از مقادیر زیر، به‌ازای mهای مختلف، به‌عنوان احتمال‌های خروج در وضعیت ۱ جهت تحلیل مرز موثر استفاده می‌کنیم:

$$P_n(۱) = \frac{m\tilde{P}_n}{Q^n(i_\circ, ۱)}, \quad m = \circ/۱, \circ/۳, \circ/۵, \circ/۷, \circ/۹, \quad n = ۱, ۲, ۳.$$

جدول ۲: مقادیر $P_n(i_n)$

	$i_n = ۱$	$i_n = ۲$
$n = ۱$	۰/۰۴۲۹	۰/۹
$n = ۲$	۰/۰۴۶۹	۰/۷۵
$n = ۳$	۰/۰۶۳۷	۰/۹۶۷۷

برای به‌دست آوردن سبدهای بهینه و مرز موثر، برای نمونه، از احتمال‌های خروج متناظر با $m = \circ/۱$ استفاده می‌کنیم که در جدول ۲ نمایش داده شده‌اند. به‌صورت منطقی، احتمال‌های خروج در وضعیت مطلوب بازار مقادیری کوچک در نظر گرفته شده‌اند. در ادامه پارامترهای مورد نیاز را به‌شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$U_\circ(۱) = \begin{pmatrix} \circ/۰۳۰۶ \end{pmatrix}, \quad V_\circ(۱) = \begin{pmatrix} \circ/۰۱۰۹ \end{pmatrix}, \quad r^e_\circ(۱) = \begin{pmatrix} \circ/۰۳ \end{pmatrix},$$

$$U_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} \circ/۰۵۱ & -\circ/۰۴۰۴ \end{pmatrix}, \quad V_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} \circ/۰۱۴۵ & \circ/۰۲۶۶ \end{pmatrix},$$

$$r^e_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} \circ/۰۵ & -\circ/۰۴ \end{pmatrix},$$

$$U_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} \circ/۰۷۱۴ & -\circ/۰۳۰۳ \\ \circ/۰۱۵۳ & -\circ/۰۸۰۸ \end{pmatrix}, \quad V_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} \circ/۰۱۷۹ & \circ/۰۲۳۹ \\ \circ/۰۱۹۲ & \circ/۰۴۰۴ \end{pmatrix},$$

$$r^e_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} \circ/۰۷ & -\circ/۰۳ \\ \circ/۰۱۵ & -\circ/۰۸ \end{pmatrix},$$

$$h_\circ(۱) = \begin{pmatrix} \circ/۰۸۲۶ \end{pmatrix}, \quad g_\circ(۱) = \begin{pmatrix} \circ/۹۳۵۸ \end{pmatrix}, \quad f_\circ(۱) = \begin{pmatrix} \circ/۹۵۴۵ \end{pmatrix},$$

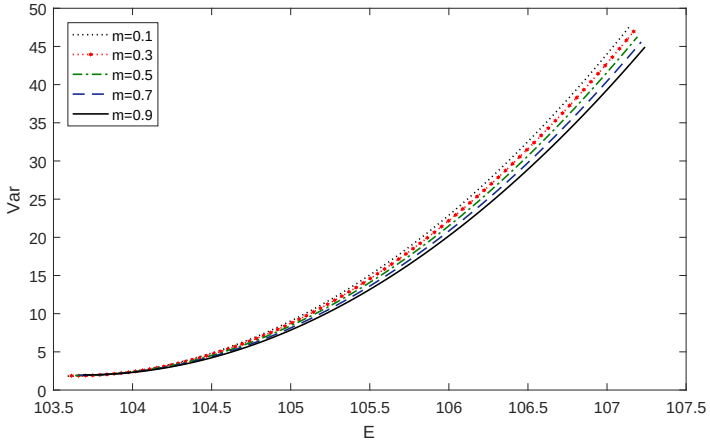
$$h_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} \circ/۱۷۲۴ & \circ/۰۶۰۲ \end{pmatrix}, \quad g_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} \circ/۸۴۴۱ & \circ/۹۴۹۲ \end{pmatrix},$$

$$f_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} \circ/۸۶۱ & \circ/۹۵۸۷ \end{pmatrix},$$

$$h_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} \circ/۲۷۳۷ & \circ/۰۳۷۷ \\ \circ/۰۱۱۷ & \circ/۱۵۸۴ \end{pmatrix}, \quad g_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} \circ/۷۴۰۸ & \circ/۹۷۲ \\ ۱/۰۰۸۱ & \circ/۸۵ \end{pmatrix},$$

$$f_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} \circ/۷۵۵۶ & \circ/۹۸۱۷ \\ ۱/۰۲۸۲ & \circ/۸۵۸۵ \end{pmatrix}.$$

