تعیین هم‌زمان کنترل و وضعیت بهینه در سیستم متضمن غشا مرتعض مستدیر به روش گسسته‌سازی

علیرضا فخار زاده جهرمی[۱]، پرویز الهی، ندیمه جعفرپور

گروه ریاضی دانشگاه صنعتی شیراز

تاریخ دریافت: ۸۸/۵/۲۳ تاریخ پذیرش: ۸۹/۷/۲۵

چکیده: ارائه روشی برای تعیین همزمان توابع کنترل و مسیر در یک مسأله کنترل بهینه هدایت شده توسط یک سیستم غشا مرتعض مستدیر در دستگاه مختصات قطبی، هدف اصلی این مقاله است. ابتدا با تعیین نوع تابع مسیر و انجام گسسته‌سازی و سپس استفاده از خواص اندازه‌ها ، مساله خطی‌سازی می-شود. آنگاه با انجام چند گام تقریب زوج توابع کنترل و مسیر تقریباً بهینه به همراه مقدار بهینه تابع هدف از طریق حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی متناهی بدست می آید. مثال عددی نیز ارائه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: غشا مرتعش مستدیر، گسسته سازی، کنترل بهینه، برنامه ریزی خطی.

کد موضوع بندی ریاضی: ۷۶D۳۳ و ۴۹D۲۵.

[۱] آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله:a_fakharzadeh@sutech.ac.ir

۱-مقدمه

همواره در مسائل مقدار مرزی متضمن معادلات با مشتقات جزئی، استفاده از دستگاه‌های مختصاتی که نسبت به آنها دامنه مسأله مورد نظر دارای نمایش ساده‌ای باشد، اصلی کلی است . برهمین اساس است که استفاده از دستگاه مختصات قطبی برای مسائل مربوط به غشاهای مستدیر(پوسته‌های بدون ضخامت و دایره‌ای شکل) مناسب خواهد بود، زیرا می‌توان کرانه غشا را توسط معادله ساده (r=ثابت) نمایش داد.

هدف ما در این مقاله حل آن دسته از مسائل کنترل بهینه است که با معادله موج دو بعدی در دستگاه مختصات قطبی و در دامنه‌ای دایره شکل هدایت می‌شوند. ایده ما برای حل این رده مسائل یک ایده ترکیبی بر مبنای گسسته‌سازی است. ابتدا سیستم معادله موج با شرایط خاص مطرح می‌گردد، سپس با یافتن جوابی کلاسیک و ارائه یک راه حل ترکیبی بر مبنای استفاده از فرم جواب کلاسیک و روش نشاندن، سعی می‌شود مقدار تابع هدف و هم چنین توابع کنترل و مسیر به‌طور هم‌زمان به دست آورده شوند. در تمام این مراحل از قدرت گسسته‌سازی در جهت خطی‌سازی و ساده‌سازی مسأله استفاده خواهیم نمود.

تحقیقات در زمینه سیستم‌های کنترلی هدایت شده توسط معادلات موج همواره بنا بر نیاز توسط مهندسین و ریاضی‌دانان در طی چند سال اخیر در جریان بوده است. به عنوان نمونه مقاله‌ای به منظور تحقیق روی مدل تحلیلی برای ساختن معادله موج دو بعدی توسط وزیری و ریجو (۲۰۰۶) چاپ شد. مرتبه تقریب‌های عددی برای متغیرهای حالت و کنترل بهینه گردتس و همکاران (۲۰۰۶) مورد مطالعه قرار گرفته است که در آن روش عددی انتخاب شده برای مساله مورد نظر بر مبنای تفاضلات متناهی است. همچنین به‌عنوان نمونه‌های دیگر می‌توان به کارلسن (۲۰۰۸) ونواکفسکی (۲۰۰۸) اشاره کرد. ارائه روشی ترکیبی برای حل مسأله کنترل بهینه متضمن معادله موج ۲ بعدی دستگاه مختصات قطبی هدف این مقاله است. به‌منظور بیان مبانی مسأله، ابتدا در بخش بعد به معرفی سیستم موج در دامنه‌ای دایره‌ای شکل در دستگاه مختصات قطبی پرداخته می‌شود.

۲-نمایش مسأله در دستگاه مختصات قطبی

برای معرفی یک مسأله کنترل بهینه، ابتدا لازم است مفاهیم بنیادی مرتبط با آن بیان گردند؛ فرض کنید $v(t)$ تابعی کراندار و اندازه‌پذیر لبگ بر بازه $[0,T]$ باشد که تمامی مقادیر خود را در یک زیر مجموعه بسته و کراندار V از $\Re$ می‌گیرد. معادله موج دو بعدی (پوسته مرتعش) در دستگاه مختصات قطبی به‌صورت زیرمی‌باشد:

$$u_{tt} = c^{2}(u_{rr} + \frac{1}{r}u_{r} + \frac{1}{r^{2}}u_{\theta\theta}), \qquad (1)$$

