مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال xxxx، دوره xx، شماره x، ص xxx–xxx

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: xxxx

معادلات شرطی برای معادلات تابعی پکسیدر

مهدی دهقانیان [۱] [۱] ، صادق ایزدی [۲] و صدیقه جاهدی [۲]

[۱] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

دبیر مسئول: . . . . . .

تاریخ دریافت: xxx تاریخ پذیرش: xxx

چکیده: در این مقاله، به کمک ویژگی‌های رده‌های توابع جمعی، $\mathbb{Q}$ –همگن و مربعی، سعی می‌کنیم، جواب‌های معادلهء تابعی پکسیدر

$$f_۱(x+y)+f_۲(x+y)+f_۲(x-y)=f_۱(x)+f_۱(y)+۲f_۲(x)+۲f_۲(y)$$

برای هر زوج $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$، با شرط معادلهء تابعی برای معادله و در نظر گرفتن چندجمله‌ای مقید دو متغیره $P(x,y)=۰$ به‌دست می‌آوریم. با انتخاب ضابطه‌های خطی یا توانی برای چندجمله‌ای مقید، خواص توابع $f_۱$ و $f_۲$ را در معادله تابعی پکسیدر، ارائه می‌دهیم. همچنین نتایج مشابه را در معادلات تابعی شامل رده‌های توابع جمعی، مربعی و اشتقاق اثبات خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: اشتقاق، تابع جمعی، تابع دوجمعی ، تابع مربعی.

رده‌بندی ریاضی: 39B22; 39B55

۱ مقدمه و مفاهیم پایه

معادلات تابعی یکی از شاخه‌های با اهمیت در ریاضیات می‌باشد. این شاخهء ریاضیات از قرن‌ها پیش مورد توجه ریاضی‌دانان بوده و نقش مهمی در توسعهء نظریه‌های ریاضی و کاربردهای عملی داشته است. معادلات تابعی در زمینه‌های مختلفی از جمله مهندسی، فیزیک نظری، علوم کامپیوتر، اقتصاد و سایر علوم دیگر کاربرد دارند. بنابراین پیدا کردن جواب‌های معادلات تابعی جذاب و مهم است.

در سالهای اخیر تعدادی از ریاضی‌دانان روی شرایطی که تحت آن‌ها توابع جمعی و مربعی، پیوسته باشند، تحقیقاتی انجام داده‌اند. در قضایای زیر، تمرکز بر افزودن شرایطی اضافه بر توابع جمعی است تا بتوان پیوستگی آن‌ها را بر نواحی مشخصی اثبات کرد یا ارتباط آن‌ها را

[۱] نویسنده مسئول مقاله

(M. Dehghanian) mdehghanian@sirjantech.ac.ir , (S. Izadi) s.izadi@sutech.ac.ir
(S. Jahedi)jahedi@sutech.ac.ir

با اشتقاق بررسی نمود. این فرآیند، از لحاظ ریاضی دارای اهمیت خاصی است زیرا شناخت دقیق رفتار تابع در ناحیه‌های خاص، امکان بررسی ویژگی‌های بنیادی آن را فراهم می‌کند ([۶–۱۰] را ببینید).

تابع $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جمعی نامیده می‌شود اگر معادله

$$A(x+y) = A(x) + A(y), \tag{۱.۱}$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد. اگر $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع جمعی باشد، آن‌گاه A تابعی $\mathbb{Q}$ – همگن است. یعنی

$$A(rx) = rA(x), \tag{۲.۱}$$

برای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $r \in \mathbb{Q}$ ([۱۱، قضیهء ۱.۲.۵] را مشاهده کنید). در زیر نیشی یاما (Nishiyama) و همکاران [۱۳] در سال ۱۹۶۸ با اضافه کردن یک شرط پیوستگی جواب معادلهء تابعی (۱.۱) را نتیجه گرفتند.

قضیه **۱.۱**. [۱۳] فرض کنید $m \in \mathbb{Z}$ و $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع جمعی باشد. اگر A در معادلهء

$$A(x^m) = x^{m-1}A(x), \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

صدق کند، آن‌گاه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $A(x) = A(1)x$.

