مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۳، ص ۴۳–۵۳

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.51710.2466

برخی نتایج در باره نگاشت‌های حافظ زیرفضای طیف موضعی

الهه محمدحسین پور[۱] و روح الله پروینیان زاده[۱] [۱]

[۱] گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج ، ایران

دبیر مسئول: علی رضایی علی آباد

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۳۱

چکیده: فرض کنیم $B(X)$ جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای باناخ مختلط X با بعد نامتناهی باشد و برای هر عملگر $T \in B(X)$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{C}$، $X_T(\{\lambda\})$ بیانگر زیرفضای طیف موضعی عملگر T متناظر با $\{\lambda\}$ باشد. در این مقاله، نشان می‌دهیم اگر φ_1 و φ_2 دو نگاشت از $B(X)$ به‌روی $B(X)$ باشند که برای هر $T, S \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ در رابطه

$$X_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) = X_{TS}(\{\lambda\})$$

صدق کنند، آنگاه نگاشت خطی دوسویی $P : X \to X$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $T \in B(X)$ تساوی‌های $\varphi_1(T) = TP^{-1}$ و $\varphi_2(T) = PT$ برقرارند. همچنین، به برخی نتایج جالب در این راستا می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: زیرفضای طیف موضعی، طیف موضعی، عملگرهای رتبه یک، عملگرهای رتبه متناهی، مسائل نگهدارنده غیرخطی.

رده‌بندی ریاضی: 47A11; 47A15; 47B48

۱ مقدمه

در سراسر این مقاله، X و Y نمایشگر فضاهای باناخ مختلط با ابعاد نامتناهی هستند و $B(X, Y)$ جبر همه نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y می باشد. هنگامی که $X = Y$، برای سادگی $B(X)$ را به‌جای $B(X, X)$ می‌نویسیم و I عملگر همانی است. فرض کنیم برای $x \in X$، $B_x(X)$ مجموعه همه عملگرها در $B(X)$ باشد که در x صفر می‌شوند. مسائل نگهدارنده خطی در حالت کلی به مطالعه دقیق ویژگی‌ها و رفتار نگاشت‌های خطی بین جبرها می‌پردازد که یک خاصیت معین همچون یک رابطه مهم بین عناصر یا حتی یک زیرمجموعه پایا را حفظ می‌نمایند. این موضوع پیشینه‌ای بیش از یک قرن دارد. اولین مسئله نگهدارنده خطی توسط فروبنیوس [۱۱] مطرح شد و ایشان نگاشت‌های خطی روی جبر ماتریس‌ها را بررسی کردند که دترمینان ماتریس‌ها را حفظ کنند. برای عملگر $T \in B(X)$،

[۱] نویسنده مسئول مقاله
(E.M. Hossienpour) e.mohammadhossienpour@stu.yu.ac.ir, (R. Parvinianzadeh) r.parvinian@yu.ac.ir

مجموعه حلال موضعی T در نقطه $x \in X$ را با $\rho_T(x)$ نشان می‌دهیم که برابر است با مجموعه همه $\lambda \in \mathbb{C}$ که همسایگی U از λ و تابع تحلیلی $f : U \to X$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $\mu \in U$ داشته باشیم $(\mu I - T)f(\mu) = x$. متمم مجموعه حلال موضعی را طیف موضعی عملگر T در نقطه $x \in X$ می‌نامیم و آن را با نماد $\sigma_T(x)$ نشان می‌دهیم، این مجموعه به وضوح یک زیرمجموعه بسته (که ممکن است تهی باشد) از طیف $\sigma(T)$ است. عملگر $T \in B(X)$ دارای خاصیت توسیع تک مقداری است هرگاه برای هر زیرمجموعه باز U از $\mathbb{C}$، تنها تابع تحلیلی $f : U \to X$ که برای هر $\mu \in U$ در تساوی $(\mu I - T)f(\mu) = 0$ صدق کند، تابع صفر است. برای مثال، هر عملگر $T \in B(X)$ که درون طیف نقطه ای آن تهی باشد، دارای خاصیت توسیع تک‌مقداری است. مفهوم خاصیت توسیع تک‌مقداری برای نخستین‌بار توسط فینیچ [۱۰] مطرح شد.

برای هر زیرمجموعه F از مجموعه اعداد مختلط، زیرفضای طیف موضعی F را با نماد $X_T(F)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$X_T(F) = \{x \in X : \sigma_T(x) \subseteq F\}$$

تعریف می‌شود. به‌وضوح اگر $F_1 \subseteq F_2$ آن‌گاه $X_T(F_1) \subseteq X_T(F_2)$. برای اطلاعات بیشتر به منابع [۱، ۱۳] مراجعه شود.