که در شرایط اولیه زیر به‌صورت منحنی‌های کانتور، صدق می‌کند:

$$u(r,\theta,0) = f(r), u_{t}(r,\theta,0) = g(r); \qquad (2)$$

در این‌جا $f(r)$ مبین مکان اولیه و $g(r)$ بیان‌گر سرعت اولیه غشا (در زمان $t = 0$) هستند؛ در اصل در لحظه $t = 0$ فرض شده است که موج دارای تقارن محوری است. همچنین به دلیل ثابت شدن لبه‌های پوسته ، معادله (۱) روی مرز دایره‌ای شکل به شعاع R، صفر است؛ یعنی

$$u(R,\theta,t) = 0 \qquad (3)$$

چنین معادلاتی در مراجع زیادی نظیر ویل و برت (۱۹۸۳)معرفی گردیده‌اند. به‌علاوه فرض می‌شود کنترل در (r_{0},θ_{0}) که نقطه‌ای درون منحنی $r = R$ می‌باشد، توسط تابع $v(t)$ اعمال می‌گردد. تابع کنترل $v(t)$ را می‌توان به‌عنوان اعمال نیرو در نقطه (r_{0},θ_{0}) تعبیر نمود:

$$u_{t}(r_{0},\theta_{0},t) = v(t).$$

از این رو مسأله کنترل بهینه هدایت شده به‌وسیله معادلات یک غشا مرتعش به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Min \quad \mathrm{I} = \int_{D} f_{0}(r,\theta,t,v)\,dA \\ &S.to: u_{tt} = C^{2}(u_{rr} + \frac{1}{r}u_{r} + \frac{1}{r^{2}}u_{\theta\theta}); \\ &u(R,\theta,t) = 0; \\ &u(r,\theta,0) = f(r); \\ &u_{t}(r,\theta,0) = g(r); \\ &u_{t}(r_{0},\theta_{0},t) = v(t). \end{aligned} \qquad (4)$$

که در آن f_{0} یک تابع پیوسته بر مجموع $D \times V$ می‌باشد (جایی که $D = [0,R]\times[0,2\pi]\times[0,T]$). منظور از حل مساله (۴) یافتن زوج (u,v) به‌گونه‌ای است که ضمن برقراری شرایط مسأله، تابع هدف به بهترین صورت ممکن کمینه گردد (این هدف می‌تواند مبین انرژی یا خطایی مورد نظر از سیستم باشد که بایستی کمینه گردد).

تعریف ۱: زوج مسیر و کنترل $p = (u,v)$ را قابل قبول گویند هرگاه در شرایط مسأله (۴) صدق کرده و u جوابی کراندار باشد. مجموعه تمام زوج‌های قابل قبول را با F نمایش می-

دهیم. منظور از حل مساله (۴) تعیین زوج قابل قبول $(u,v)\in F$ (به‌صورت هم‌زمان) به شیوه‌ای ترکیبی است به‌طوری که تابعی $I(p)$ روی F کمینه گردد. منظور ما از راه حل ترکیبی این است که با در نظر گرفتن تابع مسیر به‌صورت جوابی کلاسیک از (۱) (مثلاً یک سری مثلثاتی با ضرایب مجهول)، از روش نشاندن برای حل مسأله کنترل بهینه (۴)، استفاده نماییم.

۲-۱ وجود جواب کلاسیک

اثبات وجود جواب معادله موج در دستگاه مختصات قطبی و چگونگی آن را می‌توان در مراجعی نظیر ویل و برت (۱۹۸۳) و سایمون (۱۹۷۲)، ملاحظه کرد. می‌دانیم که سمت راست در شرایط اولیه (۲) توابعی از r هستند. اما سمت چپ آنها توابعی از θ,r می‌باشند؛ این واقعیت مبین آن است که جواب‌های غشا مستدیر نمی‌توانند به θ وابسته باشند. بنابراین معادله (۱) شکل ساده‌تر زیر را به خود می‌گیرد:

$$u_{tt} = C^{2}(u_{rr} + \frac{1}{r}u_{r}). \tag{۵}$$

برای یافتن جواب (۵)، معمولاً از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود بر این اساس و مطابق آنچه که در مراجع مختلف نظیر ویل و برت (۱۹۸۳) ارائه گردیده است، جواب (۵) چنین است:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(r)G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(c\frac{\alpha_n}{R}t) + b_n \sin(c\frac{\alpha_n}{R})t)]J_0(\frac{\alpha_n}{R}r). \tag{۶}$$

تابع (۶) به‌صورت یک سری نامتناهی است که در آن ضرایب a_n و b_n مجهول هستند و J_0 تابع بسل نوع اول می‌باشد. می‌توان با قرار دادن $t=0$ و اعمال قیود (۲) مطابق با آنچه که در سایمون (۱۹۷۲) و ویل و برت (۱۹۸۳)، آمده a_n و b_n را که ضرایب سری بسل – فوریه ای (۶) می‌باشند، به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)} \int_0^R rf(r)J_0(\frac{\alpha_n}{R}r)dr, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = -2\left[c\frac{\alpha_n}{R}R^2 J_1^2(\alpha_n)\int_0^R rg(r)J_0(\frac{\alpha_n}{R}r)dr\right]^{-1} \quad n = 1, 2, \ldots$$

یادآور می‌شویم که گرچه تاکنون صرفاً جوابی کلاسیک برای معادله غشا مستدیر، به‌صورت یک سری مثلثاتی نامتناهی تعیین گردیده است، لیکن هنوز برقراری شرط آخر (۴) تضمین نشده است. در بخش بعد به این موضوع خواهیم پرداخت.

۳- گسسته‌سازی در حل ترکیبی

سعی ما بر ارائه یک شیوه حل ترکیبی برای مساله (۴) به‌منظور فائق آمدن به مشکلات و رسیدن به اهداف ذکر شده است. بدین منظور با استفاده از جواب ارائه شده در بخش قبل به-صورت یک سری مثلثاتی متناهی و استفاده توام از روش اندازه‌ها برای حل مسائل کنترل بهینه، به شیوه‌ای جدید، ایده اصلی ارائه راه حلی برای مساله (۴) خواهد بود.

