مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال xxxx، دوره xx، شماره x، ص xxx–xxx

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: xxxx

مدل‌سازی ریاضی مبتنی بر عدالت برای تشکیل بهینه گروه‌های دانش‌آموزان در محیط‌های یادگیری مشارکتی پشتیبانی‌شده توسط رایانه

سجاد زمان‌آبادی [۱] و ابوالفضل رفیع‌پور [۱] [۱]

[۱] بخش آموزش ریاضی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

دبیر مسئول: . . . . . .

تاریخ دریافت: xxx تاریخ پذیرش: xxx

چکیده: یادگیری مشارکتی مبتنی بر رایانه امروزه به‌عنوان یکی از مؤلفه‌های آموزش نوین شناخته می‌شود؛ با این حال، تحقق ظرفیت‌های آموزشی آن تا حد زیادی به کیفیت و شیوه گروه‌بندی یادگیرندگان بستگی دارد. پژوهش حاضر با هدف دستیابی به گروه‌بندی بهینه و منصفانه، یک مدل ریاضی نوآورانه مبتنی بر برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی ارائه می‌دهد. نوآوری در این مدل، تلفیق سه مؤلفه کلیدی «سبک‌های یادگیری فلدر–سولومون»، «تنوع دانش قبلی» و «ترجیحات هم‌گروهی» به‌صورت هم‌زمان و همچنین اعمال «قید عدالت» است که توزیع منصفانه کیفیت هم‌گروهی‌ها را میان تمام اعضا تضمین می‌کند. برای ارزیابی تجربی، ۱۸ دانش‌آموز در سه قالب گروه‌بندی (عدالت‌محور، ترجیح‌محور و تصادفی) سازمان‌دهی شدند. مدل ریاضی با استفاده از حل‌کننده $CPLEX$ در محیط گمز به جواب بهینه سراسری با شکاف صفر درصد دست‌یافت. یافته‌های حاصل از تحلیل کوواریانس نشان داد که اثر نوع گروه‌بندی بر پیشرفت تحصیلی معنادار است ($p < ۰/۰۰۱$). نتایج مقایسه‌های زوجی حاکی از برتری قاطع مدل پیشنهادی بود؛ به‌طوری که میانگین نمرات پس‌آزمون در گروه عدالت‌محور (۱۸/۶۷) به طور معناداری بالاتر از گروه‌های ترجیح‌محور (۱۵/۰۰) و گروه‌های تصادفی (۱۱/۸۳) قرار گرفت. این نتایج اثبات می‌کند که مدل پیشنهادی علاوه بر تضمین بهینگی ریاضی در تشکیل گروه‌ها، منجر به بهبود معنادار عملکرد یادگیرندگان در محیط‌های مشارکتی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی ریاضی، یادگیری مشارکتی مبتنی بر رایانه، آموزش ریاضی، برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی، تشکیل گروه یادگیرنده.

رده‌بندی ریاضی: 33C45; 49-XX

[۱] نویسنده مسئول: ابوالفضل رفیع‌پور
(S. ZamanAbadi) sajjadzamanabadi@yahoo.com (A. Rafiepour) drafiepour@gmail.com

۱ مقدمه

در نظام‌های آموزشی نوین، یادگیری مشارکتی به‌عنوان یکی از ستون‌های اساسی انتقال دانش و تقویت مهارت‌های فراشناختی شناخته می‌شود. روندهای اخیر حاکی از آن است که در حوزه یادگیری مشارکتی، تأکید فزاینده‌ای بر ادغام فناوری‌های نوظهور شکل‌گرفته است؛ به‌ویژه فناوری‌هایی مانند تحلیل یادگیری، هوش مصنوعی و نیز واقعیت افزوده و مجازی که به طور روزافزون برای طراحی، پشتیبانی و بهینه‌سازی تعاملات گروهی به کار گرفته می‌شوند [۱۴].

دیدگاه‌های ویگوتسکی پشتوانه نظری مهمی برای تبیین نقش گروه‌های کوچک در رشد شناختی فراگیران فراهم می‌کند. بر اساس نظریه او، یادگیری در بستر تعاملات اجتماعی شکل می‌گیرد و همیاری میان یادگیرندگان می‌تواند زمینه‌ساز حرکت آنان به‌سوی منطقه رشد تقریبی باشد؛ مفهومی که به فاصله میان سطح عملکرد مستقل فرد و سطح عملکرد او با حمایت دیگران اشاره دارد. از این منظر، ممکن است کودک یا هر یادگیرنده‌ای در یک سطح معین از توانایی ذهنی قادر به حل مسئله باشد، اما مشارکت با همتایان تواناتر یا دریافت حمایت آموزشی، این امکان را فراهم می‌سازد که توان بالقوه او شکوفا شده و به سطوح بالاتری از یادگیری دست یابد؛ بنابراین، ظرفیت یادگیری انسان صرفاً به عملکرد بالفعل او محدود نیست، بلکه بخشی از آن در تعاملات اجتماعی و از طریق یاری و هدایت مناسب فعال می‌شود [۳۰].

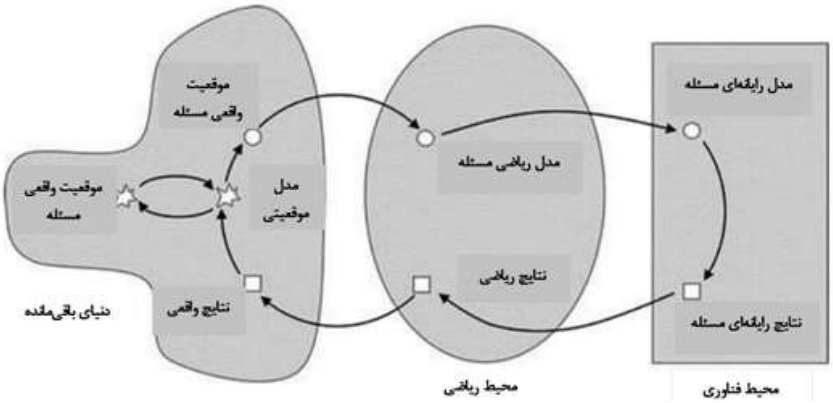
سومرو و آراین (۲۰۲۳) در پژوهشی تحت عنوان «یادگیری مشارکتی تأثیرگذار و پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان» نشان دادند که یادگیری مشارکتی بر پیشرفت تحصیلی ریاضی دانش‌آموزان تأثیر مثبت داشته و دانش‌آموزان درگیر آن را خوشایند یافته و از محیط یادگیری لذت برده‌اند [۲۷]. همچنین کارالی و آیدمیر (۲۰۱۸) در پژوهشی با عنوان «تأثیر یادگیری مشارکتی بر پیشرفت تحصیلی و نگرش دانش‌آموزان در کلاس ریاضی» به این نتیجه دست‌یافته‌اند که یادگیری مشارکتی هم بر پیشرفت تحصیلی و هم بر نگرش دانش‌آموزان نسبت به ریاضی تأثیر مثبت دارد [۱۵]. با این حال، اثربخشی این استراتژی آموزشی بیش از آنکه وابسته به محتوای آموزشی باشد، تابعی از نحوه سازمان‌دهی و ترکیب‌بندی اعضای گروه است. یکی از اولین تصمیمات در این حوزه، انتخاب میان ساختار «همگن» یا «ناهمگن» است. در گروه‌های همگن، دانش‌آموزان از نظر معیارهای خاصی مشابه یکدیگر هستند، درحالی‌که در گروه‌های ناهمگن، افرادی با ویژگی‌ها یا سطوح مختلف در کنار یکدیگر قرار می‌گیرند. در این زمینه، بکله (۲۰۰۵) گزارش می‌دهد که گروه‌های همگن برای دستیابی به اهداف آموزشیِ متمرکز و خاص کارآمدترند، درحالی‌که گروه‌های ناهمگن پتانسیل بیشتری برای پرورش نوآوری و تفکر خلاق از طریق تعامل میان دیدگاه‌های متفاوت دارند [۴]. همچنین نتایج نشان می‌دهد که گروه‌های ناهمگن به طور قابل‌توجهی از گروه‌های همگن و گروه‌های تصادفی در اکثر اندازه‌گیری‌ها بهتر عمل می‌کنند [۳۳].