مطالعه مسائل نگهدارنده خطی و غیرخطی طیف موضعی توجه پژوهشگران زیادی را به خود جلب کرده است. بورهیم و رنسفورد نخستین پژوهشگرانی بودند که به این نوع مسائل نگهدارنده پرداختند، آنان در [۷] به توصیف کامل نگاشت‌های جمعی روی جبر همه عملگرهای خطی کراندار روی یک فضای باناخ مختلط X پرداختند که طیف موضعی عملگرها را در هر بردار X حفظ می‌کنند. نتایج به‌دست‌آمده توسط آنان مبنای توسعه تحقیقات بعدی در این حوزه قرار گرفت و چارچوبی منسجم برای مطالعه و توصیف نگاشت‌هایی بر روی ماتریس‌ها یا جبر عملگرها فراهم آورد که طیف موضعی را حفظ می‌کنند، برای نمونه می‌توان به بخش پایانی مقاله مروری [۵] و منابع ذکرشده در آن مراجعه کرد. با الهام از نتایج مسائل نظریه نگهدارنده خطی که توسط جعفریان و سورور [۱۲] اثبات شده است، دولینار و همکارانش [۸] به توصیف دقیق ساختار نگاشت‌هایی پرداختند که مشبکه[۲] مجموع عملگرها را حفظ می‌کنند. آنان نشان دادند، نگاشت‌های $\varphi : B(X) \to B(X)$ در شرط $\mathrm{Lat}(\varphi(T) + \varphi(S)) = \mathrm{Lat}(T + S)$ برای هر $T, S \in B(X)$، صدق می‌کنند اگر و تنها اگر عدد ثابت ناصفر α و نگاشت $\phi : B(X) \to \mathbb{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\varphi(T) = \alpha T + \phi(T)I$ برای هر $T \in B(X)$، در اینجا $\mathbb{F}$ میدان مختلط $\mathbb{C}$ یا میدان حقیقی $\mathbb{R}$ است و $\mathrm{Lat}(T)$ مشبکه عملگر T (یعنی مجموعه همه زیرفضاهای پایا تحت T) را نشان می‌دهد. همچنین در همان مقاله نشان دادند نگاشت‌های $\varphi : B(X) \to B(X)$ در روابط $\mathrm{Lat}(\varphi(T)\varphi(S)) = \mathrm{Lat}(TS)$، $\mathrm{Lat}(\varphi(T)\varphi(S)\varphi(T)) = \mathrm{Lat}(TST)$ و $\mathrm{Lat}(\varphi(T)\varphi(S) + \varphi(S)\varphi(T)) = \mathrm{Lat}(TS + ST)$ برای هر $T, S \in B(X)$ صدق می‌کنند اگر و فقط اگر نگاشت $\phi : B(X) \to \mathbb{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $T \neq 0$، $\varphi(T) \neq 0$ و برای هر $T \in B(X)$ تساوی $\varphi(T) = \phi(T)T$ برقرار باشد. می‌دانیم که $X_T(F)$، زیرفضای طیفی موضعی T متناظر با $F \subseteq \mathbb{C}$، عنصری از $\mathrm{Lat}(T)$ است. بنابراین می‌توان نگاشت‌هایی که حافظ مشبکه‌اند را با نگاشت‌هایی که زیرفضای طیفی موضعی را حفظ کنند، جایگزین کرد. نویسندگان در [۹] به بررسی نگاشت‌های جمعی روی $B(X)$ پرداختند که زیرفضای طیف موضعی عملگرهای متناظر با هر مجموعه تک‌عضوی را حفظ می‌کنند. به‌طور دقیق‌تر، آن‌ها نشان دادند که تنها نگاشت جمعی φ روی $B(X)$ که در رابطه $X_{\varphi(T)}(\{\lambda\}) = X_T(\{\lambda\})$ برای هر $T \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ صدق کند، نگاشت همانی است. بن بوزیان و همکاران در [۳] به توصیف دقیق فرم نگاشت‌های پوشا و به‌طور ضعیف پیوسته φ از $B(X)$ بروی $B(X)$ پرداختند که در شرط

$$X_{\varphi(T)-\varphi(S)}(\{\lambda\}) = X_{T-S}(\{\lambda\})$$

برای هر $T, S \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ صدق کنند. سپس در [۲]، نویسندگان به مطالعه نگاشت‌های پوشایی پرداختند که زیرفضای طیفی موضعی مجموع دو عملگر، متناظر با مجموعه های تک‌عضوی را حفظ می‌کنند. به بیان دیگر آن‌ها به توصیف دقیق نگاشت‌های پوشا φ روی $B(X)$ پرداختند که در شرط

$$X_{\varphi(T)+\varphi(S)}(\{\lambda\}) = X_{T+S}(\{\lambda\})$$

برای $T, S \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ صدق کنند. آن‌ها همچنین به توصیف نگاشت‌هایی روی $B(X)$ پرداختند که زیرفضای طیف موضعی تفاضل دو عملگر متناظر با مجموعه‌های تک‌عضوی را حفظ کنند. علاوه بر این، نگاشت‌هایی که زیرفضای طیف موضعی ضرب دو عملگر و ضرب سه عملگر را حفظ کنند نیز مورد بررسی قرار گرفت. در واقع، آن‌ها نگاشت‌های پوشای φ روی $B(X)$ را توصیف کردند که در شرط

$$X_{\varphi(T)\varphi(S)}(\{\lambda\}) = X_{TS}(\{\lambda\})$$

برای $T, S \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ صدق می‌کنند. همچنین نگاشت‌های پوشا φ روی $B(X)$ را که برای آن‌ها شرط

$$X_{\varphi(T)\varphi(S)\varphi(T)}(\{\lambda\}) = X_{TST}(\{\lambda\})$$

برای هر $T, S \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ برقرار باشد توصیف کردند.

در این مقاله به بررسی ساختار نگاشت‌های φ_1 و φ_2 روی $B(X)$ می‌پردازیم که زیرفضاهای طیف موضعی TS و $\varphi_1(T)\varphi_2(S)$ نسبت به مجموعه‌های تک‌عضوی $\{\lambda\}$ برای هر $T, S \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ با هم مساوی باشند.

---

[۲] Lattice

۲ تعاریف و مقدمات

اولین لم برخی از خواص پایه‌ای شناخته شده طیف موضعی را بیان می‌کند.

لم **۱.۲**. [۱، ۱۳]. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $T \in B(X)$. برای هر $x \in X$ و اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$، احکام زیر برقرارند:
(الف) اگر T دارای خاصیت توسیع تک‌مقداری و x بردار غیر صفر باشد، آنگاه $\sigma_T(x)$ ناتهی است.
(ب) اگر $\alpha \neq 0$ باشد آن‌گاه $\sigma_T(\alpha x) = \sigma_T(x)$ و $\sigma_{\alpha T}(x) = \alpha\, \sigma_T(x)$.
(ج) اگر برای یک $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $Tx = \lambda x$، آنگاه $\sigma_T(x) \subseteq \{\lambda\}$. به علاوه اگر T دارای خاصیت توسیع تک‌مقداری باشد، آن‌گاه $\sigma_T(x) = \{\lambda\}$.

در لم بعدی، برخی از خواص بنیادی زیرفضای $X_T(F)$ ارائه می‌شود.

لم **۲.۲**. [۱، ۱۳]. فرض کنیم $T \in B(X)$ و $F \subseteq \mathbb{C}$. احکام زیر برقرارند.
(الف) برای هر $\lambda \in \mathbb{C} \setminus F$ داریم $(T - \lambda I)X_T(F) = X_T(F)$.
(ب) اگر $(T - \lambda I)x \in X_T(F)$ برای $x \in X$ برقرار باشد، آنگاه $x \in X_T(F)$.
(ج) $\ker(T - \lambda I) \subseteq X_T(F)$.
(د) برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ وهرعدد ثابت و ناصفر $\alpha \in \mathbb{C}$، داریم $X_{\alpha T}(\lambda) = X_T\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$.