تابع $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مربعی نامیده می‌شود هرگاه در معادلهء

$$\delta(x+y) + \delta(x-y) = 2\delta(x) + 2\delta(y),$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ برقرار باشد. برای نمونه، اگر $A_1, A_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی جمعی باشند آن‌گاه به راحتی می‌توان دید که توابع $A_1(x)A_2(x)$ و $A_1(x^2)$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ توابعی مربعی هستند. تابع $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دوجمعی نامیده می‌شود اگر نسبت به هر متغیر، جمعی باشد. تابع دو جمعی B را متقارن گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $B(x, y) = B(y, x)$.

ملاحظه **۲.۱**. [۲] تابع $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مربعی است اگر و فقط اگر تابع دوجمعی متقارن $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathbb{R}$، $\delta(x) = B(x, x)$. هم‌چنین این B یکتاست.

در سال ۱۹۶۵، اکزل (Aczel) [۱] نشان داد که متناظر به هر تابع مربعی $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، تابع دوجمعی و متقارن $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد که به صورت

$$B(x, y) = \frac{1}{2}[\delta(x+y) - \delta(x) - \delta(y)], \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{۳.۱}$$

تعریف می‌شود. با بکار بردن خاصیت $\mathbb{Q}$ – همگنی توابع جمعی می‌توان دید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $r, s \in \mathbb{Q}$،

$$B(rx, sy) = rsB(x, y), \qquad \delta(rx) = B(rx, rx) = r^2\delta(x).$$

هم‌چنین با استفاده از (۳.۱) و استقراء روی n می‌توان دید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $\nu_0, \cdots, \nu_n \in \mathbb{R}$ داریم

$$\delta\left(\sum_{i=0}^{n} \nu_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \delta(\nu_i) + 2 \sum_{0 \le j < k \le n} B(\nu_j, \nu_k). \tag{۴.۱}$$

تابع جمعی $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اشتقاق نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $\theta(xy) = x\theta(y) + \theta(x)y$. این نتیجه می‌دهد که $\theta(1) = 0$. بنابراین هر اشتقاق خطی متحد با صفر است. در گزارهء زیر وجود اشتقاق‌های ناصفر ثابت شده است.

گزاره **۳.۱**. [۹] فرض کنید $L \in \mathbb{R}$ و $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع جمعی باشد که در شرط

$$A(x^2) = LxA(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

صدق کند. در این صورت $A = 0$ یا $L \in \{1, 2\}$. علاوه بر این اگر $L = 1$ ، آن‌گاه $A(x) = cx$ جایی‌که $c \in \mathbb{R}$ ثابت است و اگر $L = 2$ ، آن‌گاه A اشتقاق است.

تابع $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو-اشتقاق نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ نگاشت‌های

$$t \mapsto H(t, x), \qquad t \mapsto H(x, t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

اشتقاق باشند.
تابع جمعی $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را اشتقاق از مرتبهٔ ۲ گوییم هرگاه تابع دو-اشتقاق متقارن $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$،

$$A(xy) - xA(y) - A(x)y = H(x, y).$$

مجموعهٔ تمام اشتقاق‌های از مرتبهٔ ۲ را با نماد $D_2(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.
بوروس (Boros) و گاردا (Garda) [۶] در سال ۲۰۱۸ توابع مربعی که در معادلهٔ شرطی

$$x^2\delta(y) = y^2\delta(x), \tag{۵.۱}$$

که در آن $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ نقاطی روی گراف یک تابع توانی هستند را مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۱۹ گاردا [۱۰] جواب معادلهٔ تابعی مربعی را تحت شرط اضافی (۵.۱) که در آن زوج $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ شرط $x^2 - y^2 = 1$ یا شرط $x^2 + y^2 = 1$ برآورده می‌کنند مورد بررسی قرار داده است.
بوروس و گاردا [۷] در سال ۲۰۲۳ شرایط لازم را برای توابع مربعی $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که معادلهٔ اضافی (۵.۱) را تحت شرط $xy = 1$ برآورده می‌کنند، مورد بررسی قرار دادند.
دهقانیان و همکاران [۸] جواب معادلهٔ تابعی دریگاس

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y) + f(-y),$$

که در شرط اضافی

$$(y^2 + y)f(x) = (x^2 + x)f(y),$$

که در آن $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ نقاطی روی گراف یک تابع توانی هستند را تعیین کرده‌اند. هم‌چنین در [۱۲] نویسندگان جواب‌های معادلهٔ تابعی پکسیدر مربعی را روی یک دامنه محدود تعیین کرده‌اند.