در ادبیات پژوهش، طیف گسترده‌ای از معیارها برای تشکیل گروه‌های یادگیری پیشنهاد شده است که می‌توان آن‌ها را در دسته‌های شناختی و غیرشناختی طبقه‌بندی کرد. از جمله عوامل شناختی و وضعیت تحصیلی می‌توان به سطح دانش قبلی [۲، ۳، ۵، ۱۰، ۱۷، ۲۱، ۲۴] اشاره کرد. علاوه بر این، عواملی همچون میزان علاقه به موضوع [۵، ۱۷، ۲۳، ۳۴]، ویژگی‌های شخصی [۲، ۱۳، ۳۵]، سبک یادگیری [۲، ۲۰، ۳۴]، میزان انگیزه [۲، ۱۰] و سبک تفکر [۳۱] به‌عنوان پیشران‌های کلیدی در ترکیب‌بندی گروه‌ها مورد توجه قرار گرفته‌اند.

در کنار این عوامل، شواهد تجربی تأکید دارند که پویایی‌های اجتماعی نیز نقش تعیین‌کننده‌ای ایفا می‌کنند؛ چنان‌که پژوهش‌ها نشان می‌دهند اگر یادگیرندگان در گروهی با افرادی قرار گیرند که به همکاری با آن‌ها تمایل دارند (ترجیح هم‌گروهی)، عملکرد نهایی گروه به طور محسوسی بهبود می‌یابد [۷].

با توجه به پیچیدگیِ هم‌زمانِ معیارهای شناختی و ترجیحات اجتماعی، استفاده از مدل‌های ریاضی برای تشکیل گروه اجتناب‌ناپذیر است. مدل‌های ریاضی به دلیل دقت بالا، قابلیت آزمایش، و ارزان‌بودن در اجرا، ابزاری قدرتمند برای این منظور هستند. این مدل‌ها به دو دسته اصلی تقسیم می‌شوند: مدل‌های شبیه‌سازی که هدف آن‌ها تقلید از رفتار یک سیستم واقعی تحت سناریوهای مختلف است، و مدل‌های بهینه‌سازی که برخلاف رویکردهای توصیفی، دقیقاً تعیین می‌کنند برای دستیابی به بهترین نتیجه در یک موقعیت معین، چه اقداماتی باید صورت گیرد [۲۸].

در رویکردهای نوین آموزش مبتنی بر مدل‌سازی، ادغام فناوری تنها به معنای استفاده از ابزارهای محاسباتی نیست، بلکه مستلزم بازتعریف فرایند مدل‌سازی در یک محیط تعاملی است. در این راستا، افزون بر «دنیای واقعی» (به‌عنوان بستر مسئله) و «دنیای ریاضی» (به‌عنوان بستر انتزاع)، باید «جهان فناورانه» را به‌عنوان لایه‌ای موازات و میانی در نظر گرفت. این جهان فناورانه، نقشی فراتر از یک ابزار محاسباتی ساده ایفا می‌کند؛ به‌گونه‌ای که دانش‌آموز یا پژوهشگر قادر است با استفاده از محیط‌های رایانشیِ قاعده‌مند، پدیده‌های دنیای واقعی را به ساختارهای منطقی ترجمه کرده، نتایج را شبیه‌سازی نموده و به طور پویا به اعتبارسنجی مدل بپردازد. در شکل ۱ نمونه‌ای از چرخه‌های مبتنی بر محیط فناورانه آمده است.



شکل ۱: چرخه مدل‌سازی در محیط فناوری [۱۱]

در عصر حاضر، این فرایندها در بستر «یادگیری مشارکتی با پشتیبانی رایانه» بازتعریف شده‌اند. یادگیری مشارکتی با پشتیبانی رایانه یک حوزه میان‌رشته‌ای حاصل همگرایی روان‌شناسی، آموزش و علوم رایانه است که بر چگونگی تسهیل و ارتقای یادگیری مشارکتی توسط فناوری تمرکز دارد. پژوهش‌های متعدد، تأثیر مثبت این رویکرد فناورانه را بر یادگیری مشارکتی تأیید کرده‌اند [۶، ۱۲، ۱۶، ۱۹، ۲۶، ۲۹].

