تحلیل بیزی در خانواده توزیع های نمایی تعمیم یافته

صدیقه امیدوار شلمانی[۱]، احمد پارسیان، علی کریم‌نژاد، لیلا گل‌پرور

گروه آمار، دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۹۰/۴/۴ **تاریخ پذیرش:** ۹۰/۱۱/۱۲

چکیده: در این مقاله مینیماکس بودن برآوردگر بیزی تعمیم یافته پارامتر شکل توزیع نمایی تعمیم یافته را تحت تابع زیان مربع خطای وزنی مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک روش متعارف در تحلیل بیزی زمانی که اختلاف نظر در مورد توزیع پیشین وجود دارد، انتخاب یک کلاس از توزیع‌های پیشین و دست‌یابی به تصمیم بهینه در آن کلاس است که به روش بیزی استوار معروف است. در این راستا برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس را برای خانواده توزیع‌های نمایی تعمیم یافته تحت تابع زیان مربع خطای وزنی به دست می‌آوریم.

واژه های کلیدی: برآوردگر بیزی تعمیم یافته، برآوردگر مینیماکس، توزیع نمایی تعمیم یافته.

کد موضوع بندی ریاضی: ۶۲C۱۵ و ۶۲C۲۰

[۱] آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: صدیقه امیدوار شلمانی s.o267@yahoo.com

۱- مقدمه

گاما و وایبل از مشهورترین توزیع‌ها در تحلیل داده‌های طول عمر هستند. هر دو توزیع وابسته به پارامتر شکل، دارای تابع خطر[۱] افزایشی و یا کاهشی هستند. بنابراین نسبت به توزیع نمایی که دارای تابع خطر ثابت است، محدوده گسترده‌ای از داده‌های طول عمر را تحت پوشش قرار می‌دهند. متأسفانه هر دو توزیع معایبی دارند. در توزیع گاما، اگر پارامتر شکل عددی صحیح نباشد، تابع توزیع یا تابع خطر به راحتی به دست نمی‌آید و برای به دست آوردن آن نیاز به روشهای عددی داریم.

در مقابل توابع توزیع، بقا[۲] و خطر توزیع وایبل به راحتی به دست می‌آید. بنابراین نسبت به توزیع گاما، به خصوص در حضور داده های سانسور شده[۳]، در تحلیل داده های طول عمر ترجیح داده می‌شود. اما توزیع وایبل دارای معایبی است. برای مثال بین و انگلهارد (۱۹۹۱)، به این مطلب اشاره کرده‌اند که برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی توزیع وایبل ممکن است برای تمامی مقادیر پارامترها به خوبی عمل نکنند. از طرفی وقتی پارامتر شکل بزرگتر از یک باشد، تابع خطر هر دو توزیع گاما و وایبل تابعی افزایشی است. با این وجود در مورد توزیع گاما از صفر به یک عدد متناهی (عکس پارامتر مقیاس) و در مورد توزیع وایبل از صفر به بی‌نهایت افزایش می‌یابد که این ویژگی توزیع وایبل ممکن است چنان مطلوب نباشد.

اخیراً گوپتا و کندو (۱۹۹۷)، حالت خاصی از توزیع وایبل نمایی شده[۴] را که توسط مودهولکار و همکاران (۱۹۹۵) معرفی شده بود، در نظر گرفتند و آن را توزیع نمایی تعمیم یافته[۵] نامیدند. آنها نشان دادند که توزیع نمایی تعمیم یافته می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع های گاما و وایبل باشد و در خیلی موارد و به‌طور کاملاً موثر در تحلیل داده‌های چوله مثبت به‌جای گاما، وایبل و حتی لگ نرمال به‌کار رود. توزیع نمایی تعمیم یافته دو پارامتری دارای تابع چگالی احتمال به فرم زیر است:

$$f(x;\alpha,\sigma)=\frac{\alpha}{\sigma}\exp(-\frac{x}{\sigma})(1-\exp(-\frac{x}{\sigma}))^{\alpha-1}\quad \alpha,\sigma>0 \qquad (1)$$

که در آن α و σ به ترتیب پارامتر های شکل و مقیاس هستند. توزیع نمایی تعمیم یافته دارای نرخ خطر افزایشی، کاهشی و ثابت است که بستگی به پارامتر شکل دارد. به‌ازای هر σ

---

[1] Hazard Function
[2] Survival Function
[3] Censored Data
[4] Exponentiated Weibull
[5] Generalized Exponential

نرخ خطر افزایشی است اگر $\alpha > 1$ و کاهشی است اگر $\alpha < 1$ و ثابت است هرگاه $\alpha = 1$. این ویژگی توزیع نمایی تعمیم یافته آن را از توزیع نمایی که تنها دارای نرخ خطر ثابت است متمایز می‌کند. برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته با استفاده از روش‌های مختلف (روش ماکسیمم درستنمایی، گشتاوری، صدکی[1] و...) توسط گوپتا و کندو (۲۰۰۱)، بررسی و کارایی برآوردگرها با استفاده از روش‌های عددی با هم مقایسه شده‌اند. برآورد بیزی پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته تحت شرایط مختلف پارامتری و تحت تابع زیان مربع خطا و لاینکس[2] به ترتیب توسط گوپتا و کندو (۲۰۰۸) و سینگ و همکاران (۲۰۰۸) ارائه شده است، با این حال توجهی به مسأله برآوردگرهای مینیماکس[3] در این خانواده از توزیع‌ها نشده است.

