توان‌های سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های متناهی

محمدرضا درفشه[۱]، عماد زاهدی[۲]

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، پردیس علوم، دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۷/۲۵   تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱/۲۶

چکیده: فرض کنیم χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر از یک گروه متناهی ناآبلی G باشد. برای اعداد صحیح نا منفی n و m با شرط $m+n>0$، در این مقاله حالتی که تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر سرشت $\chi^n\overline{\chi}^m$ سرشت‌های خطی G هستند مورد بحث قرار می‌گیرد. در مقاله‌ای ریاضی‌دان معروف به‌نام مان ثابت کرد که اگر G یک گروه متناهی و χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر G باشد و تمام موسس‌های تحویل‌ناپزیر χ^2 خطی باشند، آن‌گاه $G'\leq Z(G)$ و لذا G گروهی پوچ‌توان است. در این مقاله ما نتیجه‌ی «مان» را تعمیم داده و ثابت کرده‌ایم که اگر χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر از گروه G باشد و تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n\overline{\chi}^m$ خطی باشند، آن‌گاه G گروهی پوچ‌توان است، که در این‌جا m و n اعداد صحیح نامنفی بوده و $m+n>0$.

واژه‌های کلیدی: سرشت، گروه‌های متناهی، سرشت تحویل‌ناپذیر، توان، حاصل‌ضرب سرشت‌ها.

رده‌بندی ریاضی: ۲۰C۱۵، ۲۰D۱۵

۱- مقدمه

در این مقاله، همه‌ی گروه‌ها متناهی فرض می‌شوند. حاصل‌ضرب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های متناهی و شرایط تعیین شده روی موسس‌های تحویل‌ناپذیر آنها برای سالیان متمادی موضوع پژوهش بسیاری از محققین بوده است. به‌ازای سرشت دلخواه θ از گروه G، فرض می‌کنیم $Irr(\theta)$ مجموعه تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر θ باشد. بنا به نتیجه‌ای از برنسایدبراور در ایساکس [۱، ص ۴۹] اگر χ یک سرشت تحویل‌ناپذیر و با وفا از G باشد که دقیقا n مقدار متمایز اختیار کند، آن‌گاه $Irr(1_G+\chi+\dots+\chi^{n-1})=Irr(G)$، که در آن $Irr(G)$

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: محمدرضادرفشه darafsheh@ut.ac.ir

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه تهران

مجموعه تمام سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G است و 1_G سرشت همانی G می‌باشد. آراد و همکاران در برکویچ و ژمود [۲، ص ۹۸] ثابت کردند که گروه G دارای دو سرشت تحویل‌ناپذیر متمایز χ و ψ است به‌طوری‌که $\chi\psi = m\chi + n\varphi$ و $m, n \in \mathbb{N}$، اگر و تنها اگر G دارای دو زیر گروه نرمال M و N باشد که $M<N$ و $\{G/M, N/M\}$ یک زوج کامینا است. هم‌چنین بلاو و چی لانگ در [۳] ثابت کرده است که اگر χ و ψ سرشت‌های تحویل‌ناپذیری از گروه G بوده و $\chi \neq 1_G$ و $\chi^n = k\psi$ که $n \geq 2$ و k تعداد کلاس‌های تزویج G باشد، آن‌گاه χ روی $G - Z(\chi)$ صفر است و $\psi = \chi^{(n)}$ که در آن تعریف $\chi^{(n)}$ چنین است: $\chi^n(g) = \chi(g^n)$ برای تمام $g \in G$ و $Z(\chi) = \{g \in G \mid |\chi(g)| = \chi(1)\}$ هسته سرشت χ است. هم‌چنین در آدان بنت [۴]، برای گروه پوچ‌توان G و $\chi \in Irr(G)$ که $\chi(1) = p$ عدد اول فرد است، تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر χ^2 مطالعه شده است. در آدان بنت [۵]، برای گروه حل‌پذیر G و سرشت تحویل‌ناپذیر و با وفای χ سرشت $\chi\overline{\chi}$ در حالاتی که $|Irr(\chi\overline{\chi})|$ مساوی ۲ یا ۳ باشد، مطالعه شده است.

