مدول‌های با بعد کرول حداکثر α

نسرین شیرعلی[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۴/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۰/۱۲/۸

چکیده: در این مقاله هدف بررسی حلقه‌هایی است که هر مدول با بعد کرول، دارای بعد کرول حداکثر α است. برای این منظور ابتدا مطالبی راجع به بعد کرول و زنجیر لووی مطرح کرده و سپس حلقه α-لووی را تعریف می‌کنیم، که در حالت $\alpha=0$ همان حلقه لووی است. نشان می‌دهیم که اگر R حلقه α–لووی باشد هر R–مدول با بعد کرول، دارای بعد کرول حداکثر α است. هم‌چنین خواهیم دید که مدول‌هایی که هر خارج قسمت آن‌ها دارای بعد گلدی متناهی و λ–لووی، برای یک $\lambda \leq \alpha$ است، دارای بعد کرول حداکثر α هستند.

واژه‌های کلیدی: بعد گلدی، بعد کرول، مدول α-بحرانی، مدول α-لووی.

کد موضوع بندی ریاضی: ۱۶P۶۰

[۱] آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: Shirali_n@scu.ac.ir

۱ـ مقدمه

مفهوم بعد کرول ابتدا توسط رنتس چلر و گابریل (۱۹۶۷) برای اعداد ترتیبی متناهی تعریف شد و سپس توسط لمونیه (۱۹۷۲) به ازای هر عدد ترتیبی دلخواه، برای یک مشبکه مورد بررسی قرار گرفت، که اگر آن را برای مشبکه‌ی تمام زیرمدول‌های R-مدول M، اعمال کنیم همان مفهوم بعد کرول تعریف شده توسط کراس (۱۹۷۳) است. بعد کرول یک مدول انحراف آن مدول از آرتینی بودن است. یافتن خاصیتی برای یک حلقه که در آن هر مدول با بعد کرول، دارای بعد کرول حداکثر α(برای عدد ترتیبی α) باشد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. کرمزاده و ساجدی (۲۰۰۲) نشان دادند که R–مدول M، آرتینی است اگر و تنها اگر لووی مدول با بعد کرول باشد. در این مقاله سعی می‌کنیم که این مطلب را در حالت کلی‌تر ثابت کنیم. همان گونه که از عنوان مقاله پیداست، هدف تعیین کرانی برای بعد کرول مدول‌ها روی کلاسی از حلقه‌ها است. برای این منظور ابتدا حلقه α–لووی را تعریف می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که اگر R حلقه α–لووی باشد، هر R–مدول با بعد کرول، دارای بعد کرول حداکثر α است، که در حالت $\alpha=\circ$ همان قضیه کرمزاده و ساجدی است. در این مقاله منظور از یک حلقه، حلقه شرکت‌پذیر واحددار است که لزوماً تعویض‌پذیر نمی‌باشد. هم‌چنین منظور از R– مدول، R–مدول راست یکانی است.

تعریف ۱. فرض می‌کنیم M یک R– مدول باشد. اگر $M=(\circ)$ تعریف می‌کنیم، بعد کرول M برابر ۱- و با $K-\dim M=-۱$ نمایش می‌دهیم و به استقرا می‌گوییم $K-\dim M=\alpha$ (α یک عدد ترتیبی)، هرگاه $K-\dim M \not< \alpha$ و برای هر زنجیر نزولی از زیر مدول‌های M به شکل $M_۱\supset M_۲\supset\ldots\supset M_n\supset\ldots$ عدد طبیعی k موجود باشد به‌طوری که برای تمام $i\geq k$، $K-\dim(M_i/M_{i+1})<\alpha$ و α کوچکترین عدد ترتیبی با این خاصیت باشد(یعنی، هر زنجیر نزولی از زیرمدول‌های M، به جز یک تعداد متناهی، مدول‌های خارج قسمت آن‌ها دارای بُعدِ کرول هستند).

بُعد کرول حلقه R ($K-\dim R$) را بعد کرول R–مدول راست R در نظر می‌گیریم. این امکان وجود دارد که هیچ عدد ترتیبی α یافت نشود به طوری که $K-\dim M=\alpha$، در این صورت می‌گوییم M دارای بُعد کرول نیست. اگر $K-\dim M>\alpha$، آن‌گاه زنجیر نزولی $M_۱\supset M_۲\supset\ldots\supset M_n\supset\ldots$ از زیرمدول‌های M وجود دارد به‌طوری که برای هر i، $K-\dim(M_i/M_{i+1})\geq\alpha$.

لم ۱. اگر هر زیرمدول سره M دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه M نیز داری بعد کرول است و داریم: $K-\dim M=\operatorname{Sup}\{K-\dim A:(\circ)\subset A\subset M\}$.

اثبات: به کتاب مک کانل و رابسون (۱۹۸۷) مراجعه کنید.