هدف ما در این مقاله، بررسی مینیماکس بودن برآوردگر بیزی تعمیم یافته از توزیع نمایی تعمیم یافته تحت تابع زیان مربع خطای وزنی به فرم زیر است.

$$L(\theta,\delta(X)) = w(\theta)(\delta(X) - g(\theta))^{2} \qquad (۲)$$

که در آن $\lambda = \sigma^{-1}$، $w(\theta) = (\alpha\lambda)^{-2}$ و $g(\theta)$ برابر با، α یا λ است. در بسیاری موارد که بین دو یا چند نفر در انتخاب توزیع پیشین اختلاف وجود دارد و یا در مورد توزیع پیشین با هم تفاهم دارند اما نسبت به پارامتر(های) آن تفاهم ندارند، اطلاعات در مورد توزیع پیشین کافی نیست و کلاسی از این توزیع‌ها را در اختیار داریم. در این‌صورت مجموعه‌ای از برآوردگرهای بیزی در کلاس Γ حاصل می‌شود (برای توزیع بیشتر به بخش سه مراجعه شود).

حال اگرچه آماردان اکنون دامنه تغییرات احتمالی برآوردهای بیزی را در اختیار دارد، اما ممکن است برای او مشخص نباشد که کدام‌یک از آنها مناسب‌ترین است و باید به دنبال روشی مناسب برای یافتن برآوردگر بهینه باشد. چندین روش برای انتخاب برآوردگر بهینه وجود دارد که از جمله آنها برآورد گاما مینیماکس[4] (برگر، ۱۹۸۴)، برآوردگاما مینیماکس شرطی[5] (برتو و روجری، ۱۹۹۲)، برآورد پایدار[6](مزارسکی و زلینسکی، ۱۹۹۱) و برآورد تأسف پسین گاما مینیماکس[7] (PRGM) (ریوز اینسوا و همکاران، ۱۹۹۵) هستند. در این مقاله برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس را تحت تابع زیان مربع خطای وزنی به دست می‌آوریم. ریوزاینسوا و همکاران (۱۹۹۵)، برآورد PRGM را تحت تابع زیان مربع خطا مورد بررسی قرار دادند. بوراتیسکا(۲۰۰۲)، برآورد PRGM را در مدل نرمال تحت تابع زیان لاینکس به‌دست آورد.

[1] Percentile
[2] Linex
[3] Minimax Estimators
[4] Gamma Minimax
[5] Conditional Gamma Minimax
[6] Robust Estimator
[7] Posterior Regret Gamma Minimax

جوزانی و پارسیان(۲۰۰۸) برآورد و پیشگوی PRGM را تحت تابع زیان آنتروپی و برای آماره-های رکوردی ارائه کردند. در این مقاله ابتدا، در بخش دوم برآوردگرهای بیزی توزیع نمایی تعمیم یافته را تحت تابع زیان به فرم (۲) به‌دست می‌آوریم، سپس در بخش سوم برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس را تحت تابع زیان(۲) ارائه می‌کنیم. در نهایت در بخش چهارم، مینیماکس بودن برآوردگر بیزی تعمیم یافته را تحت تابع زیان به فرم (۲) مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲- تحلیل بیزی

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی $(n > 3)$ تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال به فرم (۱) باشد، با فرض $\lambda = \frac{1}{\sigma}$، تابع درستنمایی مشاهدات برابر است با :

$$l(\alpha,\lambda) \propto (\alpha\lambda)^n \exp(-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i)\prod_{i=1}^{n}(1-\exp(-\lambda x_i))^{\alpha-1} \qquad (۳)$$

توابع چگالی پیشین مزدوج زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\pi(\alpha \mid \lambda) \propto \alpha^{a-1}\exp(-\alpha\lambda b) \qquad (۴)$$

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{c-1}\exp(-\lambda d) \qquad (۵)$$

که در آن $a,b,c,d > 0$. با توجه به (۳)، (۴) و (۵) تابع چگالی پسین توام α و λ برابر است با:

$$\pi(\alpha,\lambda \mid x) \propto \alpha^{n+a-1}\lambda^{n+c-1}\exp[-\alpha(b\lambda - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-\exp(-\lambda x_i)))] \times \exp[-\lambda(d+\sum_{i=1}^{n}x_i)]$$