در بستر یادگیری مشارکتی با پشتیبانی رایانه، تشکیل گروه اولین و حساس‌ترین مرحله است؛ زیرا نحوه گروه‌بندی بر کمیت و کیفیت تعاملات همسالان تأثیر مستقیم دارد و به‌عنوان مهم‌ترین عامل تعیین‌کننده بهره‌وری و موفقیت گروه شناخته می‌شود [۱۸، ۳۲]. با وجود این، مدیریت پیچیدگی‌های مرتبط با معیارهای چندگانه (تحصیلی، ترجیحی و عدالت) نیازمند استراتژی‌های دقیق‌تر است، چرا که استراتژی‌های نامناسب می‌تواند منجر به ناکارآمدی گروه شود [۲۲]. با توجه به این اهمیت، پژوهش حاضر تلاش دارد تا با اتکا به مدل‌های بهینه‌سازی ریاضی در یک محیط فناورانه، رویکردی نوین و عدالت‌محور برای تشکیل گروه‌های یادگیری مشارکتی ارائه دهد؛ رویکردی که بتواند میان تنوع شناختی و ترجیحات یادگیرندگان توازنی بهینه برقرار سازد. در بسیاری از روش‌های متداول، گروه‌هایی شکل می‌گیرند که از نظر میزان سازگاری میان اعضا متعادل نیستند؛ به این معنا که برخی یادگیرندگان از سطح بالایی از سازگاری با سایر اعضای گروه برخوردارند، در حالی که برخی دیگر با سطوح پایین‌تری از سازگاری مواجه می‌شوند. بدیهی است که چنین وضعیتی به توزیع ناعادلانه رضایت در میان یادگیرندگان منجر می‌شود؛ به‌گونه‌ای که برخی از کارگروهی خود رضایت زیادی دارند، در حالی که برخی دیگر احساس نارضایتی می‌کنند. از این‌رو، فدا کردن رضایت یک یادگیرنده به‌منظور بیشینه‌سازی مجموع سازگاری‌های زوجی میان اعضای گروه، رویکردی قابل قبول نیست. برای غلبه بر این چالش، مدل پیشنهادی نباید امکان بهره‌گیری نامحدود از همه روابط سازگاری را فراهم کند؛ بلکه لازم است در گام نخست، بالاترین سطوح سازگاری برای هر یادگیرنده در نظر گرفته شود. این راهبرد تضمین می‌کند که عدالت به‌صورت متوازن در میان همه دانش‌آموزان رعایت شود [۲۵]. سؤالات پژوهش به شرح زیر هستند:

۱. مدل ریاضی گروه‌بندی یادگیرندگان با لحاظ‌کردن هم‌زمان معیارهای «دانش قبلی»، «ترجیحات اجتماعی» و «قید عدالت» چگونه تدوین و توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی حل می‌شود؟

۲. آیا بین عملکرد تحصیلی دانش‌آموزانی که در گروه‌های «عدالت‌محور» سازمان‌دهی شده‌اند، با دانش‌آموزان گروه‌های «تصادفی» و «ترجیح‌محور» تفاوت معناداری وجود دارد؟

۲ روش

پژوهش حاضر با هدف طراحی و ارزیابی یک رویکرد عدالت‌محور برای تشکیل گروه‌های یادگیرنده در محیط یادگیری مشارکتی مبتنی بر رایانه $CSCL$ انجام شد. این پژوهش از یک طرح نیمه‌آزمایشی تک گروهی با پیش‌آزمون و پس‌آزمون بهره گرفت. منطق اجرای پژوهش به این صورت بود که ابتدا گروه‌ها با استفاده از یک مدل ریاضی بهینه‌سازی‌شده و مقید به عدالت تشکیل شدند و سپس اثربخشی این نوع گروه‌بندی در یک محیط آموزشی واقعی و در مقایسه با دو روش دیگر مورد بررسی قرار گرفت. ازاین‌رو، روش پژوهش حاضر از دو بخش اصلی تشکیل شد: نخست، مدل‌سازی ریاضی برای تشکیل گروه‌ها و دوم، مطالعه تجربی برای ارزیابی کارایی گروه‌های حاصل.

۱.۲ روش تشکیل گروه و مدل‌سازی ریاضی

در مرحله نخست، برای تشکیل گروه‌های یادگیرنده، سه دسته داده اصلی از دانش‌آموزان گردآوری شد: سبک‌های یادگیری، ترجیحات یا تعاملات هم‌گروهی، و سطح دانش قبلی. مجموعه دانش‌آموزان با نماد زیر تعریف شد:

$$I = \{۱, ۲, \ldots, n\} \tag{۱.۲}$$

که در این پژوهش، پس از تخصیص ۶ دانش‌آموز به صورت تصادفی به دو گروه ۳ نفره، ۱۲ دانش‌آموز باقی‌مانده مبنای فرایند گروه‌بندی غیرتصادفی بر اساس مدل قرار گرفتند از این رو در قسمت مدل‌سازی مقدار $n = ۱۲$ در نظر گرفته شد. همچنین مجموعه گروه‌ها و مجموعه ابعاد سبک یادگیری به ترتیب به‌صورت زیر تعریف شدند:

$$G = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \tag{۲.۲}$$

(برای ۱۲ نفر و گروه‌های ۳ نفره: ۴ گروه)
مجموعه ابعاد سبک یادگیری:

$$D = \{۱, ۲, ۳, ۴\} \tag{۳.۲}$$

برای هر دانش‌آموز i و هر بُعد یادگیری d، سبک یادگیری با متغیر زیر نمایش داده شد:

$$s_i^{(d)} \in \{-۱, +۱\} \tag{۴.۲}$$

در این رابطه، مقادیر -۱ و $+۱$ نشان‌دهنده دو قطب هر بُعد از سبک یادگیری هستند. برای مثال، در ابعاد چهارگانه مدل فلدر–سیلورمن، این دو قطب شامل متوالی–کلی، فعال–تأملی، دیداری–کلامی و حسی–شهودی است که $+۱$ نشان‌دهنده سمت غالب (مثلاً متوالی/فعال/دیداری/حسی) و -۱ نشان‌دهنده سمت مقابل (کلی/تأملی/کلامی/شهودی) است. برای محاسبه میزان سازگاری سبک یادگیری بین دو دانش‌آموز i و j در بُعد d، شاخص زوجی زیر تعریف شد:

$$C_{ij}^{(d)} = \begin{cases} ۱, & \text{اگر } \operatorname{sgn}(s_i^{(d)}) = \operatorname{sgn}(s_j^{(d)}) \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۵.۲}$$

بر این اساس، اگر دو دانش‌آموز در یک بُعد یادگیری در یک قطب قرار داشته باشند، مقدار سازگاری آن‌ها در آن بُعد برابر ۱ و در غیر این صورت برابر ۰ خواهد بود. سپس، سازگاری کلی سبک یادگیری برای هر زوج از دانش‌آموزان از طریق میانگین‌گیری روی چهار بُعد محاسبه شد:

$$C_{ij}^{(LS)} = \frac{۱}{۴} \sum_{d=۱}^{۴} C_{ij}^{(d)} \tag{۶.۲}$$

علاوه بر سبک یادگیری، ترجیحات هم‌گروهی نیز در مدل لحاظ شد. اگر میزان ترجیح دانش‌آموز i برای هم‌گروهی با دانش‌آموز j با pref_{ij} نمایش داده شود، برای متقارن‌سازی این مقدار و حذف جهت‌دار بودن داده‌ها، سازگاری ترجیحی زوجی به شکل زیر تعریف شد:
امتیازات ترجیح (متقابل):

$$\mathrm{pref}_{ij} \in [۰, ۱] \tag{۷.۲}$$

پس از تقارن‌سازی:

$$C_{ij}^{(pref)} = \frac{\mathrm{pref}_{ij} + \mathrm{pref}_{ji}}{۲} \tag{۸.۲}$$