گزاره ۱. فرض می‌کنیم M یک R–مدول باشد، برای هر زیرمدول N از M داریم:

$$K-\dim M=\mathrm{Sup}\{K-\dim \mathrm{N}, K-\dim M/N\}.$$

اثبات: فرض می‌کنیم N و $\frac{M}{N}$ دارای بعد کرول باشند. قرار می‌دهیم $\alpha=\mathrm{Sup}\{K-\dim \mathrm{N}, K-\dim M/N\}$. نشان خواهیم داد که M دارای بعد کرول کمتر یا مساوی α است. با استقرا عمل می‌کنیم. اگر $\alpha=-۱$ پس $N=۰$ و $\frac{M}{N}=۰$ که در نتیجه $K-\dim M=-۱$. فرض می‌کنیم به ازای هر مدول L اگر $k-\dim L<\alpha$ حکم برقرار باشد. اگر $A_۰\supseteq A_۱\supseteq A_۲\cdots A_n\supseteq\cdots$ یک زنجیر کاهنده از زیرمدول‌های M باشد. لذا

$$A_۰\bigcap N\supseteq A_۱\bigcap N\supseteq A_۲\bigcap N\cdots A_n\bigcap N\supseteq\cdots$$

و $\frac{A_۰+N}{N}\supseteq\frac{A_۱+N}{N}\supseteq\frac{A_۲+N}{N}\supseteq\cdots$ به ترتیب زنجیرهایی از زیرمدول‌های N و $\frac{M}{N}$ می‌باشند. پس $k_۱$ وجود دارد که برای هر $i\geq k_۱$، $K-\dim\frac{A_i\bigcap N}{A_{i+۱}\bigcap N}<K-\dim N$. به همین ترتیب $k_۲$ وجود دارد که برای هر $i\geq k_۲$، $K-\dim\frac{A_i+N}{A_{i+۱}+N}<K-\dim\frac{M}{N}$. قرار می‌دهیم $n=\max\{k_۱,k_۲\}$ پس به ازای هر $i\geq n$، $K-\dim\frac{A_i+N}{A_{i+۱}+N}<K-\dim\frac{M}{N}$ و $K-\dim\frac{A_i\bigcap N}{A_{i+۱}\bigcap N}<K-\dim N$.

حال هم‌ریختی طبیعی $\frac{A_i}{A_{i+۱}}\to\frac{A_i+N}{A_{i+۱}+N}$ دارای هسته $\frac{A_i\bigcap(A_{i+۱}+N)}{A_{i+۱}}$ است و هم‌ریختی طبیعی $A_i\bigcap N\to\frac{A_i\bigcap(A_{i+۱}+N)}{A_{i+۱}}$ پوشاست و هسته آن $N\bigcap A_{i+۱}$ است. بنابراین $\frac{A_i\bigcap N}{A_{i+۱}\bigcap N}\cong\frac{A_i\bigcap(A_{i+۱}+N)}{A_{i+۱}}$. از این رو دنباله

$$۰\to\frac{A_i\bigcap N}{A_{i+۱}\bigcap N}\to\frac{A_i}{A_{i+۱}}\to\frac{A_i+N}{A_{i+۱}+N}\to ۰$$

کامل است و در نتیجه

$$K-\dim\frac{A_i}{A_{i+۱}}=\mathrm{Sup}\{K-\dim\frac{A_i\bigcap N}{A_{i+۱}\bigcap N}, K-\dim\frac{A_i+N}{A_{i+۱}+N}\}$$

و $K-\dim M=\alpha$.

نتیجه۱. $K-\dim (M_1\oplus M_2\oplus\ldots\oplus M_n)=$ $\mathrm{Sup}\{K-\dim M_1,\ K-\dim M_2\ ,\ \ldots,\ K-\dim M_n\}$

اثبات : با توجه به گزاره ۱ واضح است .

نتیجه ۲. اگر M، R–مدول متناهی تولید شده باشد، آن‌گا $K-\dim M\le K-\dim R$.

اثبات. چون $M\simeq F/K$، به طوری که F یک R–مدول آزاد $(F\simeq\sum_{i=1}^{n}\oplus R)$ است. و بنابه نتیجه ۱،

$$K-\dim M=K-\dim(F/K)=\mathrm{Sup}\{K-\dim R,\ K-\dim K\}\le K-\dim R.$$

گزاره ۲. فرض می‌کنیم M، R–مدول و برای هر زیرمدول A از M، A یا M/A دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه M نیز دارای بعد کرول است.

اثبات. فرض می‌کنیم $M\supseteq A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots$ زنجیر کاهنده نامتناهی از زیر مدول‌های M باشد، اگر برای یک i، A_i دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه برای تمام $K\ge i$، A_k/A_{k+1} دارای بعد کرول است و در نتیجه M دارای بعد کرول است. اگر برای هر i، A_i دارای بعد کرول نباشد، آن‌گاه برای هر i، M/A_i و در نتیجه A_i/A_{i+1}دارای بعد کرول هستند. از طرفی هر زنجیر از زیرمدول‌ها یک مجموعه است و گردایه‌ی همه زنجیرها یک مجموعه می‌باشد، بنابراین M دارای بعد کرول است.

