مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال xxxx، دوره xx، شماره xx، ص xx–xx

شاپا چاپی: ۸۰۸۸-۲۲۵۱
DOI: xxxx

الگوریتم اینرسی بهبود یافتهء ایشیکاوا و CQ برای مسائل تعادل و نگاشت‌های ۲– هیبرید تعمیم‌یافته

ستار علیزاده [۱] [۱] و فریدون مرادلو [۲]

[۱] گروه ریاضی، واحد مرند، دانشگاه آزاد اسلامی، مرند، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

دبیر مسئول: . . . . . .

تاریخ دریافت: xxx تاریخ پذیرش: xxx

چکیده: در این مقاله، یک الگوریتم هیبریدی جدید را برای یافتن یک عضو مشترک مجموعهء جواب‌های یک مسئلهء تعادل و مجموعهء نقاط ثابت نگاشت‌های غیر خطی در یک فضای هیلبرت معرفی می‌کنیم. دوتابع مورد استفاده، شرایط استاندارد یکنوایی و پیوستگی را برآورده می‌کند و نگاشت مورد نظر، یک نگاشت ۲– هیبرید تعمیم‌یافته است که شامل ردهء وسیعی از نگاشت‌های غیرخطی از جمله نگاشت‌های غیرانبساطی، غیرگسترشی و هیبرید می‌شود. با استفاده از الگوریتم معرفی شده یک قضیه همگرایی قوی را ثابت می‌کنیم. دو مثال عددی همراه با جدول همگرایی و همچنین جدول‌های مقایسه‌ای ارائه شده‌اند که کارایی الگوریتم را در مقایسه با روش‌های کلاسیک از نظر سادگی و سرعت همگرایی نشان می‌دهند. نتایج عددی، سادگی ساختاری الگوریتم پیشنهادی و سرعت همگرایی بالای آن را نسبت به روش‌های تکراری کلاسیک برجسته می‌سازد.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم اینرسی، فضای هیلبرت، نقطه ثابت، همگرایی قوی.

رده‌بندی ریاضی: 47H10; 47H09; 47H05

۱ مقدمه

پولیاک [۲۷]، اولین پژوهشگری بود که الگوریتمی از نوع اینرسی را برای حل مسائل مینیمم‌سازی محدب و هموار معرفی کرد. الگوریتم‌های اینرسی از چارچوب تکراری دومرحله‌ای پیروی می‌کنند، به‌طوری‌که هر تکرار جدید بر اساس دو تکرار قبلی تعیین می‌شود. به خوبی اثبات شده است که گنجاندن یک عبارت اینرسی در یک الگوریتم موجب افزایش سرعت همگرایی دنبالهء تولیدشده می‌گردد. در نتیجه، الگوریتم‌های اینرسی توجه گسترده‌ای را در تحقیقات اخیر به خود جلب کرده‌اند (به عنوان مثال به منابع [۷، ۸، ۱۱، ۱۳، ۲۱]، همراه با منابع موجود در آن مراجعه نمایید).

[۱] نویسنده مسئول مقاله
رایانامه: (S. Alizadeh), alizades_ms@yahoo.com & sattar.alizadeh@iau.ac.ir
(F. Moradlou) fridoun.moradlou@gmail.com & moradlou@sut.ac.ir

در سال‌های اخیر، پژوهشگران بسیاری برای بدست آوردن همگرایی ضعیف و قوی، به بررسی روش‌های تکراری در چارچوب فضاهای هیلبرت و باناخ پرداخته‌اند (به عنوان مثال، منابع [۱–۶، ۱۵، ۱۸، ۲۶، ۳۰] را ملاحظه نمایید). به‌ویژه برای تضمین همگرایی قوی، تحقیقات گسترده‌ای بر توسعه و به‌کارگیری روش‌های تکراری بهبودیافته متمرکز شده‌اند. در میان روش‌های تکراری مختلف، روش‌های مان [۲۲] و ایشیکاوا [۱۶] به‌عنوان دو روش پرکاربرد و شناخته‌شده، در این حوزه مطرح هستند.

فرض کنید H یک فضای هیلبرت حقیقی باشد که به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و نرم مربوطه $\| \cdot \|$ مجهز شده است. فرض کنید E زیر مجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از H باشد. مسئلهٔ تعادل مرتبط با تابع $f : E \times E \to \mathbb{R}$ یافتن نقطه‌ای مانند $x \in E$ به‌طوری‌که:

$$f(x, y) \geq 0, \quad (y \in E). \tag{۱.۱}$$

مجموعهٔ $EP(f)$ شامل تمام نقاط $x \in E$ است که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$EP(f) = \{x \in E \ : \ f(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in E\}.$$

مجموعهٔ نقاط ثابت خودنگاشت S را با نماد $F(S)$ نشان می‌دهیم.

بسیاری از مسائل بنیادی در فیزیک، بهینه‌سازی و اقتصاد را می‌توان به‌صورت یافتن جوابی برای رابطهٔ (۱.۱) فرمول بندی کرد. روش‌های متعددی برای حل مسئلهٔ تعادل توسعه یافته‌اند؛ برای نمونه، رجوع شود به [۹، ۱۲، ۱۴، ۲۵].

در سال‌های اخیر، پژوهشگران بسیاری به بررسی مسئلهٔ یافتن عضو مشترک مجموعهٔ نقاط ثابت یک نگاشت غیرانبساطی و مجموعهٔ جواب یک مسئله تعادل پرداخته‌اند. این مطالعات در چارچوب فضاهای هیلبرت و باناخ انجام شده‌اند. برای توضیحات بیشتر و فهرستی جامع از آثار مرتبط، خواننده می‌تواند به منابع [۱۰، ۲۸] و ارجاعات موجود در آنها مراجعه کند.

روش تکرار مان در سال ۲۰۰۳ توسط ناکاجو و تاکاهاشی [۲۶] بهبود یافت، آنها این روش بهبودیافته را با عنوان روش CQ به صورت زیر معرفی کردند:

$$\begin{cases} t_0 \in E \quad \text{به‌صورت دلخواه انتخاب می‌شود} \\ \sigma_n = \nu_n t_n + (1 - \nu_n) S t_n, \\ C_n = \{v \in E \ : \|\sigma_n - v\| \leq \|t_n - v\|\}, \\ Q_n = \{v \in E \ : \langle t_n - v, t_0 - t_n \rangle \geq 0\}, \\ t_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} t_0, \end{cases}$$

که در آن، P_K نمایش تصویر متریک از فضای H به روی زیرمجموعهٔ بسته و محدب $K \subset H$ است. آنها ثابت کردند که دنبالهٔ $\{t_n\}$ به‌طور قوی همگرا می‌شود، با فرض اینکه دنبالهٔ $\{\nu_n\}$ از بالا به ۱ کراندار باشد.

در سال ۲۰۱۶، علیزاده و مرادلو [۶] روش تکرار زیر را برای یافتن عضوی از مجموعهٔ $EP(f) \cap F(S)$ ارائه کردند. آنها یک روش تصویر هیبریدی برای یک نگاشت هیبریدی تعمیم‌یافته از E به فضای هیلبرت H به صورت زیر ارائه کردند:

$$\begin{cases} t \in E \quad \text{به‌صورت دلخواه انتخاب می‌شود} \\ u_n \in E \ \text{ s.t. } \quad f(u_n, y) + \frac{1}{r_n} \langle y - u_n, u_n - t_n \rangle \geq 0, \quad \forall\, y \in E, \\ y_n = \gamma_n z_n + (1 - \gamma_n) S u_n, \\ z_n = \eta_n t_n + (1 - \eta_n) S t_n, \\ C_n = \{\nu \in E : \|y_n - \nu\|^2 \leq \|t_n - \nu\|^2\}, \\ Q_n = \{\nu \in E : \langle t_n - \nu, t_n - t \rangle \leq 0\}, \\ t_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} t, \end{cases}$$

برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$، که در آن $\{\gamma_n\} \subset [0, 1 - \gamma]$ برای $\gamma \in (0, 1)$، و $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ به‌طوری‌که $\liminf_{n \to \infty} r_n > 0$، و همچنین $\{\eta_n\} \subset [0, 1)$ به‌طوری‌که $\eta_n \to 1$ وقتی $n \to \infty$. بنابراین، آنها نشان دادند که دنباله‌های $\{t_n\}$ و $\{u_n\}$ به طور قوی به نقطه u همگرا می‌شوند، که در آن:

$$u = P_{F(S) \cap EP(f)} t \in F(S) \cap EP(f).$$

در سال ۲۰۱۸، دونگ و همکارانش [۱۳] یک روش مان بهبود یافته اینرسی را برای یک نگاشت خودنگاشت غیرانبساطی S در فضای هیلبرت H به صورت زیر ارائه دادند:

$$\begin{cases} t_0, t_1 \in E \quad \text{به‌صورت دلخواه انتخاب می‌شوند} \\ u_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-1}), \\ \sigma_n = (1-\eta_n)u_n + \eta_n S u_n, \\ F_n = \{\nu \in H : \ \|\sigma_n - \nu\| \le \|u_n - \nu\|\}, \\ K_n = \{\nu \in H : \ \langle t_n - \nu, t_n - t_0\rangle \le 0\}, \\ t_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} t_0, \end{cases}$$

برای هر $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$، که در آن $\{\mu_n\}$ در بازه $[\mu_1, \mu_2]$ قرار دارد، به‌طوری‌که $\mu_1 \in (-\infty, 0]$ و $\mu_2 \in [0, \infty)$، و همچنین دنباله $\{\eta_n\}$ در بازه $[\eta, 1]$ قرار دارد که در آن $\eta \in (0, 1]$. در این صورت، دنباله $\{t_n\}$ به طورقوی به $P_{F(S)}t_0$ همگرا می‌شود.
در این مقاله، با الهام از مقاله علیزاده و مرادلو [۶] و همچنین دونگ و همکارانش [۱۳]، یک الگوریتم بهبودیافته ایشیکاوای اینرسی CQ را برای یافتن نقطهء مشترک مجموعهء جواب‌های یک مسئلهء تعادل و مجموعهء نقاط ثابت یک نگاشت ۲-هیبرید تعمیم‌یافته در فضای هیلبرت ارائه می‌دهیم. همچنین، یک قضیهء همگرایی قوی برای این نگاشت‌ها اثبات می‌کنیم.

۲ پیشنیازها

فرض کنید H یک فضای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و نرم $\| \cdot \|$ باشد. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از H باشد . گوییم خودنگاشت $S : E \to E$

(i) به‌طور قوی غیرانبساطی است اگر برای هر $y, w \in E$ داشته باشیم

$$\|Sy - Sw\|^2 \le \langle y - w, Sy - Sw\rangle;$$

(ii) غیرگسترشی [۲۰] است اگر برای هر $y, w \in E$ داشته باشیم

$$2\|Sy - Sw\|^2 \le \|Sy - w\|^2 + \|Sw - y\|^2;$$

(iii) هیبرید [۳۰] است اگر برای هر $y, w \in E$ داشته باشیم

$$3\|Sy - Sw\|^2 \le \|y - w\|^2 + \|Sy - w\|^2 + \|Sw - y\|^2;$$

(iv) هیبرید تعمیم یافته [۱۹] است هرگاه اعداد حقیقی مانند $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $y, w \in E$ داشته باشیم

$$\alpha\|Ty - Tw\|^2 + (1-\alpha)\|y - Tw\|^2 \le \beta\|Ty - w\|^2 + (1-\beta)\|y - w\|^2.$$

چنین نگاشتی را یک نگاشت (α, β)- هیبرید تعمیم یافته می‌نامیم.

همچنین، یک خود نگاشت $S : E \to E$ با شرط $F(S) \neq \emptyset$، یک نگاشت شبه‌غیرانبساطی نامیده می‌شود اگر برای هر $y \in F(S)$ و $w \in E$ داشته باشیم

$$\|y - Sw\| \le \|y - w\|.$$

این ویژگی بیان می‌کند که فاصله هر نقطه دلخواه $w \in E$ تا یک نقطه ثابت $y \in F(S)$ تحت اثر نگاشت S افزایش نمی‌یابد. به‌سادگی می‌توان نشان داد که:

- یک نگاشت $(1, 0)$- هیبرید تعمیم‌یافته یک نگاشت غیرانبساطی است؛

- یک نگاشت $(۲, ۱)$– هیبرید تعمیم‌یافته یک نگاشت غیرگسترشی است؛
- یک نگاشت $(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲})$– هیبرید تعمیم‌یافته یک نگاشت هیبرید است.

خود نگاشت $S : E \to E$، ۲– هیبرید تعمیم‌یافته [۲۴]، نامیده می‌شود اگر اعداد ثابتی مانند $\mu_۱, \mu_۲, \eta_۱, \eta_۲ \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $u, v \in E$ داشته باشیم

$$\begin{aligned}\mu_۱\|S^۲u - Sv\|^۲ + \mu_۲\|Su - Sv\|^۲ + (۱ - \mu_۱ - \mu_۲)\|u - Sv\|^۲ \\ \leq \eta_۱\|S^۲u - v\|^۲ + \eta_۲\|Su - v\|^۲ + (۱ - \eta_۱ - \eta_۲)\|u - v\|^۲.\end{aligned}$$

چنین نگاشتی یک نگاشت $(\mu_۱, \mu_۲, \eta_۱, \eta_۲)$– هیبرید تعمیم‌یافته نامیده می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که یک نگاشت $(۰, \mu_۲, ۰, \eta_۲)$– هیبرید تعمیم‌یافته، یک نگاشت $(\mu_۲, \eta_۲)$– هیبرید تعمیم‌یافته می‌باشد [۱۵]. همچنین، هر نگاشت ۲– هیبرید تعمیم‌یافته، یک نگاشت شبه‌غیرانبساطی است، وقتی که مجموعهء نقاط ثابت آن ناتهی باشد.

در [۱۵]، هوجو و همکارانش دو مثال از نگاشت‌های ۲– هیبرید تعمیم‌یافته ارائه داده‌اند که در رده نگاشت‌های هیبرید تعمیم‌یافته قرار نمی‌گیرند. بنابراین، ردهء نگاشت‌های ۲– هیبرید تعمیم‌یافته، شامل ردهء نگاشت‌های هیبرید تعمیم‌یافته می‌باشند.

در این مقاله، همگرایی ضعیف و همگرایی قوی دنبالهء $\{u_n\}$ به نقطهء $u \in H$ را به ترتیب با نمادهای $u_n \rightharpoonup u$ و $u_n \to u$ نشان می‌دهیم. همچنین، مجموعهء حدود زیر دنباله‌ای ضعیف $\{u_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\omega_\omega(u_n) := \{u \in H \mid \exists\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\} \text{ s.t. } u_{n_k} \rightharpoonup u\}.$$

در این بخش، برخی ویژگی‌های اساسی فضاهای هیلبرت را که در بخش بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت، یادآوری می‌کنیم. برای هر $y, w \in H$، نتایج زیر برقرارند:

$$\|\mu y + (۱ - \mu)w\|^۲ = \mu\|y\|^۲ + (۱ - \mu)\|w\|^۲ - \mu(۱ - \mu)\|y - w\|^۲, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}, \tag{۱.۲}$$

$$\|y + w\|^۲ \leq \|y\|^۲ + ۲\langle w, y + w\rangle, \tag{۲.۲}$$

$$\|y - w\|^۲ = \|y\|^۲ - \|w\|^۲ - ۲\langle y - w, w\rangle. \tag{۳.۲}$$

برای جزئیات بیشتر به [۲۹] رجوع کنید.

لم ۱.۲. [۴] فرض کنید K زیرمجموعه‌ای بسته و محدب از یک فضای هیلبرت حقیقی H و $S : K \to H$ یک نگاشت ۲– هیبرید تعمیم‌یافته باشد، به‌طوری که برای هر $t \in K$ نامساوی $\|S^۲t - St\| \leq \|St - t\|$، برقرار باشد. در این صورت، نگاشت $I - S$ نیم‌بسته است، یعنی اگر $t_n \rightharpoonup u$ و $t_n - St_n \to ۰$، آنگاه $u \in F(S)$.