قضیه ۴.۱. [۶] فرض کنید $L \in \mathbb{R}$. اگر تابع مربعی $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در معادلهٔ شرطی

$$\delta\left(x^2\right) = Lx^2\delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{۶.۱}$$

صدق کند، آن‌گاه $\delta = 0$ یا $L \in \{1, 2, 4\}$. در این حالت‌ها برای δ نمایش‌های زیر ارائه شده‌اند.

(i) تابع مربعی δ به ازای $L = 1$ در شرط (۶.۱) صدق می‌کند اگر و فقط اگر

$$\delta(x) = x^2\delta(1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) تابع مربعی δ به ازای $L = 2$ در شرط (۶.۱) صدق می‌کند اگر و فقط اگر $\psi \in D_2(\mathbb{R})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\delta(x) = 4x\psi(x) - \psi(x^2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) اگر $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک دو-اشتقاق متقارن باشد، آنگاه

$$\delta(x) = H(x, x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

جوابی برای معادلهٔ تابعی مربعی می‌باشد که در معادلهٔ (۶.۱) به ازای $L = 4$ صدق می‌کند.

در این مقاله جواب‌های معادلهٔ تابعی پکسیدر

$$f_۱(x+y)+f_۲(x+y)+f_۲(x-y)=f_۱(x)+f_۱(y)+۲f_۲(x)+۲f_۲(y), \qquad (۷.۱)$$

که در معادلهٔ شرطی

$$yf_۱(x)+y^۲f_۲(x)=xf_۱(y)+x^۲f_۲(y), \qquad (۸.۱)$$

برای هر زوج $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$ که در شرط چندجمله‌ای دو متغیرهٔ $P(x,y)=۰$ صدق می‌کنند مورد بحث و بررسی قرار گرفته‌اند. اگر $P(x,y)=ax+by+c$ جایی‌که a، b و c اعداد حقیقی ناصفر هستند یا $P(x,y)=x^n-y$ که n عدد طبیعی و $n\geq ۲$، نشان می‌دهیم که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f_۱(x)=xf_۱(۱)$ و $f_۲(x)=x^۲f_۲(۱)$. هم‌چنین نتایجی پیرامون توابع جمعی، مربعی و اشتقاق ارائه می‌شود.

در ادامه چند قضیه که در بخش بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را ارائه می‌کنیم.

قضیه **۵.۱**. [۳] فرض کنید توابع $f_۱, f_۲ : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ در معادلهٔ (۷.۱) صدق کنند. در این صورت

$$f_۱(x)=A(x)-۲c, \qquad f_۲(x)=B(x,x)+c,$$

که در آن $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی جمعی، $B:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی دوجمعی و c یک ثابت حقیقی است.

لم **۶.۱**. [۶] فرض کنید $m\in\mathbb{N}$ و $\mathbb{F}$ یک میدان باشد. فرض کنید E یک مجموعهٔ دلخواه و $W\subset\mathbb{F}$ شامل حداقل $m+۱$ عضو باشد. هرگاه $P_j:E\to\mathbb{F}$ برای $j=۰,۱,...,m$ در معادلهٔ

$$\sum_{j=۰}^{m}P_j(x)r^j=۰,$$

برای هر $x\in E$ و $r\in W$ صدق کند، آنگاه برای هر $x\in E$ و $۰\leq j\leq m$، $P_j(x)=۰$.

تعریف می‌کنیم

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲=۱\}.$$

در ادامه قضیه‌ای که بوروس و اردی (Erdei) [۵] ثابت کردند را ارائه می‌دهیم و آن را در بخش بعدی به‌کار می‌بریم.

قضیه **۷.۱**. فرض کنید $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع جمعی باشد و در معادلهٔ

$$xA(x)+yA(y)=k,$$

برای هر $(x,y)\in S$ و عدد حقیقی و ثابت k صدق کند. آن‌گاه $\mathcal{F}(x)=A(x)-kx$ برای هر $x\in\mathbb{R}$ اشتقاق است.

۲ نتایج اصلی

در این بخش جواب‌های معادلهٔ تابعی پکسیدر (۷.۱) تحت شرایط اضافی تعیین گردیده‌اند.