گزاره ۳. هر مدول با بعد کرول دارای بعد گلدی متناهی است.

اثبات. به کتاب مک کانل و رابسون (۱۹۸۷) مراجعه کنید.

لم ۲. اگر هر عامل سره مدول M دارای بعد کرول باشد، آن‌گاه M دارای بعد کرول است و داریم $K-\dim M\le \mathrm{Sup}\{K-\dim(M/A)+1:(0)\subset A\subset M\}$.

اثبات. اگر $M_0\supseteq M_1\supseteq M_2\supseteq\ldots$ زنجیر نامتناهی از زیرمدول‌های M باشد، آن‌گاه برای هر i چون $M_i/M_{i+1}\subseteq M/M_{i+1}$. پس

$$K-\dim(M_i/M_{i+1})\le K-\dim(M/M_{i+1}).$$

اگر قرار دهیم $\alpha = \text{Sup}\,\{K-\dim(M/A)+۱ : (۰)\subset A \subset M\}$ نتیجه می‌گیریم که $K-\dim M \le \alpha+۱$.

گزاره ۴. اگر R–مدول M دارای بعد کرول، آن‌گاه

$$K-\dim M \le \text{Sup}\{K-\dim(M/\mathrm{E})+۱ : E \subset_{\theta} M\}.$$

اثبات. به صفحه ۱۸، گوردون و رابسون (۱۹۷۳) مراجعه کنید.

قضیه ۱. فرض می‌کنیم $M=\sum_{i\in I} M_i$ یک R–مدول و برای هر i، $K-\dim M \le \alpha$ باشد. اگر بعد کرول M وجود داشته باشد، آن‌گاه $K-\dim M \le \alpha$.

اثبات. به کتاب مک کانل و رابسون (۱۹۸۷) مراجعه کنید.

تعریف ۲. R–مدول M را α–بحرانی می‌نامیم، هرگاه $K-\dim M=\alpha$ و برای هر زیرمدول ناصفر N از M، $K-\dim(M/N)<\alpha$ و آن را بحرانی می‌نامیم. اگر برای یک عدد ترتیبی α، بحرانی باشد. واضح است که مدول‌های ۰–بحرانی دقیقاً R–مدول‌های ساده هستند.

لم ۳ . هر زیرمدول ناصفر یک مدول α–بحرانی، α–بحرانی است.

اثبات. فرض می‌کنیم M مدول α–بحرانی و N زیرمدول ناصفر از آن باشد، آن‌گاه چون $K-\dim(M/N)<\alpha$ بنابراین باید $K-\dim N=\alpha$، حال اگر $A\neq(0)$ زیر مدول N باشد، آن‌گاه

$$K-\dim(N/A)\le K-\dim(M/A)<\alpha.$$

گزاره ۵. هر مدول ناصفر با بعد کرول، دارای زیرمدولی بحرانی است.

اثبات. فرض می‌کنیم A زیرمدول ناصفری از M با کوچکترین بعد کرول α باشد، اگر A، $-\alpha$بحرانی نباشد، پس زیرمدول $(۰)\neq A_۱ \subset A$ وجود دارد به‌طوری که $K-\dim(A/A_۱)=\alpha$ و توجه می‌کنیم که $K-\dim A_۱=\alpha$. حال اگر $A_۱$، α–بحرانی نباشد، پس زیرمدول $۰\neq A_۲\subseteq A_۱$ وجود دارد، به‌طوری که $K-\dim(A_۱/A_۲)=\alpha$ و $K-\dim A_۲=\alpha$ در نتیجه $A\ A\supseteq A_۱\supseteq A_۲\supseteq\ldots$ یک زنجیر نامتناهی از زیرمدول‌های M است که $K-\dim(A_{i}/A_{i+۱})=\alpha$ یک تناقض است.

۲-ساکل R–مدول و زنجیر لووی

در این بخش با بیان بعضی از مطالب مورد نیاز مربوط به ساکل یک R–مدول و زنجیر لووی به بررسی حلقه‌های لووی می‌پردازیم.

تعریف ۳. فرض می‌کنیم M یک R–مدول باشد. مجموع تمام زیر مدول‌های ساده M را ساکل M می‌نامیم و با $\operatorname{Soc}(M)$ نمایش می دهیم. اگر M فاقد زیرمدول ساده باشد قرار می‌دهیم $\operatorname{Soc}(M)=0$. M را نیم‌ساده می‌گوییم، هرگاه $\operatorname{Soc}(M)=M$. حلقه R را نیم ساده می نامیم، اگر به عنوان R–مدول نیم‌ساده باشد.