در بخش بعد، سطح دانش قبلی هر دانش‌آموز با know_i نمایش داده شد. فاصله دانشی میان دو دانش‌آموز i و j به‌صورت زیر محاسبه گردید:
دانش قبلی:

$$\text{know}_i \in \mathbb{R} \tag{۹.۲}$$

فاصله مطلق:

$$D_{ij}^{(know)} = |\,\text{know}_i - \text{know}_j\,| \tag{۱۰.۲}$$

از آنجا که این فاصله برای ترکیب‌شدن با سایر شاخص‌ها باید در مقیاس مشابه قرار گیرد، نرمال‌سازی آن به‌صورت زیر انجام شد:
نرمال‌سازی در بازه $[۰ , ۱]$:

$$U_{ij}^{(know)} = \frac{D_{ij}^{(know)} - \min_{p,q} D_{pq}^{(know)}}{\max_{p,q} D_{pq}^{(know)} - \min_{p,q} D_{pq}^{(know)}} \tag{۱۱.۲}$$

در نهایت، شاخص سازگاری کلی زوجی بین دو دانش‌آموز i و j به‌عنوان میانگین سه مؤلفه اصلی تعریف شد:

$$c_{ij} = \frac{U_{ij}^{(know)} + C_{ij}^{(LS)} + C_{ij}^{(pref)}}{۳} \tag{۱۲.۲}$$

که تضمین می‌کند:

$$۰ \le c_{ij} \le ۱ \tag{۱۳.۲}$$

بدین‌ترتیب، مقدار c_{ij} نشان‌دهنده میزان سازگاری کلی دو دانش‌آموز برای قرارگرفتن در یک گروه بود.
پس از محاسبه این شاخص‌ها، مسئله تشکیل گروه در قالب یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی فرموله شد. متغیر تصمیم مدل به‌صورت زیر تعریف گردید:

$$x_{ig} = \begin{cases} ۱, & \text{اگر دانش‌آموز } i \text{ در گروه } g \text{ قرار گیرد} \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱۴.۲}$$

به‌گونه‌ای که اگر دانش‌آموز i به گروه g تخصیص یابد، مقدار $x_{ig} = ۱$ و در غیر این صورت مقدار آن برابر ۰ است.
تابع هدف مدل، بیشینه‌سازی مجموع سازگاری‌های زوجی درون گروه‌ها بود:

$$\max Z = \sum_{g \in G} \sum_{i<j} c_{ij} x_{ig} x_{jg} \tag{۱۵.۲}$$

این تابع هدف به دنبال آن است که اعضای هر گروه تا حد ممکن از نظر سبک یادگیری، ترجیح هم‌گروهی و دانش قبلی با یکدیگر سازگار باشند.
مدل شامل چند قید اصلی بود. نخست، هر دانش‌آموز باید دقیقاً به یک گروه تخصیص داده شود:

$$\sum_{g \in G} x_{ig} = ۱ \quad \forall i \in I \tag{۱۶.۲}$$

دوم، اندازه هر گروه باید ثابت و برابر با ۳ نفر باشد:

$$\sum_{i \in I} x_{ig} = ۳ \quad \forall g \in G \tag{۱۷.۲}$$

سوم، اعمال قید عدالت مبتنی بر معیار Top-۸ بود. برای این منظور، برای هر دانش‌آموز i، مجموعه هشت همتای برتر او بر اساس مقادیر سازگاری کلی با نماد زیر تعریف شد:

$$\Gamma_i^{(۸)} = \{j \in I \setminus \{i\} \mid c_{ij} \text{ is among the 8 largest values of } c_{ik}, k \in I \setminus \{i\}\} \tag{۱۸.۲}$$

سپس محدودیت عدالت به‌گونه‌ای اعمال شد که هیچ دانش‌آموزی با فردی خارج از این مجموعه در یک گروه قرار نگیرد:

$$x_{ig} + x_{jg} \leq ۱ \quad \forall g \in G,\ \forall i \in I,\ \forall j \notin \Gamma_i^{(۸)} \tag{۱۹.۲}$$

(این قید یعنی: «اجازه نداریم فرد i را با کسی خارج از m نفر برترش در یک گروه بگذاریم.»)

مدل پیشنهادی به دلیل وجود حاصل‌ضرب متغیرهای تصمیم دودویی در تابع هدف، از نوع برنامه‌ریزی عدد صحیح غیرخطی شد. به طور مشخص، عبارت‌های $x_{ig}x_{jg}$ که نشان‌دهنده هم‌زمانی تخصیص دو یادگیرنده i و j به گروه g هستند، موجب غیرخطی شدن مدل می‌شدند. به‌منظور حل مدل با استفاده از حل‌گرهای استاندارد، فرمول‌بندی نهایی مسئله در قالب یک مدل برنامه‌ریزی درجه دوم عدد صحیح آمیخته ارائه شد. در این مدل، اگرچه بخشی از قیود به‌صورت خطی بیان شدند، تابع هدف شامل مؤلفه‌های درجه دوم باقی ماند؛ ازاین‌رو، مدل نهایی در رده مسائل $MIQP$ قرار گرفت. سپس این مدل در محیط $GAMS$ پیاده‌سازی و با استفاده از حل‌گر $CPLEX$ حل شد.

۲.۲ مطالعه تجربی برای ارزیابی کارایی گروه‌های حاصل

پژوهش حاضر با استفاده از طرح نیمه‌آزمایشی پیش‌آزمون–پس‌آزمون انجام شد. نمونه‌گیری به روش در دسترس صورت گرفت؛ به این معنا که پژوهشگر در سال تحصیلی ۱۴۰۴–۱۴۰۵ تدریس درس ریاضی این کلاس را بر عهده داشت و باتوجه‌به ماهیت اجرای فعالیت در بستر کلاس مجازی شاد، دانش‌آموزان بر اساس معیارهای ورود (از جمله امکان دسترسی پایدار به سامانه شاد و حضور منظم) به‌صورت هدفمند انتخاب شدند و در نهایت ۱۸ نفر واجد شرایط در پژوهش مشارکت کردند.