طیف موضعی ناصفر عملگر $T \in B(X)$ در هر $x \in X$ به‌صورت

$$\sigma_T^*(x) := \begin{cases} \{0\} & \sigma_T(x) = \{0\} \text{ اگر} \\ \sigma_T(x) \setminus \{0\} & \sigma_T(x) \neq \{0\} \text{ اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌شود.
برای هر بردار $x \in X$ و هر تابعک خطی $f \in X^*$، عملگرهای با رتبه حداکثر یک را با نماد $x \otimes f$ نمایش می‌دهیم که به صورت $(x \otimes f)y = f(y)x$ برای هر $y \in X$ تعریف می‌شود. عملگر $x \otimes f$ خودتوان است اگر و تنها اگر $f(x) = 1$ و عملگر $x \otimes f$ پوچتوان است اگر و تنها اگر $f(x) = 0$. توجه داشته باشیم که هر عملگر با رتبه یک در $B(X)$ را می‌توان به این شکل نوشت، و همچنین هر عملگر با رتبه متناهی $T \in B(X)$ را می‌توان به صورت مجموع تعداد متناهی عملگر با رتبه یک بیان کرد، بدین صورت که اگر T عملگر رتبه متناهی باشد، آن‌گاه بردارهای $x_i \in X$ و $f_i \in X^*$ که $i = 1, 2, \ldots, n$ وجود دارند به‌طوری‌که $T = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes f_i$. مجموعه همه عملگرهای با رتبه حداکثر یک و عملگرهای با رتبه متناهی در $B(X)$ را به ترتیب با $F_1(X)$ و $F(X)$ نشان می‌دهیم.

لم زیر یکی از نخستین دستاوردهای پژوهشگران در حوزه طیف موضعی ناصفر هر عملگر با رتبه یک را ارائه می‌دهد.

لم **۳.۲**. [۶]. فرض کنید x_0 یک بردار ناصفر در X باشد. آنگاه برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ داریم

$$\sigma^*_{x\otimes f}(x_0) := \begin{cases} \{0\} & f(x_0) = 0 \text{ اگر} \\ \{f(x)\} & f(x_0) \neq 0 \text{ اگر} \end{cases}.$$

قضیه زیر بر اساس طیف موضعی به توصیف عملگرهای با رتبه یک می‌پردازد که این خود به‌طور مستقل می‌تواند مورد توجه قرار گیرد.

قضیه **۴.۲**. [۶]. برای بردار ناصفر $x \in X$ و عملگر ناصفر $R \in B(X)$، احکام زیر معادل هستند.
(الف) عملگر R از رتبه یک است.
(ب) برای هر $T \in B(X)$، $\sigma^*_{RT}(x)$ شامل حداکثر یک عضو است.
(ج) برای هر عملگر رتبه دو $T \in B(X)$، $\sigma^*_{RT}(x)$ شامل حداکثر یک عضو است.

در اثبات برخی نتایج ارائه‌شده در بخش‌های بعدی از لم‌های زیر استفاده خواهیم کرد.

لم **۵.۲**. [۴]. برای یک بردار ناصفر $x \in X$ و یک عملگر $A \in B(X)$، احکام زیر معادل هستند.
(الف) $Ax = 0$.
(ب) برای هر عملگر $T \in B(X)$ داریم $\sigma^*_{TA}(x) \subseteq \{0\}$.
(ج) برای هر عملگر رتبه یک $T \in B(X)$ داریم $\sigma^*_{TA}(x) = \{0\}$.

لم **۶.۲**. [۶]. فرض کنیم $x \in X$ یک بردار ناصفر باشد و $A, B \in B(X)$. احکام زیر معادل هستند.
(الف) $A = B$.
(ب) $\sigma_{AT}(x) = \sigma_{BT}(x)$ برای هر عملگر $T \in B(X)$.
(ج) $\sigma_{AT}(x) = \sigma_{BT}(x)$ برای هر عملگر رتبه یک $T \in B(X)$.
(د) $\sigma^*_{AT}(x) = \sigma^*_{BT}(x)$ برای هر عملگر رتبه یک $T \in B(X)$.

لم **۷.۲**. [۲]. فرض کنیم $x \in X$ یک بردار ناصفر باشد و $T, S \in B(X)$. اگر برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $X_T(\{\lambda\}) = X_S(\{\lambda\})$ آنگاه $\sigma_T(x) = \{\mu\}$ اگر و تنها اگر $\sigma_S(x) = \{\mu\}$ برای هر $\mu \in \mathbb{C}$.

لم **۸.۲**. [۶]. فرض کنیم x_0 یک بردار ناصفر در X و $R = x \otimes f$ یک عملگر غیر پوچتوان با رتبه یک باشد. آنگاه احکام زیر برقرار هستند.
(الف) $\sigma_R(x_0) = \{0\}$ اگر و تنها اگر $f(x_0) = 0$.
(ب) $\sigma_R(x_0) = \{f(x)\}$ اگر و تنها اگر $f(x_0) \neq 0$ و x_0 و x وابسته خطی باشند.
(ج) $\sigma_R(x_0) = \{0, f(x)\}$ اگر و تنها اگر $f(x_0) \neq 0$ و x_0 و x مستقل خطی باشند.

قضیه زیر در اثبات نتایج اصلی مقاله نقش موثری دارد.

قضیه **۹.۲**. [۲]. فرض کنیم $T, S \in B(X)$. گزاره‌های زیر معادل هستند.
(الف) $T = S$.
(ب) $X_{TR}(\{\lambda\}) = X_{SR}(\{\lambda\})$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $R \in F_1(X)$.

نویسندگان در [۱۰]، نگاشت‌های جمعی روی $B(X)$ را که زیرفضای طیف موضعی عملگرها متناظر با مجموعه‌های تک‌عضوی را حفظ کند، بررسی کردند.

قضیه **۱۰.۲**. [۹]. فرض کنیم $\varphi : B(X) \to B(X)$ نگاشتی جمعی و پوشا باشد به‌طوری‌که $X_{\varphi(T)}(\{\lambda\}) = X_T(\{\lambda\})$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $T \in B(X)$ برقرار باشد. آن‌گاه تساوی $\varphi(T) = T$ برای هر $T \in B(X)$ برقرار است.

قضیه **۱۱.۲**. [۹]. فرض کنیم $B \in B(Y, X)$ اگر $\varphi : B(X) \to B(X)$. یک نگاشت جمعی پوشا باشد به‌طوری که $BY_{\varphi(T)}(\{\lambda\}) = X_T(\{\lambda\})$ برای هر $T \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$، آن‌گاه B معکوس‌پذیر است و $\varphi(T) = B^{-1}TB$ برای هر $T \in B(X)$.