ایده استفاده از اندازه‌ها برای حل مسایل کنترل بهینه، اولین بار توسط یانگ (۱۹۶۹) مطرح گردید. نمونه‌هایی از کاربرد این ایده به‌وسیله روزنبلوم (۱۹۵۲) ارائه گردیده است. سپس ربیو این ایده را به صورت یک نظریه در سال ۱۹۸۶ در کتابش منتشرکرد و بر مبنای آن استفاده-های متعددی از این روش برای اهداف مختلف توسط فخارزاده جهرمی و همکاران (۱۳۸۳)، فخارزاده جهرمی، صاحبی (۱۳۸۴) فخارزاده (۲۰۰۳)، فراهی (۱۹۹۶)، فخارزاده و روبیو (۲۰۰۹) و ناظمی و همکاران (۲۰۰۸) انجام گرفت. این روش که نشاندن نامیده شده است، دارای مزایای اساسی در مقایسه با سایر روش‌ها می‌باشد. از جمله آن‌ها عبارتند از : اثبات وجود جواب به صورتی خودکار، خطی بودن مساله جدید علیرغم غیر خطی بودن مساله اولیه (بدین ترتیب قادر خواهیم بود از قدرت آنالیز خطی بهره مند شویم) و قابلیت دستیابی به جوابی کلی. فراهی (۱۹۹۶) برای اولین بار این روش را برای حل سیستم‌های کنترلی خطی و غیر خطی متضمن معادله موج بکار برد. سپس فخار زاده و همکاران (۱۳۸۳) در تعیین دامنه بهینه یک معادله موج از این روش استفاده کردند.

استفاده ترکیبی از روش نشاندن و ساختار جواب کلاسیک بصورت سری مثلثاتی در دستگاه دکارتی برای معادلات یک بعدی و دو بعدی موج در گزارش دو طرح تحقیقاتی فخارزاده جهرمی و همکاران (۱۳۸۳) و فخارزاده جهرمی و صاحبی (۱۳۸۴) مطرح شده است. روش ترکیبی عبارت است از به‌کار بردن روش نشاندن، ضمن این که تابع مسیر به‌صورت یک سری مثلثاتی با ضرایب مجهولی در نظر گرفته می‌شود. در مقاله حاضر، این روش در مختصات قطبی برای معادله موج با شرایط اولیه وابسته به متغیر r و مرز دایره‌ای به‌کار می‌رود.

مشاهده شد که جواب معادله موج با شرایط داده شده به‌صورت سری نامتناهی (۶) است؛ همگرایی چنین سری‌هایی در میخایلف (۱۹۷۸) اثبات گردیده است. بنابراین می‌توان تقریبی از

جواب معادله (۵) را صرفاً با ترکیب خطی تعدادی متناهی از جملات اول سری (۶) به‌صورت زیر ارائه داد:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(c\frac{\alpha_n}{R}t)+b_n\sin(c\frac{\alpha_n}{R}t)]J_0(\frac{\alpha_n}{R}r). \qquad (۷)$$

که در آن a_n و b_nها ضرایبی مجهول بوده و N عدد صحیح ثابتی فرض می‌شود؛ بدین ترتیب در عمل خطای حاصل از حذف دم سری (۶) در محاسبه مقادیر ضرایب مجهول لحاظ خواهد شد.

با در نظر گرفتن تابع مسیر به‌صورت (۷)، قیود اول و دوم (۴) به‌طور خودکار لحاظ خواهند شد. لذا قیود سوم و چهارم به‌صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\sum_{n=1}^{N}a_nJ_0(\frac{\alpha_n}{R}r)=f(r)\ , \qquad \sum_{n=1}^{N}b_nc\frac{\alpha_n}{R}J_0(\frac{\alpha_n}{R}r)=g(r).$$

به‌منظور به‌کارگیری روش نشاندن، با انتگرال‌گیری از طریق قید آخر مسأله (۴) خواهیم داشت:

$$\int_0^T v(t)dt=\int_0^T u_t(r_0,\theta_0,t)dt=\sum_{n=1}^{N}[a_n(\cos(c\frac{\alpha_n}{R}T)-1)+b_n\sin(c\frac{\alpha_n}{R}T)]J_0(\frac{\alpha_n}{R}r). \qquad (۸)$$

با توجه به مطالب ذکر شده داریم:

گزاره ۱: با در نظر گرفتن جواب معادله غشا مستدیر (۱) با شرط مرزی(۳)، به‌صورت یک سری تقریبی (۷)، جواب مسأله زیر با جواب مسأله (۴) یکی خواهند شد.

$$\begin{aligned}
&Min: I(p)=\int_D f_0(r,\theta,v,t)dA\\
&S.to: \sum_{n=1}^{N}a_nJ_0(\frac{\alpha_n}{R}r)=f(r);\\
&\qquad \sum_{n=1}^{N}b_nc(\frac{\alpha_n}{R})J_0(\frac{\alpha_n}{R}r)=g(r);\\
&\qquad \int_0^T v(t)dt=\sum_{n=1}^{N}[a_n(\cos(c\frac{\alpha_n}{R}T)-1)+b_n\sin(c\frac{\alpha_n}{R}T)]J_0(\frac{\alpha_n}{R}r).
\end{aligned} \qquad (۹)$$

در مساله (۹) سمت راست قیود اول و دوم یعنی $f(r)$ و $g(r)$ مقادیر ثابتی نیستند و از عوامل غیر خطی (۹) به حساب می‌آیند. به‌منظور سوق مسأله به سوی یک مساله خطی و استفاده از مزایای آن، فرض می‌کنیم $0=r_1<r_2<\dots<r_l=R$ عناصری از یک زیر دنباله چگال در $[0,R]$ باشند (مثلاً اعداد گویا). در این‌صورت جواب مساله (۹) را با جواب مساله زیر