شکل ۳: مرزهای موثر میانگین–واریانس



برای سادگی در نوشتار، از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\hat{g}_n(i_\circ,\dots,i_n) := \sum_{k=n+1}^{T} \overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet g_j) \bullet (Q_k \bullet \hat{P}_k)}(i_\circ,\dots,i_n),$$

$$\hat{f}_n(i_\circ,\dots,i_n) := \sum_{k=n+1}^{T} \overline{\prod_{j=n+1}^{k-1}(Q_j \bullet f_j) \bullet (Q_k \bullet \hat{P}_k)}(i_\circ,\dots,i_n).$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\hat{g}_\circ(۱) = \begin{pmatrix} ۰/۸۶۷۸ \end{pmatrix},\quad \hat{f}_\circ(۱) = \begin{pmatrix} ۰/۸۸۱۵ \end{pmatrix},$$

$$\hat{g}_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} ۰/۵۸۱۹ & ۰/۷۸۶۴ \end{pmatrix},\quad \hat{f}_۱(۱,:) = \begin{pmatrix} ۰/۵۸۶۸ & ۰/۷۹۲ \end{pmatrix},$$

$$\hat{g}_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} ۰/۳۳۴۹ & ۰/۵۱۵۷ \\ ۰/۳۳۴۹ & ۰/۵۱۵۷ \end{pmatrix},\quad \hat{f}_۲(۱,:,:) = \begin{pmatrix} ۰/۳۳۴۹ & ۰/۵۱۵۷ \\ ۰/۳۳۴۹ & ۰/۵۱۵۷ \end{pmatrix}.$$

اکنون، با استفاده از مقادیر فوق و مقدار مناسب d متناظر با بازدهی مطلوب μ در رابطه‌ی (۳.۴)، می‌توان استراتژی بهینه‌ی مسئله‌ی $P(\mu)$ را از طریق رابطه‌ی (۹.۳) محاسبه کرد. همچنین، مرز موثر نمایش‌داده‌شده در شکل ۳ از طریق معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید:

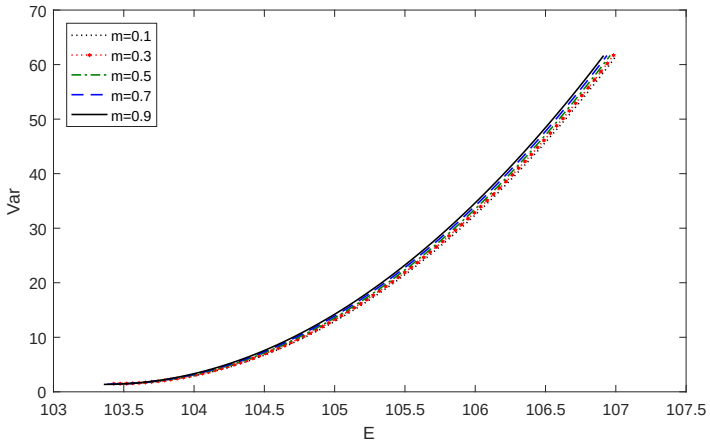
$$\mathbb{V}\mathrm{ar}^*_\circ(\mu) = \frac{۱-c(۱)}{c(۱)}\Big(\mu - \frac{b(۱)۱۰۰}{۱-c(۱)}\Big)^۲ + \Big(a_\circ(۱) - \frac{(b(۱))^۲}{۱-c(۱)}\Big)۱۰۰^۲$$

که در آن، $a_\circ(۱) = ۰/۸۴۱۴$، $b(۱) = ۰/۸۱۲$ و $c(۱) = ۰/۲۱۶۱$.