۳ نتایج اصلی

در گام نخست لم‌های زیر را اثبات می‌کنیم.

لم **۱.۳**. فرض کنیم $T, S \in B(X)$. احکام زیر معادل هستند.
(الف) $T = S$.
(ب) رابطه $X_{RT}(\{\lambda\}) = X_{RS}(\{\lambda\})$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $R \in B(X)$ برقرار است.
(ج) رابطه $X_{RT}(\{\lambda\}) = X_{RS}(\{\lambda\})$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $R \in F_1(X)$ برقرار است.

اثبات. (الف)⇐(ب)⇐(ج) بدیهی هستند، پس تنها کافیست (ج)⇐(الف) را ثابت کنیم. فرض کنیم برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $R \in F_1(X)$ تساوی $X_{RT}(\{\lambda\}) = X_{RS}(\{\lambda\})$ برقرار باشد. بردار ناصفر $x \in X$ و $f \in X^*$ را دلخواه در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $R = x \otimes f$، به‌وضوح تساوی‌های $RTx = f(Tx)x$ و $RSx = f(Sx)x$ برقرارند. چون عملگرهای RT و RS دارای خاصیت توسیع تک‌مقداری هستند لم ۱.۲، تساوی‌های $\sigma_{RT}(x) = \{f(Tx)\}$ و $\sigma_{RS}(x) = \{f(Sx)\}$ را نتیجه می دهد. باتوجه به فرض و لم ۷.۲ ،

$$\{f(Tx)\} = \sigma_{RT}(x) = \sigma_{RS}(x) = \{f(Sx)\}.$$

بنابراین تساوی $f(Tx) = f(Sx)$ برای هر $f \in X^*$ برقرار است و این ایجاب می‌کند که $Tx = Sx$. از آنجا که x یک بردار ناصفر دلخواه در X است، نتیجه می‌گیریم که $T = S$. □

لم **۲.۳**. اگر φ_1 و φ_2 نگاشت‌هایی از $B(X)$ بتوی $B(X)$ باشند به‌طوری که برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $T, S \in B(X)$ در رابطه

$$X_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) = X_{TS}(\{\lambda\}) \tag{۱.۳}$$

صدق کنند، آن‌گاه احکام زیر برقرار هستند.
(الف) φ_2 یک به یک است.
(ب) اگر φ_1 پوشا باشد، آنگاه برای هر $T \in B(X)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ تساوی $\varphi_2(\alpha T) = \alpha\varphi_2(T)$ برقرار است و همچنین برای هر $x \in X$، φ_2 مجموعه $B_x(X)$ را به‌روی $B_x(X)$ می‌نگارد.

اثبات. (الف) اگر برای $A, B \in B(X)$ داشته باشیم $\varphi_2(A) = \varphi_2(B)$، آنگاه برای هر $R \in F_1(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$X_{RA}(\{\lambda\}) = X_{\varphi_1(R)\varphi_2(A)}(\{\lambda\}) = X_{\varphi_1(R)\varphi_2(B)}(\{\lambda\}) = X_{RB}(\{\lambda\})$$

و براساس لم ۱.۳ نتیجه می‌گیریم که $A = B$. بنابراین نگاشت φ_2 یک به یک است.
(ب) با استفاده از فرض پوشایی φ_1، برای هر $R \in F_1(X)$ عملگر $S \in B(X)$ وجود دارد به‌طوری که $\varphi_1(S) = R$. اکنون از (۱.۳)، رابطه زیر برای هر $T \in B(X)$ و $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ که $\alpha \neq 0$ برقرار است

$$\begin{aligned} X_{R(\alpha\varphi_2(T))}(\{\lambda\}) &= X_{\alpha\varphi_1(S)\varphi_2(T)}(\{\lambda\}) \\ &= X_{\varphi_1(S)\varphi_2(T)}\left(\{\tfrac{\lambda}{\alpha}\}\right) \\ &= X_{ST}\left(\{\tfrac{\lambda}{\alpha}\}\right) \\ &= X_{S(\alpha T)}(\{\lambda\}) \\ &= X_{\varphi_1(S)\varphi_2(\alpha T)}(\{\lambda\}) \\ &= X_{R\varphi_2(\alpha T)}(\{\lambda\}). \end{aligned}$$

لم ۱.۳ نتیجه می‌دهد که $\varphi_2(\alpha T) = \alpha\varphi_2(T)$. برای اثبات قسمت دوم، فرض کنیم $S \in B_x(X)$، در این صورت $Sx = 0$.
لم ۵.۲ نشان می‌دهد که برای هر $T \in B(X)$، $\{0\} \subseteq \sigma^*_{TS}(x)$ و این ایجاب می‌کند که $\sigma_{TS}(x) \subseteq \{0\}$. بنابراین

$$x \in X_{TS}(\{0\}) = X_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{0\})$$

و در نتیجه $\sigma_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(x) \subseteq \{0\}$. حال با توجه به پوشا بودن φ_1 و با استناد به لم ۵.۲، تساوی $\varphi_2(S)x = 0$ را نتیجه می‌گیریم.
برای اثبات عکس حکم، فرض کنیم $\varphi_2(S)x = 0$، با استفاده مجدد از لم ۵.۲، $\{0\} \subseteq \sigma^*_{T\varphi_2(S)}(x)$ برای هر $T \in B(X)$ برقرار است که این امر نشان می‌دهد $\sigma_{T\varphi_2(S)}(x) \subseteq \{0\}$. چون φ_1 پوشا است $\sigma_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(x) \subseteq \{0\}$ برای هر $T \in B(X)$ برقرار است. پس

$$x \in X_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{0\}) = X_{TS}(\{0\}).$$

بنابراین برای هر $T \in B(X)$، $\sigma_{TS}(x) \subseteq \{0\}$ و در نتیجه $\{0\} \subseteq \sigma^*_{TS}(x)$، مجدداً لم ۵.۲ نتیجه می دهد $Sx = 0$. پس برای هر $x \in X$، φ_2 مجموعه $B_x(X)$ را به‌روی $B_x(X)$ می‌نگارد.