بنابراین برآورد بیزی تابعی دلخواه از α و λ مانند $\nu(\alpha,\lambda)$ تحت تابع زیان مربع خطا به-صورت

$$E[\nu(\alpha,\lambda)\mid x] = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \nu(\alpha,\lambda)\pi(\alpha,\lambda \mid x)\,d\alpha\, d\lambda}{\int_0^\infty\int_0^\infty \pi(\alpha,\lambda \mid x)\,d\alpha\, d\lambda} \qquad (۶)$$

و تحت تابع زیان (۲) به صورت زیر است:

$$E[\nu(\alpha,\lambda)\mid x] = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(\alpha\lambda)^2}\nu(\alpha,\lambda)\pi(\alpha,\lambda \mid x)\,d\alpha\, d\lambda}{\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(\alpha\lambda)^2}\pi(\alpha,\lambda \mid x)\,d\alpha\, d\lambda} \qquad (۷)$$

جدول ۱: برآورد بیزی پارامتر ها به روش MCMC

		a=۰/ ۰۱	b= ۰/۰۳۳	
n	پارامتر	c=d=۰/۱۱۱	c=d=۰/۳۳۳	c=d=۱۰
۱۰	α	۰/۲۰۳	۰/۲۱۵	۰/۳۱۷
	λ	۰/۱۴۳	۰/۲۴۷	۰/۸۸۷
۲۰	α	۰/۲۵۶	۰/۲۶۸	۰/۲۸۸
	λ	۰/۷۳۰	۰/۷۸۶	۰/۹۵۴
۳۰	α	۰/۳۲	۰/۳۲۹	۰/۳۱۲
	λ	۰/۹۱	۱/۰۸۴	۱/۰۸
۴۰	α	۰/۳۰۱	۰/۳۰۲	۰/۳۰۲
	λ	۱/۰۵۴	۱/۰۵۲	۱/۰۲۸

همانطور که ملاحظه می‌شود، در هر دو حالت برآورد بیزی پارامترها فرم بسته ندارند. گوپتا و کندو (۲۰۰۸)، برآورد بیزی پارامترهای α و λ را تحت تابع زیان مربع خطا و با استفاده از تقریب لیندلی ارائه کرده اند. سینگ و همکاران (۲۰۰۸) نتایج را تحت تابع زیان لاینکس به‌دست آوردند. در جداول (۱)، (۲) و (۳)، برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان به فرم (۲)، به‌ازای ۴۰(۱۰)۱۰=n، ۳ /۰=α و ۱=λ مقادیر مختلف a,b,c,d به روش MCMC[1] (به‌روش نمونه‌بردار گیبز[2])، با نرم‌افزار WinBUGS ارائه شده است. لازم است اشاره کنیم که مشاهدات اولیه از توزیع نمایی تعمیم یافته با نرم افزار R به‌دست آمده است.

با توجه به جداول مربوطه، ملاحظه می‌شود که به طورکلی با افزایش n، برآورد بیزی پارامترها به مقدار واقعی آن، (۳ /۰=α و ۱=λ) نزدیک می‌شود. همچنین به‌ازای هر n، با ثابت گرفتن یکی از توزیع‌های پیشین و کاهش واریانس توزیع پیشین دیگر مشاهده می‌شود که برآوردهای بیزی به‌دست آمده به روش MCMC به مقدار واقعی آن نزدیک می‌شود.

فرض کنید پارامتر λ معلوم باشد، بدون از دست دادن کلیت مساله فرض می‌کنیم که ۱=λ. آنگاه تابع درستنمایی به صورت زیر تقلیل می‌یابد.

$$l(\alpha) \propto \alpha^n \prod_{i=1}^{n} (1-\exp(-x_i))^{\alpha-1}$$

بنابراین برآورد بیزی پارامتر α تحت تابع زیان به فرم (۲) و توزیع پیشین (۴) برابر است با:

$$\delta_{a,b}^{\pi} = \frac{n+a-2}{b+T} \qquad (۸)$$

[1] Markov Chain Monte Carlo
[2] Gibbs Sampler

که در آن $T=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\exp(-x_i))$. از آنجا که در تحلیل بیزی، در انتخاب توزیع پیشین ممکن است توافق وجود نداشته باشد، در ادامه تأسف پسین گاما مینیماکس را برای حالتی که λ معلوم است، معرفی می‌کنیم.