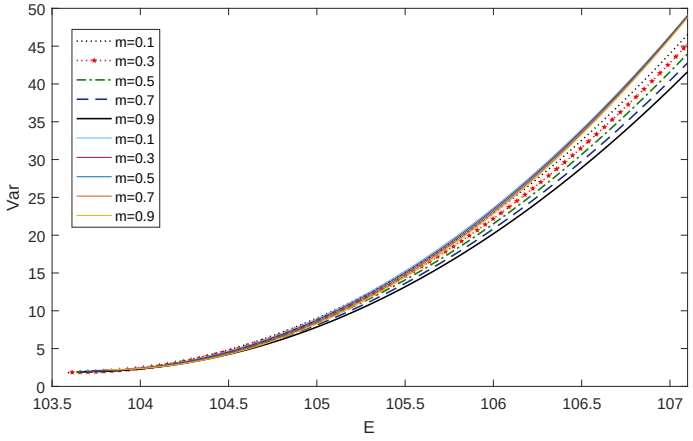
همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، برای تحلیل تاثیر زمان خروج بر روی مرز موثر از جواب‌های دستگاه (۱.۶) استفاده می‌کنیم. برای شهود بهتر در خصوص نتایج، در نمایش مرز موثر، محور افقی به‌عنوان بازدهی مورد انتظار و محور عمودی به‌عنوان واریانس ثروت نهایی در نظر گرفته شده‌اند. مرزهای موثر متناظر با احتمال‌های خروج متفاوت در شکل ۳ نمایش داده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با کاهش احتمال خروج و ترک بازار در وضعیت مطلوب مرزهای موثر به سمت بالا کشیده می‌شوند. در واقع وضعیت ۱ از این لحاظ که، با توجه به مسیرهای منتهی به آن، بازدهی بالایی دارد و هم از این لحاظ که، با توجه به ماتریس انتقال، تمایل کمتری برای انتقال به وضعیت نزولی دارد، بسیار مطلوب است. بنابراین عدم تمایل به ترک بازار در این وضعیت، بازدهی را افزایش می‌دهد. از آنجا که در شرایط مثبت، افزایش (کاهش) بازدهی معادل با افزایش (کاهش) ریسک است، رفتار مشاهده شده کاملا منطقی به نظر می‌رسد.

برای مشاهده تاثیر احتمال‌های انتقال زنجیر مارکوف بر روی مرز موثر، ماتریس انتقال را به‌صورت $Q = \begin{pmatrix} ۰/۳ & ۰/۷ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم. همان‌گونه که مشاهده می‌شود تحت این ماتریس انتقال جدید، تمایل بازار، تغییر وضعیت به سمت وضعیت نزولی است. در این

شکل ۴: مرزهای موثر میانگین–واریانس



شکل ۵: مرزهای موثر میانگین–واریانس



حالت، مرزهای موثر متناظر با احتمال‌های خروج متفاوت در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند. برخلاف حالت قبل، این‌بار با کاهش احتمال خروج در وضعیت ۱ مرزهای موثر به سمت پایین کشیده می‌شوند. در واقع از آنجا که تمایل بازار به سمت وضعیت نزولی است، با اصرار بیشتر بر ماندن در بازار، بازدهی کاهش می‌یابد. به‌صورت معادل این به معنی کاهش ریسک است.

یادآور می‌شود که نتایج بالا در تحلیل انجام شده توسط وو و همکاران [۳۰] نیز مشاهده شده است، با این تفاوت که در مدل آنها بازدهی‌ها وابسته به وضعیت و در مدل ما بازدهی‌ها وابسته به مسیر فرض می‌شوند.

در نهایت، نتایج حاصل از مدل غیر مارکوفی و مدل مارکوفی را بررسی می‌کنیم. در واقع تاثیر وابستگی بازدهی دارائی‌ها به مسیر در مقایسه با وابستگی به تک وضعیت فعلی را از طریق مقایسه‌ی ریسک بهینه یا همان مرز موثر، بررسی می‌کنیم. پارامترهای متناظر با مدل مارکوفی را از بخش اول جدول ۱ اتخاذ می‌کنیم. نتایج در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند. هر پنج مرز موثر در بخش پایینی شکل ۵، دقیقا همان پنج مرز موثر در شکل ۳ یعنی متناظر با مدل غیر مارکوفی هستند. پنج مرز موثر بالائی که با فاصله بسیار کم و تقریبا منطبق بر هم به‌چشم می‌خورند متناظر با مدل مارکوفی هستند. دو نکته به‌وضوح در شکل ۵ مشاهده می‌شود. اول اینکه، مدل غیر مارکوفی حساسیت بیشتری به تغییرات در ساختار زمان خروج نشان می‌دهد. دوم و مهم‌تر اینکه، مرزهای موثر متناظر با مدل غیر مارکوفی پایین‌تر از مرزهای متناظر با مدل مارکوفی قرار می‌گیرند. این بدان معنی است که مدل غیر مارکوفی ریسک بهینه را کاهش می‌دهد. به بیان دیگر مدل غیر مارکوفی با وجود پیچیدگی محاسباتی بیشتر، کارائی را افزایش می‌دهد.