لم ۲.۲. [۲۳] فرض کنید K زیرمجموعه‌ای بسته و محدب از یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد، و P_K تصویر متریک (که با عنوان تصویر نزدیک‌ترین نقطه نیز شناخته می‌شود) از H به روی K تعریف شود. به‌عبارت دیگر، برای هر $x \in H$، نقطهء $P_K x$ به‌صورت یکتا در K تعیین می‌شود به‌طوری‌که:

$$\|u - P_K u\| = \inf\{\|u - w\| \mid w \in K\}.$$

در این صورت، با فرض $u \in H$ و $w \in K$ داریم: $w = P_K u$، اگر و تنها اگر برای $v \in K$

$$\langle u - w, v - w\rangle \leq ۰.$$

لم ۳.۲. [۲۳] فرض کنید K زیرمجموعه‌ای بسته و محدب از یک فضای هیلبرت H باشد. همچنین فرض کنید دنبالهء $\{t_n\} \subset H$ و نقطهء $z \in H$ داده شده‌اند، به‌طوری‌که $\nu = P_K z$ باشد. اگر دنبالهء $\{t_n\}$ در شرط $\omega_\omega(t_n) \subset K$، و برای هر n در شرط $\|t_n - z\| \leq \|z - \nu\|$، صدق کند، آنگاه $t_n \to \nu$.

فرض کنید $f : E \times E \to \mathbb{R}$ یک دو تابع باشد. برای مطالعهء مسئلهء تعادل، فرض می‌کنیم تابع f در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(P۱)$ برای هر $u \in E$، داریم: $f(u, u) = ۰$؛

$(P۲)$ تابع f یکنوا است، یعنی برای هر $u, v \in E$ داریم:

$$f(u,v) + f(v,u) \leq ۰;$$

$(P۳)$ برای هر $u, v, w \in E$، داریم:

$$\lim_{s \downarrow ۰} f(sw + (۱-s)u, v) \leq f(u,v);$$

$(P۴)$ برای هر $u \in E$، تابع $v \mapsto f(u,v)$ بر روی E محدب و نیمه‌پیوستهٔ پایینی است.

لم زیر در [۱۲] اثبات شده است.

لم ۴.۲. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت H باشد، و دوتابع $f : E \times E \to \mathbb{R}$ در شرایط $(P۱) - (P۴)$ صدق کند. همچنین فرض کنید $\lambda > ۰$ و $u \in H$ داده شده باشند. در این صورت، نقطه‌ای مانند $w \in E$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $v \in E$ نامساوی زیر برقرار است:

$$f(w,v) + \frac{۱}{r}\langle v - w, w - u\rangle \geq ۰.$$

لم زیر در [۱۲] اثبات شده است.

لم ۵.۲. برای $\lambda > ۰$ و $u \in H$، نگاشت $T_\lambda : H \to E$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_\lambda(u) = \left\{ w \in E : f(w,v) + \frac{۱}{\lambda}\langle v - w, w - u\rangle \geq ۰, \ \forall v \in E \right\}.$$

در نتیجه، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) نگاشت T_λ تک‌مقداری است؛

(۲) نگاشت T_λ به‌طور قوی غیرانبساطی است، یعنی برای هر $u, v \in H$ داریم:

$$\|T_\lambda u - T_\lambda v\|^۲ \leq \langle T_\lambda u - T_\lambda v, u - v\rangle;$$

(۳) $F(T_\lambda) = EP(f)$؛

(۴) مجموعهٔ $EP(f)$ بسته و محدب می‌باشد.

۳ نتایج اصلی

در این بخش، با ارائهٔ یک الگوریتم ایشیکاوای اینرسی جدید، یک عضو مشترک مجموعهٔ جواب‌های یک مسئلهٔ تعادل و مجموعهٔ نقاط ثابت یک نگاشت ۲- هیبرید تعمیم‌یافته را پیداکرده و قضایای همگرایی قوی را برای دنباله‌های تولید شده توسط این الگوریتم در فضاهای هیلبرت ثابت می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد. همچنین فرض کنید $f : E \times E \to \mathbb{R}$ یک دوتابع باشد که در شرایط $(P۱)-(P۴)$ صدق می‌کند، و $S : E \to H$ یک نگاشت ۲- هیبرید تعمیم‌یافته باشد به‌طوری‌که برای هر $t \in E$، نامساوی $\|S^۲t - St\| \leq \|St - t\|$، برقرار باشد و داشته باشیم $F(S) \cap EP(f) \neq \emptyset$.
فرض کنید $t_۰, t_۱ \in E$، و دنبالهٔ $\{t_n\}$، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، توسط الگوریتم زیر تولید شود:

$$\begin{cases} w_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-۱}), \\ u_n \in E \ \text{ s.t. } \ f(u_n, y) + \frac{۱}{\lambda_n}\langle y - u_n, u_n - w_n\rangle \geq ۰, \ \forall\, y \in E, \\ y_n = \theta_n w_n + (۱-\theta_n)Su_n, \\ z_n = \gamma_n y_n + (۱-\gamma_n)Sw_n, \\ F_n = \{u \in E : \ \|z_n - u\| \leq \|w_n - u\|\}, \\ K_n = \{u \in E : \ \langle t_n - u, t_n - t_۰\rangle \leq ۰\}, \\ t_{n+۱} = P_{F_n \cap K_n} t_۰. \end{cases} \tag{۱.۳}$$

که در آن $\{\mu_n\} \subset [\lambda, \mu]$، $\lambda \in (-\infty, ۰]$، $\mu \in [۰, \infty)$، $\{\lambda_n\} \subset (۰, +\infty)$ به‌طوری که $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > ۰$، و $\{\theta_n\} \subset [۰, ۱ - \theta]$، برای برخی $\theta \in (۰, ۱]$، و همچنین $\gamma_n \in [۰, ۱]$ به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = ۱$. دراین صورت، دنباله‌ء $\{t_n\}$ به‌طور قوی به $P_{F(S)\cap EP(f)}$ همگرا است.

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، مجموعه‌های F_n و K_n بسته و محدب هستند. با استفاده از تعریف‌های F_n و K_n، به‌راحتی نتیجه می‌گیریم که K_n یک مجموعه‌ء بسته است، در حالی‌که، F_n هم بسته و هم محدب می‌باشد. همچنین، بنا به تعریف F_n، برای هر $n \in \mathbb{N}$، داریم

$$\|z_n - w_n\|^۲ - ۲\langle z_n - w_n, w_n - u\rangle \leq ۰,$$

در نتیجه، F_n بسته است. فرض کنید $\nu \in F(S) \cap EP(f)$. از این‌که $u_n = S_{\lambda_n} w_n$، داریم

$$\|u_n - \nu\| = \|S_{\lambda_n} w_n - S_{\lambda_n} \nu\| \leq \|w_n - \nu\|$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\|y_n - \nu\| &= \|\theta_n w_n + (۱ - \theta_n) S u_n - \nu\| \\ &\leq \theta_n \|w_n - \nu\| + (۱ - \theta_n)\|S u_n - \nu\| \\ &\leq \|w_n - \nu\|.\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}\|z_n - \nu\| &= \|\gamma_n y_n + (۱ - \gamma_n) S w_n - \nu\| \\ &\leq \gamma_n \|y_n - \nu\| + (۱ - \gamma_n)\|S w_n - \nu\| \\ &\leq \|w_n - \nu\|,\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، داریم $\nu \in F_n$. در نتیجه

$$F(S) \cap EP(f) \subset F_n. \tag{۲.۳}$$

در ادامه، با استفاده از استقراء ثابت می‌کنیم که برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، رابطه‌ء $F(S) \cap EP(f) \subseteq K_n$ برقرار است. برای $n = ۰$ داریم $F(S) \cap EP(f) \subset K_۰ = E$. فرض کنید برای برخی $n \in \mathbb{N}$، داشته باشیم $F(S) \cap EP(f) \subset K_n$. از این‌که $t_{n+۱} = P_{F_n \cap K_n} t_۰$، بنابه لم ۲.۲، برای هر $u \in F_n \cap K_n$، داریم

$$\langle t_{n+۱} - u, t_{n+۱} - t_۰\rangle \leq ۰.$$

با استفاده از تعریف $K_{n+۱}$، داریم $F_n \cap K_n \subset K_{n+۱}$. از رابطه‌ء (۲.۳) و فرض استقراء نتیجه می‌گیریم $F(S) \cap EP(f) \subset F_n \cap K_n$. بنابراین $F(S) \cap EP(f) \subset K_{n+۱}$. در نتیجه $\{t_n\}$ خوشتعریف است. با استفاده از تعریف K_n داریم $t_n = P_{K_n} t_۰$. از طرفی داریم $F(S) \cap EP(f) \subset K_n$، بنابراین برای هر $\nu \in F(S) \cap EP(f)$ داریم

$$\|t_n - t_۰\| \leq \|\nu - t_۰\|. \tag{۳.۳}$$

در نتیجه $\{t_n\}$، $\{w_n\}$، $\{y_n\}$ و $\{S w_n\}$ کراندار هستند و بنابراین $\omega_w(t_n) \neq \emptyset$. از این‌که

$$t_{n+۱} = P_{F_n \cap K_n} t_۰ \in F_n \cap K_n \subset K_n,$$

داریم $t_{n+۱} \in K_n$، لذا، بنا به لم ۲.۲، داریم $\langle t_n - t_{n+۱}, t_n - t_۰\rangle \leq ۰$. در نتیجه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|t_n - t_{n+۱}\|^۲ &= \|(t_n - t_۰) - (t_{n+۱} - t_۰)\|^۲ \\ &= \|t_n - t_۰\|^۲ - ۲\langle t_n - t_۰, t_{n+۱} - t_۰\rangle + \|t_{n+۱} - t_۰\|^۲ \\ &= \|t_{n+۱} - t_۰\|^۲ - \|t_n - t_۰\|^۲ - ۲\langle t_n - t_۰, t_{n+۱} - t_n\rangle \\ &\leq \|t_{n+۱} - t_۰\|^۲ - \|t_n - t_۰\|^۲.\end{aligned}$$