قضیه **۱.۲**. فرض کنید a و b اعداد حقیقی ناصفر هستند. فرض کنید توابع $f_۱, f_۲ : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $h_۱, h_۲ : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در معادله (۷.۱) صدق کنند و $f_۱(۰)=h_۱(۰)=۰$. در این صورت معادلهٔ

$$y(f_۱+h_۱)(x)+y^۲f_۲(x)=x(f_۱+h_۱)(y)+x^۲h_۲(y), \qquad (۱.۲)$$

برای هر زوج $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$ که $y=ax+b$ برقرار است اگر و فقط اگر ثابت‌های $c_۱$ و $c_۲$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $x\in\mathbb{R}$،

$$f_۱(x)+h_۱(x)=c_۱x, \qquad f_۲(x)=h_۲(x)=c_۲x^۲.$$

اثبات. چون $f_۱(۰) = h_۱(۰) = ۰$ پس بنا به قضیهء ۵.۱ توابع جمعی $A_۱, A_۲ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و توابع دوجمعی متقارن $B_۱, B_۲ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} f_۱(x) &= A_۱(x), \qquad & f_۲(x) &= B_۱(x,x), \\ h_۱(x) &= A_۲(x), \qquad & h_۲(x) &= B_۲(x,x). \end{aligned}$$

فرض کنید $r \in \mathbb{Q}$. با قرار دادن $y = ax + b$ در معادلهء (۱.۲) و جایگزینی x با rx در این معادله خواهیم داشت

$$(rax+b)(f_۱+h_۱)(rx) + (rax+b)^۲ f_۲(rx) = rx(f_۱+h_۱)(arx+b) + r^۲x^۲h_۲(arx+b).$$

از این‌رو برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} &(rax+b)[A_۱(rx)+A_۲(rx)] + (rax+b)^۲B_۱(rx,rx) \\ &= rx[A_۱(arx+b)+A_۲(arx+b)] + r^۲x^۲B_۲(rax+b, rax+b). \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به ویژگی $\mathbb{Q}$ - همگنی توابع جمعی $A_۱, A_۲$ و دوجمعی $B_۱, B_۲$ معادلهء بالا برای هر $x \in \mathbb{R}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} &r^۴\left[a^۲x^۲B_۱(x,x) - x^۲B_۲(ax,ax)\right] + r^۳\left[۲abxB_۱(x,x) - ۲x^۲B_۲(ax,b)\right] \\ &+ r^۲\left[ax(A_۱+A_۲)(x) + b^۲B_۱(x,x) - x(A_۱+A_۲)(ax) - x^۲B_۲(b,b)\right] \\ &+ r\left[b(A_۱+A_۲)(x) - x(A_۱+A_۲)(b)\right] = ۰. \end{aligned}$$

اکنون طبق لم ۶.۱، هر ضریب از این چند جمله‌ای برای هر $x \in \mathbb{R}$ باید برابر صفر باشد. از ضریب $r^۱$ می‌بینیم که

$$b(A_۱+A_۲)(x) = x(A_۱+A_۲)(b),$$

و در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$ خواهیم داشت

$$A_۱(x) + A_۲(x) = c_۱x, \tag{۲.۲}$$

یا

$$f_۱(x) + h_۱(x) = c_۱x,$$

که در آن $c_۱ = \frac{(A_۱+A_۲)(b)}{b}$. با در نظرگرفتن ضریب $r^۲$ و (۲.۲) خواهیم داشت

$$B_۱(x,x) = c_۲x^۲, \qquad x \in \mathbb{R},$$

که در آن $c_۲ = \frac{B_۲(b,b)}{b}$.