□

قضیه اصلی مقاله به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه **۳.۳**. فرض کنیم φ_1 و φ_2 نگاشت‌های جمعی از $B(X)$ به‌روی $B(X)$ باشند. اگر برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $T, S \in B(X)$ رابطه

$$X_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) = X_{TS}(\{\lambda\}) \tag{۲.۳}$$

برقرار باشد، آن‌گاه نگاشت خطی دوسویی $P : X \to X$ وجود دارد به‌طوری‌که تساوی‌های $\varphi_1(T) = TP^{-1}$ و $\varphi_2(T) = PT$ برای هر $T \in B(X)$ برقرارند. همچنین برای هر $x \in X$، φ_1 و φ_2 مجموعه $B_x(X)$ را به‌روی $B_x(X)$ می‌نگارند.

اثبات. برهان قضیه را در هشت گام ارائه می دهیم .
گام **۱**. نگاشت φ_1 یک‌به‌یک است و $\varphi_1(\circ) = \circ$.

فرض کنیم برای عملگرهای $T, S \in B(X)$ داشته باشیم $\varphi_1(T) = \varphi_1(S)$، آنگاه برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $R \in F_1(X)$

$$X_{TR}(\{\lambda\}) = X_{\varphi_1(T)\varphi_2(R)}(\{\lambda\}) = X_{\varphi_1(S)\varphi_2(R)}(\{\lambda\}) = X_{SR}(\{\lambda\}).$$

قضیه ۹.۲ نشان می‌دهد که $T = S$ و در نتیجه φ_1 یک به یک است. برای اثبات قسمت دوم،

$$X_{\varphi_1(\circ)\varphi_2(T)}(\{\lambda\}) = X_{\circ T}(\{\lambda\}) = X_{\circ}(\{\lambda\}) = X_{\circ\varphi_2(T)}(\{\lambda\}).$$

چون φ_2 پوشاست، مجددا قضیه ۹.۲ نتیجه می دهد که $\varphi_1(\circ) = \circ$.

گام **۲**. نگاشت φ_1 خطی است و همچنین برای هر $x \in X$، φ_1 و φ_2 مجموعه $B_x(X)$ را به‌روی $B_x(X)$ می‌نگارند.
فرض کنیم R عملگر رتبه یک دلخواه باشد. چون φ_2 نگاشتی پوشا است، پس عملگر $S \in B(X)$ وجود دارد که $\varphi_2(S) = R$ و درنتیجه برای هر $T \in B(X)$ و $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ که $\alpha \neq \circ$ داریم

$$\begin{aligned} X_{\alpha\varphi_1(T)R}(\{\lambda\}) &= X_{\alpha\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) \\ &= X_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}\left(\{\tfrac{\lambda}{\alpha}\}\right) \\ &= X_{TS}\left(\{\tfrac{\lambda}{\alpha}\}\right) \\ &= X_{(\alpha T)S}(\{\lambda\}) \\ &= X_{\varphi_1(\alpha T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) \\ &= X_{\varphi_1(\alpha T)R}(\{\lambda\}). \end{aligned}$$

قضیه ۹.۲ تساوی $\varphi_1(\alpha T) = \alpha\varphi_1(T)$ را نتیجه می‌دهد. از طرفی از اول φ_1 را جمعی فرض کردیم، پس φ_1 خطی است. قسمت دوم این گام مشابه قسمت (ب) لم ۲.۳ اثبات می شود.

گام **۳**. نگاشت φ_1 عملگرهای رتبه یک را در هر دو جهت، حفظ می‌کند.
فرض کنیم $R = x \otimes f$ عملگر رتبه یک باشد که در آن $x \in X$ و $f \in X^*$. چون φ_1 یک‌به‌یک است و $\varphi_1(\circ) = \circ$ پس $\varphi_1(R) \neq \circ$. فرض کنیم $T \in B(X)$ یک عملگر دلخواه باشد، از آنجا که $RTx = f(Tx)x$ و RT دارای خاصیت توسیع تک‌مقداری است، پس $\sigma_{RT}(x) = \{f(Tx)\}$. بنابراین رابطه

$$x \in X_{RT}(\{f(Tx)\}) = X_{\varphi_1(R)\varphi_2(T)}(\{f(Tx)\}) = X_{\varphi_1(R)S}(\{f(Tx)\})$$

برای هر عملگر $S = \varphi_2(T) \in B(X)$ برقرار است. چون φ_2 پوشا است لم ۷.۲ نتیجه می‌دهد که برای هر $S \in B(X)$، $\sigma_{\varphi_1(R)S}(x) = \{f(Tx)\}$. پس $\sigma^*_{\varphi_1(R)S}(x)$ حداکثر شامل یک عضو است. طبق لم ۴.۲ $\varphi_1(R)$ دارای رتبه یک است. به‌روشی مشابه نشان داده می‌شود اگر $\varphi_1(R)$ رتبه یک باشد آن‌گاه R یک عملگر رتبه یک است. بنابراین φ_1 عملگرهای رتبه یک را در هر دو جهت حفظ می‌کند.

گام **۴**. نگاشت‌های خطی دوسویی $A : X \to X$ و $B : X^* \to X^*$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ رابطه $\varphi_1(x \otimes f) = Ax \otimes Bf$ برقرار می‌باشد.
طبق گام‌های قبلی، نگاشت $\varphi_1 : F(X) \to F(X)$ خطی و دوسویی است که عملگرهای رتبه یک را در هر دو جهت حفظ می‌کند. بنابراین براساس [۱۴]، φ_1 به یکی از شکل‌های زیر خواهد بود.
(الف) نگاشت‌های خطی دوسویی $A : X \to X$ و $B : X^* \to X^*$ وجود دارند که برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$،

$$\varphi_1(x \otimes f) = Ax \otimes Bf. \tag{۳.۳}$$

(ب) نگاشت‌های خطی دوسویی $C : X^* \to X$ و $D : X \to X^*$ وجود دارند که برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$،

$$\varphi_1(x \otimes f) = Cf \otimes Dx. \tag{۴.۳}$$

فرض کنیم φ_1 به شکل (۴.۳) باشد، بردار ناصفر $y \in X$ را در نظر می‌گیریم، تابعک خطی ناصفر $g \in X^*$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که $g(\varphi_2(I)y) = 0$. بنابراین $\sigma^*_{(Cf\otimes g)\varphi_2(I)}(y) = \{0\}$ و در نتیجه $\sigma_{(Cf\otimes g)\varphi_2(I)}(y) = \{0\}$. فرض کنیم $x = D^{-1}g$، چون x و y بردارهای ناصفر در X هستند، پس تابعک خطی $f \in X^*$ وجود دارد به‌طوری که $f(y) \neq 0$ و $f(x) \neq 0$. ازطرفی

$$y \in X_{(Cf\otimes g)\varphi_2(I)}(\{0\}) = X_{(Cf\otimes Dx)\varphi_2(I)}(\{0\}) = X_{x\otimes f}(\{0\}).$$

پس لم ۸.۲ نتیجه می‌دهد که $\sigma_{x\otimes f}(y) = \{0\}$. اما لم ۳.۲ ایجاب می‌کند که

$$\sigma^*_{x\otimes f}(y) = \{f(x)\} \neq \{0\}.$$

این تناقض نشان می‌دهد که φ_1 تنها می‌تواند شکل رابطه (۳.۳) را داشته باشد.