می‌توان تقریب نمود. لازم به ذکر است که هر چقدر l بزرگتر باشد، این تقریب دقیق تر خواهد بود:

$$Min : I(p) = \int_{\circ}^{T} [\sum_{i=۱}^{l} \sum_{j=۱}^{ll} \int_{\theta_{j-۱}}^{\theta_j} \int_{r_{i-۱}}^{r_i} f_{\circ}(r,\theta,v,t) dr d\theta] dt \equiv \int_{\circ}^{T} F_{\circ}(v,t) dt$$

$$S.to : \sum_{n=۱}^{N} a_n J_{\circ}(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = f(r_i), \quad i = ۱,۲,...,l; \qquad (۱۰)$$

$$\sum_{n=۱}^{N} b_n c \frac{\alpha_n}{R} J_{\circ}(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = g(r_i), \ \ i = ۱,۲,...,l;$$

$$\int_{\circ}^{T} v(t) dt = \sum_{n=۱}^{N} [a_n(\cos(c\frac{\alpha_n}{R}T) - ۱) + b_n \sin(c\frac{\alpha_n}{R}T)] J_{\circ}(\frac{\alpha_n}{R} r).$$

لازم به یادآوری است که دسته شروط اول و دوم در (۱۰) در اصل برای تعیین ضرایب a_n و b_n به‌طوری که شروط (۲) در نقاط معینی برقرار باشند، کافی هستند؛ زیرا با قبول یک خطای قابل قبول نظیر $\varepsilon = (\varepsilon_۱, \varepsilon_۲)$ می‌توان شروط زیر را به‌ترتیب جایگزین آنها نمود:

$$\sum_{n=۱}^{N} a_n J_{\circ}(\frac{\alpha_n}{R} r_i) - f(r_i) | \le \varepsilon_۱ \quad \forall i = ۱,۲,...,l$$
$$\sum_{n=۱}^{N} b_n c \frac{\alpha_n}{R} J_{\circ}(\frac{\alpha_n}{R} r_i) - g(r_i) | \le \varepsilon_2 \forall_i = ۱,۲,...,l$$

آنگاه خطای ε را به نوعی به تابع هدف اضافه نمود که در جریان عمل کمینه‌سازی، حداقل شدن این خطا نیز برآورد شود.

۴-خطی‌سازی در فضای اندازه‌ها

در این بخش از نظریه اندازه برای تقریب جواب (۱۰) توسط یک مسأله از نوع برنامه‌ریزی خطی، استفاده می‌شود. به‌عبارت دیگر می‌توان اذعان داشت که نوعی خطی‌سازی قوی انجام خواهد گرفت. با تعریف $\Omega = [\circ, T] \times V$، تابعی $\Lambda_v : C(\Omega) \to R$ با ضابطه $\Lambda_v(f) = \int_{\circ}^{T} f(t,v) dt$ مطابق با روبیو (۱۹۸۶)، یک تابعی خطی، مثبت و پیوسته است. از آن‌جا که نگاشت Λ_v بر حسب کنترل قابل قبول v تعریف شده است، پس مطابق روبیو (۱۹۸۶) انتقال $v \to \Lambda_v$ از زوج‌های قابل قبول در F به نگاشت‌های خطی، انتقالی یک به یک است. از این‌رو جواب مساله (۱۰) می‌تواند با جواب مساله زیر تقریب شود:

$$\begin{aligned}
&Min:\ \Lambda_v(F_\circ)\\
&S.to:\sum_{n=1}^{N} a_n J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = f(r_i),\ \ i = 1,2,...,l;\\
&\sum_{n=1}^{N} b_n c\,\frac{\alpha_n}{R} J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = g(r_i)\ \ \ i = 1,2,...,l;\\
&\Lambda_v(v) = \sum_{n=1}^{N}[a_n(\cos(c\,\frac{\alpha_n}{R}T) - 1) + b_n \sin(c\,\frac{\alpha_n}{R}T)]J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r).
\end{aligned} \tag{11}$$

می‌توان نشان داد که با متر اقلیدسی، Ω یک فضای هاسدورف است. اکنون آماده‌ایم تا زوج-های قابل قبول را با اندازه‌های رادن مثبت معرفی نماییم؛ بنا به قضیه نمایش ریس در روبیو (۱۹۸۶)، اندازه رادن مثبت و یکتای μ_v روی فضای $M^+(\Omega)$ (مجموعه اندازه‌های رادن مثبت بر Ω) چنان موجود است که:

$$\Lambda_v(f) = \mu_v(f) = \int_\Omega f d\mu,\quad \forall f \in C(\Omega).$$

با توجه به تعریف تابعی Λ_v و اندازه μ_v، مساله (۱۶) می‌تواند به‌صورت مسأله‌ای در نظریه اندازه‌ها بیان شود:

$$\begin{aligned}
&Min:\mu_v(F_\circ)\\
&S.to:\sum_{n=1}^{N} a_n J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = f(r_i),\quad i = 1,2,...,l;\\
&\sum_{n=1}^{N} b_n c\,\frac{\alpha_n}{R} J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = g(r_i),\quad i = 1,2,...,l;\\
&\mu_v(v) = \sum_{n=1}^{N}[a_n(\cos(c\,\frac{\alpha_n}{R}T) - 1) + b_n \sin(c\,\frac{\alpha_n}{R}T)]J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r)
\end{aligned} \tag{12}$$