براساس ضریب $r^۴$ و با فرض $x \neq ۰$ تقسیم طرفین بر $x^۲$ و توجه به این‌که $B_۱(۰,۰) = B_۲(۰,۰) = ۰$، نتیجه می‌شود که

$$B_۲(ax,ax) = a^۲B_۱(x,x).$$

با جایگذاری x با $\frac{x}{a}$ در معادلهء بالا داریم

$$h_۲(x) = B_۲(x,x) = a^۲B_۱\left(\frac{x}{a}, \frac{x}{a}\right) = c_۲x^۲ = f_۲(x),$$

که در آن $c_۲ = \frac{B_۲(b,b)}{b}$. □

نتیجه **۲.۲**. فرض کنید a و b اعداد حقیقی ناصفر بوده و فرض کنید توابع $f_۱, f_۲ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ جواب‌های معادلهء تابعی (۷.۱) باشند و $f_۱(۰) = ۰$. در این صورت معادلهء (۸.۱) برای هر زوج $(x,y) \in \mathbb{R}^۲$ که $y = ax + b$ برقرار است اگر و فقط اگر

$$f_۱(x) = xf_۱(۱), \qquad f_۲(x) = x^۲f_۲(۱), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

اثبات. این نتیجه‌ای از قضیهء (۱.۲) است. □

در نتیجهء بالا شرط $b \neq 0$ الزامی است. یعنی اگر $b = 0$ توابع f_1 و f_2 می‌توانند ناپیوسته باشند.
زیرا اگر $b = 0$ باشد، آنگاه (۸.۱) برای $y = ax$ به صورت

$$af_1(x) + a^2x^2f_2(x) = xf_1(ax) + x^2f_2(ax), \qquad x \in \mathbb{R},$$

در می‌آید. بنابراین داریم $f_1(ax) = af_1(x)$ و $f_2(ax) = a^2f_2(x)$. قرار می‌دهیم $f_1(x) = A(x)$ و $f_2(x) = (A(x))^2$ جایی‌که $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابع جمعی ناپیوسته‌ای است و برای هر $x \in \mathbb{R}$، $A(ax) = aA(x)$ ([۱۱] را ببینید). در نتیجه f_1 تابع جمعی ناپیوسته و f_2 تابع مربعی ناپیوسته می‌باشند که در شرط (۸.۱) صدق می‌کنند.

قضیه **۳.۲**. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2$ و فرض کنید توابع $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در معادله (۷.۱) صدق کنند و $f_1(0) = 0$. در این صورت معادلهء (۸.۱) برای هر زوج $(x, y) \in \mathbb{R}$ که $y = x^n$ برقرار است اگر و فقط اگر

$$f_1(x) = xf_1(1), \qquad f_2(x) = x^2f_2(1), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

اثبات. با جایگذاری $y = x^n$ در (۸.۱) و تقسیم طرفین بر $x \neq 0$ (چون $f_1(0) = 0$) به‌دست می‌آوریم

$$f_1(x^n) + xf_2(x^n) = x^{n-1}f_1(x) + x^{2n-1}f_2(x). \tag{۳.۲}$$

فرض کنید $r \in \mathbb{Q}$. اکنون با جایگذاری $x + r$ به جای x در (۳.۲) داریم

$$f_1\left((x+r)^n\right) + (x+r)f_2\left((x+r)^n\right) = (x+r)^{2n-1}f_2(x+r) + (x+r)^{n-1}f_1(x+r). \tag{۴.۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} &f_1\left(\sum_{m_1=0}^{n}\binom{n}{m_1}x^{m_1}r^{n-m_1}\right) + (x+r)f_2\left(\sum_{m_2=0}^{n}\binom{n}{m_2}x^{m_2}r^{n-m_2}\right) \\ &= \left[\sum_{l=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{l}x^lr^{2n-l-1}f_2(x+r) + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^kr^{n-k-1}\right]f_1(x+r). \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

بنابر قضیهء ۵.۱ می‌توان نوشت

$$f_1(x) = A(x), \qquad f_2(x) = B(x, x),$$

که در آن $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی جمعی و $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دوجمعی متقارن است (چون $f_1(0) = 0$).
از این‌رو معادلهء (۵.۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1=0}^{n}\binom{n}{m_1}r^{n-m_1}A(x^{m_1}) + (x+r)\Bigg(\sum_{m_2=0}^{n}\binom{n}{m_2}^2r^{2n-2m_2}B(x^{m_2}, x^{m_2}) \\ &\quad + 2\sum_{0\leq i<j\leq n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}r^{2n-i-j}B(x^i, x^j)\Bigg) \\ &\quad - \sum_{l=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{l}x^lr^{2n-l-1}\left(B(x,x) + r^2B(1,1) + 2rB(x,1)\right) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^kr^{n-k-1}(A(x) + rA(1)) = 0. \end{aligned}$$