از رابطه (۳.۳)، و نامساوی اخیر نتیجه می‌شود که $\{\|t_n - t_۰\|\}$، کراندار و غیرنزولی است. بنابراین $\lim_{n\to\infty} \{\|t_n - t_۰\|\}$ موجود است. این نتیجه می‌دهد که $\|t_{n+۱} - t_n\| \to ۰$.

ازاین‌که $w_n - t_n = \mu_n(t_n - t_{n-1})$ و $\mu_n \leq \mu$، بدست می‌آوریم

$$\|w_n - t_n\| = \mu_n\|t_n - t_{n-1}\| \leq \mu\|t_n - t_{n-1}\| \to 0. \tag{۴.۳}$$

چون $\{y_n\}$ و $\{Sw_n\}$ کراندار هستند و $\gamma_n \to 1$، داریم

$$\|z_n - y_n\| = (1 - \gamma_n)\|Sw_n - y_n\| \to 0. \tag{۵.۳}$$

از این‌که $t_{n+1} = P_{F_n \cap K_n} t_0 \in F_n \cap K_n \subset F_n$، داریم

$$\|z_n - t_{n+1}\| \leq \|w_n - t_{n+1}\| \leq \|w_n - t_n\| + \|t_n - t_{n+1}\| \to 0.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\|z_n - t_n\| \leq \|z_n - t_{n+1}\| + \|t_{n+1} - t_n\| \to 0.$$

درنتیجه،

$$\|z_n - w_n\| \leq \|z_n - t_n\| + \|t_n - w_n\| \to 0. \tag{۶.۳}$$

بنا به روابط (۵.۳) و (۶.۳) داریم

$$\|y_n - w_n\| \leq \|y_n - z_n\| + \|z_n - w_n\| \to 0. \tag{۷.۳}$$

فرض کنید $\nu \in F(S) \cap EP(f)$. با استفاده از رابطهء (۳.۲) و لم ۵.۲، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|u_n - \nu\|^2 &= \|S_{\lambda_n} w_n - S_{\lambda_n}\nu\|^2 \\
&\leq \langle S_{\lambda_n} w_n - S_{\lambda_n}\nu, w_n - \nu\rangle \\
&= \langle u_n - \nu, w_n - \nu\rangle \\
&= \frac{1}{2}(\|u_n - \nu\|^2 + \|w_n - \nu\|^2 - \|w_n - u_n\|^2),
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|u_n - \nu\|^2 \leq \|w_n - \nu\|^2 - \|w_n - u_n\|^2.$$

بنابراین با استفاده از خاصیت تحدب $\|\cdot\|^2$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\|y_n - \nu\|^2 &= \|\theta_n(w_n - \nu) + (1 - \theta_n)(Su_n - \nu)\|^2 \\
&\leq \theta_n\|w_n - \nu\|^2 + (1 - \theta_n)\|Su_n - \nu\|^2 \\
&\leq \theta_n\|w_n - \nu\|^2 + (1 - \theta_n)\|u_n - \nu\|^2 \\
&\leq \theta_n\|w_n - \nu\|^2 + (1 - \theta_n)(\|w_n - \nu\|^2 - \|w_n - u_n\|^2) \\
&= \|w_n - \nu\|^2 - (1 - \theta_n)\|w_n - u_n\|^2.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$(1 - \theta_n)\|w_n - u_n\|^2 \leq \|w_n - \nu\|^2 - \|y_n - \nu\|^2, \tag{۸.۳}$$

از این‌که $\{\theta_n\} \subset [0, 1 - \theta]$، از رابطه (۸.۳) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\theta\|w_n - u_n\|^2 &\leq (1 - \theta_n)\|w_n - u_n\|^2 \\
&\leq \|w_n - \nu\|^2 - \|y_n - \nu\|^2 \\
&= (\|w_n - \nu\| - \|y_n - \nu\|)(\|w_n - \nu\| + \|y_n - \nu\|) \\
&\leq \|y_n - w_n\|(\|w_n - \nu\| + \|y_n - \nu\|).
\end{aligned}$$

با استفاده از کرانداری $\{w_n\}$ و $\{y_n\}$، از رابطه (۷.۳) و نامساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-u_n\|=0. \tag{۹.۳}$$

از این‌که $\liminf_{n\to\infty}\lambda_n>0$، داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{w_n-u_n}{\lambda_n}\right\|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\|w_n-u_n\|=0. \tag{۱۰.۳}$$

چون $(1-\theta_n)Su_n=y_n-\theta_n w_n$، بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\theta\|u_n-Su_n\|&\le(1-\theta_n)\|Su_n-u_n\|=\|y_n-\theta_n w_n-(1-\theta_n)u_n\|\\&\le\|y_n-u_n\|+\theta_n\|w_n-u_n\|\\&\le\|y_n-w_n\|+\|w_n-u_n\|+\|w_n-u_n\|\\&=\|y_n-w_n\|+2\|w_n-u_n\|.\end{aligned}$$

با استفاده از روابط (۷.۳) و (۹.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-Su_n\|=0. \tag{۱۱.۳}$$

چون دنباله $\{w_n\}$ کراندار است زیردنباله‌ای مانند $\{w_{n_k}\}$ از $\{w_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $w_{n_k}\rightharpoonup u$. از روابط (۴.۳) و (۹.۳)، نتیجه می‌گیریم که داریم $t_{n_k}\rightharpoonup u$ و $u_{n_k}\rightharpoonup u$. چون E بسته و محدب است و $\{u_{n_k}\}\subset E$، نتیجه می‌گیریم که $u\in E$.
حال، نشان می‌دهیم که $u\in EP(f)$. از این‌که $u_n=S_{\lambda_n}w_n$، برای هر $v\in E$، داریم

$$f(u_n,v)+\frac{1}{\lambda_n}\langle v-u_n,u_n-w_n\rangle\ge 0.$$

با استفاده از شرط $(P2)$، برای هر $v\in E$، داریم

$$\frac{1}{\lambda_n}\langle v-u_n,u_n-w_n\rangle\ge f(v,u_n),$$

در نتیجه برای هر $v\in E$، خواهیم داشت

$$\left\langle v-u_{n_k},\frac{u_{n_k}-w_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right\rangle\ge f(v,u_{n_k}). \tag{۱۲.۳}$$