تعریف ۴. زنجیر لووی(یا سری لووی) برای R–مدول M به شکل

$$(0)=S_0\subseteq S_1\subseteq S_2\subseteq\ldots\subseteq S_\lambda=S_{\lambda+1}$$

می‌باشد و به‌صورت استقرایی تعریف می‌گردد:

$S_0=(0)$ و $S_1=\operatorname{Soc}(M)$ و برای عدد ترتیبی α، $\dfrac{S_{\alpha+1}}{S_\alpha}=\operatorname{Soc}\left(\dfrac{M}{S_\alpha}\right)$ و اگر α عدد ترتیبی حدی باشد، $S_\alpha=U_{B<\alpha}S_\beta$. یک زیرمدول لووی M، زیر مدولی مانند S_λ است که در آن λ کوچکترین عدد ترتیبی است که $S_\lambda=S_{\lambda+1}$ عدد ترتیبی λ را طول لووی M می‌نامیم و آن را با $L(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر $M=S_\lambda$، آن‌گاه M را مدول لووی می‌نامیم. حلقه‌ی R، حلقه‌ی راست لووی نامیده می‌شود، هرگاه به‌عنوان، R–مدول راست لووی در نظر گرفته شود.

تعریف ۵. R–مدول M را نیم‌آرتینی می‌گوییم، اگر هر مدول خارج قسمتی ناصفر آن دارای ساکل ناصفر باشد.

لم ۴. هر R–مدول نیم‌آرتینی M، مدول لووی است.

اثبات. برای هر عدد ترتیبی α، $\dfrac{M}{S_\alpha}$ یک مدول خارج قسمتی از M است و در نتیجه $\dfrac{S_{\alpha+1}}{S_\alpha}=\operatorname{Soc}\left(\dfrac{M}{S_\alpha}\right)\neq 0$، یعنی؛ برای هر عدد ترتیبی α داریم $S_\alpha\subset S_{\alpha+1}$، این نشان می‌دهد که زنجیر اکیداً فزاینده از زیرمدول‌های M موجود است، اما اندیس‌های این زنجیر عددهای ترتیبی هستند، پس سری لووی تا بی‌نهایت نمی‌تواند ادامه یابد و یک جایی به M ختم می‌شود، در نتیجه M، مدول لووی است.

لم ۵. هر زیرمدول یک مدول لووی، یک مدول لووی است.

اثبات. به کتاب مک کانل و رابسون (۱۹۸۷) مراجعه کنید.

قضیه زیر محکی برای R–مدول‌های لووی می‌باشد.

قضیه ۲. R–مدول M، مدول لووی است اگر و فقط اگر هر تصویر هم‌ریخت ناصفر M دارای ساکل ناصفر باشد.

اثبات. به کتاب مک کانل و رابسون (۱۹۸۷) مراجعه کنید.

قضیه ۳. R حلقه راست لووی است اگر و فقط اگر هر R– مدول دوری آن دارای ساکل ناصفر باشد.

اثبات. هر R–مدول دوری با R/I برای ایدآل راست R یک‌ریخت است و در نتیجه قضیه برقرار است.

قضیه ۴. برای هر حلقه R، شرایط زیر هم‌ارزند:

۱) R حلقه لووی است.
۲) هر R–مدول، مدول لووی است.
۳) هر R–مدول ناصفر، دارای ساکل ناصفر است.

اثبات. به کتاب مک کانل و رابسون (۱۹۸۷) مراجعه کنید.

گزاره ۶. فرض می‌کنیم M ، R–مدول و $N \subseteq M$ باشد، به‌طوری که N یا M/N مدول-های لووی باشند، آن‌گاه M نیز مدول لووی است.

اثبات. فرض می‌کنیم $N' \subseteq M$ اگر $N \subseteq N'$، آن‌گاه $\frac{M}{N'} \simeq \frac{M/N}{N'/N}$ تصویر هم‌ریخت از M/N است و اگر M/N مدول لووی باشد، بنا به قضیه ۲، M/N' دارای ساکل ناصفر است و در نتیجه M مدول لووی است. اگر $N \not\subset N'$، آن‌گاه $N \cap N' \subset N$ و $N/N \cap N'$ دارای ساکل ناصفر است(چون N مدول لووی است). اما $\frac{N}{N \cap N'} \simeq \frac{N+N'}{N'}$ پس $\frac{N+N'}{N'} \subset \frac{M}{N'}$ و در نتیجه M/N' دارای ساکل ناصفر است و در این صورت M، مدول لووی است.

قضیه ۵. فرض می‌کنیم $\{A_i : i \in I\}$ گردایه تمام زیرمدول‌های لووی R–مدول M باشد. اگر $A = \sum_{i \in I} A_i$، آن‌گاه A بزرگ‌ترین زیرمدول لووی M است و M / A دارای زیرمدول لووی ناصفر نیست.

اثبات. فرض می‌کنیم $B \subset A$، آن‌گاه $i \in I$ موجود است به‌طوری که $A_i \not\subset B$ بنابراین $B \cap A_i \neq A_i$ و $\frac{A_i}{A_i \cap B} \simeq \frac{A_i + B}{B} \subseteq \frac{A}{B}$ و A_i، مدول لووی است، پس A / B شامل زیرمدول ساده می‌باشد. بنابراین A، زیرمدول لووی M است.