گام **۵**. برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ رابطه $f(x) = (Bf)(\varphi_2(I)Ax)$ برقرار است.
چون رابطه $\sigma_{x\otimes f}(x) = \{f(x)\}$ برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ برقرار می‌باشد، بنابر گام قبلی و رابطه (۲.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$x \in X_{x\otimes f}(\{f(x)\}) = X_{\varphi_1(x\otimes f)\varphi_2(I)}(\{f(x)\}) = X_{(Ax\otimes Bf)\varphi_2(I)}(\{f(x)\}).$$

در ابتدا فرض می‌کنیم که $f(x) \neq 0$. با استفاده از لم ۷.۲

$$\{0\} \neq \{f(x)\} = \sigma_{x\otimes f}(x) = \sigma_{\varphi_1(x\otimes f)\varphi_2(I)}(x) = \sigma_{(Ax\otimes Bf)\varphi_2(I)}(x),$$

که این بدان معنا است که $(Bf)(\varphi_2(I)(x)) \neq 0$. لم ۸.۲ نتیجه می‌دهد که

$$\{f(x)\} = \sigma_{x\otimes f}(x) = \sigma_{(Ax\otimes Bf)\varphi_2(I)}(x) = \{(Bf)(\varphi_2(I)Ax)\}.$$

حال اگر $f(x) = 0$، تابعک خطی $g \in X^*$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $g(x) \neq 0$. بر اساس آنچه در قسمت قبل نشان داده شد و با اعمال آن بر هر دو تابعک خطی g و $f+g$ داریم $g(x) = (Bg)(\varphi_2(I)Ax)$ و $(f+g)(x) = (B(f+g))(\varphi_2(I)Ax)$، پس

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (f+g)(x) \\ &= (B(f+g))(\varphi_2(I)Ax) \\ &= (Bf)(\varphi_2(I)Ax) + (Bg)(\varphi_2(I)Ax) \\ &= (Bf)(\varphi_2(I)Ax) + g(x). \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که در این حالت نیز تساوی $f(x) = (Bf)(\varphi_2(I)Ax)$ برقرار است.

گام **۶**. $\varphi_2(I)$ معکوس‌پذیر است.
عملگر $\varphi_2(I)$ یک‌به‌یک است؛ زیرا در غیر این صورت بردار ناصفر $y \in X$ وجود دارد که $\varphi_2(I)y = 0$. قرار می‌دهیم $x = A^{-1}y$ و فرض کنیم $f \in X^*$ تابعکی خطی باشد که $f(x) \neq 0$. بنابر گام‌های قبل داریم

$$0 \neq f(x) = (Bf)(\varphi_2(I)Ax) = (Bf)(\varphi_2(I)y) = 0,$$

که یک تناقض است. پس $\varphi_2(I)$ یک‌به‌یک است. حال نشان می‌دهیم که A پیوسته است و $B = (A^*)^{-1}(\varphi_2(I))^*$. فرض کنیم $(x_n)_n$ دنباله‌ای در X باشد به‌طوری که $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x \in X$ و $\lim_{n\longrightarrow\infty} Ax_n = y \in X$ ، در این صورت رابطه

$$(Bf)(\varphi_2(I)y) = \lim_{n\longrightarrow\infty}(Bf)(\varphi_2(I)Ax_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = f(x) = (Bf)(\varphi_2(I)Ax)$$

برای هر $f \in X^*$ برقرار است، چون B دوسویی و $f \in X^*$ دلخواه است، قضیه گراف بسته نشان می‌دهد که A پیوسته است. بنابراین برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ داریم

$$f(x) = (Bf)(\varphi_۲(I)Ax) = (\varphi_۲(I)A)^*Bf(x).$$

پس

$$I_{X^*} = (\varphi_۲(I)A)^*B = A^*(\varphi_۲(I))^*B.$$

درنتیجه $(A^*)^{-۱}B^{-۱} = (\varphi_۲(I))^*$ و بنابراین $\varphi_۲(I)$ معکوس‌پذیر است.

گام **۷**. A و I وابسته خطی هستند.
برای رسیدن به یک تناقض، فرض کنیم بردار ناصفر $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری که Ax و x مستقل خطی باشند. تابعک خطی $f \in X^*$ را در نظر می‌گیریم که $f(x) = ۱$ و $f(A^{-۱}x) = ۰$. پس $(x \otimes f)x = x$ و $A(x \otimes f)A^{-۱}x = ۰$. بنابراین $\sigma_{x\otimes f}(x) = \{۱\}$ و $\sigma_{A(x\otimes f)A^{-۱}}(x) = \{۰\}$. ازآن‌جا که رابطه $X_{x\otimes f}(\{\lambda\}) = X_{\varphi_۱(x\otimes f)\varphi_۲(I)}(\{\lambda\})$ برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ صادق است، با استفاده از لم ۷.۲ نتیجه می‌گیریم که $\sigma_{x\otimes f}(x) = \sigma_{\varphi_۱(x\otimes f)\varphi_۲(I)}(x)$. بنابر گام‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}\{۱\} = \sigma_{x\otimes f}(x) &= \sigma_{\varphi_۱(x\otimes f)\varphi_۲(I)}(x)\\ &= \sigma_{(Ax\otimes Bf)\varphi_۲(I)}(x)\\ &= \sigma_{(Ax\otimes\varphi_۲(I)^*Bf)}(x)\\ &= \sigma_{A(x\otimes f)A^{-۱}}(x) = \{۰\}.\end{aligned}$$

این تناقض نشان می‌دهد که اسکالر ناصفر $\alpha \in \mathbb{C}$ وجود دارد به‌طوری که $A = \alpha I$.