برای هر x حقیقی و ثابت، چندجمله‌ای بالا از درجه حداکثر $۲n+۱$ است. بنابراین طبق لم ۶.۱ هر ضریب از این چندجمله‌ای برحسب r برابر صفر است. از این‌رو ضریب $r^{۲n+۱}$ برابر است با $B(۱,۱)-B(۱,۱)=۰$. این به ما می‌گوید ضریب چندجمله‌ای بالا کوچک‌تر از $۲n+۱$ است. هم‌چنین از ضریب $r^{۲n}$ می‌بینیم که

$$xB(۱,۱)+۲nB(x,۱)-۲B(x,۱)-(۲n-۱)xB(۱,۱)=۰, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

در نتیجه برای هر $x\in\mathbb{R}$، $B(x,۱)=xB(۱,۱)$.
با توجه به ضریب $r^{۲n-۱}$ خواهیم دید که

$$\begin{aligned}&\binom{n}{۱}^{۲}B(x,x)+۲nxB(x,۱)+۲\binom{n}{۲}B(x^{۲},۱)\\&=B(x,x)+۲(۲n-۱)xB(x,۱)+\binom{۲n-۱}{۲}x^{۲}B(۱,۱).\end{aligned}$$

(۶.۲)

چون برای هر $x\in\mathbb{R}$، $B(x,۱)=xB(۱,۱)$، پس از معادلهٔ بالا می توان دید که

$$\left(n^{۲}-۱\right)B(x,x)=\left(n^{۲}-۱\right)B(۱,۱), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

از آن‌جا که $n\geq ۲$ داریم

$$f_{۲}(x)=B(x,x)=x^{۲}B(۱,۱), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

با جایگذاری $f_{۲}$ در معادلهٔ (۳.۲) می‌بینیم که $A(x^{n})=x^{n-۱}A(x)$. درنتیجه بنابر قضیهٔ ۱.۱، نتیجه می‌گیریم که

$$A(x)=xA(۱), \qquad x\in\mathbb{R}.$$

اثبات عکس قضیه بدیهی است. □

قضیه **۴.۲**. فرض کنید توابع $f_{۱},f_{۲}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در معادلهٔ (۷.۱) صدق کنند و $f_{۱}(۰)=۰$. اگر معادلهٔ

$$x(f_{۱}+f_{۲})(x)+y(f_{۱}+f_{۲})(y)=k, \qquad (۷.۲)$$

برای هر $(x,y)\in S$ و عدد ثابت حقیقی k برقرار باشد، آنگاه $f_{۲}(x)=۰$ و

$$\mathcal{F}(x)=f_{۱}(x)-kx,$$

برای هر $x\in\mathbb{R}$ اشتقاق است.

اثبات. با استفاده از قضیهٔ (۵.۱) و این‌که $f_{۱}(۰)=۰$، معادلهٔ (۷.۲) به صورت زیر در می‌آید.

$$xA(x)+xB(x,x)+yA(y)+yB(y,y)=k, \qquad (۸.۲)$$

که در آن $(x,y)\in S$ و A تابعی جمعی و B تابعی دوجمعی است.
با جایگذاری x با $-x$ و y با $-y$ در معادلهٔ (۸.۲) و استفاده از ویژگی $\mathbb{Q}$ - همگنی A و B برای هر زوج $(x,y)\in S$ داریم

$$xA(x)-xB(x,x)+yA(y)+yB(y,y)=k, \qquad (۹.۲)$$

و

$$xA(x)+xB(x,x)+yA(y)-yB(y,y)=k. \qquad (۱۰.۲)$$

از جمع معادلات (۸.۲) و (۹.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$xA(x)+yA(y)=k, \qquad (x,y)\in S. \qquad (۱۱.۲)$$

بنابراین طبق قضیهٔ (۷.۱) برای هر $x\in\mathbb{R}$ تابع $\mathcal{F}(x)=f_{۱}(x)-kx$ اشتقاق است.
هم‌چنین از جمع معادلات (۸.۲) و (۱۰.۲) و به کار بردن (۱۱.۲) می‌بینیم که برای هر $x\in\mathbb{R}$، $f_{۲}(x)=B(x,x)=۰$. □