۳–حلقه‌های α–لووی

در این قسمت مفهوم لووی مدول را برای هر عدد ترتیبی α تعمیم داده و با اثبات قضیه‌های مهمی شناخت بهتری راجع به این مدول‌ها پیدا می‌کنیم، که در حالت $\alpha = ۰$ همان قضیه‌های مدول‌های لووی می‌باشند. کرمزاده و رحیم‌پور (۲۰۰۵) نشان دادند که R–مدول M دارای بعد کرول حداکثر α است اگر و تنها اگر هر تصویر هم‌ریختی M دارای زیرمدول اساسی با بعد کرول حداکثر α باشد. در این بخش ضمن معرفی حلقه‌های α- لووی، نشان می‌دهیم که –Rمدول M دارای بعد کرول حداکثر α است، اگر هر مدول خارج قسمت M دارای زیرمدول با بعد کرول حداکثر α باشد.

تعریف ۶. R– مدول M را α-لووی می‌نامیم، اگر هر مدول خارج قسمت M دارای زیرمدولی با بعد کرول کوچکتر یا برابر α باشد هم‌چنین حلقه R را α-لووی می‌گوییم اگر هر R–مدول، α-لووی باشد و R را حلقه لووی می‌نامیم، اگر ۰-لووی باشد.

لم ۶. هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمت α-لووی مدول، برای یک $\beta \leq \alpha$، β–لووی مدول است.

اثبات. چون هر مدول خارج قسمت از هر خارج قسمت M، خارج قسمتی از M است. بنابراین اگر M، α-لووی مدول باشد، هر خارج قسمت آن نیز چنین است. فرض می‌کنیم. $P \subseteq M$، نشان می دهیم که هر خارج قسمتی از P، دارای زیرمدول با بعد کرول است. مدول P/N را در نظر می‌گیریم. چون $N \subseteq M$، مدول M/N دارای زیرمدول با بعد کرول حداکثر α است. از این‌رو $N \subset N'$ موجود است به‌طوری که $K - \dim(N'/N) \leq \alpha$. سه حالت را مورد بررسی قرار می دهیم.

حالت‌اول $N' \subseteq P$ ؛درنتیجه $K - \dim(N'/N) \leq K - \dim(P/N)$.

حالت دوم. $P \subseteq N'$؛ چون $P/N \subseteq N'/N$، پس

$$K-\dim(P/N) \le K-\dim(N'/N)\ .$$

حالت سوم. $P \not\subset N'$ **و** $N' \not\subset P$؛ چون

$$K-\dim(P \cap N'/N) \le K-\dim(N'/N) \le \alpha$$

و $P \cap N'/N \subseteq P/N$ بنابراین P/N دارای زیرمدولی با بعد کرول است.

قضیه ۶. اگر M یک R–مدول و A زیرمدول آن باشد به طوری که A و $\frac{M}{A}$، α-لووی باشند، آن‌گاه M، برای یک $\beta \le \alpha$، β لووی است.

اثبات. فرض می‌کنیم $B \subseteq M$. اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $\frac{M}{B} \simeq \frac{M/A}{B/A}$ تصویر هم-ریخت مدول $\frac{M}{A}$ است و در نتیجه γ_1-مدول است برای یک $\gamma_1 \le \alpha$ و اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A \cap B \subseteq A$ و در نتیجه $\frac{A+B}{B} \simeq \frac{A}{A \cap B}$ بنا به لم ۶، شامل زیرمدول با بعد کرول است. از این‌رو $\frac{M}{B}$ برای یک $\gamma_2 \le \alpha$، γ_2-لووی است. قرار می‌دهیم $\beta = \mathrm{Sup}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ و دراین صورت M، β– لووی برای یک $\beta \le \alpha$.

لم ۷. اگر هر مدول خارج قسمت R–مدول M، β_i– لووی باشد، آن‌گاه M به ازای $\alpha = \mathrm{Sup}\{\beta_i\ i \in I\}$، α–لووی است.

اثبات. واضح است.

لم ۸. هر زیرمدول سره R–مدول M، β_i–لووی است اگر و تنها اگر M، به ازای یک $\alpha = \mathrm{Sup}\{\beta_i\ i \in \mathrm{I}\}$، α–لووی باشد.

اثبات. $\Longrightarrow$) واضح است.

$\Longleftarrow$) فرض می‌کنیم که برای هر زیرمدول N از M، N، β_i–لووی باشد. برای هر زیرمدول P در M، اگر P ساده باشد که دارای بعد نویتری صفر است و در نتیجه اثبات تمام است. اما اگر P ساده نباشد، آن‌گاه $A \subseteq M$ موجود است به‌طوری که $P \not\subset A$ (زیرا اگر برای هر زیرمدول N در M، $P \subseteq N$، آن‌گاه $P \subseteq \bigcap_{N \subseteq M} N$ و $\bigcap_{N \subseteq M} N$ زیر مدول ساده در M است) و بنا به فرض A، β_i–لووی است. اما $A/A \cap P \simeq A + P/P$ و $A/A \cap P$ دارای زیرمدول با بعد

کرول است. از این‌رو $A+P/P$ به عنوان زیرمدولی از M/P دارای زیرمدول با بعد کرول می‌باشد و در نتیجه M، به ازای $\alpha = \operatorname{Sup}\{\beta_i \; i\in I\}$ ، α-لووی است.