در ادامه، پیش‌آزمون برای سنجش دانش اولیه دانش‌آموزان و همچنین پرسشنامه سبک‌های یادگیری و ترجیح هم‌گروهی جهت مشخص‌شدن سبک یادگیری دانش‌آموزان و تمایل آنان جهت هم‌گروهی شدن با یکدیگر اجرا شد. شرکت‌کنندگان پس از انتخاب، در قالب ۶ گروه سه‌نفره سازمان‌دهی شدند، به‌گونه‌ای که دو گروه با روش تصادفی از طریق انتخاب تصادفی خود سامانه یادگیری، دو گروه با روش ترجیح‌محور از طریق پرسشنامه ترجیح یادگیری و علاقه خودشان در هم‌گروهی شدن با یکدیگر و دو گروه با روش عدالت‌محور تشکیل شد. گروه‌های عدالت‌محور با استفاده از مدل ریاضی پیشنهادی پژوهش و با لحاظ هم‌زمان معیارهای سازگاری و عدالت تشکیل شدند. سپس گروه‌ها فعالیت یادگیری مشارکتی یکسانی را در محیط $CSCL$ (بستر کلاس مجازی شاد) انجام دادند و در پایان، پس‌آزمون به‌منظور ارزیابی میزان یادگیری آنان اجرا شد. داده‌های حاصل با استفاده از تحلیل کوواریانس $(ANCOVA)$ و با کنترل اثر پیش‌آزمون تحلیل شدند. در این تحلیل، نوع گروه‌بندی به‌عنوان متغیر مستقل و نمره پس‌آزمون به‌عنوان متغیر وابسته در نظر گرفته شد و برای مقایسه‌های زوجی از اصلاح بونفرونی استفاده شد.

۳ یافته‌ها

نتایج حل مدل گروه‌بندی نشان داد که حل‌گر $CPLEX$ در محیط $GAMS$ توانست مدل را در مدت ۲۴۶/۲ ثانیه، با وضعیت بهینه حل کند. همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، مقدار تابع هدف برابر با ۶/۹۸۶۱۱۱ و شکاف نسبی و مطلق هر دو برابر با صفر بود که این امر نشان‌دهنده دستیابی به جواب بهینه است.

جدول ۱: خلاصه نتایج حل مدل گروه‌بندی

شاخص	مقدار
زمان مجاز حل	۳۰۰ ثانیه
زمان واقعی حل	۲۴۶/۲ ثانیه
مقدار تابع هدف Z	۶/۹۸۶۱۱۱
شکاف مطلق	۰/۰۰۰۰۰۰
شکاف نسبی	۰/۰۰۰۰۰۰٪
تعداد تکرارهای شاخه و کران	۹,۷۳۲,۱۷۴
تعداد گره‌های بررسی‌شده	۷۰۸,۹۷۵
میزان نقض قید عدالت	۰

در ادامه نتایج حاصل از تحلیل داده‌های گردآوری شده ارائه می‌گردد. ابتدا پیش‌فرض‌های آماری بررسی شده و سپس نتایج آزمون تحلیل کوواریانس گزارش می‌شود. باتوجه‌به اینکه حجم نمونه پژوهش کمتر از ۵۰ نفر (۱۸ نفر) است، برای بررسی نرمال بودن توزیع داده‌ها از آزمون شاپیرو–ویلک استفاده شد (جدول ۲).

جدول ۲: نتایج آزمون شاپیرو–ویلک برای بررسی نرمال بودن توزیع نمرات

شاخص	آماره آزمون	درجه آزادی	سطح معناداری
نمره پیش‌آزمون	۰/۹۱۴	۱۸	۰/۱۰۰
نمره پس‌آزمون	۰/۹۱۵	۱۸	۰/۱۰۴

باتوجه‌به اینکه سطح معناداری برای هر دو متغیر بیشتر از ۰/۰۵ است، فرض نرمال بودن داده‌ها تأیید می‌شود. ضریب آلفای کرونباخ پیش‌آزمون و پس‌آزمون ۸۵۵/۰نشان‌دهنده پایایی مطلوب و همسانی درونی بالای ابزار پژوهش است. روایی پیش‌آزمون و پس‌آزمون نیز توسط دو متخصص آموزش ریاضی مورد تایید قرار گرفته است. پرسشنامه سبک‌های یادگیری فلدر و سولومون (۱۹۹۷) بر مبنای مدل فلدر و سیلورمن (۱۹۸۸) ساخته شده است و در محیط‌های گوناگون یادگیری، از جمله محیط‌های یادگیری دیجیتال، کاربردی گسترده‌تری دارد [۸، ۹] که از مدل پرسشنامه سبک یادگیری فلدر و سولومون (۱۹۹۷) در مطالعات داخلی و خارجی نیز از نظر ویژگی‌های روان‌سنجی بررسی شده است. یافته‌ها حاکی از آن است که این ابزار در جامعه ایرانی از روایی و پایایی قابل‌قبول برخوردار بوده و قابلیت استفاده در سنجش سبک‌های یادگیری دانش‌آموزان را دارد. در همین راستا، صمدی (۱۳۹۰) در پژوهش خود، ضریب پایایی این ابزار را ۸۴/۰گزارش کرده است [۱].

به‌منظور مقایسه نمرات پس‌آزمون در سه روش گروه‌بندی (تصادفی، ترجیح‌محور، عدالت‌محور) با کنترل اثر پیش‌آزمون، از تحلیل کوواریانس تک‌متغیره ($ANCOVA$) استفاده شد. در این تحلیل، نمره پس‌آزمون متغیر وابسته، نوع گروه‌بندی متغیر مستقل و نمره پیش‌آزمون به‌عنوان کوواریت در مدل وارد شد. ابتدا آماره‌های توصیفی نمرات پس‌آزمون در سه گروه بررسی شد (جدول ۳). نتایج نشان داد میانگین نمرات پس‌آزمون در گروه عدالت‌محور از گروه ترجیح‌محور و گروه تصادفی بیشتر است.

جدول ۳: میانگین و انحراف معیار نمرات پس‌آزمون در گروه‌ها

گروه	تعداد	میانگین	انحراف معیار
گروه تصادفی	۶	۱۱/۸۳۳	۴/۵۷۸
گروه ترجیح‌محور	۶	۱۵/۰۰۰	۳/۶۸۷
گروه عدالت‌محور	۶	۱۸/۶۶۶	۱/۶۶۳
کل	۱۸	۱۵/۱۶۶	۴/۳۸۵

نتایج تحلیل کوواریانس (جدول ۴) نشان داد اثر پیش‌آزمون بر پس‌آزمون معنادار است. همچنین، پس از کنترل اثر پیش‌آزمون، اثر اصلی نوع گروه‌بندی بر نمره پس‌آزمون معنادار به دست آمد. بنابراین، میانگین‌های پس‌آزمونِ تعدیل‌شده در گروه‌ها با یکدیگر تفاوت معنادار دارند.