جدول ۲: برآورد بیزی پارامتر ها به روش MCMC

n	پارامتر	a=۰/۰۳	b=۰/۱	
		c=d=۰/۱۱۱	c=d=۰/۳۳۳	c=d=۱۰
	α	۰/۲۴۰	۰/۲۳۹	۰/۳۱۱
۱۰	λ	۰/۳۶۲	۰/۳۶۵	۰/۸۹۵
	α	۰/۲۷	۰/۲۵	۰/۲۸۸
۲۰	λ	۰/۸۲۳	۰/۷۲۳	۰/۹۵۶
	α	۰/۳۲۷	۰/۳۲۸	۰/۳۱۰
۳۰	λ	۱/۰۳۱	۱/۰۳۰	۱/۰۲
	α	۰/۲۹۹	۰/۳۰۱	۰/۳۰۱
۴۰	λ	۱/۰۳۵	۱/۰۳۴	۱/۰۲۷

جدول ۳: برآورد بیزی پارامتر ها به روش MCMC

n	پارامتر	a=۰/۹	b=۳	
		c=d=۰/۱۱۱	c=d=۰/۳۳۳	c=d=۱۰
	α	۰/۲۶۲	۰/۲۷۳	۰/۳۱۴
۱۰	λ	۰/۴۹۳	۰/۵۰۸	۰/۸۸
	α	۰/۲۷	۰/۲۸۶	۰/۲۹۶
۲۰	λ	۰/۸۶۸	۰/۹۰۵	۰/۹۶
	α	۰/۳۲۰	۰/۳۲۴	۰/۳۰۴
۳۰	λ	۱/۰۲	۱/۰۲۴	۱/۰۱۵
	α	۰/۳۰۱	۰/۳۰۶	۰/۳۰۱
۴۰	λ	۱/۰۲۷	۱/۰۲۶	۱/۰۲۰

۳- برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس

در تحلیل بیزی هدف، به‌دست آوردن تصمیم بهینه تحت تابع زیان و توزیع پیشین معین روی فضای پارامتر است. اما در عمل مواردی وجود دارد که اطلاعات پیشین، اغلب مبهم و هر توزیع

پیشین در نظر گرفته شده تنها تقریبی از توزیع واقعی آن است. این وضعیت می‌تواند در حالتی رخ دهد که مسأله مورد نظر با دو یا چند تصمیم گیرنده مطرح شود و آنها در مورد توزیع پیشین به توافق نرسند. یک راه حل رایج در عدم قطعیت در مورد توزیع پیشین در تحلیل بیزی تعیین یک کلاس Γ از توزیع های پیشین و به دست آوردن دامنه عمل‌های بیزی، مطابق با دامنه تغییرات توزیع‌های پیشین متعلق به Γ می‌باشد. این روش به روش بیزی استوار معروف است. تحلیل بیزی استوار با تأثیرات ناشی از تغییرات چگالی پیشین در کلاس Γ بر روی کمیت‌هایی مانند مخاطره پسین، مخاطره بیزی و مقدار مخاطره مورد انتظار پسین در ارتباط می‌باشد. با استفاده از تحلیل بیزی استوار، دامنه تغییرات برآوردگرهای بیزی به‌دست می‌آید. یکی از روش‌های دستیابی به برآوردگرهای بیزی استوار، روش تأسف پسین گاما مینیماکس است که در ادامه تعریف آن را بیان می‌کنیم.

فرض کنید $X = x$ مشاهده‌ای از توزیع $P_\theta(x)$ با تابع چگالی احتمال $p_\theta(x)$ باشد که در آن $\theta \in \Theta$. $\pi(\theta)$، چگالی پیشین و $\pi_x(\theta)$ را چگالی پسین θ به شرط x در نظر بگیرید.

تعریف ۱. اگر $\rho(\pi_x, \delta) = E_{\pi_x}(L(\theta,\delta))$ زیان مورد انتظار پسین برآورد $\delta \in A$ باشد، تأسف پسین برآورد δ عبارت است از $d(\delta_{\pi_x}, \delta) = \rho(\pi_x, \delta) - \rho(\pi_x, \delta_{\pi_x})$، که در آن δ_{π_x} برآوردی است که $\rho(\pi_x, \delta)$ را مینیمم می‌کند.

تعریف ۲. δ_{PR}، برآورد تأسف پسین گاما مینیماکس نامیده می‌شود اگر

$$\inf_{\delta\in A} \sup_{\pi\in\Gamma} d(\delta_{\pi_x}, \delta) = \sup_{\pi\in\Gamma} d(\delta_{\pi_x}, \delta_{PR}).$$

در ادبیات موجود برای تابع چگالی احتمال پیشین (۴) عموماً از کلاس توزیع‌های پیشین به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\Gamma_{a_\circ,b} = \{\Pi_{a_\circ} : \Pi_{a_\circ,b} = \Gamma(a_\circ, b),\ b \in [b_۱,\ b_۲]\}$$

که در آن $b_۱ < b_۲$ و $a_\circ > ۰$ مقادیر ثابت معلوم هستند. کلاس $\Gamma_{a_\circ,b}$ بیانگر این است که بین دو یا چند تصمیم گیرنده روی ابر پارامتر شکل توافق وجود دارد اما در مورد ابر پارامتر مقیاس توافقی وجود ندارد.