فرض کنید $Lin(G)$ مجموعه تمام سرشت‌های خطی G باشد. برکویچ و ژمود [۲، ص ۱۰۰-۱۰۱] گروه‌های ناآبلی G با سرشت تحویل‌ناپذیر χ و شرط $Irr(\chi^2) \subseteq Lin(G)$ را مطالعه کردند. سپس آن‌ها این سوال را مطرح کردند که اگر $Irr(\chi\overline{\chi}) \subseteq Lin(G)$، آن‌گاه چه نتیجه‌ای درباره G حاصل خواهد شد؟ در ایساک و زایسر [۶] مولفان گروه‌هایی را مورد مطالعه قرار دادند که دارای سرشت تحویل‌ناپذیر با وفای χ بوده و χ^2 شامل دقیقا یک یا دو موسس تحویل‌ناپذیر است.

در این مقاله ما حالت کلی $Irr(\chi^n\overline{\chi}^m) \subseteq Lin(G)$ را مطالعه خواهیم کرد، جایی‌که n و m اعداد صحیح نا منفی باشند و $m + n > 0$. دقیق‌تر بگوییم، در این مقاله به دو سوال پاسخ خواهیم داد. فرض کنید G یک گروه و $\chi \in Irr(G)$. هم‌چنین فرض کنید m و n اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که $m + n > 0$. سوال اول رده‌بندی حالتی است که تمام موسس های تحویل‌ناپذیر $\chi^n\overline{\chi}^n$ خطی‌اند. سوال دوم نگاهی است بر درجه تکرار موسس‌های تحویل-ناپذیر $\chi^n\overline{\chi}^m$ در حالتی که تمام این موسس‌ها خطی‌اند. نتایج اصلی این مقاله را می‌توان در قضیه زیر خلاصه کرد.

قضیه اصلی: فرض کنیم G یک گروه است، $\chi \in Irr(G)$ و m و n اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که $m + n > 0$. در این‌صورت احکام زیر برقرارند:

۱- $Irr(\chi^n\overline{\chi}^m) \subseteq Lin(G)$ اگر و تنها اگر $G' \leq Z(G)$ و $[G'\ker(\chi) : \ker(\chi)]$ مقسوم علیهی از n-m است.

۲- اگر $Irr(\chi^n \overline{\chi}^m) \subseteq Lin(G)$، آن‌گاه درجه تکرار تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ با هم مساوی است.

در این مقاله نمادگذاری‌های ایساکس [۱] مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲- نتایج

این بخش را با تعاریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۱: فرض کنیم G یک گروه باشد، $\chi \in Irr(G)$ و l یک عدد صحیح باشد. $A_l(\chi)$ را چنین تعریف می‌کنیم، که معمولا χ را نیز نمی‌نویسیم: اگر $l > 0$ آن‌گاه A_l را مجموعه موسس‌های تحویل‌ناپذیر χ^l تعریف می‌کنیم. A_0 را نیز $Irr\left(\frac{G}{Z(\chi)}\right)$ تعریف می‌نمائیم. بالاخره، اگر $l < 0$، مجموعه A_l را متشکل از تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\overline{\chi}^{|l|}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از ایساکس [۱] سرشت‌های کاملا منشعب شده را تعریف می‌کنیم.

تعریف۲: گوییم $\chi \in Irr(G)$ نسبت به G/N کاملا منشعب شده است، که در آن N زیر گروه نرمال G است، هرگاه χ روی $G-N$ صفر بوده و χ_N همگن باشد.

فرض کنیم G یک گروه متناهی، $\chi \in Irr(G)$ و m و n اعداد صحیح نامنفی باشند که $m+n>0$. ابتدا حالتی را که تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی‌اند، مورد بحث قرار می‌دهیم و سپس درجه تکرار موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ را معین می‌سازیم که البته این موسس‌ها همگی خطی‌اند. ابتدا به سوال دوم می‌پردازیم. بنابراین فرمولی برای $\chi^n \overline{\chi}^m$ در حالتی که χ نسبت به $\frac{G}{Z(\chi)}$ کاملا منشعب شده است پیدا می‌کنیم.

لم ۱. فرض کنیم G یک گروه است و $\chi \in Irr(G)$ و m و n اعداد صحیح نامنفی‌اند و $m+n>0$. اگر χ روی $G-Z(\chi)$ صفر باشد، یعنی χ نسبت به $\frac{G}{Z(\chi)}$ کاملا منشعب شود، آن‌گاه $\chi^n \overline{\chi}^m = \sum_{\alpha \in A} \frac{\chi^{n+m}(1)\alpha(1)}{[G : Z(\chi)]}\alpha$.