۷ نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه‌ی میانگین–واریانس در یک بازار تغییر رژیم غیرمارکوفی با افق زمانی نامعین پرداخته شد. مدل ارائه‌شده، با درنظرگیری وابستگی بازده دارایی‌ها به مسیر کامل تاریخچه‌ی بازار، محدودیت مدل‌های کلاسیک مارکوفی را

مرتفع ساخته است. همچنین، با معرفی یک زمان خروج درون‌زا که هم به شرایط بازار و هم به عوامل تصادفی خارجی وابسته است، واقع‌بینانه‌تر بودن مدل را افزایش داده‌ایم. مسئله در چارچوب یک مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی تصادفی فرمول‌بندی و با به‌کارگیری روش برنامه‌ریزی پویا حل شد. در این راستا، یک معادله‌ی بلمن توسعه‌یافته مبتنی بر مسیر استخراج گردید که منجر به دستیابی به یک استراتژی بهینه‌ی وابسته به مسیر شد. این استراتژی، تعمیم طبیعی نتایج موجود در ادبیات موضوع محسوب می‌شود. نتایج کمی به وضوح نشان می‌دهند که هم استراتژی بهینه و هم مرز مؤثر میانگین–واریانس تحت تأثیر الگوهای متفاوت احتمالات خروج و احتمالات انتقال بین رژیم‌های بازار قرار می‌گیرند. این مشاهدات، اهمیت درنظرگیری همزمان حافظه‌ی تاریخی بازار و عدم قطعیت در افق سرمایه‌گذاری را در طراحی راهبردهای مدیریت سبد برجسته می‌سازد.

به عنوان جهت‌گیری برای پژوهش‌های آتی، می‌توان به گنجاندن هزینه‌های معاملاتی، درنظرگیری قیود مختلف بر سرمایه‌گذاری مانند قید عدم استقراض و تعمیم مدل زمان خروج به حالت‌هایی مانند زمان توقف اشاره نمود.

فهرست منابع

[1] Blanchet-Scalliet, C., El Karoui, N., Jeanblanc, M. and Martellini, L., 2008. Optimal investment decisions when time-horizon is uncertain. *J. Math. Econ.*, 44(11), pp.1100-1113. doi: 10.1016/j.jmateco.2007.09.004

[2] Bian, L. and Zhang, L., 2025. Equilibrium multi-period investment strategy for a DC pension plan with incomplete information: Hidden Markov model. *Commun. Stat. - Theory Methods*, 54(6), pp.1702-1728. doi: 10.1080/03610926.2024.2349688

[3] Cakmak, U. and Ozekici, S., 2006. Portfolio optimization in stochastic markets. *Math. Meth. Oper. Res.*, 63, pp.151-168. doi: 10.1007/s00186-005-0020-x

[4] Chen, T., Liu, R. and Wu, Z., 2023. Continuous-time mean-variance portfolio selection under non-Markovian regime-switching model with random horizon. *J. Syst. Sci. Complex.*, 36, pp.457-479. doi: 10.1007/s11424-023-1272-3

[5] Chen, P. and Yang, H., 2011. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: A multi-period model. *Appl. Math. Finance*, 18(1), pp.29-50. doi: 10.1080/13504861003703633

[6] Ching, W.K., Siu, T.K. and Li, L.M., 2007. Pricing exotic options under a high-order Markovian regime switching model. *J. Appl. Math. Decis. Sci.*, Article ID 18014, pp.1-15. doi: 10.1155/2007/18014