در این قسمت با استفاده از قضیه زیر، برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس پارامتر α را به ازای $\lambda = ۱$، در کلاس توزیع‌های پیشین $\Gamma_{a_\circ,b}$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۱. با تعریف $\underline{\delta}=\underline{\delta}(x)=\inf_{\pi\in\Gamma}\delta^{\pi}_{a,b}$ و $\overline{\delta}=\overline{\delta}(x)=\sup_{\pi\in\Gamma}\delta^{\pi}_{a,b}$، اگر $\underline{\delta}<\overline{\delta}$ متناهی باشند، آنگاه برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر α، تحت تابع زیان (۲) برابر است با:

$$\delta_{PR}(X)=۲(\frac{۱}{\overline{\delta}}+\frac{۱}{\underline{\delta}})^{-۱} \qquad (۹)$$

یعنی δ_{PR} میانگین توافقی $\underline{\delta}$ و $\overline{\delta}$ است.

برهان. قرار دهید $\delta^{\pi}_{a,b}=\delta_{\pi_x}$. آنگاه داریم:

$$\rho(\pi_x,\delta)=E\left[\frac{(\delta-\alpha)^{۲}}{\alpha^{۲}}\middle|x\right]=\delta^{۲}E\left(\frac{۱}{\alpha^{۲}}\middle|x\right)-۲\delta E\left(\frac{۱}{\alpha}\middle|x\right)+۱$$

و

$$d(\delta_{\pi_x},\delta)=\rho(\pi_x,\delta)-\rho(\pi_x,\delta_{\pi_x})=k_{a,n}\left(\frac{\delta-\delta_{\pi_x}}{\delta_{\pi_x}}\right)^{۲}$$

که در آن $k_{a,n}=\frac{n+a-۲}{n+a-۱}$ و مقدار آن به ازای $n>a-۲$ مثبت است. با توجه به اینکه در کلاس $\Gamma_{a_0,b}$، $k_{a_0,n}$ مقدار ثابتی است و با محاسبه مشتق مرتبه اول و دوم $d(\delta_{\pi_x},\delta)$ نسبت به δ_{π_x} واضح است که $d(\delta_{\pi_x},\delta)$ لزوما محدب نیست ولی مینیمم یکتایی در $\delta_{\pi_x}=\delta$ اختیار می‌کند. در سه مرحله δ_{PR} را تحت تابع زیان (۲) به‌دست می‌آوریم.

مرحله اول. فرض کنیم $\circ<\delta<\underline{\delta}<\delta_{\pi_x}<\overline{\delta}$:

از آنجا که

$$\frac{\partial d(\delta_{\pi_x},\delta)}{\partial\delta_{\pi_x}}=۲k_{a,n}(\frac{\delta}{\delta^{۲}_{\pi x}}-\frac{\delta^{۲}}{\delta^{۳}_{\pi x}})>\circ$$

بنابراین به‌ازای $\delta<\delta_{\pi_x}<\overline{\delta}$، $d(\delta_{\pi_x},\delta)$ تابعی افزایشی از δ_{π_x} است، بنابراین $\sup_{\pi\in\Gamma}d(\delta_{\pi_x},\delta)=d(\overline{\delta},\delta)$. با تعریف $f_{۱}(\delta)=d(\overline{\delta},\delta)$، واضح است که به‌ازای $\delta<\underline{\delta}$، $f_{۱}(\delta)$ تابعی کاهشی از δ است و $\inf_{\delta}f_{۱}(\delta)=f_{۱}(\underline{\delta})=d(\overline{\delta},\underline{\delta})$. بنابراین $f_{۱}(\overline{\delta})=\circ$ و

$$\inf_{\delta\in A}\sup_{\pi\in\Gamma}d_{۱}(\delta_{\pi_x}\delta)=d(\overline{\delta},\underline{\delta})=\circ \qquad (۱۰)$$

مرحله دوم. فرض می کنیم $\circ<\underline{\delta}<\delta_{\pi_x}<\overline{\delta}<\delta$، از آنجا که

$$\frac{\partial d\,(\delta_{\pi_x}, \delta)}{\partial \delta_{\pi_x}} = ۲k_{a,n}\left(\frac{\delta}{\delta_{\pi x}^{۲}} - \frac{\delta^{۲}}{\delta_{\pi x}^{۳}}\right) < ۰$$

بنابراین به‌ازای $۰ < \underline{\delta} < \delta_{\pi_x} < \delta$، $d\,(\delta_{\pi_x}, \delta)$ تابعی کاهشی از δ_{π_x} است و $\sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = d\,(\underline{\delta}, \delta)$. با تعریف $f_۲(\delta) = d\,(\underline{\delta}, \delta)$ واضح است که به ازای $\overline{\delta} < \delta$، $f_۲(\delta)$ تابعی افزایشی از δ است و $\inf_{\delta} f_۲(\delta) = f_۲(\underline{\delta}) = d\,(\overline{\delta}, \underline{\delta})$. بنابراین $f_۲(\underline{\delta}) = ۰$ و

$$\inf_{\delta\in A} \sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = d\,(\overline{\delta}, \underline{\delta}) = ۰ \qquad (۱۱)$$