برای اثبات لم ۱ نیاز به استفاده از موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi_{Z(\chi)}$ خواهیم داشت.

لم ۲. فرض کنیم G یک گروه، $\chi \in Irr(G)$ و m و n اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که $m+n>0$. فرض کنیم χ روی $G-Z(\chi)$ صفر باشد. اگر $\delta \in Irr(Z(\chi))$ موسس تحویل‌ناپذیر و منحصر به‌فرد $\chi_{Z(\chi)}$ باشد، آن‌گاه

$$\chi^n \overline{\chi}^m = \frac{\chi(1)^{m+n}}{[G:Z(\chi)]}(\delta^{n-m})^G .$$

برهان: اثبات را با این واقعیت شروع می‌کنیم که هر دوی $\chi^n \overline{\chi}^m$ و $\left(\delta^{n-m}\right)^G$ روی $G-Z(\chi)$ صفرند، هم‌چنین، هر دوی $(\chi^n \overline{\chi}^m)_{Z(\chi)}$ و $((\delta^{n-m})^G)_{Z(\chi)}$ مضرب ثابتی از δ^{n-m} می‌باشند. از این‌رو $\chi^n \overline{\chi}^m = a(\delta^{n-m})^G$ که a عدد صحیح و مثبت ثابتی است. با محاسبه درجه در طرفین تساوی اخیر، حاصل می‌گردد $a = \frac{\chi(1)^{m+n}}{[G:Z(\chi)]}$ ■

اکنون به اثبات لم ۱ می‌پردازیم.

برهان لم۱. قرار می‌دهیم $l=n-m$. اگر $\alpha \in Irr(G\,|\,\delta^l)$، آن‌گاه $\alpha_{Z(\chi)} = \alpha(1)\delta^l$. بنا به قانون تقابل فروبنیوس در ایساکس، [۱، لم ۵.۲]، داریم $(\delta^l)^G = \sum_{\alpha\in Irr(G|\delta)} \alpha(1)\alpha$. با استفاده از لم ۲، کافی است نشان دهیم که $Irr(G\,|\,\delta^l) = A_l$. اگر $l>0$، این مطلب با اعمال لم ۲ به $\chi^l \overline{\chi}^{\circ}$ حاصل می‌گردد و اگر $l<0$، این مطلب با اعمال لم ۲ به $\chi^{\circ}(\overline{\chi})^{-l}$ حاصل می‌گردد. اگر $l=0$، آن‌گاه از لم ۲ نتیجه می‌شود $\chi^n \overline{\chi}^m = \chi^n \overline{\chi}^n$ مضربی از $(1_{Z(\chi)})^G$ است و موسس‌ها دقیقا عبارتند از عناصر مجموعه $A_0 = Irr\left(\frac{G}{Z(\chi)}\right)$. به این ترتیب لم ۱ ثابت می‌گردد.■

اکنون فرضیه‌ای را در نظر می‌گیریم که تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی‌اند. ثابت می‌کنیم که G باید پوچ‌توان از کلاس ۲ و χ نسبت به $\frac{G}{Z(G)}$ کاملا منشعب شده باشد.

لم ۳. فرض کنیم G یک گروه، $\chi \in Irr(G)$ و m و n اعداد صحیح نامنفی باشند و $m+n>0$. اگر تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی باشند، آن‌گاه $G' \le Z(\chi)$ و χ روی $G-Z(\chi)$ صفر است.

برهان. چون تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی‌اند، پس $G' \le \ker(\chi^n \overline{\chi}^m)$. با استفاده از این مطلب می‌توان ثابت کرد که اگر $x \in G'$، آن‌گاه

$$\chi^n \overline{\chi}^m (x) = \chi^n \overline{\chi}^m (1) = \chi(1)^{m+n}$$

و لذا $\left|\chi^n \overline{\chi}^m (x)\right| = \left|\chi(x)\right|^{n+m} = \chi(1)^{n+m}$. بنابراین $\left|\chi(x)\right| = \chi(1)$ و در نتیجه $x \in Z(\chi)$.■

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر تمام موسس‌های $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی باشند، آن‌گاه درجه تکرار همگی شان یکی است.