گزاره ۷. اگر مدول M دارای دو زنجیر از زیرمدول‌های خود که یکی زنجیر نزولی و شمارش‌پذیر $M_\circ \supseteq M_1 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq \dots$ و دیگری زنجیر صعودی $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_\delta \dots \subseteq \dots$ باشد و دنباله صعودی و قابل شمارش از اعداد ترتیبی $\delta_1 < \delta_2 < \dots$ وجود داشته باشد به‌طوری که $N_{\delta_{n+1}} \bigcap M_n \neq N_{\delta_n} \bigcap M_n + N_{\delta_{n+1}} \bigcap M_{n+1}$، آن‌گاه یک تصویر هم‌ریختی M دارای بعد گلدی متناهی نیست.

اثبات. به کتاب مک کانل و رابسون (۱۹۸۷) مراجعه کنید.

تعریف ۷. برای هر عدد ترتیبی α و R–مدول M یک α-ساکل بحرانی M را $S_\alpha = \oplus_{i=1} C_i$ تعریف می‌کنیم که در آن هر C_i زیرمدول α–بحرانی M است و $\{C_i\}_{i\in I}$ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از زیرمدول‌های α–بحرانی M است که بنا به لم تسورن وجود دارد.

تعریف ۸. فرض می‌کنیم M یک R–مدول باشد. در این‌صورت ساکل بحرانی M را $S = \sum_{\alpha\le\lambda} S_\alpha$ تعریف می‌کنیم که در آن λ کوچک‌ترین عدد ترتیبی است به قسمی که برای هر زیرمدول α-بحرانی M داریم؛ $\alpha \le \lambda$. به عبارت دیگر

$$\lambda = \operatorname{Sup}\{K\text{-dim } C: \text{ زیرمدول } \alpha\text{-بحرانی } M \text{ است } C\}$$

در این‌جا دو گزاره‌ی زیر که توسط کرمزاده و رحیم‌پور (۲۰۰۵) اثبات شده‌اند را یادآور می‌شویم.

گزاره ۸. اگر S ساکل بحرانی R–مدول M باشد، آن‌گاه $S = \sum_{\alpha\le\lambda} S_\alpha = \oplus_{\alpha\le\lambda} S_\alpha$ که در آن λ کوچکترین عدد ترتیبی است به قسمی که برای هر زیرمدول α-بحرانی M داریم؛ $\alpha \le \lambda$.

گزاره ۹. اگر $M = \sum_{i\in I} N_i$ و برای هر i، $K-\dim M = \alpha_i$ و هر مدول خارج قسمت M دارای بعد گلدی متناهی باشد، آن‌گاه $K-\dim M = \operatorname{Sup}\{\alpha_i\}_{i\in I}$.

اثبات. کافی است نشان دهیم مدول M دارای بعد کرول است. فرض کنیم چنین نباشد. در این صورت زنجیر نامتناهی کاهشی $M = M_\circ \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$ از زیرمدول‌های M وجود دارد به طوری که برای هر $i \ge 1$، M_i / M_{i+1} دارای بعد کرول نیست. حال بدون این که از کلیت مسأله کم شود می‌توان $A = \{N_i\}_{i\in I}$ را یک زنجیر فرض کرد. بدیهی است که

$N_{i_1} \in A$ وجود دارد به‌طوری که $N_{i_1} \in A$ اگر $A_\circ = (\circ)$، $A_1 = N_{i_1}$ قرار دهیم، آن‌گاه حال $M_\circ \bigcap A_1 \not\subset M_1 + A_\circ$ و $M_1 \not\subset A_1 + M_2$ زیرا در غیر این صورت

$$M_1 / M_2 \subset (A_1 + M_2) / M_2 \simeq A_1 / A_1 \bigcap M_2$$

در نتیجه M_1 / M_2 دارای بعد کرول است که تناقض می‌باشد.

بنابراین با توجه به زنجیر بودن A، $N_{i_2} \in A$ وجود دارد به‌طوری که $N_{i_1} \subseteq N_{i_2}$ و $M_1 \bigcap N_{i_2} \not\subset (A_1 + M_2)$ اگر $A_2 = N_{i_2}$ قرار دهیم، آن‌گاه $M_1 \bigcap A_2 \not\subset (A_1 + M_2)$ اگر این روش را ادامه دهیم دو زنجیر $(\circ) = A_\circ \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ و $M = M_\circ \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ با $M_i \bigcap A_{i+1} \not\subset (A_i + M_{i+1})$ بدست می‌آوریم. در نتیجه $M_i \bigcap A_{i+1} \neq (A_i \bigcap M_i) + A_{i+1} \bigcap M_{i+1}$ بنابه گزاره ۷، یک مدول خارج قسمت M دارای بعد گلدی متناهی نیست و تناقض ایجاد می‌شود. بنابراین مدول M دارای بعد کرول است.