با استفاده از روابط (۹.۳) و (۱۲.۳) و فرض $(P4)$، برای هر $v\in E$، داریم

$$0\ge f(v,u).$$

فرض کنید $s\in(0,1]$، $v\in E$ و $v_s=sv+(1-s)u$. لذا، از $v_s\in E$، نتیجه می‌شود که $f(v_s,u)\le 0$. بنابراین،

$$0=f(v_s,v_s)\le sf(v_s,v)+(1-s)f(v_s,u)\le sf(v_s,v)$$

و با تقسیم رابطه بالا بر s، برای هر $v\in E$، خواهیم داشت $f(v_s,v)\ge 0$. با گرفتن حد، وقتی که $s\downarrow 0$ و با استفاده از $(P3)$ نتیجه می‌گیریم که $u\in EP(f)$.
با استفاده از رابطه (۱۱.۳) و لم ۱.۲، داریم $u\in F(S)$، که از اینجا نتیجه می‌شود $u\in F(S)\cap EP(f)$. چون $u\in F(S)\cap EP(f)$ دلخواه بود، نتیجه می‌گیریم که $\omega_\omega(t_n)\subset F(S)\cap EP(f)$. از رابطه (۳.۳)، داریم

$$\|t_n-t_0\|\le\|t_0-P_{F(S)\cap EP(f)}t_0\|.$$

درنهایت با بکارگیری لم ۳.۲، خواهیم داشت $t_n\to P_{F(S)\cap EP(f)}t_0$. □

نتیجه **۲.۳**. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد. همچنین فرض کنید $f : E\times E \to \mathbb{R}$ یک دوتابع باشد که در شرایط $(P۱)-(P۴)$ صدق می‌کند، و $S : E \to H$ یک نگاشت ۲-هیبرید تعمیم‌یافته باشد به‌طوری‌که برای هر $t \in E$، نامساوی $\|S^۲t - St\| \leq \|St - t\|$، برقرار باشد و داشته باشیم $F(S) \cap EP(f) \neq \emptyset$. فرض کنید $t_۰, t_۱ \in E$، و دنباله‌ء $\{t_n\}$، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، توسط الگوریتم زیر تولید شود:

$$\begin{cases} w_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-۱}), \\ u_n \in E \ \text{ s.t.} \quad f(u_n, y) + \frac{۱}{\lambda_n}\langle y - u_n, u_n - w_n\rangle \geq ۰, \ \forall\, y \in E, \\ y_n = \theta_n w_n + (۱ - \theta_n)Su_n, \\ F_n = \{u \in E : \ \|y_n - u\| \leq \|w_n - u\|\}, \\ K_n = \{u \in E : \ \langle t_n - u, t_n - t_۰\rangle \leq ۰\}, \\ t_{n+۱} = P_{F_n\cap K_n} t_۰. \end{cases}$$

که در آن $\{\mu_n\} \subset [\lambda, \mu]$، $\lambda \in (-\infty, ۰]$، $\mu \in [۰, \infty)$، $\{\lambda_n\} \subset (۰, +\infty)$ به‌طوری‌که $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > ۰$، و $[۰, ۱ - \theta] \subset \{\theta_n\}$، برای برخی $\theta \in (۰, ۱)$. دراین صورت، دنباله‌ء $\{t_n\}$ به‌طور قوی به $P_{F(S)\cap EP(f)}$ همگرا است.

اثبات. با قرار دادن $\gamma_n = ۱$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، در قضیه ۱.۳، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. □

نتیجه **۳.۳**. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد. همچنین فرض کنید $f : E \times E \to \mathbb{R}$ یک دوتابع باشد که در شرایط $(P۱) - (P۴)$ صدق می‌کند، و $EP(f) \neq \emptyset$. فرض کنید $t_۰, t_۱ \in E$، و دنباله‌ء $\{t_n\}$، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، توسط الگوریتم زیر تولید شود:

$$\begin{cases} w_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-۱}), \\ u_n \in E \text{ s.t.} \quad f(u_n, y) + \frac{۱}{\lambda_n}\langle y - u_n, u_n - w_n\rangle \geq ۰, \ \forall\, y \in E, \\ y_n = \theta_n w_n + (۱ - \theta_n)u_n, \\ z_n = \gamma_n y_n + (۱ - \gamma_n)w_n, \\ F_n = \{u \in E : \ \|z_n - u\| \leq \|w_n - u\|\}, \\ K_n = \{u \in E : \ \langle t_n - u, t_n - t_۰\rangle \leq ۰\}, \\ t_{n+۱} = P_{F_n\cap K_n} t_۰. \end{cases}$$

که در آن $\{\mu_n\} \subset [\lambda, \mu]$، $\lambda \in (-\infty, ۰]$، $\mu \in [۰, \infty)$، $\{\lambda_n\} \subset (۰, +\infty)$ به‌طوری‌که $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > ۰$، و $[۰, ۱ - \theta] \subset \{\theta_n\}$، برای برخی $\theta \in (۰, ۱)$، و همچنین $\gamma_n \in [۰, ۱)$ به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = ۱$. دراین صورت، دنباله‌ء $\{t_n\}$ به‌طور قوی به $P_{EP(f)}$ همگرا است.

اثبات. با جایگذاری $S = I$ در قضیه‌ء ۱.۳، نتیجه‌ء مطلوب حاصل می‌شود.

□

نتیجه **۴.۳**. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد. همچنین فرض کنید $f : E\times E \to \mathbb{R}$ یک دوتابع باشد که در شرایط $(P۱)-(P۴)$ صدق می‌کند، و $S : E \to H$ یک نگاشت ۲-هیبرید تعمیم‌یافته باشد به‌طوری‌که برای هر $t \in E$، نامساوی $\|S^۲t - St\| \leq \|St - t\|$، برقرار باشد و داشته باشیم $F(S) \cap EP(f) \neq \emptyset$. فرض کنید $t_۰, t_۱ \in E$، و دنباله‌ء $\{t_n\}$، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، توسط الگوریتم زیر تولید شود:

$$\begin{cases} w_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-۱}), \\ u_n \in E \ \text{ s.t.} \quad f(u_n, y) + \frac{۱}{\lambda_n}\langle y - u_n, u_n - w_n\rangle \geq ۰, \ \forall\, y \in E, \\ z_n = \gamma_n Su_n + (۱ - \gamma_n)Sw_n, \\ F_n = \{u \in E : \ \|z_n - u\| \leq \|w_n - u\|\}, \\ K_n = \{u \in E : \ \langle t_n - u, t_n - t_۰\rangle \leq ۰\}, \\ t_{n+۱} = P_{F_n\cap K_n} t_۰. \end{cases}$$

که در آن $\{\mu_n\} \subset [\lambda, \mu]$، $\lambda \in (-\infty, ۰]$، $\mu \in [۰, \infty)$، $\{\lambda_n\} \subset (۰, +\infty)$ به‌طوری‌که $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > ۰$، و $\gamma_n \in [۰, ۱]$ به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = ۱$. دراین صورت، دنباله $\{t_n\}$ به‌طور قوی به $P_{F(S)\cap EP(f)}$ همگرا است.

اثبات. با فرض $\theta_n = ۰$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، در قضیهٔ ۱.۳، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. □

نتیجه **۵.۳**. فرض کنید E زیرمجموعه‌ای ناتهی، بسته و محدب از یک فضای هیلبرت حقیقی H باشد. همچنین فرض کنید $S : E \to H$ یک نگاشت ۲- هیبرید تعمیم‌یافته باشد به‌طوری‌که برای هر $t \in E$ نامساوی $\|S^۲t - St\| \leq \|St - t\|$، برقرار باشد و داشته باشیم $F(S) \neq \emptyset$. فرض کنید $t_۰, t_۱ \in E$، و دنبالهٔ $\{t_n\}$، برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{۰\}$، توسط الگوریتم زیر تولید شود:

$$\begin{cases} w_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-۱}), \\ u_n \in E \ \text{ s.t.} \quad \langle y - u_n, u_n - w_n\rangle \geq ۰, \ \forall\, y \in E, \\ y_n = \theta_n w_n + (۱ - \theta_n)Su_n, \\ z_n = \gamma_n y_n + (۱ - \gamma_n)Sw_n, \\ F_n = \{u \in E : \ \|z_n - u\| \leq \|w_n - u\|\}, \\ K_n = \{u \in E : \ \langle t_n - u, t_n - t_۰\rangle \leq ۰\}, \\ t_{n+۱} = P_{F_n\cap K_n} t_۰. \end{cases}$$

که در آن $\{\mu_n\} \subset [\lambda, \mu]$، $\lambda \in (-\infty, ۰]$، $\mu \in [۰, \infty)$، و $\{\theta_n\} \subset [۰, ۱ - \theta]$، برای برخی $\theta \in (۰, ۱]$، و همچنین $\gamma_n \in [۰, ۱]$ به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = ۱$. دراین صورت، دنباله $\{t_n\}$ به‌طور قوی به $P_{F(S)}$ همگرا است.

اثبات. با فرض $f(x, y) = ۰$، برای هر $x, y \in E$، و انتخاب $\lambda_n = ۱$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، نتیجهٔ مورد نظر مستقیماً از قضیهٔ ۱.۳، حاصل می‌شود.

□

ملاحظه **۶.۳**. همان طوری‌که قبلاً بیان شد، ردهٔ نگاشت‌های ۲- هیبرید تعمیم‌یافته شامل نگاشت‌های غیرانبساطی، غیرگسترشی، هیبرید و هیبرید تعمیم‌یافته می‌باشد. بنابراین، قضیهٔ ۱.۳، و همهٔ نتایج آن برای این دسته از نگاشت‌ها نیز برقرار است.