تصویر تمام زوج‌های قابل قبول در F تحت انتقال $v \to \mu_v$ شامل تمام اندازه‌های $\mu_v \in M^+(\Omega)$ می‌باشد که معادله‌های (۱۲) را برآورد می‌سازند. این تصویر را به تنهایی می‌توان مجدداً با F نمایش داد، زیرا همان‌گونه که ذکر گردید این انتقال یک به یک می‌باشد. اما به‌همین دلیل، تمام مشکلات قبلی موجودند، زیرا فضاها معادل هستند و لذا عملاً تغییری در ماهیت آن‌ها ایجاد نشده است. اکنون تصویر F را گسترش می‌دهیم و مساله غیر کلاسیک جدید را چنین تعریف می‌کنیم: از میان تمام اندازه‌های رادن مثبت موجود در $M^+(\Omega)$ (نه لزوماً اندازه‌های به فرم μ_v ناشی شده از قضیه نمایش ریس) اندازه μ^* را جستجو می‌نماییم، که روابط (۱۲) را برقرار نموده و کمینه‌ساز تابع $\mu \to \mu(F_\circ)$ باشد؛ فضای جواب جدید را Q می‌نامیم. این گسترش ما را به جوابی کلی‌تر می‌رساند؛ زیرا فضای جواب بزرگتر خواهد شد و

مقدار اینفیموم یک تابع بر یک مجموعه بزرگتر همواره از مقدار اینفیموم آن بر مجموعه‌ای کوچک‌تر، کمتر خواهد بود. بنابراین، در این راستا به دنبال تعیین آن اندازه $\mu^* \in M^+(\Omega)$ می‌باشیم که دیگر لزوماً از طریق قضیه نمایش ریس معرفی نشده باشد، بلکه صرفاً در شروط مساله (۱۲) همراه با یک مجموعه شروط جدید (برای مشخص کردن کنترل بهینه) صدق کرده و تابع هدف را کمینه سازد؛ این مجموعه شروط جدید تضمین می‌کنند که تصویر اندازه بهینه بر بازه $[\circ, T]$، اندازه‌ای لبگ باشد. لذا مساله جدید برای حل چنین است:

$$
\begin{aligned}
&Min : \mu(F_\circ)\\
&S.to : \sum_{n=1}^{N} a_n J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = f(r_i), \qquad i = 1,2,\ldots,l;\\
&\qquad \sum_{n=1}^{N} b_n c \frac{\alpha_n}{R} J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = g(r_i), \qquad i = 1,2,\ldots,l;\\
&\qquad \mu(v) = \sum_{n=1}^{N} [a_n(\cos(c\frac{\alpha_n}{R}T) - 1) + b_n \sin(c\frac{\alpha_n}{R}T)] J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r);\\
&\qquad \mu(\xi) = \alpha_\xi, \qquad \forall \xi \in C^1(\Omega).
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

که در آن $a_\xi = \int_\circ^T \xi dt$ اندازه لبگ ξ بر Ω بوده و $C^1(\Omega)$ مجموعه توابع پیوسته روی Ω است که صرفاً به متغیر t وابسته‌اند. فرض می‌کنیم Q فضای شدنی مسأله (۱۳)، ناتهی باشد (هر چند که ممکن است F تهی باشد و این یکی از مزایای روش نشاندن است). با توجه به امکان تعیین ضرایب a_n و b_n توسط دو دسته اول از شروط (که در دو بخش پیشین توضیح داده شد)، مانند روبیو (۱۹۸۶) می‌توان روی Q یک توپولوژی هاسدورف بنا نهاد که تحت آن فضای جواب فشرده بوده و همچنین تابع $\mu \to \mu(F_\circ)$ نیم پیوسته پایین باشد.از این رو قضیه مهم زیر بدست می‌آید که وجود جواب را اثبات می‌کند.

قضیه۲. اندازه بهینه $\mu^* \in M^+(\Omega)$ موجود است به‌طوری‌که معادلات (۱۳) را برآورده می‌سازد و رابطه $\mu^*(F_\circ) \le \mu(F_\circ)$ برای هر $\mu \in M^+(\Omega)$ نیز برقرار باشد.

گرچه تاکنون وجود جواب بهینه به اثبات رسیده است، لیکن تعیین آن حتی به‌صورت دقیق هنوز میسر نیست؛ زیرا فضای جواب مسأله دارای بعد نامتناهی است. ارائه شیوه‌ای جهت تعیین چنین جوابی هدف ما در بخش بعدی است.

۵-راهکار تعیین جواب بهینه

گرچه فضای جواب (۱۳) دارای بعد نامتناهی است، لیکن مسأله دارای این خاصیت بزرگ است که نسبت به مجهولات(a_nها، b_nها و اندازه μ) خطی است و لذا تعیین جواب آن از طریق حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نیم نامتناهی (گابرنا و لوپز، ۱۹۹۸) و یا متناهی (نظیر بازاراو همکاران، ۱۹۹۰) بسیار مناسب خواهد بود؛ زیرا روش‌های کاملاً شناخته شده و کارایی برای حل این رده از مسائل خطی وجود دارند. در این بخش مایلیم که مساله (۱۳) را با جواب مساله‌ای از نوع برنامه‌ریزی خطی متناهی تقریب کنیم. در گام ابتدایی تعداد قیود و سپس در گام دوم، بعد مساله را به نوعی متناهی می‌نماییم.

با برگزیدن زیر مجموعه‌ای چگال شما را از فضای $C^{1}(\Omega)$ و سپس انتخاب تعداد متناهی از عناصر آن، می‌توان تعداد متناهی از قیود دسته آخر مساله (۱۳) را داشت. این مجموعه توابع برای تمام $k \in N$ می‌توانند به صورت توابع مشخصه

$$\xi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in J_k \\ 0, & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

که در آن $J_k = [(k-1)\frac{T}{K}, k\frac{T}{K})]$ برای $k \le K$ و $J_K = [(K-1)\frac{T}{K}, T]$ ($K \in N$ تعداد تقسیمات بازه $[0,T]$ می‌باشد). توابع ξ_kها گرچه پیوسته نیستند اما دارای دو خاصیت مهم می‌باشند؛ یکی این‌که ترکیبات خطی آن‌ها برای تمام Kها، می‌تواند هر عضو $C^{1}(\Omega)$ را به خوبی تقریب نماید (کانوی و همکاران، ۱۹۹۰) و دیگر اینکه مطابق روش ارائه شده در کنترل بهینه قابل شناسایی توسط آن‌ها به‌صورت یک تابع به‌طور قطعه‌ای ثابت است.