نتیجه ۱. فرض کنید G یک گروه، $\chi \in Irr(G)$ و m و n اعداد صحیح نامنفی باشند به‌طوری‌که $m+n>0$. اگر تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی باشند، آن‌گاه درجه تکرار همگی شان یکی است و برابر است با $\frac{\chi(1)^{m+n}}{[G:Z(\chi)]}$.

برهان. بنا به لم ۳، می‌دانیم که χ نسبت به $\frac{G}{Z(\chi)}$ کاملا منشعب شده است. حال با استفاده از لم ۱ نتیجه ثابت می‌شود.■

اکنون به اتمام نتیجه می‌پردازیم و تعیین می‌کنیم چه وقت تمام موسس‌های $\chi^n \overline{\chi}^m$ همگی خطی‌اند. واقعیت زیر اساسا در فصل ۲ از ایساکس [۱] ثابت شده است.

لم۴. فرض کنید G یک گروه، $\chi \in Irr(G)$ و m و n اعداد صحیح نامنفی باشند که $m+n>0$. در این‌صورت تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی‌اند اگر و تنها اگر $G' \leq Z(\chi)$ و $[G'\ker(\chi):\ker(\chi)]$ مقسوم علیهی از n-m باشد.

برهان. در لم ۳ دیدیم که اگر تمام موسس‌های $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی باشند، آن‌گاه $G' \leq Z(\chi)$. بنابراین می‌توان فرض کرد $G' \leq Z(\chi)$ و بنا به لم ۴، χ روی $G - Z(\chi)$ صفر می‌شود. کافی است نشان دهیم که تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی‌اند اگر و تنها اگر $[G'\ker(\chi):\ker(\chi)]$ مقسوم علیه‌ی از n-m باشد. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که χ با وفا است. در این‌حالت، $Z(\chi)$ دوری است و لذا G' نیز دوری است. می‌توان قرار داد $G' = \langle g \rangle$ که $g \in G'$. بنا به لم ۲، دیده می‌شود که تمام موسس‌های تحویل‌ناپذیر $\chi^n \overline{\chi}^m$ خطی‌اند اگر و تنها اگر تمام سرشت‌ها در $Irr(G \mid \delta^{n-m})$ توسیعی از δ^{n-m} باشند. چون $\frac{G}{Z(\chi)}$ آبلی است، با استفاده از قضیه گالاهر از ایساکس [۱، نتیجه ۶.۱۷] دیده می‌شود که تمام سرشت‌ها در $Irr(G \mid \delta^{n-m})$ توسیعی از δ^{n-m} اند اگر و تنها اگر δ^{n-m} به G توسعه یابد. اما این اتفاق خواهد افتاد اگر و تنها اگر $G' \leq \ker\left(\delta^{n-m}\right)$ که برقرار است

اگر و تنها اگر $\delta(g)^{n-m}=\delta\left(g^{n-m}\right)=1$ داریم $\delta(g)^{n-m}=1$. چون δ با وفا است، داریم
تنها اگر $g^{n-m}=1$. اما چون $O(g)=\left|G'\right|$ نتیجه می‌شود که $g^{n-m}=1$ اگر و تنها اگر $\left|G'\right|$ مقسوم علیه‌ی از $n\text{-}m$ باشد که به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.■

۳- تذکرات و مثال‌ها

در این بخش نگاهی به برخی حالات خاص افکنده و مثال‌هائی ارائه می‌دهیم. بنابراین فرض می‌کنیم گروه متناهی G دارای سرشت تحویل‌ناپذیر و باوفای χ است به‌طوری که $Irr(\chi^n\overline{\chi}^m)\subseteq Lin(G)$، که در آن $m+n>0$. لم زیر که اثبات خواهد شد، شناخته شده است.

لم ۵. فرض کنیم G یک گروه باشد، $G'\leq Z(\chi)$ و $Z(G)$ دوری و $k=\left|G'\right|$. در این‌صورت هر عضو X از $\frac{G}{Z(G)}$ در تساوی $X^k=1$ صدق می‌کند.