[7] Costa, O.L.V. and Nabholz, R.B., 2007. Multiperiod mean-variance optimization with intertemporal restrictions. *J. Optim. Theory App.*, 134(2), pp.257-274. doi: 10.1007/s10957-007-9233-x

[8] Cui, X., Gao, J., Li, X. and Li, D., 2014. Optimal multi-period mean-variance policy under no-shorting constraint. *Eur. J. Oper. Res.*, 234(2), pp.459-468. doi: 10.1016/j.ejor.2013.02.040

[9] Dokuchaev, N., 2007. Discrete time market with serial correlations and optimal myopic strategies. *Eur. J. Oper. Res.*, 177(2), pp.1090-1104. doi: 10.1016/j.ejor.2006.01.004

[10] Ge, H., Li, X., Li, X. and Li, Z., 2023. Equilibrium strategy for a multi-period weighted mean-variance portfolio selection in a Markov regime-switching market with uncertain time-horizon and a stochastic cash flow. *Commun. Stat. - Theory Methods*, 52(6), pp.1797-1832. doi: 10.1080/03610926.2021.1939379

[11] Karatzas, I. and Wang, H., 2000. Utility maximization with discretionary stopping. *SIAM J. Control Optim.*, 39(1), pp.306-329. doi: 10.1137/S0363012998346323

[12] Keykhaei, R., 2025. Optimal mean-variance portfolio selection with uncertain time horizon in a regime-switching market when asset returns are market path-dependent. *Int. J. Math. Oper. Res.*, 30(3), pp.392-414. doi: 10.1504/IJMOR.2025.145756

[13] Landriault, D., Li, B., Li, D. and Young, V.R., 2018. Equilibrium strategies for the mean-variance investment problem over a random horizon. *SIAM J. Financial Math.*, 9(3), pp.1046-1073 doi: 10.1137/17M1153479

[14] Leippold, M., Trojani, F. and Vanini, P., 2004. A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities. *J. Econ. Dyn. Control*, 28(6), pp.1079-1113. doi: 10.1016/S0165-1889(03)00067-8

[15] Li, D. and Ng, W.L., 2000. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation. *Math. Finance*, 10(3), pp.387-406. doi: 10.1111/1467-9965.00100

[16] Liu, J., Yiu, K.F.C., Li, X., Siu, T.K. and Teo, K.L., 2023. Mean-variance portfolio selection with random investment horizon. *J. Ind. Manag. Optim.*, 19(7), pp.4726-4739. doi:10.3934/jimo.2022147

[17] Luenberger, D.G., 1997. *Optimization by vector space methods*. John Wiley & Sons.

[18] Lv, S., Wu, Z. and Yu, Z., 2016. Continuous-time mean-variance portfolio selection with random horizon in an incomplete market. *Automatica*, 69, pp.176-180. doi: 10.1016/j.automatica.2016.02.017

[19] Markowitz, H., 1952. Portfolio selection. *J. Finance*, 7(1), pp.77-91. doi: 10.2307/2975974

[20] Peng, X. and Chen, F., 2021. Mean-variance asset-liability management with partial information and uncertain time horizon. *Optimization*, 70(7), pp.1609-1636. doi: 10.1080/02331934.2020.1745795

[21] Shen, Y., Wei, J. and Zhao, Q., 2020. Mean-variance asset-liability management problem under non-Markovian regime-switching mode. *Appl. Math. Optim.*, 81, pp.859-897. doi: 10.1007/s00245-018-9523-8

[22] Siu, T.K., Ching, W.K., Fung, E.S. and Ng, M.K., 2005. Extracting information from spot interest rates and credit ratings using double higher-order hidden Markov models. *Comput. Econ.*, 26(3), pp.69-102. doi: 10.1007/s10614-005-9010-6

[23] Siu, T.K., Ching, W.K., Fung, E., Ng, M., Li, X., 2009. A high-order Markov-switching model for risk measurement. *Comput. Math. Appl.*, 58(1), pp.1-10. doi: 10.1016/j.camwa.2008.10.099

[24] Sun, Z., 2021. Mean-Variance Asset-Liability Management in a Non-Markovian Regime-Switching Jump-Diffusion Market with Random Horizon. *Appl. Math. Optim.*, 84, pp.319-353. doi: 10.1007/s00245-021-09770-y