باتوجه به امکان تعیین ضرایب a_n و b_n از دو مجموعه قیود اول (۱۳)، از قضیه $A.5$ از روبیو (۱۹۸۶) نتیجه می‌شود که اندازه بهینه دارای فرم نمایشی $\mu^* = \sum_{r=1}^{M} \gamma_r \delta(z_r)$ است. اما جایگذاری این فرم نمایشی به‌جای μ در (۳۱) آن را به مسأله‌ای غیرخطی برحسب ضرایب α_r، a_nو b_n و نقاط تکیه‌گاهی z_r می‌کند که به‌نظر می‌رسد مناسب اهداف ما نمی‌باشد. اما این جایگذاری گامی است در جهت تعیین جواب از طریق حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی متناهی که در آن $\gamma_r \in R^+$، نقاط z_r به زیر مجموعه‌ای چگال از فضای Ω متعلق بوده و $\delta(z_r)$ اندازه اتمی واحد با جرم متمرکز در $\{z_r\}$ می‌باشد. تعیین نقاط تکیه‌گاهی z_r باید به طریقی مناسب انجام شود. برای این منظور با انجام یک گسسته‌سازی روی فضای Ω، از آن تعداد M گره را انتخاب می‌کنیم. برای این‌که (۱۳) ضرایب b_n و α_n ها را به‌صورت تفاضل-

دو متغیر مثبت به شکل $a_n = a_n^+ - a_n^-$ و $b_n = b_n^+ - b_n^-$، که در آن $a_n^+, \alpha_n^+, b_n^+, b_n^-, \in R^+ U\{۰\}$ نمایش می‌دهیم. بنابراین جواب مسأله (۱۳) را می‌توان به‌وسیله جواب مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر تقریب نمود:

$$\begin{aligned}
&Min : \sum_{r=۱}^{M} \gamma_r F_\circ(t_r, v_r) \\
&S.to : \sum_{n=۱}^{N} (a_n^+ - a_n^-) J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = f(r_i), \quad i = ۱,۲,...,l; \\
&\sum_{n=۱}^{N} (b_n^+ - b_n^-) c \frac{\alpha_n}{R} J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r_i) = g(r_i), \quad i = ۱,۲,...,l; \qquad (۱۴) \\
&\sum_{n=۱}^{N} \gamma_r v_r = \sum_{n=۱}^{N} [(a_n^+ - \alpha_n^-)(\cos(c\frac{\alpha_n}{R} T) - ۱) + (b_n^+ - b_n^-)\sin(c\frac{\alpha_n}{R} T)] J_\circ(\frac{\alpha_n}{R} r); \\
&\sum_{r=۱}^{M} \gamma_r \xi_k(t_r) = a_k, \qquad k = ۱,۲,...,K; \\
&\gamma_r \geq \circ, \forall r = ۱,۲,...,M, \quad a_n^+, a_n^-, b_n^+, b_n^- \geq \circ, \forall n = ۱,۲,...,N.
\end{aligned}$$

مسأله فوق یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با $۲l + K + ۱$ قید و $۴N + M$ مجهول می‌باشدکه به‌راحتی از روش سیمپلکس یا سیمپلکس اصلاح شده (بازاراو همکاران،۱۹۹۰) قابل حل است. با تعیین بهینه مجهولات a_n و b_n ، $n = ۱,۲,...,N$، می‌توان تابع مسیر بهینه را از رابطه (۷) و با مشخص شدن ضرایب بهینه α_r و $r = ۱,...,M$ قادر به تعیین تابع کنترل بهینه از روش ذکر شده توسط روبیو (۱۹۸۶) خواهیم بود. بدین ترتیب علاوه بر مقدار بهینه تابع هدف، توابع مسیر و کنترل بهینه به‌طور هم‌زمان به‌دست خواهند آمد. با توجه به خاصیت چگال بودن، هر چه مقادیر l، M، N، و K افزایش یابند، جواب حاصل از (۱۴) بیشتر و بیشتر به جواب مسأله اصلی نزدیک خواهند بود.

۶- شبیه سازی عددی

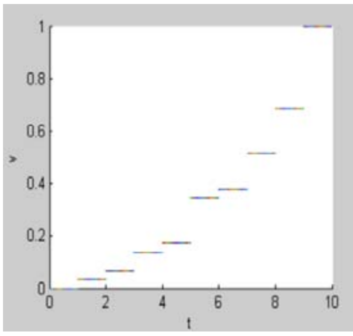
در این بخش با ارائه مثالی سعی می‌کنیم کارایی روش به‌کار برده شده را بهتر به نمایش بگذاریم. ابتدا با معرفی پارامترها و توابع لازم، مساله برنامه‌ریزی خطی متناظر با (۱۴) نوشته شده و آن‌گاه به کمک نرم افزار MATLAB7.4 مساله مذکور از روش سیمپلکس اصلاح شده حل گردیده است. به‌کمک جواب‌های بهینه حاصل برای ضرایب a_nو b_n، تابع مسیر تقریباً بهینه از رابطه (۷) مشخص گردیده است. همچنین تابع کنترل بهینه به‌صورت تقریبی توسط یک تابع به‌طور قطعه‌ای ثابت به کمک ضرایب α_r رسم گردیده است. تابع مسیر u، تابعی از سه متغیر t ، θ و γاست؛ لذا برای رسم ارتعاشات آن با در نظر گرفتن نقاط مشخصی از بازه زمان، $u(r,\theta,t)$ به‌صورت تابعی با دو متغیر (کانتورگونه) در دستگاه مختصات سه بعدی رسم

می‌گردد. بدین ترتیب با نمایش پیاپی شکل تابع موج برای زمان‌های مختلف، قادر به مشاهده موجب بهینه خواهیم بود.