جدول ۴: نتایج تحلیل کوواریانس برای مقایسه نمرات پس‌آزمون

منبع تغییرات	مجموع مربعات	درجه آزادی	میانگین مربعات	آماره F	سطح معناداری	مجذور اتا جزئی
مدل تصحیح‌شده	۲۸۷/۸۷۹	۳	۹۵/۹۶۰	۳۴/۳۴۰	۰/۰۰۰	۰/۸۸۰
مقدار ثابت	۲۲۳/۹۶۰	۱	۲۲۳/۹۶۰	۸۰/۱۴۷	۰/۰۰۰	۰/۸۵۱
پیش‌آزمون (کوواریت)	۱۴۷/۵۴۶	۱	۱۴۷/۵۴۶	۵۲/۸۰۱	۰/۰۰۰	۰/۷۹۰
گروه (متغیر مستقل)	۹۶/۵۶۴	۲	۴۸/۲۸۲	۱۷/۲۷۸	۰/۰۰۰	۰/۷۱۲
خطا	۳۹/۱۲۱	۱۴	۲/۷۹۴			
کل تصحیح‌شده	۳۲۷/۰۰۰	۱۷				

باتوجه‌به اینکه سطح معناداری اثر متغیر گروه کمتر از ۰/۰۱ است، بین گروه‌ها از نظر نمرات پس‌آزمون، پس از کنترل اثر پیش‌آزمون، تفاوت معنادار آماری وجود دارد. برای تفسیر دقیق‌تر تفاوت‌ها، میانگین‌های تعدیل‌شده نمرات پس‌آزمون (پس از کنترل آماری پیش‌آزمون) محاسبه شد (جدول ۵). نتایج نشان می‌دهد گروه عدالت‌محور بالاترین میانگین تعدیل‌شده را دارد.

جدول ۵: میانگین‌های تعدیل‌شده نمرات پس‌آزمون به تفکیک گروه‌ها

گروه	میانگین تعدیل‌شده	خطای استاندارد
گروه تصادفی	۱۲/۲۸۸	۰/۶۸۵
گروه ترجیح‌محور	۱۵/۱۸۲	۰/۶۸۳
گروه عدالت‌محور	۱۸/۰۳۰	۰/۶۸۸

میانگین پیش‌آزمون در این مدل برابر با ۱۱/۸۳۳در نظر گرفته شده است. در ادامه برای مشخص‌شدن اینکه تفاوت‌ها دقیقاً بین کدام گروه‌ها معنادار است، از آزمون تعقیبی بونفرونی استفاده شد (جدول ۶). نتایج نشان داد تفاوت بین هر سه جفت گروه معنادار است.

جدول ۶: نتایج آزمون تعقیبی بونفرونی برای مقایسه جفتی گروه‌ها

گروه	گروه	تفاوت میانگین	خطای استاندارد	سطح معناداری
گروه تصادفی	گروه ترجیح‌محور	−۲/۸۹۴	۰/۹۶۶	۰/۰۲۹
گروه تصادفی	گروه عدالت‌محور	−۵/۷۴۱	۰/۹۷۷	۰/۰۰۰
گروه ترجیح‌محور	گروه عدالت‌محور	−۲/۸۴۸	۰/۹۷۲	۰/۰۳۳

نتایج تحلیل کوواریانس نشان داد پس از کنترل اثر پیش‌آزمون، نوع گروه‌بندی اثر معناداری بر نمره پس‌آزمون دارد. میانگین‌های تعدیل‌شده نیز نشان دادند گروه عدالت‌محور با میانگین۱۸/۰۳ عملکرد بالاتری نسبت به گروه ترجیح‌محور۱۵/۱۸ و گروه تصادفی ۱۲/۲۸ داشته است. آزمون تعقیبی بونفرونی نیز اختلاف معنادار بین هر سه گروه را تأیید کرد؛ به‌ویژه بیشترین تفاوت مربوط به گروه عدالت‌محور و گروه تصادفی۵/۷۴ (واحد) بود که برتری روش عدالت‌محور (مبتنی بر مدل ریاضی پیشنهادی) را نسبت به روش‌های متداول نشان می‌دهد.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف طراحی، اجرا و اعتبارسنجی یک مدل ریاضی عدالت‌محور برای تشکیل گروه‌های یادگیرنده در محیط یادگیری مشارکتی با پشتیبانی رایانه انجام شد تا پاسخی دقیق به چالش‌های سازمان‌دهی دستی و ناعادلانه در کلاس‌های درس بیابد. در تبیین نتایج حاصل از بخش فنی و در پاسخ به پرسش نخست پژوهش، می‌توان اذعان داشت که استفاده از مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح دودویی در محیط گمز و حل آن توسط الگوریتم‌های دقیق، مسیری بهینه برای مدیریت هم‌زمان معیارهای متکثر آموزشی و اجتماعی گشوده است. دستیابی به جواب بهینه سراسری با شکاف صفر درصد و رعایت کامل تمامی قیود، به‌ویژه قید عدالت، نشان داد که برخلاف روش‌های سنتی، مدل‌سازی ریاضی قادر است توازنی پایدار میان «بهینگی کل سیستم» و «رضایت فردی یادگیرندگان» برقرار کند. این یافته، بر ضرورت عبور از تصمیم‌گیری‌های شهودی در گروه‌بندی تأکید داشته و ثابت می‌کند که جهان فناورانه می‌تواند به‌عنوان لایه‌ای میانی، پدیده‌های پیچیده انسانی را به ساختارهای منطقی و قابل‌حل ترجمه نماید.

در ادامه، یافته‌های حاصل از بخش تجربی که در پاسخ به پرسش دوم پژوهش تنظیم شده بود، برتری معنادار کارکرد مدل پیشنهادی را به اثبات رساند. نتایج تحلیل کوواریانس نشان داد که نوع گروه‌بندی عاملی تعیین‌کننده در پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان است و تفاوت‌های

مشاهده شده در نمرات پس‌آزمون، پس از کنترل اثر پیش‌آزمون، از نظر آماری کاملاً معنادار است. برتری قاطع میانگین تعدیل‌شده گروه عدالت‌محور (۱۸/۰۳) در مقایسه با گروه‌های ترجیح‌محور (۱۵/۱۸) و تصادفی (۱۲/۲۸)، ریشه در تلفیق هوشمندانه سه مؤلفه سبک‌های یادگیری، دانش قبلی و ترجیحات اجتماعی دارد. این برتری عملکردی را می‌توان از منظر نظریه ویگوتسکی چنین تحلیل کرد که مدل ریاضی با ایجاد تنوعِ هدایت‌شده در دانش قبلی و سبک‌های یادگیری، بستری غنی برای تعامل در «منطقه رشد تقریبی» فراهم آورده است؛ به‌گونه‌ای که دانش‌آموزان نه‌تنها از همیاری همتایان تواناتر بهره‌مند شدند، بلکه به دلیل رعایت ترجیحات هم‌گروهی، در فضایی از پذیرش متقابل و انگیزه بالا به فعالیت پرداختند. نکته حائز اهمیت در این میان، نقش کلیدی «قید عدالت» است که مانع از تمرکز دانش و مهارت در یک گروه خاص و تضعیف گروه‌های دیگر شد. درحالی‌که در روش‌های تصادفی یا صرفاً ترجیح‌محور، همواره خطر انزوای برخی دانش‌آموزان یا تشکیل گروه‌هایی با سازگاری ضعیف وجود دارد، مدل عدالت‌محور با تضمین حضور هر فرد در کنار بهترین همتایان ممکن (بر اساس معیار Top-۸)، نوعی انصاف آموزشی را در کل کلاس توزیع کرد. این رویکرد باعث شد تا هیچ یادگیرنده‌ای به بهای بهینه‌شدن نمره کل، فدا نشود و همین احساس برابری، منجر به مشارکت فعال‌تر و در نهایت ارتقای عملکرد تحصیلی در درس ریاضی گردید.