برهان: چون G' دوری است، پس می‌توان نوشت: $G'=<z>$ که در آن $o(z)=k$. برای $g,h\in G$ از $g^{-1}h^{-1}gh\in G'$ نتیجه می‌گیریم $gh=z^rhg$ که r یک عدد صحیح نا منفی است. می‌توان نشان داد که $g^kh=z^{kr}hg^k=hg^k$ و لذا $g^k\in Z(G)$ که به این ترتیب لم ثابت می‌گردد. ■

چون فرض کرده‌ایم که G ناآبلی است، پس اگر $\chi\in Irr(G)$ باوفا باشد، آن‌گاه از قضیه ۱ نتیجه می‌گردد که $\left|n-m\right|\neq 1$. اما امکانات دیگری برای $\left|n-m\right|$ نیز وجود دارد. از $\chi_Z=\chi(1)\lambda$، نتیجه می‌گیریم λ یک سرشت باوفای $Z(G)=Z$ است. اگر χ حقیقی مقدار باشد، آن‌گاه برای تمام $x\in Z$ به‌دست می‌آوریم: $\chi(x)=\chi(1)\lambda(x)=\overline{\chi}(x)=\chi(1)\overline{\lambda(x)}$ و در نتیجه $\lambda\left(x^2\right)=1$ که از آن نتیجه می‌شود $x^2=1$. بنابراین Z دوری از مرتبه ۲ است و $G'=Z$ گروهی از مرتبه ۲ می‌باشد و بنا به لم ۵ نتیجه می‌گیریم که G باید یک ۲-گروه فوق-ویژه باشد. در این‌حالت به‌علت تساوی $\chi=\overline{\chi}$ می‌توان فرض کرد $Irr(\chi^n)\subseteq Lin(G)$ به ازای یک $n\in\mathbb{N}$. چون بنا به قضیه ۱ داریم $\left|G'\right|=2\mid n$، نتیجه می‌گیریم که n باید یک عدد صحیح زوج باشد.

اگر $p=n-m$ عددی اول باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱ به‌دست می‌آید $\left|G'\right|=p$ و بنا به لم ۵، گروه خارج قسمتی $\frac{G}{G'}$ یک p-گروه آبلی مقدماتی است. با ارائه مثالی نشان خواهیم داد که هر دو حالات پیش‌گفته امکان ظهور دارند.

در نتیجه بعدی فرض می‌کنیم $n=m$. حالت $m=1$ شناخته شده است.

نتیجه ۲. فرض کنیم G یک گروه، $\chi \in Irr(G)$ و m یک عدد صحیح مثبت باشد. در این‌صورت $\ker\left(\chi^m \bar{\chi}^m\right) = Z(G)$.

برهان. داریم $\chi^m \bar{\chi}^m = \alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k$ که در آن $\lambda_i \in Lin(G)$. بنابراین $\ker\left(\chi^m \bar{\chi}^m\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i)$. بنا به اثبات لم ۱، نتیجه می‌گیریم $\lambda_i = 1$. بنابراین $Z(G) \le \bigcap_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i) = \ker\left(\chi^m \bar{\chi}^m\right)$. اما روشن است که اگر $x \in \ker\left(\chi^m \bar{\chi}^m\right)$، آن‌گاه $(\chi(x))^m (\overline{\chi(x)})^m = \chi^{2m}(1)$ که از آن نتیجه می‌گیریم $|\chi(x)| = \chi(1)$. لذا $x \in Z(G)$ و به این ترتیب نتیجه ثابت می‌شود.■

مثال ۱. فرض کنیم p یک عدد اول و G گروه فوق ویژه مرتبه p^{2m+1} باشد. داریم $G' = Z(G)$ که دوری مرتبه p و $\frac{G}{Z(G)}$ یک p-گروه آبلی مقدماتی می‌باشد. بنا به هاپرت [۷، صفحه ۵۶۲] G دارای p^{2m} سرشت خطی است که با $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه G دارای $p-1$ سرشت با وفای $\chi_1, \ldots, \chi_{p-1}$ که درجه هرکدام p^m می‌باشد که همگی روی $G - Z(G)$ صفرند و $\chi_{i_{Z(G)}} = p^m \mu_i$ که درآن $1_{Z(G)} \neq \mu_i \in Irr(Z(G))$. می‌توان نوشت $Z(G) = \langle z \rangle$ و $\mu_i\left(z^j\right) = \omega^j$ به‌طوری که ω یک ریشه pام اولیه واحد است و $0 \le j \le p-1$ و $1 \le i \le p-1$. به سادگی می‌توان بررسی کرد که به ازای هر i داریم $\chi_i^p = p^{(p-2)m}\left(\lambda_1 + \ldots \lambda_p\right)$، لذا $\chi_i \bar{\chi}_i = \lambda_1 + \ldots \lambda_p$. در حالت $p=2$ گروه G تنها یک سرشت تحویل‌ناپذیر باوفا از درجه ۲ دارد که با χ نمایش می‌دهیم. χ حقیقی مقدار است و داریم $\chi^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$.