گام **۸**. برای هر $T \in B(X)$ تساوی‌های $\varphi_۱(T) = TP^{-۱}$ و $\varphi_۲(T) = PT$ برقرارند، که در آن $P = \varphi_۲(I)$.
نگاشت $\psi_۱ : B(X) \to B(X)$ را با ضابطه $\psi_۱(T) = \varphi_۱(T)\varphi_۲(I)$ برای هر $T \in B(X)$ تعریف می‌کنیم. پس برای هر $T \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$X_{\psi_۱(T)}(\{\lambda\}) = X_{\varphi_۱(T)\varphi_۲(I)}(\{\lambda\}) = X_T(\{\lambda\}).$$

بنابر قضیه ۱۰.۲، برای هر $T \in B(X)$، $\psi_۱(T) = T$. پس تساوی $\varphi_۱(T) = T(\varphi_۲(I))^{-۱}$ برای هر $T \in B(X)$ برقرار است. واضح است $\varphi_۱(I) = (\varphi_۲(I))^{-۱}$. بار دیگر، نگاشت $\psi_۲ : B(X) \to B(X)$ را با ضابطه $\psi_۲(T) = \varphi_۱(I)\varphi_۲(T)$ برای هر $T \in B(X)$ تعریف می‌کنیم. لذا برای هر $T \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ رابطه

$$X_{\psi_۲(T)}(\{\lambda\}) = X_T(\{\lambda\})$$

برقرار است، دوباره بنابر قضیه ۱۰.۲ تساوی $\psi_۲(T) = T$ را برای هر $T \in B(X)$ نیز خواهیم داشت. پس برای هر $T \in B(X)$ نتیجه می‌گیریم $\varphi_۲(T) = (\varphi_۱(I))^{-۱}T$.

□

نتیجه زیر از قضیه بالا، برای حالتی که دو فضای باناخ X و Y یکی نباشند، به‌دست می‌آید.

نتیجه **۴.۳**. فرض کنیم $P \in B(X, Y)$ عملگری خطی، کراندار و معکوس‌پذیر باشد. اگر $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ نگاشت‌های جمعی از $B(X)$ به‌روی $B(Y)$ باشند که برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $T, S \in B(X)$ در رابطه

$$Y_{\varphi_۱(T)\varphi_۲(S)}(\{\lambda\}) = PX_{TS}(\{\lambda\})$$

صدق کنند، آن‌گاه عملگر دوسویی $Q \in B(Y, X)$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $T \in B(X)$ تساوی‌های $\varphi_۱(T) = PTQ$ و $\varphi_۲(T) = Q^{-۱}TP^{-۱}$ برقرارند.

اثبات. نگاشت‌های $\psi_1 : B(X) \to B(X)$ و $\psi_2 : B(X) \to B(X)$ را با ضابطه‌های $\psi_1(T) = P^{-1}\varphi_1(T)P$ و $\psi_2(T) = P^{-1}\varphi_2(T)P$ برای هر $T \in B(X)$، تعریف می‌کنیم. لذا برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $T, S \in B(X)$ رابطه

$$\begin{aligned} X_{\psi_1(T)\psi_2(S)}(\{\lambda\}) &= X_{P^{-1}\varphi_1(T)P\,P^{-1}\varphi_2(T)P}(\{\lambda\}) \\ &= X_{P^{-1}\varphi_1(T)\varphi_2(S)P}(\{\lambda\}) \\ &= P^{-1}Y_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) \\ &= X_{TS}(\{\lambda\}) \end{aligned}$$

برقرار است. حال قضیه ۳.۳ نتیجه می‌دهد که نگاشت خطی و دوسویی $A : X \to X$ وجود دارد که $\psi_1(T) = TA^{-1}$ و $\psi_2(T) = AT$ برای هر $T \in B(X)$. با قرار دادن $Q = (PA)^{-1}$، برای هر $T \in B(X)$ تساوی‌های $\varphi_1(T) = PTQ$ و $\varphi_2(T) = Q^{-1}TP^{-1}$ برقرار می باشند. □

نتیجه **۵.۳**. فرض کنیم $P \in B(X, Y)$ عملگری خطی، کراندار و معکوس‌پذیر باشد و $\varphi_1 : B(X) \to B(X, Y)$ و $\varphi_2 : B(X) \to B(Y, X)$ نگاشت‌های جمعی و پوشا باشند که در رابطه

$$Y_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) = PX_{TS}(\{\lambda\})$$

برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $T, S \in B(X)$ صدق کنند. در این صورت عملگر دوسویی $Q \in B(X, X)$ وجود دارد به‌طوری‌که تساوی‌های $\varphi_1(T) = PTQ^{-1}$ و $\varphi_2(T) = QTP^{-1}$ برای هر $T \in B(X)$ برقرارند.

اثبات. نگاشت‌های $\psi_1 : B(X) \to B(X)$ و $\psi_2 : B(X) \to B(X)$ را به‌صورت $\psi_1(T) = P^{-1}\varphi_1(T)$ و $\psi_2(T) = \varphi_2(T)P$ برای هر $T \in B(X)$، تعریف می‌کنیم. لذا رابطه

$$X_{\psi_1(T)\psi_2(S)}(\{\lambda\}) = X_{P^{-1}\varphi_1(T)\varphi_2(S)P}(\{\lambda\}) = P^{-1}Y_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) = X_{TS}(\{\lambda\})$$

برای هر $T, S \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ برقرار است. قضیه ۳.۳ ایجاب می‌کند که نگاشت خطی دوسویی $Q : X \to X$ وجود دارد که $\psi_1(T) = TQ^{-1}$ و $\psi_2(T) = QT$ برای هر $T \in B(X)$ صادق هستند. بنابراین تساوی‌های $\varphi_1(T) = PTQ^{-1}$ و $\varphi_2(T) = QTP^{-1}$ برای $T \in B(X)$ برقرار خواهد بود. □

شکل دیگری از نتیجه ۴.۳ را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

نتیجه **۶.۳**. فرض کنیم $Q \in B(Y, X)$ عملگری خطی، کراندار باشد. اگر φ_1 و φ_2 نگاشت‌های جمعی از $B(X)$ به $B(Y)$ باشند که برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $T, S \in B(X)$ رابطه

$$QY_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) = X_{TS}(\{\lambda\})$$

برقرار باشد، آنگاه Q معکوس‌پذیر است و نگاشت خطی دوسویی $P : X \to Y$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $T \in B(X)$ تساوی‌های $\varphi_1(T) = Q^{-1}TP^{-1}$ و $\varphi_2(T) = PTQ$ برقرار خواهند بود.