مرحله سوم. $۰ < \underline{\delta} < \delta < \overline{\delta}$: واضح است که

$$\sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = \max\{d\,(\delta, \underline{\delta}), d\,(\overline{\delta}, \delta)\}$$

با تعریف $l\,(\delta) = f_۱(\delta) - f_۲(\delta)$، داریم $\frac{\partial l\,(\delta)}{\partial \delta} < ۰$ یعنی $l(\delta)$ تابعی کاهشی و پیوسته از δ است همچنین $l(\overline{\delta}) < ۰$ و $l\,(\underline{\delta}) > ۰$. در نتیجه طبق قضیه مقدار میانی $\delta^* \in (\underline{\delta}, \overline{\delta})$ وجود دارد به قسمی که $l\,(\delta^*) = ۰$. اگر $۰ < \underline{\delta} < \delta < \delta^*$ آنگاه $l\,(\delta) > ۰$. بنابراین $\sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = f_۱(\delta)$. همچنین اگر $\delta^* < \underline{\delta} < \delta$ آنگاه $l(\delta) < ۰$ و $\sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = f_۲(\delta)$. بنابراین

$$\inf_{\underline{\delta}<\delta<\overline{\delta}} \sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = d\,(\delta^*, \underline{\delta}) = d\,(\overline{\delta}, \delta^*) \qquad (۱۲)$$

با تلفیق روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) خواهیم داشت:

$$\inf_{\delta} \sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = \inf_{\underline{\delta}<\delta<\overline{\delta}} \sup_{\pi\in\Gamma} d\,(\delta_{\pi_x}, \delta) = d\,(\delta^*, \underline{\delta}) = d\,(\overline{\delta}, \delta^*) \qquad (۱۳)$$

با توجه به تعریف (۱) و با استفاده از $l\,(\delta^*) = ۰$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. حال با توجه به (۹)، برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس α تحت تابع زیان (۲) در کلاس $\Gamma_{a_۰,b}$ برابر است با

$$\delta_{PR}^{a_۰,b} = \frac{(n + a_۰ - ۲)}{\left(b_۱ + b_۲/۲\right) + T}$$

واضح است که $\delta_{PR}^{a_\circ,b}$ را می‌توان به‌صورت $\delta_{PR}^{a_\circ,b} = \frac{(n+a_\circ-2)}{b^*+T}$ نوشت، که در آن $b^* = \frac{b_1+b_2}{2}$. در نتیجه می‌توان گفت $\delta_{PR}^{a_\circ,b}$ برآوردگر بیزی یکتا برای پارامتر α با تابع چگالی پیشین متعلق به کلاس $\Gamma_{a_\circ,b}$ است.

در ادامه مینیماکس بودن پارامتر شکل توزیع نمایی تعمیم یافته را زمانی که پارامتر مقیاس معلوم است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴- برآوردگر مینیماکس

در این بخش مینیماکس بودن برآوردبیزی تعمیم یافته از پارامتر شکل توزیع نمایی تعمیم یافته را تحت تابع زیان به فرم (۲) بررسی می‌کنیم. اگر در رابطه (۴)، $a,b \to 0$، در آن صورت

$$\delta_{0,0}^{\pi} = \lim_{a,b\to 0} \delta_{a,b}^{\pi} = -\frac{(n-2)}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-\exp(-X_i))} \qquad (14)$$

را برآوردگر بیز حدی پارامتر α تحت تابع زیان (۲) می‌نامیم.

یادآوری. به‌سادگی معلوم می‌شود که $\delta_{UMVUE} = -(n-1)\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\exp(-X_i))$ برآوردگر نااریب با کمترین واریانس ($UMVUE$) پارامتر α می‌باشد. با در نظر گرفتن کلاس برآوردگرهای $I = \{C\,\hat{\alpha}_{UMVUE} : C \in (0,1)\}$، داریم:

$$\begin{aligned} MSE(C\,\hat{\alpha}_{UMVUE}) &= E(C\,\hat{\alpha}_{UMVUE} - \alpha)^2 \\ &= C^2 Var(\hat{\alpha}_{UMVUE}) + (E(C\,\hat{\alpha}_{UMVUE}) - \alpha)^2 \\ &= \alpha^2\left(\frac{C^2}{n-2} + (C-1)^2\right) = \alpha^2 g(C). \end{aligned}$$