مثال۲. به‌عنوان یک مثال دیگر گروه G و جدول سرشت آن را که در دورنهاف [۸، صفحه ۱۸۱] ساخته شده است در نظر می‌گیریم. فرض کنیم E یک p-گروه فوق ویژه از مرتبه p^{2m+1} است که $m \in \mathbb{N}$ و Z گروه دوری از مرتبه p^k $(k \in \mathbb{N})$ باشد. فرض کنیم G حاصل‌ضرب مرکزی Z و E باشد؛ یعنی $G=ZE$ و $|Z \bigcap E| = p$. داریم $Z = Z(G)$، $|G'| = p$، $G' \le Z(G)$ و $\frac{G}{G'}$ یک p-گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^{2m+k-1} باشد.

بنابراین G گروهی از مرتبه p^{2m+k} است و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آن به ترتیب زیر است: p^{2m+k-1} سرشت خطی که با $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ نمایش می‌دهیم که $t = p^{2m+k-1}$، و $p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$ سرشت تحویل‌ناپذیر با وفای χ_i از درجه p^m که خارج از G صفرند و در شرط $\chi_{i_Z} = p^m \mu_i$ صادق می‌کنند که μ_i یک سرشت خطی باوفا از گروه دوری Z می‌باشد، $1 \le i \le p^{k-1}(p-1)$.

به‌سادگی می‌توان تساوی‌های زیر را بررسی نمود:

$\chi_i \bar{\chi}_i = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r$ که در آن μ_iها سرشت‌های خطی G اند که Z در هسته آن‌ها قرار دارد، لذا تعدادشان مساوی p^{2m} است؛ یعنی $r = p^{2m}$. همچنین $(\chi_i)^p = p^{(p-2)m}(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r)$. در پایان این توضیح قابل توجه است که اگر $Irr(\chi^m \bar{\chi}^n) \subseteq Lin(G)$ آن‌گاه $Irr(\chi^{n+1}\bar{\chi}^m)$ و $Irr(\chi^n \bar{\chi}^{m+1})$، هرگز شامل یک سرشت خطی نمی‌باشند.

مراجع

[1] Isaacs, I.M. (1976), *Character theory of finite groups*, Academic press, Inc., New York.

[2] Berkovich,Ya. G. and Zhmud, E. M. (1998), Characters of finite groups, *Pat I, American Mathematical Society*,Monograph no.172.

[3] Blau, H. and Chilag, D. (1986), On power of character and power of conjugacy classes of a finite group, *Proc. Amer. Math. Soc* 98, 7-10.

[4] Adan-Bante, E. (2007a), Square of characters of finite groups, *J. Algebra* 310, 619-623.

[5] Adan Bante, E. (2007b), Products of characters with few irreducible constituents, *J. Algebra* 311 , 38-68.

[6} Isaacs, I.M. and Zisser, I. (1994), Square of characters with few irreducible constituents, *Arch. Math*. 63, 197-207.

[7] Huppert, B. (1983), *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, Berlin.

[8] Dornhoff, L. (1971, *Group representation theory, part A, ordinary representation theory*, Marcel Dekker, Inc., New York.

Powers of Irreducible Characters of Finite Groups

Mohammad Reza Darafsheh and Emad Zahedi

School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran

Abstract

Let χ be an irreducible character of a non-abelian group *G*. For non-negative integers n, m such that $m+n>0$, we study the case when all the irreducible constituents of $\chi^n\overline{\chi}^m$ are linear. Mann proved that if *G* is a finite non-abelian group with an irreducible character χ such that all the irreducible constituents of χ^2 are linear, then $G'\leq Z(G)$ and as a consequence *G* is nilpotent. In this paper we generalize the result of Mann and prove that if *m*, *n* are non-negative integers with $m+n>0$, and if χ is an irreducible character of *G*, then all the irreducible constituents of $\chi^n\overline{\chi}^m$ are linear if and only if $G'\leq Z(G)$.

Keywords: Character, Finite Groups, Irreducible Character, Power, Product of Characters.

Mathematics Subject Classification (2000): 20C15, 20D15