اثبات. نگاشت های $\psi_1 : B(X) \to B(Y)$ و $\psi_2 : B(X) \to B(Y)$ را به صورت $\psi_1(T) = \varphi_1(T)\varphi_2(I)$ و $\psi_2(T) = \varphi_1(I)\varphi_2(T)$ برای هر $T \in B(X)$، تعریف می‌کنیم. واضح است که برای هر $T \in B(X)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ رابطه‌های

$$QY_{\psi_1(T)}(\{\lambda\}) = QY_{\varphi_1(T)\varphi_2(I)}(\{\lambda\}) = X_T(\{\lambda\})$$

و

$$QY_{\psi_2(T)}(\{\lambda\}) = QY_{\varphi_1(I)\varphi_2(T)}(\{\lambda\}) = X_T(\{\lambda\})$$

برقرارند. بنابراین طبق قضیه ۱۱.۲، عملگر Q معکوس‌پذیر است و روابط $\psi_1(T) = Q^{-1}TQ$ و $\psi_2(T) = Q^{-1}TQ$ برای هر $T \in B(X)$ برقرار خواهند بود. همچنین $I = \psi_1(I) = \varphi_1(I)\varphi_2(I)$ و $I = \psi_2(I) = \varphi_1(I)\varphi_2(I)$. این به معنی معکوس‌پذیری $\varphi_1(I)$ و $\varphi_2(I)$ است. از این نتیجه می‌گیریم که تساوی‌های $\varphi_1(T) = Q^{-1}TP^{-1}$ و $\varphi_2(T) = PTQ$ برای هر $T \in B(X)$ برقرار خواهند بود، که در آن $P = \varphi_2(I)Q^{-1}$. □

فهرست منابع

[1] Aiena, P., 2004. Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers. *Kluwer Dordrecht; Kluwer Academic Publishers*. doi:10.1007/1-4020-2525-4

[2] Benbouziane, H., Kettani, M.E. and Herrou, I., 2019. Local spectral subspace preservers. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser.*, 68, pp.293–303. doi:10.1007/s12215-018-0359-5

[3] Benbouziane, H., Kettani, M.E. and Herrou, I., 2019. Nonlinear maps preserving the local spectral subspace. *Linear Multilinear Algebra*, 67, pp.29–38. doi:10.1080/03081087.2017.1409693

[4] Bourhim, A. and Lee, J.E., 2018. Multiplicatively local spectrum-preserving maps. *Linear Algebra Appl.*, 549(3), pp.291–308. doi:10.1016/j.laa.2018.03.042

[5] Bourhim, A. and Mashreghi, J., 2015. A survey on preservers of spectra and local spectra. *Contemp. Math.*, 638, pp.45–98. doi:10.1090/conm/638/12810

[6] Bourhim, A. and Mashreghi, J., 2015. Maps preserving the local spectrum of product of operators. *Glasgow Math. J.*, 57(3), pp.709–718. doi:10.1017/S0017089514000585

[7] Bourhim, A. and Ransford, T., 2006. Additive maps preserving local spectrum. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 55, pp.377–385. doi:10.1007/s00020-005-1392-2

[8] Dolinar, M.D., Du, S.P., Hou, J.C. and Legia, P., 2008. General preservers of invariant subspace lattices. *Linear Algebra Appl.*, 429, pp.100–109. doi:10.1016/j.laa.2008.02.007

[9] Elhodaibi, M. and Jaatit, A., 2012. On additive maps preserving the local spectral subspace. *Int. J. Math. Anal.*, 6, pp.1045–1051.

[10] Finch, J.K., 1975. The single valued extension property on a Banach space. *Pacific J. Math.*, 58, pp.61–69. doi:10.2140/pjm.1975.58.61

[11] Frobenius, G., 1897. Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. *Berl. Ber. Appl.*, 203, pp.994–1015.

[12] Jafarian, A.A. and Sourour, A.R., 1994. Linear maps that preserve the commutant, double commutant or the lattice of invariant subspaces. *Linear Multilinear Algebra*, 38, pp.117–129. doi:10.1080/03081089508818345

[13] Laursen, K.B. and Neumann, M.M., 2000. An introduction to local spectral theory. *London Mathematical Society Monographs, New Series, vol. 20*. New York (NY): The Clarendon Press, Oxford University Press. doi:10.1093/oso/9780198523819.001.0001

[14] Omladič, M. and Šemrl, P., 1993. Additive mappings preserving operators of rank one. *Linear Algebra Appl.*, 182, pp.239–256. doi:10.1016/0024-3795(93)90502-F

Some results on local spectral subspace preserving maps

E.Mohammadhosseinpour[(1)] and R. Parvinianzadeh[(2)] [3]

[(1)] Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Yasuj University, Yasuj, Iran
[(2)] Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, Yasuj University, Yasuj, Iran

Communicated by: Ali Rezaei Aliabad

Received: 5 February 2026 Accepted: 22 September 2026

Abstract: Let $B(X)$ be the algebra of all bounded linear operators on infinite-dimensional complex Banachspace X.For $T \in B(X)$ and $\lambda \in \mathbb{C}$, let $X_T(\{\lambda\})$ denotes the local spectral subspace of T associated with $\{\lambda\}$. We show that if two additive maps φ_1 and φ_2 from $B(X)$ onto $B(X)$ satisfy

$$X_{\varphi_1(T)\varphi_2(S)}(\{\lambda\}) = X_{TS}(\{\lambda\})$$

for all $T, S \in B(X)$ and $\lambda \in \mathbb{C}$, then there exists a bijective linear map $P : X \to X$ such that $\varphi_1(T) = TP^{-1}$ and $\varphi_2(T) = PT$ for all $T \in B(X)$. Also, we obtain some interesting results in this direction.

Keywords: Local spectral subspace, Local spectrum, Nonlinear preservers, Finite rank operator, Rank-one operators.

©2026 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[3]Corresponding author
E-mail addresses:(E.M.Hossienpour) e.mohammadhossienpour@stu.yu.ac.ir, (R. Parvinianzadeh) r.parvinian@yu.ac.ir