در نتیجه $g'(C) = \frac{2C}{n-2} + 2(C-1)$ و $g''(C) = \frac{2(n-1)}{n-2} > 0$. با مساوی قراردادن $g'(C) = 0$ داریم $C_\circ = \frac{n-2}{n-1}$. بنابراین $\delta_{0,0}^{\pi}$ دارای کمترین MSE در کلاس برآوردگرهای I است. به نظر می‌رسد $\delta_{0,0}^{\pi}$ برآوردگر مجاز باشد اما ما قادر به اثبات آن نمی‌باشیم. واضح است

که $\delta_{0,0}^{\pi}$ یک برآوردگر بیزی تعمیم یافته α نسبت به پیشین ناآگاهی بخش $\pi(\alpha) \propto \frac{1}{\alpha}$ است و تابع مخاطره $\delta_{0,0}^{\pi}$ تحت تابع زیان (۲) برابر با

$$R(\alpha, \delta_{0,0}^{\pi}) = (n-1)^{-1} \tag{15}$$

است. حال با استفاده از استدلال بیز حدی، مینیماکس بودن $\delta_{0,0}^{\pi}$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\{\pi_m\}$ یک دنباله از توزیع های پیشین باشد به قسمی که $\pi_m \propto \alpha^{\frac{1}{m}-1}\exp(-\frac{\alpha}{m})$. در آن صورت برآوردگر بیزی α نسبت به توزیع پیشین π_m تحت تابع زیان (۲) به‌صورت زیر است:

$$\delta_m = \frac{n + m^{-1} - 2}{m^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - \exp(-X_i))}$$

و تابع مخاطره آن برابر است با:

$$R(\alpha, \delta_m) = \frac{1}{\alpha^2} E\left[\frac{n + m^{-1} - 2}{m^{-1} - \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - \exp(-X_i))} - \alpha\right]^2$$

$$= 1 + \left[\left(n + \frac{1}{m} - 2\right)^2 \sum_{k=0}^{n-3} \frac{\binom{n-1}{k}}{\Gamma(n)} \left(-\frac{1}{m}\right)^k \alpha^k \exp(\frac{\alpha}{m}) \times \Gamma(n-k-2, \frac{\alpha}{m})\right]$$

$$- \left[2\left(n + \frac{1}{m} - 2\right) \frac{\exp(\frac{\alpha}{m})}{\Gamma(n)} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} (-\frac{1}{m})^k \alpha^k \Gamma(n-k-1, \frac{\alpha}{m})\right]$$

$$+ \left[\left(n + \frac{1}{m} - 2\right)^2 \times \frac{\exp(\frac{\alpha}{m}) \alpha^{n-2}}{\Gamma(n)}\right]$$

$$\times \left[\int_{\frac{1}{m}}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha y)(n-1)}{y} (-\frac{1}{m})^{n-2} dy + \int_{\frac{1}{m}}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha y)}{y^2} (-\frac{1}{m})^{n-1} dy\right]$$

$$- \left[2\left(n + \frac{1}{m} - 2\right) \exp(\frac{\alpha}{m}) \times \int_{\frac{1}{m}}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha y) \alpha^{n-1}}{y \Gamma(n)} (-\frac{1}{m})^{n-1} dy\right]$$

و

$$
\begin{aligned}
r(\pi_m,\delta_m) = 1 &- \left[2\frac{\left(n+\frac{1}{m}-2\right)}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{m})}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\binom{n-1}{k}(-1)^k}{m^{k+\frac{1}{m}}}\int_0^\infty \alpha^{k+\frac{1}{m}-1}\Gamma(n-k-1,\frac{\alpha}{m})d\alpha \right] \\
&+ \left[\frac{\left(n+\frac{1}{m}-2\right)^2}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{m})}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\binom{n-1}{k}(-1)^k}{m^{k+\frac{1}{m}}}\int_0^\infty \alpha^{k+\frac{1}{m}-1}\Gamma(n-k-2,\frac{\alpha}{m})d\alpha \right] \\
&+ \left[\frac{(-1)^{n-2}\left(n+\frac{1}{m}-2\right)^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}+n-2}}{\Gamma(n-1)\Gamma(\frac{1}{m})}\times\int_0^\infty\int_{\frac{1}{m}}^\infty\frac{\alpha^{n+\frac{1}{m}-2}\exp(-\alpha y)}{y}dy\,d\alpha \right] \\
&- \left[2\frac{(-1)^{n-1}\left(n+\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}+n-1}}{\Gamma(n-1)\Gamma(\frac{1}{m})}\times\int_0^\infty\int_{\frac{1}{m}}^\infty\frac{\alpha^{n+\frac{1}{m}-2}\exp(-\alpha y)}{y}dy\,d\alpha \right] \\
&+ \left[\frac{(-1)^{n-1}\left(n+\frac{1}{m}-2\right)^2\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}+n-1}}{\Gamma(n-1)\Gamma(\frac{1}{m})}\times\int_0^\infty\int_{\frac{1}{m}}^\infty\frac{\alpha^{n+\frac{1}{m}-2}\exp(-\alpha y)}{y^2}dy\,d\alpha \right] \quad (16)
\end{aligned}
$$