[25] Wang, T., Jin, Z. and Wei, J., 2019. Mean-variance portfolio selection under a non-Markovian regime-switching model: Time-consistent solutions. *SIAM J. Control Optim.*, 57, pp.3249-3271. doi: 10.1137/18M1186423

[26] Wang, T. and Wei, J. 2019. Mean-variance portfolio selection under a non-Markovian regime-switching model. *J. Comput. Appl. Math.*, 350, pp.442-455. doi: 10.1016/j.cam.2018.10.040

[27] Wu, H. and Zeng, Y., 2013. Multi-period mean-variance portfolio selection in a regime-switching market with a bankruptcy state. *Optim. Control Appl. Methods*, 34(4), pp.415-432. doi: 10.1002/oca.2027

[28] Wu, H. and Chen, H., 2015. Nash equilibrium strategy for a multi-period mean-variance portfolio selection problem with regime switching. *Econ. Model.*, 46, pp.79-90. doi: 10.1016/j.econmod.2014.12.024

[29] Wu, H. and Li, Z., 2011. Multi-period mean-variance portfolio selection with Markov regime switching and uncertain time-horizon. *J. Syst. Sci. Complex.*, 24(1), pp.140-155. doi: 0.1007/s11424-011-9184-z

[30] Wu, H., Zeng, Y. and Yao, H., 2014. Multi-period Markowitz's mean-variance portfolio selection with state-dependent exit probability. *Econ. Model.*, 36, pp.69-78. doi: 10.1016/j.econmod.2013.09.005

[31] Xi, X., Mamon, R., 2011. Parameter estimation of an asset price model driven by a weak hidden Markov chain. *Econ. Model.*, 28(1-2), pp.36-46. doi: 10.1016/j.econmod.2010.10.002

[32] Yao, H., Li, D., Wu, H., 2022. Dynamic trading with uncertain exit time and transaction costs in a general Markov market. *Int. Rev. Financ. Anal.*, 84, pp.102371. doi: 10.1016/j.irfa.2022.102371

[33] Yi, L., 2017. Multi-Period Portfolio Selection with Stochastic Investment Horizon. *Optimization and Control for Systems in the Big-Data Era: Theory and Applications*, pp.217-241. doi: 10.1007/978-3-319-53518-0_12

[34] Yi, L., Li, Z.F. and Li, D., 2008. Multi-period portfolio selection for asset-liability management with uncertain investment horizon. *J. Ind. Manag. Optim.*, 4(3), pp.535-552. doi: 10.3934/jimo.2008.4.535

[35] Yu, Z., 2013. Continuous-time mean-variance portfolio selection with random horizon. *Appl. Math. Optim.*, 68(3), pp.333-359. doi: 10.1007/s00245-013-9209-1

[36] Zhu, S.S., Li, D. and Wang, S.Y., 2004. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 49(3), pp.447-457. doi: 10.1109/TAC.2004.824474

[37] Zhu, D.M., Lu, J., Ching, W.K. and Siu, T.K., 2017. Discrete-time optimal asset allocation under higher-order hidden Markov model. *Econ. Model.*, 66, pp.223-232. doi: 10.1016/j.econmod.2017.07.006

Optimal Strategy for Multi-Period Mean-Variance Portfolio Selection in a Non-Markovian Regime-Switching Market with Uncertain Investment Time Horizon

Reza Keykhaei [2]

Department of Mathematics, Khansar Campus, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Communicated by: . . . . . .

Received: . . . Accepted: . . .

Abstract: Classical Markovian regime-switching models for portfolio selection are fundamentally based on the assumption that asset returns depend solely on the current market state. A significant limitation of these models is their disregard for the historical memory and past states of the market, which substantially influence asset returns and investor decisions. To address this limitation and better align with market realities, non-Markovian regime-switching models incorporate the entire path of past market states into their framework. This paper studies the multi-period mean-variance portfolio optimization problem within a non-Markovian regime-switching market featuring an uncertain investment time horizon. A key assumption is that an investor's decision to remain in or exit the market depends simultaneously on the prevailing market state and exogenous factors. The problem is formulated as a stochastic optimal control problem, and an analytical optimal solution is derived using dynamic programming.

Keywords: Portfolio, Mean-variance model, Non-Markovian regime-switching, Dynamic programming, Uncertain exit-time.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (Reza Keykhaei) r.keykhaei@khc.ui.ac.ir