برای (۴)، پارامترهای $J_{\circ}(\alpha_{۲}r)=\circ$، $f(r)=\cdot/۱$، $R=۱$ و $c=۱$ را در نظر گرفته و تابع را به‌عنوان انتگرالده تابع هدف برمی‌گزینیم. همچنین $(r_{\circ},\ \theta_{\circ})=(\cdot/۵,\ \frac{\pi}{۳})$ نقطه‌ای درون دایره به شعاع ۱ برای اعمال کنترل اختیار کرده و $[\circ,\ T]=[\circ,۱]$ را بازه زمان و $V=[\circ,۱]$ را بازه کنترل بر می‌گزینیم و با انتخاب ۳۰ نقطه از هر کدام از آن‌ها، فضای $\Omega=[\circ,۱]\times[\circ,۱]$ با ۹۰۰ نقطه $z_j=(t_j,v_j)$ گسسته‌سازی می‌شود.

جدول ۱: مقادیر a_nو b_n بهینه حاصل از حل برنامه ریزی خطی

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
۱	۱۵۹/۱۵۴۱	$-۵/۶۰۸\times۱۰^{۳}$	۶	۱/۰۰۶۸	$-۱/۸۴۱\times۱۰^{۳}$
۲	۱/۰۳۶۰	$-۱/۳۸۵\times۱۰^{۴}$	۷	۱/۰۳۵۰	$-۶/۴۹۹\times۱۰^{۳}$
۳	۰/۰۱۹۶	$۹/۵۶۸\times۱۰^{۳}$	۸	-۰/۸۴۹۹	$-۱/۸۵۵\times۱۰^{۳}$
۴	-۰/۶۲۶۹	$۱/۶۹۴\times۱۰^{۴}$	۹	-۰/۰۱۰۲	۲۱۴/۱۵۶
۵	۰/۰۱۰۲	$-۴/۹۱۰\times۱۰^{۳}$			



شکل ۱: نمودار تابع کنترل

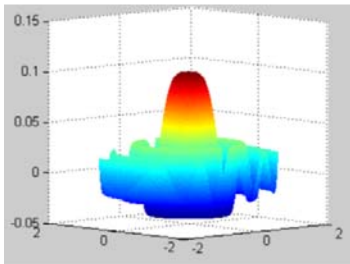
با در نظر گرفتن ۳ صفر مثبت تابع بسل، برای سری مبین تابع مسیر، سه جمله اول انتخاب می گردد $(N=۳)$. بنابراین مساله ۹۲۰ متغیرخواهد داشت. ۴ نقطه (۱و ۰/۵ و۰/۲۵ و۰) را از $[\circ,۱]$ برای مقادیر r جهت ایجاد هشت قید برای دسته قیود اول و دوم مساله (۱۴) بر می گزینیم، بازه زمانی را به ۱۰ زیر بازه به طول ۰/۱ تقسیم می‌نماییم و براساس آن تعداد ۱۰ تابع مشخصه ξ_kو $(k=۱,۲,...,۱۰)$ را برای دسته قیود آخر از مساله برنامه‌ریزی خطی می‌سازیم. لذا برای این مثال مساله متناظر با (۱۴) دارای ۱۹ قید و ۹۲۰ خواهدبود. پس از حل، مقدار

تابع هدف برابر با $^{-5}$ ۱۰× ۲/۲۰۵۶ بدست آمد که بسیار به صفر نزدیک است (از آن‌جا که مساله کمینه‌سازی است و با توجه به مثبت بودن تابع هدف، این مقدار قابل انتظار بود). همچنین ضرایب بهینه a_n و b_n حاصل در جدول (۱) ارائه شده است. به‌علاوه مقادیر بهینه α_r و مقادیر کنترل بهینه وابسته به آن در جدول (۲) آورده شده‌اند.

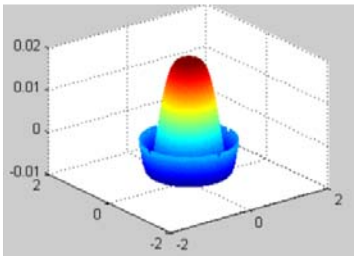
جدول۲: مقادیر بهینه ضرایب α_r و کنترل متناظر

r	α_r	v^*	r	α_r	v^*
۱	۱	۰	۵۲۱	۱	۰/۳۴۴۸
۱۵۲	۱	۰/۰۳۴۵	۵۵۲	۱	۰/۳۷۹۳
۲۴۳	۱	۰/۰۹۶۰	۶۴۶	۱	۰/۵۱۷۲
۳۳۵	۱	۰/۱۳۷۹	۷۴۱	۱	۰/۶۸۹۷
۳۶۶	۱	۰/۱۷۲۴	۹۰۰	۱	۱

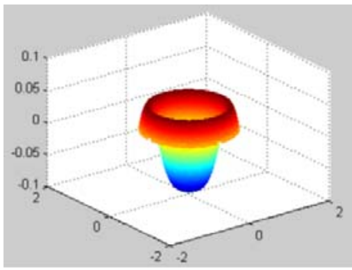
برمبنای این نتایج، مطابق آنچه که شرح داده شد، تابع کنترل تقریبا بهینه و تابع وضعیت بهینه در زمان‌های ۱, ۰/۷, ۰/۵, ۰/۳, $t =$ ۰/۱ به‌ترتیب در شکل‌های ۲-۶ ترسیم شده‌اند.