۴ مثالهای عددی

در این بخش، دو مثال عددی برای بررسی عملکرد الگوریتم قضیهٔ ۱.۳، ارائه میدهیم.

مثال **۱.۴**. فرض کنید $H = \mathbb{R}$ و $E = [۰, ۱]$. تابع دومتغیرهٔ $f : E \times E \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = (x - y)(۱ - x),$$

که در شرایط $(P۱) - (P۴)$ صدق می‌کند.
نگاشت $S : E \to E$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Sx = \frac{x}{۲} \Rightarrow S^۲x = \frac{x}{۴},$$

براحتی بررسی می‌شود نگاشت بالا، یک نگاشت ۲- هیبرید تعمیم‌یافته است و همچنین داریم

$$\|S^۲t - St\| = \left|\frac{t}{۴} - \frac{t}{۲}\right| = \frac{t}{۴} \leq \left|\frac{t}{۲} - t\right| = \frac{t}{۲}.$$

فرض کنید

$$t_۰ = ۰/۸, \quad t_۱ = ۰/۶, \quad \mu_n = ۰/۲, \quad \lambda_n = ۰/۵, \quad \theta_n = ۰/۳, \quad \gamma_n = ۰/۹$$

$$\begin{cases} w_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-۱}), \\ u_n = P_E(w_n) = \min\{۱, \max\{۰, w_n\}, \\ y_n = \theta_n w_n + (۱ - \theta_n)S(u_n), \\ z_n = \gamma_n y_n + (۱ - \gamma_n)S(w_n), \\ F_n = \{u \in E : \|z_n - u\| \leq \|w_n - u\|\}, \\ K_n = \{u \in E : \langle t_n - u, t_n - t_۰\rangle \leq ۰\}, \\ t_{n+۱} = P_{F_n \cap K_n}(t_۰) \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر اولیه، در الگوریتم بالا داریم

$$\begin{cases} w_۱ = ۰/۶ + ۰/۲(۰/۶ - ۰/۸) = ۰/۵۶, \\ u_۱ = P_E(۰/۵۶) = ۰/۵۶, \\ y_۱ = ۰/۳ \cdot ۰/۵۶ + ۰/۷ \cdot S(۰/۵۶) = ۰/۳۶۴, \\ z_۱ = ۰/۹ \cdot ۰/۳۶۴ + ۰/۱ \cdot S(۰/۵۶) = ۰/۳۵۵۶, \\ F_۱ = \{u \in [۰, ۱] : |z_۱ - u| \leq |w_۱ - u|\} \Rightarrow u \in [۰, ۰/۴۵۷۸], \\ K_۱ = \{u \in [۰, ۱] : (t_۱ - u)(t_۱ - t_۰) \leq ۰\} \Rightarrow u \leq ۰/۶, \\ F_۱ \cap K_۱ = [۰, ۰/۴۵۷۸], \\ t_۲ = P_{[۰, ۰/۴۵۷۸]}(t_۰) = ۰/۳۵۵۶. \end{cases}$$

شمارهٔ گام n	مقدار t_n
۰	۰.۸۰۰۰
۱	۰.۶۰۰۰
۲	۰.۳۵۵۶
۳	۰.۲۴۸۲
۴	۰.۱۸۹۴
۵	۰.۱۵۳۵
۶	۰.۱۳۲۲
۷	۰.۱۱۹۳
۸	۰.۱۱۱۴
۹	۰.۱۰۶۵
۱۰	۰.۱۰۳۵

جدول ۱: جدول همگرایی

مقدار $t_{n+۱}$، حاصل تصویر متریک نقطهٔ اولیهٔ $t_۰$، روی مجموعهٔ $F_n \cap K_n$ است که به‌صورت عددی و وابسته به ساختار داخلی الگوریتم محاسبه شده است. این مقدار ممکن است با تصویر هندسی روی بازهٔ تقریبی متفاوت باشد، اما یکتا، معتبر و در مسیر همگرایی قوی قرار دارد. تفاوت عددی، ناشی از دقت بالاتر در ساخت مجموعه‌های F_n و K_n و اعمال اصلاحات برداری در الگوریتم است، و اصول هندسی تصویر متریک را نقض نمی‌کند. همان‌طور که از جدول همگرایی، مشخص است، دنبالهٔ $\{t_n\}$ به‌طور یکنوا و سریع به نقطهٔ ۰ در مجموعهٔ $F(S) \cap EP(f)$ همگرا می‌شود. این رفتار عددی، اعتبار قضیهٔ ۱.۳ را تأیید می‌کند.

مثال **۲.۴**. فرض کنید $H = \mathbb{R}^۲$ و $E = \{x \in \mathbb{R}^۲ : \|x\| \leq ۱\}$. تابع دو متغیرهٔ $f : E \times E \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x, y) = \langle x - y,\ (۱ - \|x\|)x\rangle,$$

که شرایط $(P۱) - (P۴)$ صدق می‌کند. همچنین نگاشت غیرخطی $S : E \to E$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Sx = \frac{x}{۱ + \|x\|},$$

که یک نگاشت $(۱, ۰, ۰, ۱)$- هیبرید تعمیم‌یافته است. همچنین داریم

$$\|S^۲x - Sx\| \leq \|Sx - x\|, \quad \forall x \in E,$$

$$t_۰ = (۰/۸,\ ۰/۶), \quad t_۱ = (۰/۶,\ ۰/۴), \quad \mu_n = ۰/۲, \quad \lambda_n = ۰/۵, \quad \theta_n = ۰/۳, \quad \gamma_n = ۰/۹$$

الگوریتم پیشنهادی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} w_n = t_n + \mu_n(t_n - t_{n-۱}), \\ u_n \in E \ \text{ s.t. } \quad f(u_n, y) + \frac{۱}{\lambda_n}\langle y - u_n,\ u_n - w_n\rangle \geq ۰, \quad \forall y \in E, \\ y_n = \theta_n w_n + (۱ - \theta_n)Su_n, \\ z_n = \gamma_n y_n + (۱ - \gamma_n)Sw_n, \\ F_n = \{u \in E : \|z_n - u\| \leq \|w_n - u\|\}, \\ K_n = \{u \in E : \langle t_n - u,\ t_n - t_۰\rangle \leq ۰\}, \\ t_{n+۱} = P_{F_n \cap K_n}(t_۰). \end{cases}$$

فرض کنیم

$$u_n = P_E(w_n) = \frac{w_n}{\max\{۱,\ \|w_n\|\}},$$

داریم

$$\begin{aligned} w_۱ &= (۰/۶,\ ۰/۴) + ۰/۲ \cdot ((۰/۶,\ ۰/۴) - (۰/۸,\ ۰/۶)) = (۰/۵۶,\ ۰/۳۶) \\ \|w_۱\| &= \sqrt{۰/۵۶^۲ + ۰/۳۶^۲} \approx ۰/۶۶۷ \Rightarrow u_۱ = w_۱ \\ S(u_۱) &= \frac{w_۱}{۱ + \|w_۱\|} \approx \frac{(۰/۵۶,\ ۰/۳۶)}{۱/۶۶۷} \approx (۰/۳۳۶,\ ۰/۲۱۶) \\ y_۱ &= ۰/۳ \cdot (۰/۵۶,\ ۰/۳۶) + ۰/۷ \cdot (۰/۳۳۶,\ ۰/۲۱۶) \approx (۰/۴۰۳۲,\ ۰/۲۵۹۲) \\ S(w_۱) &= \frac{(۰/۵۶,\ ۰/۳۶)}{۱/۶۶۷} = (۰/۳۳۶,\ ۰/۲۱۶) \\ z_۱ &= ۰/۹ \cdot (۰/۴۰۳۲,\ ۰/۲۵۹۲) + ۰/۱ \cdot (۰/۳۳۶,\ ۰/۲۱۶) \approx (۰/۳۹۶۱,\ ۰/۲۵۵۷) \end{aligned}$$

همچنین داریم $t_۲ = P_{F_۱ \cap K_۱}(t_۰) \approx (۰/۳۵۵,\ ۰/۲۴)$ که در آن

$$F_۱ = \{u \in E : \|z_۱ - u\| \leq \|w_۱ - u\|\}, \quad K_۱ = \{u \in E : \langle t_۱ - u,\ t_۱ - t_۰\rangle \leq ۰\},$$

شماره n	مقدار تقریبی t_n
۰	(۰.۸۰۰۰ ،۰.۶۰۰۰)
۱	(۰.۶۰۰۰ ،۰.۴۰۰۰)
۲	(۰.۳۵۵۰ ،۰.۲۴۰۰)
۳	(۰.۲۴۸۰ ،۰.۱۶۸۰)
۴	(۰.۱۸۹۰ ،۰.۱۲۸۰)
۵	(۰.۱۵۳۰ ،۰.۱۰۳۰)
۶	(۰.۱۳۲۰ ،۰.۰۸۹۰)
۷	(۰.۱۱۹۰ ،۰.۰۸۰۰)
۸	(۰.۱۱۱۰ ،۰.۰۷۴۰)
۹	(۰.۱۰۶۰ ،۰.۰۷۰۰)
۱۰	(۰.۱۰۳۰ ،۰.۰۶۸۰)

جدول ۲: جدول همگرایی

مشاهده می‌شود که دنباله‌ء $\{t_n\}$ به‌طورقوی به نقطه‌ء $(۰, ۰)$ در مجموعه‌ء $F(S) \cap EP(f)$ همگرا می‌شود، همان‌طور که در قضیه‌ء ۱.۳ تضمین شده است.