اگر توابع $f_۱, f_۲ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در معادله‌ء (۷.۱) صدق کنند، $f(۰) = ۰$ و معادله‌ء (۸.۱) برای هر زوج $(x, y) \in \mathbb{R}$ که $xy = ۱$ برقرار باشد، آنگاه معادله‌ء (۸.۱) به صورت زیر در می‌آید

$$xf_۱(x) + f_۲(x) = x^۳ f_۱\left(\frac{۱}{x}\right) + x^۴ f_۲\left(\frac{۱}{x}\right), \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{۰\}. \tag{۱۲.۲}$$

فرض کنید $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع اشتقاق ناصفر باشد (وجود چنین تابعی در [۱۱] ثابت شده است). بنابراین

$$\theta\left(\frac{۱}{x}\right) = -\frac{۱}{x^۲}\theta(x), \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{۰\}. \tag{۱۳.۲}$$

از این‌رو $f_۱(x) = cx$ و $f_۲(x) = (\theta(x))^۲$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ و عدد ثابت حقیقی c در (۱۲.۲) و (۱۳.۲) صدق می‌کنند در حالی که $f_۲$ تابعی ناپیوسته است.

قضیه **۵.۲**. فرض کنید $L \in \mathbb{R}$. فرض کنید توابع $f_۱, f_۲ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در معادله‌ء (۷.۱) صدق کنند. اگر $f_۱$ و $f_۲$ در معادله‌ء شرطی

$$(f_۱ + f_۲)\left(x^۲\right) = Lx(f_۱ + xf_۲)(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{۱۴.۲}$$

صدق کنند، آنگاه یکی از گزاره‌های زیر برقرار است.

(i) معادله‌ء (۱۴.۲) به ازای $L = ۱$ برقرار است اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f_۱(x) = xf_۱(۱)$ و $f_۲(x) = x^۲ f_۲(۱)$.

(ii) معادله‌ء (۱۴.۲) به ازای $L = ۲$ برقرار است اگر و فقط اگر تابع $f_۱$ یک اشتقاق باشد و تابع $\psi \in D_۲(\mathbb{R})$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$f_۲(x) = ۴x\psi(x) - \psi(x^۲), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(iii) به ازای $L = ۴$ داریم $f_۱ = ۰$ و $f_۲(x) = H(x, x)$ جایی‌که $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دو–اشتقاق متقارن است.

(iv) معادله (۱۴.۲) به ازای $L \notin \{۱, ۲, ۴\}$ برقرار است اگر و فقط اگر $f_۱ = f_۲ = ۰$.

اثبات. فرض کنید $r \in \mathbb{Q}$. با جایگزینی x با rx در (۱۴.۲) به‌دست می‌آوریم

$$f_۱\left(r^۲x^۲\right) + f_۲\left(r^۲x^۲\right) = Lrxf_۱(rx) + Lr^۲x^۲ f_۲(rx), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{۱۵.۲}$$

بنابر قضیه‌ء ۵.۱ می‌بینیم که برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$f_۱(x) = A(x) - ۲c, \qquad f_۲(x) = B(x, x) + c,$$

که در آن $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی جمعی و $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی دوجمعی متقارن و c یک ثابت است. بنابراین با استفاده از خاصیت $\mathbb{Q}$–همگنی توابع جمعی و دو جمعی معادله‌ء (۱۵.۲) به صورت زیر در می‌آید

$$r^۲A\left(x^۲\right) - ۲c + r^۴B\left(x^۲, x^۲\right) + c = Lr^۲xA(x) - ۲Lcrx + Lr^۴x^۲B(x, x) + Lcr^۲x^۲.$$

از این‌رو

$$\left[B\left(x^۲, x^۲\right) - Lx^۲B(x, x)\right]r^۴ + \left[A\left(x^۲\right) - LxA(x) - Lcx^۲\right]r^۲ + ۲Lcxr - c = ۰.$$

با به‌کار بردن لم ۶.۱ می‌بینیم که $c = ۰$ و هم‌چنین از ضرایب $r^۲$ و $r^۴$ به ترتیب معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم

$$f_۱\left(x^۲\right) = Lxf_۱(x),$$
$$f_۲\left(x^۲\right) = Lx^۲ f_۱(x).$$

اکنون با استفاده از گزاره‌ء ۳.۱ و قضیه‌ء ۴.۱ نتیجه‌ء مطلوب حاصل می‌شود. □

۳ نتیجه‌گیری

در این مقاله جواب‌های معادلهء تابعی پکسیدر (۷.۱) را تحت معادلات شرطی مشخص کرده‌ایم. علاوه بر این، نتایج مرتبط با توابع جمعی، مربعی و اشتقاق نیز استخراج شده‌اند.