از جمله محدودیت‌های این پژوهش می‌توان به حجم محدود نمونه آماری، اجرای آن در یک پایه تحصیلی و محدود بودن جامعه پژوهش به دانش‌آموزان پسر اشاره کرد که تعمیم‌پذیری یافته‌ها به جامعه بزرگ‌تر را با احتیاط مواجه می‌سازد. همچنین، محدودیت‌های مربوط به زیرساخت‌های فنی و آموزشی بستر اجرای پژوهش مانند قطعی‌های موقت شبکه شاد و عدم دسترسی یکنواخت و پایدار دانش‌آموزان به اینترنت مناسب نیز می‌تواند بر کیفیت تعاملات گروهی و نتایج حاصل اثرگذار بوده باشد. از این‌رو، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آینده، این مدل در مقیاس‌های بزرگ‌تر و نیز در پایه‌های تحصیلی و دروس متنوع‌تر، اجرا و اعتبارسنجی شود تا پایداری و کارآمدی آن در شرایط مختلف ارزیابی گردد.

تشکر و قدردانی

نویسندگان از تمامی دانش‌آموزان محترمی که در این پژوهش مشارکت داشتند، صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایند.

فهرست منابع

[۱] صمدی، معصومه (۱۳۹۰). بررسی ویژگی‌های روان‌سنجی پرسشنامه سبک یادگیری فلدر–سولومون در دختران دوره راهنمایی، *رویکردهای نوین آموزشی*، ۶(۱)، ص. ۳۹–۶۰.

[2] Abnar, S., Orooji, F. and Taghiyareh, F. (2012). An evolutionary algorithm for forming mixed groups of learners in web-based collaborative learning environments, in *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Technology Enhanced Education*. Kerala, India: IEEE, pp. 1–6. doi: 10.1109/ICTEE.2012.6208612.

[3] Ani, Z.C., Yasin, A., Husin, M.Z. and Hamid, Z.A. (2010). A method for group formation using genetic algorithm, *International Journal on Computer Science and Engineering*, 2(9), pp. 3060–3064. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:5822885.

[4] Bekele, R. (2005). *Computer-assisted learner group formation based on personality traits*. PhD dissertation. Hamburg University. Available at: https://ediss.sub.uni-hamburg.de/handle/ediss/1199.

[5] Dascalu, M.I., Bodea, C.N., Lytras, M., de Pablos, P.O. and Burlacu, A. (2014). Improving e-learning communities through optimal composition of multidisciplinary learning groups, *Computers in Human Behavior*, 30, pp. 362–371. doi: 10.1016/j.chb.2013.01.022.

[6] den Exter, K., Rowe, S., Boyd, W. and Lloyd, D. (2012). Using Web 2.0 technologies for collaborative learning in distance education: Case studies from an Australian university, *Future Internet*, 4(1), pp. 216–237. doi: 10.3390/fi4010216.

[7] Eshel, Y. and Kohavi, R. (2003). Perceived classroom control, self-regulated learning strategies, and academic achievement, *Educational Psychology*, 23(3), pp. 249–260. doi: 10.1080/0144341032000060093.

[8] Felder, R.M. and Silverman, L.K. (1988). Learning and teaching styles in engineering education, *Engineering Education*, 78(7), pp. 674–681. https://engr.ncsu.edu/wp-content/uploads/drive/1QP6kBI1iQmpQbTXL-08HSl0PwJ5BYnZW/1988-LS-plus-note.pdf.

[9] Felder, R.M. and Soloman, B.A. (1997). *Index of Learning Styles Questionnaire*. http://www.engr.ncsu.edu/learningstyles/ilsweb.html.

[10] Graf, S. and Bekele, R. (2006). Forming heterogeneous groups for intelligent collaborative learning systems with ant colony optimization, in Ikeda, M., Ashley, K.D. and Chan, T.-W. (eds.) *Proceedings of the 8th International Conference on Intelligent Tutoring Systems*. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4053. Jhongli, Taiwan: Springer, pp. 217–226. doi: 10.1007/11774303_22.

[11] Greefrath, G. (2011). Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling—Overview, in Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. and Stillman, G. (eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14*. Dordrecht: Springer, pp. 301–304. doi: 10.1007/978-94-007-0910-2_30.

[12] Huang, T.C., Huang, Y.M. and Yu, F.Y. (2011). Cooperative Weblog Learning in Higher Education: Its Facilitating Effects on Social Interaction, Time Lag, and Cognitive Load, *Educational Technology & Society*, 14(1), pp. 95–106. Available at: https://www.learntechlib.org/p/52314/.

[13] Jin, D., Qinghua, Z., Jiao, D. and Zhiyong, G. (2006). A method for learner grouping based on personality clustering, in *Proceedings of the 10th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design*. Nanjing, China: IEEE, pp. 1–6. doi: 10.1109/CSCWD.2006.253206.

[14] Kaliisa, R., López-Pernas, S., Misiejuk, K., Damşa, C., Sobocinski, M., Järvelä, S. and Saqr, M. (2025). A topical review of research in computer-supported collaborative learning: Questions and possibilities, *Computers & Education*, 228, 105246. doi: 10.1016/j.compedu.2025.105246.

[15] Karali, Y. and Aydemir, H. (2018). The effect of cooperative learning on the academic achievement and attitude of students in mathematics class, *Educational Research and Reviews*, 13(21), pp. 712–722. doi: 10.5897/ERR2018.3636.

[16] Larusson, J.A. and Alterman, R. (2009). Wikis to support the “collaborative” part of collaborative learning, *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 4(4), pp. 371–402. doi: 10.1007/s11412-009-9076-6.

[17] Lin, Y.T., Huang, Y.H. and Cheng, S.C. (2010). An automatic group composition system for composing collaborative learning groups using enhanced particle swarm optimization, *Computers & Education*, 55(4), pp. 1483–1493. doi: 10.1016/j.compedu.2010.06.014.