۱.۴ مقایسه‌ء الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم‌های مان و ایشیکاوا

الگوریتم پیشنهادی در این مقاله، نسبت به الگوریتم‌های کلاسیک مان و ایشیکاوا، دارای ساختار تعادل‌محور، انعطاف‌پذیری پارامتری، و اثبات همگرایی قوی است. در جدول زیر، تفاوت‌های کلیدی و مزایای الگوریتم حاضر نسبت به الگوریتم‌های مذکور به‌صورت تحلیلی ارائه شده‌اند:

ویژگی	الگوریتم پیشنهادی	الگوریتم‌های مان و ایشیکاوا
نوع مسئله‌ء هدف	به‌طور خاص برای یافتن نقطه‌ء مشترک بین مجموعه‌ء نقاط ثابت یک نگاشت ۲–هیبرید تعمیم‌یافته و مجموعه‌ء جواب‌های یک مسئله‌ء تعادل طراحی شده است.	برای یافتن نقطه‌ء ثابت یک نگاشت غیرانبساطی یا شبه‌غیرانبساطی طراحی شده‌اند و ساختار تعادلی ندارند.
ساختار الگوریتم	شامل مراحل مستقل برای حل تعادل، اعمال نگاشت‌های ترکیبی، و استفاده از تصویر متریک با مجموعه‌های کمکی F_n و K_n است.	ساختار ساده‌تری دارند و معمولاً از میانگین‌گیری یا ترکیب مستقیم نگاشت‌ها بدون تصویر متریک یا شرط تعادل استفاده می‌کنند.
نوع نگاشت‌ها	نگاشت‌های ۲–هیبرید تعمیم‌یافته با ویژگی‌های تعادلی، غیرانبساطی، و شبه‌غیرانبساطی را پوشش می‌دهد.	محدود به نگاشت‌های غیرانبساطی یا هیبریدی کلاسیک هستند و قابلیت پوشش نگاشت‌های تعادلی را ندارند.
وجود مؤلفه اینرسی	از مؤلفه‌ء اینرسی برای شتاب عددی و بهبود همگرایی استفاده می‌شود که در اثبات نظری نیز لحاظ شده است.	فاقد مؤلفه‌ء اینرسی هستند و همگرایی آن‌ها وابسته به انتخاب گام و شرایط نگاشت است.
تعامل با تابع تعادل $f(x, y)$	در هر گام، شرط تعادل به‌صورت جداگانه بررسی می‌شود و نگاشت‌های کمکی بر اساس آن ساخته می‌شوند.	هیچ‌گونه ساختار تعادلی ندارند و تابع $f(x, y)$ در الگوریتم لحاظ نمی‌شود.
نوع همگرایی اثبات‌شده	همگرایی قوی برای دنباله‌های تولیدشده اثبات شده است، حتی در حضور نگاشت‌های پیچیده و پارامترهای متغیر.	همگرایی ضعیف یا مشروط به شرایط خاص نگاشت و انتخاب پارامترها است.
قابلیت تعمیم به نگاشت‌های پیچیده‌تر	ساختار چندمرحله‌ای و ترکیبی الگوریتم امکان تعمیم به نگاشت‌های تصادفی، وزن‌دار، یا وابسته به زمان را فراهم می‌کند.	ساختار کلاسیک آن‌ها برای نگاشت‌های پیچیده‌تر انعطاف‌پذیری محدودی دارد.

جدول ۳: مقایسه‌ء تحلیلی الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم‌های مان و ایشیکاوا

۲.۴ مقایسه‌ء سرعت همگرایی الگوریتم پیشنهادی با الگوریتم‌های مان و ایشیکاوا

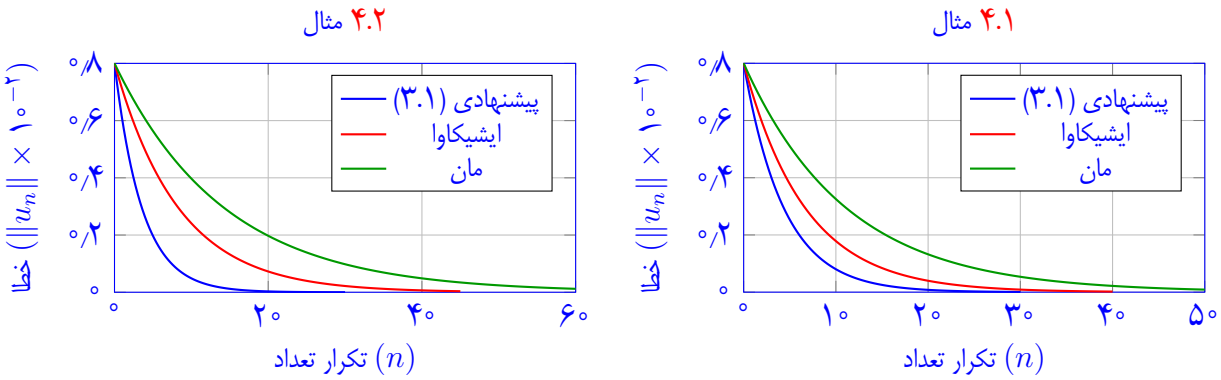
مثال ۳.۴. در این قسمت، سرعت همگرایی الگوریتم پیشنهادی (۱.۳) را با دو الگوریتم شناخته‌شده مان [۲۲] و ایشیکاوا [۱۶] بر اساس مثال‌های عددی ۱.۴ و ۲.۴ مقایسه می‌کنیم. پارامترهای اولیه، شرایط مسئله و نقطه شروع در هر سه روش یکسان در نظر گرفته شده‌اند. نتایج این مقایسه در جدول ۴ ارائه شده است.

مثال	روش	تکرار تا دقت $۱۰^{-۴}$	خطای نهایی
مثال ۱.۴	الگوریتم پیشنهادی (۱.۳)	۱۰	$۶٫۸ \times ۱۰^{-۵}$
مثال ۱.۴	الگوریتم ایشیکاوا	۲۸	$۸٫۲ \times ۱۰^{-۵}$
مثال ۱.۴	الگوریتم مان	۴۵	$۹٫۵ \times ۱۰^{-۵}$
مثال ۲.۴	الگوریتم پیشنهادی (۱.۳)	۸	$۱٫۰۳ \times ۱۰^{-۴}$
مثال ۲.۴	الگوریتم ایشیکاوا	۲۵	$۱٫۱۲ \times ۱۰^{-۴}$
مثال ۲.۴	الگوریتم مان	۵۲	$۱٫۲۵ \times ۱۰^{-۴}$

جدول ۴: مقایسهء سرعت همگرایی الگوریتم‌ها در مثال‌های ۱.۴ و ۲.۴

از بررسی نتایج جدول فوق مشخص می‌شود که الگوریتم پیشنهادی (۱.۳) در هر دو مثال کمترین تعداد تکرار برای رسیدن به دقت مطلوب ($۱۰^{-۴}$) و کمترین خطای نهایی را دارد. الگوریتم ایشیکاوا عملکرد متوسط و قابل قبولی از خود نشان می‌دهد، اما نسبت به الگوریتم پیشنهادی (۱.۳) به تعداد تکرار بیشتری نیاز دارد. الگوریتم مان کندترین همگرایی و بیشترین خطای نهایی را در بین سه روش داراست که نشان‌دهندهء محدودیت روش‌های تک‌مرحله‌ای در مسائل تعادل پیچیده است.