در قضیه زیر شرطی را که هر مدول λ-لووی دارای بعد کرول باشد، بیان می‌کنیم.

قضیه ۷. فرض می‌کنیم M یک R–مدول باشد. در این صورت $K-\dim M = \alpha$ اگر و تنها اگر هر مدول خارج قسمت M، برای یک عدد ترتیبی λ که $\lambda \leq \alpha$، مدول λ-لووی با بعد گلدی متناهی باشد و

$$\alpha = \mathrm{Sup}\{\lambda : \text{لووی است } \lambda- \text{ دارای مدول‌خارج‌قسمتی } M\}$$

اثبات. فرض می‌کنیم $K-\dim M = \alpha$ در این صورت هر مدول خارج قسمت M دارای بعد کرول کوچکتر یا مساوی α است و در نتیجه هر مدول خارج قسمت M، برای یک عدد ترتیبی λ که $\lambda \leq \alpha$، λ-لووی است. برای این که ثابت کنیم α سوپریمم چنین λهایی است کافی است عکس قضیه را ثابت کنیم. فرض می‌کنیم، $(\circ) = T_\circ \subset T_1 \subset \dots \subset T_\mu \subset \dots \subset T_\gamma = M$ یک زنجیر صعودی در M باشد که برای هر عدد ترتیبی μ، $\frac{T_{\mu+1}}{T_\mu}$ یک ساکل بحرانی M/T_μ باشد و برای هر عدد ترتیبی حدی β، $T_\beta = \bigcup_{\mu<\beta} T_\mu$ حال فرض می‌کنیم M مدول $\lambda_\circ$–لووی، M/T_1 مدول λ_1–لووی و M/T_β λ_β–مدول لووی باشند. در این صورت چون $T_1 = \frac{T_1}{T_\circ} = C_{\alpha_1} + \dots + C_{\alpha_m} = C_{\lambda_\circ}$ و $\frac{T_2}{T_1} = C_{\alpha_1} + \dots + C_{\alpha_n} = C_{\lambda_1}$ واضح است که $K-\dim T_1 = K-\dim \frac{T_1}{T_\circ} = \lambda_\circ$ و $K-\dim \frac{T_2}{T_1} = \lambda_1$. پس $K-\dim T_2 = \max\{\lambda_\circ, \lambda_1\}$. حال ادعا می‌کنیم که

$K-\dim T_\mu=\sup\{\lambda_\beta\}_{\beta<\mu}$ برای اثبات این موضوع، استقرا روی μ به کار می‌بریم. برای حالتی که $\mu=۱, ۲$ واضح است . فرض می‌کنیم برای اعداد ترتیبی کمتر از μ رابطه درست باشد، در این صورت اگر $\mu=\beta+۱$، آن‌گاه $K-\dim T_\mu=\max\{K-\dim T_\beta,\lambda_\beta\}$.

این رابطه نشان می‌دهد برای عدد ترتیبی غیر حدی μ، $K-\dim T_\mu=\sup\{\lambda_\beta\}_{\beta<\mu}$. اگر μ یک عدد ترتیبی حدی باشد، آن‌گاه $T_\mu=U_{\beta<\mu}T_\beta$. با توجه به گزاره ۹، $K-\dim T_\mu=\sup\{K-\dim T_\beta\}_{\beta<\alpha}$. در نتیجه برای هر عدد ترتیبی μ داریم، $K-\dim T_\mu=\sup\{\lambda_\beta\}_{\beta<\mu}$. بنابراین $K-\dim M=K-\dim T_\gamma=\sup\{\lambda_\beta\}_{\beta<\mu}\leq\alpha$

و چون $K-\dim M\geq\alpha$ نتیجه می‌گیریم که $K-\dim M=\alpha$.

در این قسمت بعد از معرفی کلاس دیگری از مدول‌ها، حلقه‌هایی را که در آنها هر R– مدول با بعد کرول، دارای بعد کرول حداکثر α است را مشخص می‌شوند.

تعریف ۹. R–مدول M را α-کرول کراندار می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمدول N در M، اگر $K-\dim M/N\leq\alpha$ یا $K-\dim N\leq\alpha$، آن‌گاه $K-\dim M=\alpha$.

قضیه ۸. اگر R یک حلقه باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل‌اند:

۱) هر R–مدول با بعد کرول، دارای بعد کرول حداکثر α است.

۲) هر R–مدول، α-کرول کراندار است.

۳) R– مدول، $(\alpha+۱)$–بحرانی وجود ندارد.