فهرست منابع

[1] Aczél, J., 1965. The general solution of two functional equations by reduction to functions additive in two variables and with the aid of Hamel bases. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Ser. II Drustvo Mat. Fiz. Hrvatske*, 20, pp.65–73.

[2] Aczél, J. and Dhombres, J., 1989. *Functional equations in several variables*, Cambridge University Press, Cambridge. doi:10.1017/CBO9781139086578

[3] Adam, M., 2019. Alienation of the quadratic and additive functional equations, *Analysis Mathematica*, 45 (3), pp.449–460. doi:10.1007/s10476-019-0869-1

[4] Amou, M., 2020. Quadratic functions satisfying an additional equation, *Acta Mathematica Hungarica*, 162, pp.40–51. doi:10.1007/s10474-020-01047-0

[5] Boros, Z. and Erdei, P., 2005. A conditional equation for additive functions, *Aequationes mathematicae*, 70, pp.309–313. doi:10.1007/s00010-005-2810-x

[6] Boros, Z. and Garda-Mátyás, E., 2018. Conditional equations for quadratic functions, *Acta Mathematica Hungarica*, 154 (2), pp.389–401. doi:10.1007/s10474-018-0795-x

[7] Boros, Z. and Garda-Mátyás, E., 2023. Quadratic functions fulfilling an additional condition along the hyperbola $xy = 1$, *Aequationes mathematicae*, 97, pp.1141–1155. doi:10.1007/s00010-023-01018-0

[8] Dehghanian, M., Izadi, S. and Jahedi, S., 2024. The solution of Drygas functional equations with additional conditions, *Acta Mathematica Hungarica*, 174, pp.510–521. doi:10.1007/s10474-024-01488-x

[9] Ebanks, B., 2015. Characterizing ring derivations of all orders via functional equations: results and open problems, *Aequationes Mathematicae*, 89, pp.685–718. doi:10.1007/s00010-014-0256-8

[10] Garda-Mátyás, E., 2019. Quadratic functions fulfilling an additional condition along hyperbolas or the unit circle, *Aequationes mathematicae*, 93(2), pp.451–465. doi:10.1007/s00010-018-0591-2

[11] Kuczma, M., 2009. *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, 2nd edn. Birkhauser, Basel. doi:10.1007/978-3-7643-8749-5

[12] Izadi, S., Jahedi, S. and Dehghanian, M., 2025. Solutions of Pexiderized Functional Equation on Restricted Domain, *Journal of Mathematical Extension*, 19(6), pp.1–14. doi.org/10.30495/JME.2025.3396

[13] Nishiyama, A. and Horinouchi, S., 1968. On a system of functional equations, *Aequationes mathematicae*, 1, pp.1–5. doi:10.1007/BF01817568

Conditional equations for Pexider functional equations

Mehdi Dehghanian[(1)] [2] and Sadegh Izadi [(2)]and Sedigheh jahedi[(2)]

[(1)] Department of Mathematics, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran
[(2)] Department of Mathematics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Communicated by: . . . . . .

Received: . . . Accepted: . . .

Abstract: In this paper, with the help of the properties of the classes of additive functions, $\mathbb{Q}$-homogeneous and quadratic, we try to obtain the solutions of the Pexider functional equation

$$f_1(x+y)+f_2(x+y)+f_2(x-y)=f_1(x)+f_1(y)+2f_2(x)+2f_2(y)$$

for the pairs $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, by the condition of functional equation for the equation and considering a constrained polynomial of two variables $P(x,y)=0$. By choosing linear or power criteria for the constrained polynomial, we present the properties of the functions f_1 and f_2 in the Pexider functional equation. We will also prove similar results in functional equations involving the classes of additive, quadratic, and derivation functions.

Keywords: Derivation, additive functional equation, bi-additive functional equation, quadratic functional equation.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author
E-mail addresses: (M. Dehghanian) mdehghanian@sirjantech.ac.ir, (S. Izadi) s.izadi@sutech.ac.ir