[18] Martin, E. and Paredes, P. (2004). Using learning styles for dynamic group formation in adaptive collaborative hypermedia systems, in *Proceedings of Workshops in Connection with the 4th International Conference on Web Engineering*. Munich: Rinton Press, pp. 188–197. https://repositorio.uam.es/server/api/core/bitstreams/04901623-5e82-4f32-a806-48d1234bdc34/content.

[19] Mercier, E.M., Higgins, S.E. and Joyce-Gibbons, A. (2014). The effects of room design on computer-supported collaborative learning in a multi-touch classroom, *Interactive Learning Environments*, published online. doi: 10.1080/10494820.2014.881392.

[20] Montazer, G.A. and Rezaei, M.S. (2013). E-learners grouping in uncertain environment using fuzzy ART-Snap-Drift neural network, in *Proceedings of the 4th International Conference on E-learning and E-teaching*. Shiraz, Iran: IEEE, pp. 112–116. doi: 10.1109/ICELET.2013.6681656.

[21] Moreno, J., Ovalle, D.A. and Vicari, R.M. (2012). A genetic algorithm approach for group formation in collaborative learning considering multiple student characteristics, *Computers & Education*, 58(1), pp. 560–569. doi: 10.1016/j.compedu.2011.09.011.

[22] Muehlenbrock, M. (2006). Learning Group Formation Based on Learner Profile and Context, *International Journal on E-Learning*, 5(1), pp. 19–24. Available at: https://www.learntechlib.org/primary/p/21767/.

[23] Ounnas, A. (2010). *Enhancing the automation of forming groups for education with semantics*. PhD dissertation. University of Southampton. Available at: https://eprints.soton.ac.uk/171641/.

[24] Pollalis, Y.A. and Mavrommatis, G. (2009). Using similarity measures for collaborating groups formation: A model for distance learning environments, *European Journal of Operational Research*, 193(2), pp. 626–636. doi: 10.1016/j.ejor.2007.11.053.

[25] Sadeghi, H. and Kardan, A.A. (2015). A novel justice-based linear model for optimal learner group formation in computer-supported collaborative learning environments, *Computers in Human Behavior*, 48, pp. 436–447. doi: 10.1016/j.chb.2015.01.020.

[26] Schneider, B. and Pea, R. (2013). Real-time mutual gaze perception enhances collaborative learning and collaboration quality, *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 8(4), pp. 375–397. doi: 10.1007/s11412-013-9181-4.

[27] Soomro, E.P. and Arain, M.A. (2023). Impactful cooperative learning and academic achievement of mathematics students, *Academy of Education and Social Sciences Review*, 3(2), pp. 103–110. doi: 10.48112/aessr.v3i2.465.

[28] Sterman, J.D. (1991). A skeptic's guide to computer models, in Barney, G.O., Kreutzer, W.B. and Garrett, M.J. (eds.) *Managing a nation: The microcomputer software catalog*. Boulder: Westview Press, pp. 209–229. https://web.mit.edu/jsterman/www/Skeptic's_Guide.pdf.

[29] Talan, T. (2021). The effect of computer-supported collaborative learning on academic achievement: A meta-analysis study, *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)*, 9(3), pp. 426–448. doi: 10.46328/ijemst.1243.

[30] Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press. doi: 10.2307/j.ctvjf9vz4.

[31] Wang, D.Y., Lin, S.S.J. and Sun, C.T. (2007). Diana: A computer supported heterogeneous grouping system for teachers to conduct successful small learning groups, *Computers in Human Behavior*, 23(4), pp. 1997–2010. doi: 10.1016/j.chb.2006.02.008.

[32] Webster, R. and Sudweeks, F. (2006). Enabling effective collaborative learning in networked virtual environments, in Méndez-Vilas, A., Solano Martín, A., Mesa González, J.A. and Mesa González, J. (eds.) *Current developments in technology-assisted education*. Badajoz: Formatex, pp. 1437–1440. doi: Not Available

[33] Xie, T. and Yu, J. (2026). Innovation-driven group composition for effective collaborative programming: Integrating multi-evidences of teacher, student, and peer assessments, *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, pp. 1–23. doi: 10.1007/s11412-026-09469-8.

[34] Zakrzewska, D. (2009). Cluster analysis in personalized e-learning systems, in Nguyen, N.T. and Szczerbicki, E. (eds.) *Intelligent Systems for Knowledge Management*. Studies in Computational Intelligence, Vol. 252. Heidelberg, Germany: Springer, pp. 229–250. doi: 10.1007/978-3-642-04170-9_10.

[35] Zhang, K., Cui, L., Wang, H. and Sui, Q. (2007). An improvement of matrix-based clustering method for grouping learners in e-learning, in *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Supported Cooperative Work in Design*. Melbourne, Australia: IEEE, pp. 1010–1015. doi: 10.1109/CSCWD.2007.4281577.

Fairness-Based Mathematical Modeling for Optimal Formation of Student Groups in Computer-Supported Collaborative Learning Environments

Sajjad ZamanAbadi[(1)] and Abolfazl Rafiepour[(1)2]

[(1)]Department of Mathematics Education, Faculty of Mathematics and Computer, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

Communicated by: . . . . . .

Received: . . . Accepted: . . .

Abstract: Computer-supported collaborative learning is today recognized as one of the components of modern education; however, realizing its educational potential largely depends on the quality and method of grouping learners. The present study aims to achieve optimal and fair grouping by presenting an innovative mathematical model based on binary integer programming. The innovation of this model lies in the simultaneous integration of three key components—Felder-Solomon learning styles, prior knowledge diversity, and peer-group preferences—as well as the application of a ”fairness constraint” that ensures a fair distribution of group quality among all members. For empirical evaluation, 18 students were organized into three grouping formats (fairness-oriented, preference-oriented, and random). The mathematical model achieved a global optimal solution with zero percent gap using the CPLEX solver in the GAMS environment. Findings from the analysis of covariance showed that the effect of grouping type on academic achievement was significant ($p < 0.001$). Pairwise comparison results indicated a decisive superiority of the proposed model; the mean post-test scores in the fairness-oriented group (18.67) were significantly higher than the preference-oriented groups (15.00) and random groups (11.83). These results prove that the proposed model, in addition to ensuring mathematical optimality in group formation, leads to a significant improvement in learner performance in collaborative environments.

Keywords: Mathematical Modeling, Computer-Supported Collaborative Learning, Mathematics Education, Binary Integer Programming, Learner Group Formation.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).

[2]Corresponding author: Abolfazl Rafiepour

sajjadzamanabadi@yahoo.com (S. ZamanAbadi) , drafiepour@gmail.com (A. Rafiepour)