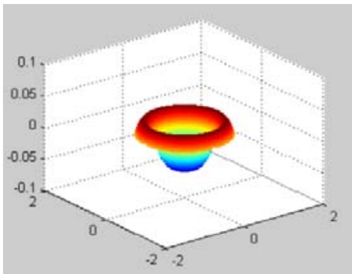
شکل ۲: نمودار تابع وضعیت و جهت در لحظه



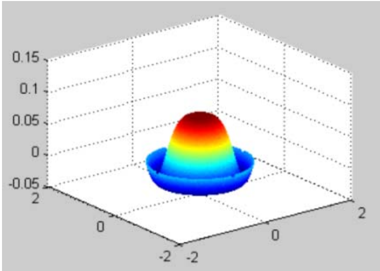
شکل۳: نمودارتابع وضعیت و جهت در لحظه



شکل ۴: نمودار تابع وضعیت و جهت در لحظه



شکل ۵: نمودار تابع وضعیت و جهت در لحظه



شکل ۶: نمودار تابع وضعیت و جهت در لحظه

۷-نتیجه

با استفاده از ترکیب روش‌های نشاندن و گسسته‌سازی، در این مقاله شیوه‌ای برای حل مسئله کنترل بهینه متضمن غشا مستدیر مرتعش ارائه شد. این شیوه که مبتنی بر کاربرد شکل کلاسیک نوع جواب و استفاده از توانایی‌های اندازه‌ها بنا شده است، قادر است به‌صورت هم‌زمان وضعیت و کنترل بهینه را معرفی نماید. به‌علاوه توانایی‌های شکل کلاسیک جواب ما را قادر می‌سازد تا از توانایی‌ها و نتایج حاصل پیشین آن برای تحلیل و آنالیز سیستم استفاده کنیم. دست یافتنی بودن جواب و تعیین آن به‌صورت ساده، حل مسئله غیرخطی به شیوه‌ای خطی و اثبات وجود جواب و وضعیت بهینه از جمله مزایای متعدد این روش حل است.

مراجع

فخارزاده جهرمی، علیرضا؛ بصیرزاده،هادی؛ اعلام‌پور، علی (۱۳۸۳). حل ترکیبی یک سیستم کنترلی موج با استفاده از سری فوریه و روش نشاندن، طرح پژوهشی شماره، ۴۸۷دانشگاه شهید چمران اهواز.

فخارزاده جهرمی، علیرضا؛ صاحبی، حمیدرضا (۱۳۸۴). حل ترکیبی غشا مرتعش با استفاده از اندازه‌ها، طرح تحقیقاتی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد آشتیان.

Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. and Sherali, H.D. (1990). *Linearprogramming and network flows*, John Wiley and Sons (2Ed).

Carlsson, J. (2008). Symplectic Reconstruction of data for heat and wave equations, Report arxiv: 0809.3621v1.

Conway, J. B. (1990). *A course in functional analysis*, University of Tennessee, Springer.

Fakharzadeh, A. (2003). Finding the optimal domain of a nonlinear wave optimal control system by measure, *J. Appl. Math and Computing*, 13,183-194.

Fakharzadeh, A. and Rubio, J.E. (2009). Best domain for an elliptic problem in cartesian coordinate by means of shape-measure, *AJOP Asian J. of Control*, 11, 536-547.

Farahi, M.H. (1996). The boundary control of the wave equation. PhD thesis, Dept. of Applied Mathematical Studies, Leeds University.

Gerdts, M., Greif, G. and Pesch, H.J. (2006). Numerical optimal control of the wave equation: optimal boundary control of a string to rest in finite time, Proceedings 5th Mathmod Vienna.

Goberna, M.A. and Lopez, M.A. (1998). *Linear semi-infinite optimization*, John Wiley and Sons, Chichester.

Mikhailov, V. P. (1978). *Partial Differential Equations*, Moscow, Mir Pub.

Nazemi A.R., Farahi M.H. and Zamirian, M. (2008). Filtration problem in inhomogenous dam by using embedding method, *J. of Applied Mathematics and Computting*, 28, 313-332.

Nowakowski, A. (2008). Sufficient optimality conditions for dirichlet boundary control of wave equation, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control Cancun, Mexico.

Simmons, G.F. (1972). *Differential equations with applications and historical notes*, McGraw-Hill Inc.

Rubio, J.E. (1986). *Control and optimization the linear treatment of nonlinear problem*s, Manchester University Press, Manchester.

Rosenbloom, P.C. (1952). Qudques classes de problems exteremaux, *Bulletin de SocieteMathematique de France*, 80, 183-216.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New york.

Waziri, V.O .and Reju, S.A. (2006). Control operator for the two-dimensional energized wave equation ,*Leonardo Journal of Sciences*, 9, 33-44.

Wylie, C.R. and Barret, L.C. (1982). Advanced engineering mathematics (5th Ed), McGraw-Hill.

Young, L.C. (1969). Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, Philadelphian: W. B. Saunders Company.

Simultaneously determining the optimal control and state in an vibrating circular surface system by a discretization method

Alireza Fakharzadehjahromi, Parviz Elahi, Nadimeh Jafarpoor

Department of Mathematics, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran

Abstract

Presenting a new method for simultaneous determination of the control and trajectory functions in an optimal control problem governed by a vibrating circular surface system, is the main purpose of this paper. First, by identifying the form of the trajectory function, doing discretization and using the properties of measure, the problem is linearized. Then, by doing some approximation steps, the nearly optimal pair of trajectory and control with the optimal value of the objective function are obtained via solving a finite linear programming problem. A numerical example is also presented.

Keywords: Vibrating circular surface, Discretization, Optimal control, Measure, Linear programming.

Mathematics Subject Classification (2000): 49M25, 76D33