با در نظر گرفتن تابع زیان (۲)، توزیع پیشین π_m و با به‌کارگیری قضیه ۱۶ (ص ۲۲۹، رویدن، ۱۹۶۳) و قضیه ۱۰-۳۱ (ص ۲۴۶، رودین، ۱۹۶۴) ، انتگرال‌های یگانه و دوگانه در (۱۶) به صفر میل می‌کند. بنابراین به‌ازای $n>3$ از رابطه (۱۶) داریم: $\lim_{m\to\infty} r(\pi_m,\delta_m)=1$. از طرفی $\sup_\alpha R(\alpha,\delta^{\pi}_{0,0})=(n-1)^{-1}$. بنابراین با استفاده از قضیه ۱-۱۲ (ص ۳۱۶، لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) $\delta^{\pi}_{0,0}$ برآوردگر مینیماکس تحت تابع زیان (۲) است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، برآوردیابی بیزی و بیز تعمیم یافته از توزیع نمایی تعمیم یافته را تحت تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن α^{-2} نسبت به پیشین‌های مختلف بررسی نمودیم. برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس را در کلاس $\Gamma_{a_0,b}$ به‌دست آوردیم. مینیماکس بودن برآوردگر بیز تعمیم

یافته α را نشان دادیم. همچنین نشان دادیم که این برآوردگر در کلاس I بهینه است و ادعا کردیم که مجاز هم هست ولی نتوانستیم این ادعا را اثبات کنیم .

مراجع

Bain, L.J. and Engelhardt, M. (1991), *Statistical analysis of reliability and life testing models- Theory and Methods*, Marcel Dekker: New York.

Berger, J.O. (1985), *Statistical decision theory and Bayesian analysis*, 2nd ed., Springer-Verlag: ., New York.

Berto, B. and Ruggeri, F. (1992) Conditional G-Minimax actions under convex losses, *Commun. Statist. Theor. Meth.* , **21**(4), 1051-1066.

Boratynska, A. (2002), Posterior regret G-Minimax estimation in a normal model with asymmetric loss function, *Applications Mathematicae* , **29**, 7-13.

Gupta, R.D. and Kundu, D. (1997), Generalized exponential distributions, *Technical report*, Dept of Math., Stat. and Comp. Sci., University of New Brusnwick, Saint-John, NB, Canada.

Gupta, R.D. and Kundu, D. (2001), Generalized exponential distribution: different methods of estimation, *Journal of Statistical Computaion and Simulation*, **69**(4), 315-338.

Gupta, R.D. and Kundu, D. (2008), Generalized exponential distribution: Bayesian Inferences, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**(4), 1873-1883.

Jafari Jozani, M. and Parsian, A. (2008), Posterior regret gamma- minimax and prediction with application on k-records data under entropy loss function, *Commun. in Stat. Theory and Method*, **37**(14), 2202-2212.

Lehmann, E.L, and Casella, G. (1998), *Theory of point estimation*, 2nd ed., Springer- Verlag, New York.

Meczarski, M. and Zieliski, R. (1991), Stability of Bayesian estimator of Poisson mean under the inexactly specified Gamma prior, *Statistics and Probability Letter*, **12**, 329-333.

Mudholkar, G.S, Srivastava, D.K. and Freimer, M. (1995). The exponentiated Weibull family: a reanalysis of the bus motor failure data, *Technometric*, **37**, 436-445.

Rios Insua, D., Ruggeri, F. and Vidakovic, B. (1995), Some results on posterior regret Gamma- Minimax estimation, *Statist. Decis*., **13**, 315-331.

Royden, H. L. (1963), *Real analysis*, Macmillan, New York.

Rudin, W. (1964), *Principles of mathematical analysis*, McGrow-Hill, New York.

Singh, R., Singh, S.K. and Singh, G.P. (2008), Bayes estimator of generalized exponential parameters under LINEX loss function using LINDLEY'S approximation, *Data Science Journal*, **7**, no.5, 65-75.

Bayesian Inferences in Generalized Exponential Distribution

Sediqeh Omidvar Shalmani, Ahmad Parsian, Ali Karimnezhad, Leila Golparvar

Department of Statistics, University of Tehran, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, we discuss minimaxity of Generalized Bayes estimator of the shape parameter of Generalized Exponential (GE) distribution under Weighted Square Error Loss (WSEL) function. A common approach to the prior uncertainty in Bayesian analysis is to choose a class of prior distributions and look for an optimal decision within this class. This is known as robust Bayesian methodology. We obtain Posterior Regret Gamma Minimax estimator of the shape parameter of GE distribution under WSEL function.

Keywords : Generalized Bayes Estimator, Generalized Exponential Distribution, Minimax estimator, Posterior Regret Gamma Minimax.

Mathematics Subject Classification (2000): 15C20, 62C62