اثبات. ۲⟸۱) اگر برای هر زیرمدول N در M ، N یا M/N دارای بعد کرول باشند، آن‌گاه M دارای بعد کرول است و بنا به (۱)، $K-\dim M\leq\alpha$.

۳⟸۲) اگر M ، R-مدول $\alpha+1$–بحرانی باشد چون برای هر زیرمدول سره N در M، $K-\dim M/N\leq\alpha+۱$ بنا به (۲)، $K-\dim M\leq\alpha$ و این یک تناقض است.

۱ ⟸۳) توجه می‌کنیم که اگر هر زیرمدول بحرانی هر مدول خارج قسمت M، دارای بعد کرول کوچکتر یا مساوی α باشد، آن‌گاه M مدول α–لووی است و بنا به قضیه ۷، $K-\dim M\leq\alpha$. حال فرض می‌کنیم $K-\dim M=\beta$، ثابت می‌کنیم $\beta\leq\alpha$ فرض(خلف) می‌کنیم در نتیجه $\beta\geq\alpha+۱$، اگر β کوچکترین عدد ترتیبی بزرگتر یا مساوی $\alpha+۱$ باشد، دو حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حالت اول. اگر $\beta=\alpha+۱$، زیرمدول‌های $M_۱$ و $N_۱$ در M وجود دارند به‌طوری که $M_۱/N_۱$، بحرانی است و $K-\dim M_۱/N_۱=\alpha+۱$ با توجه به (۳) ناممکن است.

حالت دوم. اگر $\beta \geq \alpha + 1$، در این صورت مدول بحرانی M_1 / N_1 با $K-\dim M_1/N_1 > \alpha + 1$ وجود دارد هم‌چنین زیرمدول سره A در M' موجود است به طوری که $K-\dim M'/A \geq \alpha + 1$(زیرا اگر برای هر $A \subset M'$، $K-\dim M'/A < \alpha$، آن‌گاه $K-\dim M' < \alpha + 1$). اما M' مدول بحرانی است و

$$\alpha + 1 \leq K-\dim M'/A < K-\dim M' \leq K-\dim M = \beta$$

در نتیجه $\alpha + 1 \leq K-\dim M'/A < \beta$ و این تناقض است. زیرا فرض کردیم β کوچکترین عدد ترتیبی بزرگتر از $\alpha + 1$ است.

قضیه زیر که نتیجه‌ای از قضیه ۸ است، تعمیم قضایای کرمزاده و ساجدی (۲۰۰۲) و هاینه و اسمیت (۱۹۹۰)است.

قضیه ۹. اگر R حلقه α–لووی باشد، آن‌گاه هر R–مدول با بعد کرول، دارای بعد کرول حداکثر α است.

اثبات. کافی است ثابت کنیم R–مدول، $\alpha+1$– بحرانی وجود ندارد، اگر M، R–مدول $\alpha+1$–بحرانی باشد، هر زیرمدول M نیز $\alpha+1$–بحرانی است. اما به دلیل این که R حلقه –αلووی است، زیرمدول M' در M وجود دارد به‌طوری که $K-\dim M' \leq \alpha$ این تناقض است، زیرا M'، $\alpha+1$–بحرانی است.

مراجع

Gordon, R. and Robson, J. C. (1973). Krull dimension, *Mem. Amer. Math. Soc*, 133.

Huynh, D. V. Dung, N. V. and Smith, P. F. (1990). A Characterization of rings with Krull dimension, *J. Algebra*, 32 , 104 – 112.

Karamzadeh, O. A. S. and Rahimpour, Sh. (2005). On $\lambda -$ Finitely Embedded Modules, *Algebra Colloquium*, 12:2, 281-292.

Karamzadeh, O. A. S. and Sajedinejad, A. R. (2002). On the loewy length and Noetherian dimension of Artinian Modules. *Comm. Algebra*, 30 ,1077 – 1084.

Krause, G. (1973). Descending chains of submodules and the Krull dimension of Noethrian modules, *J. Pure Appl. Algebra*, 3, 385-397.

Lemonnier, B. (1972). Deviation des ensembles et groups abeliens totalement ordonnes, *Bull. Sc. Math*. 96, 289-303.

Macconnel, J. C. and Robson, J. C. (1987). Noncommutative Noetherian rings, *John Wiley, New Yo*rk.

Rentschler. P., and Gabriel ,P. (1967). Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnes, *C. R. Acad. Sci*. *Paris* 265, 712-715.

Modules with Krull Dimension of at Most α

Nasrin Shirali

Department of Mathematics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

Abstract

In this article we have introduced and studied the notation of α-loewy modules (0- loewy modules is just a loewy module). Using this concept we extend some of the basic results of loewy modules to α-loewy modules and we find a universal upper bound for Krull dimension over α- loewy rings. In particular, we show that module M has Krull dimension α if and only if each factor module of M is λ-loewy modules for some $\lambda \leq \alpha$ and has finite Goldie dimension.

Keywords: Goldie dimension, Krull dimension, α-critical module, α-loewy module.

Mathematics Subject Classification (2000): 16P60