برای نشان دادن برتری الگوریتم پیشنهادی (۱.۳)، نمودارهای زیر روند کاهش خطا را نسبت به تعداد تکرار برای هر سه الگوریتم در مثال‌های ۱.۴ و ۲.۴ نشان می‌دهند:



شکل ۱: نمودار مقایسه‌ای همگرایی الگوریتم‌های پیشنهادی (۱.۳)، ایشیکاوا و مان در مثال‌های ۱.۴ و ۲.۴

لذا الگوریتم پیشنهادی (۱.۳) نه تنها از نظر تئوری اثبات‌شده است، بلکه از نظر عملی نیز در مقایسه با روش‌های کلاسیک مان و ایشیکاوا، همگرایی سریع‌تر و دقت بالاتری را نشان می‌دهد. عملکرد برتر الگوریتم پیشنهادی (۱.۳) ناشی از ساختار ترکیبی آن است که شامل مؤلفهء اینرسی، حل مسئلهء تعادل و تصویر متریک می‌باشد. همچنین، انعطاف‌پذیری پارامتری و توانایی کار با نگاشت‌های پیچیده از مزایای کلیدی آن هستند.

فهرست منابع

[1] Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer.

[2] Alizadeh, S. and Moradlou, F., 2015. Weak and strong convergence theorems for m-generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, Topol. Methods Nonlinear Anal., 46(1), pp. 315–328.

[3] Alizadeh, S. and Moradlou, F., 2016 A strong convergence theorem for equilibrium problems and generalized hybrid mappings, Mediterr. J. Math., 13, pp. 379–390. doi: 10.1007/s00009-014-0462-6

[4] Alizadeh, S. and Moradlou, F., 2017. Weak and strong convergence theorems and a nonlinear ergodic theorem for N-generalized hybrid mappings, Asian-European Journal of Mathematics, 10(1), (15 pages). doi: 10.1142/s1793557117500012

[5] Alizadeh, S. and Moradlou, F., 2018. New hybrid method for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 9(1), pp. 147–159. doi: 10.22075/ijnaa.2018.12168.1614

[6] Alizadeh, S. and Moradlou, F., 2022. A monotone hybrid algorithm for a family of generalized nonexpansive mappings in Banach spaces, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 13(2), pp. 2347–2359. doi: 10.22075/ijnaa.2021.18349.2005

[7] Alizadeh, S. and Moradlou, F., 2026. Inertial Shrinking Projection Algorithm for Relatively Nonexpansive Mappings, Sahand Communications in Mathematical Analysis, 23(1), pp. 39–59. doi:10.22130/scma.2025.2059700.2175

[8] Baiya, S. and Ungchittrakool, K., 2023. Modified inertial Mann's algorithm and inertial hybrid algorithm for k-strict pseudo-contractive mappings, Carpathian J. Math., 39(1), pp. 27–43. doi: 10.37193/cjm.2023.01.02

[9] Blum, E. and Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, Mathematics Students, 63, pp. 123–145.

[10] Ceng, L. C., Al-Homidan, S., Ansari, Q. H. and Yao, J. C., 2009. An iterative scheme for equilibrium problems and fixed point problems of strict pseudo-contraction mappings, J. Comput. Appl. Math., 223(2), pp. 967–974. doi:10.1016/j.cam.2008.03.032

[11] Cholamjiak,W., Cholamjiak, P. and Suantai, S., 2018. An inertial forward-backward splitting method for solving inclusion problems in Hilbert spaces, J. Fix. Point Theory Appl., 20(42) pp. 1–17. doi: 10.1007/s11784-018-0526-5

[12] Combettes, P. L. and Hirstoaga, S. A., 2005. Equilibrium programming in Hilbert spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 6, pp. 117–136.

[13] Dong, Q. L., Yuan, H. B., Cho, Y. J. and Rassias, Th. M., 2018. Modified inertial Mann algorithm and inertial CQ-algorithm for nonexpansive mappings, Optim. Lett., 12, pp. 87–102. doi: 10.1007/s11590-016-1102-9

[14] Giannessi, F., Maugeri, A. and Pardalos, P. M., 2001. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[15] Hojo, M., Takahashi, W. and Termwuttipong, I., 2012. Strong convergence theorem for 2-generalized hybrid mapping in Hilbert spaces, Nonlinear Anal., 75, pp. 2166–2176.

[16] S. Ishikawa, 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44(1), pp. 147–150. doi: 10.2307/2039245

[17] Itoh, S. and Takahashi, W., 1978. The common fixed point theory of single-valued mappings and multi-valued mappings, Pacific J. Math., 79, pp. 493–508.

[18] Jouymandi, Z. and Moradlou, F., 2018. Retraction algorithms for solving variational inequalities, pseudomonotone equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces, Numer Algor., 78, pp. 1153–1182. doi: 10.1007/s11075-017-0417-7

[19] Kocourek, P., Takahashi, W. and Yao, J.-C., 2010. Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces, Taiwanese J. Math., 14(6), pp. 2497–2511. doi: 10.11650/twjm/1500405997

[20] Kohsaka, F. and Takahashi, W., 2008. Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces, Arch. Math., 91 pp. 166–177. doi: 10.1007/s00013-008-2545-8

[21] Lorenz, D. A. and Pock, T., 2015. An inertial forward–backward algorithm for monotone inclusions, J. Math. Imaging Vis., 51, pp. 311–325. doi: 10.1007/s10851-014-0523-2

[22] Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4(3), pp. 506–510. doi: 10.2307/2032162

[23] Martinez-Yanes, C. and Xu, H. K., 2006. Strong convergence of CQ method fixed point biteration processes, Nonlinear Anal., 64(11), pp. 2400–2411. doi:10.1016/j.na.2005.08.018

[24] Maruyama, T., Takahashi, W. and Yao, M., 2011. Fixed point and mean ergodic theorems for new nonlinear mappings in Hilbert spaces, J. Nonlinear Convex Anal., 12, pp. 185–197.

[25] Moudafi, A. and Thera, M., 1999. Proximal and dynamical approaches to equilibrium problems, in: Lecture Note in Economics and Mathematical Systems, 477, Springer-Verlag, New York, pp. 187–201.

[26] Nakajo, K. and Takahashi, W., 2003. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. J. Math. Anal. Appl., 279(2), pp. 372–379. doi: 10.1016/S0022-247X(02)00458-4

[27] Polyak, B. T., 1964. Some methods of speeding up the convergence of iteration methods, USSR Comput. Math. Math. Phys., 4(5), pp. 1–17. doi: 10.1016/0041-5553(64)90137-5

[28] Qin, X., Cho, Y. J. and Kang, S. M., 2009. Convergence theorems of common elements for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces, J. Comput. Appl. Math., 225(1), pp. 20–30. doi: 10.1016/j.cam.2008.06.011

[29] Takahashi, W., 2009. Introduction to Nonlinear and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama.

[30] Takahashi, W., 2010. Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal., 11, pp. 79–88.

A Modified Inertial Ishikawa and CQ Algorithm for Equilibrium Problems and Generalized 2-Hybrid Mappings

S. Alizadeh[(1)] [2] and F. Moradlou[(2)]

[(1)] Department of Mathematics, Mara. C., Islamic Azad University, Marand, Iran
[(2)] Department of Mathematics, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

Communicated by: .....

Received: xxxx/xx/xx Accepted: xxxx/xx/xx

Abstract: In this paper, we introduce a novel hybrid algorithm for finding a common element between the solution set of an equilibrium problem and the fixed point set of nonlinear mappings in a Hilbert space. The bifunctions used satisfy standard conditions of monotonicity and continuity, and the mapping under consideration is a 2-generalized hybrid mapping that encompasses a wide class of nonlinear mappings, including nonexpansive, nonspreading, and hybrid mappings. Using the proposed algorithm, we establish a strong convergence theorem. Two numerical examples are presented along with a convergence table and comparative tables, demonstrating the efficiency of the algorithm in terms of simplicity and convergence speed compared to classical methods. The numerical results highlight the structural simplicity and superior convergence rate of the proposed algorithm over traditional iterative schemes.

Keywords: Fixed point, Hilbert space, Inertial algorithm, strong convergence.

[2]Corresponding author.
E-mail addresses: sattar.alizadeh@iau.ac.ir & alizades_ms@yahoo.com (S. Alizadeh), moradlou@sut.ac.ir & fridoun.moradlou@gmail.com (F. Moradlou).