# استنباط بیزی از توزیع نمایی دوپارامتری در سانسور هیبرید نوع اول

احمد پارسیان، فریبا عزیزی[1]

گروه آمار، دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۳/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۲/۲۳

**چکیده**: سانسور هیبرید ترکیبی از دو سانسور نوع اول و دوم می‌باشد که خود بر حسب تعیین معیار پایان دادن به آزمایش به دو سانسور هیبرید نوع اول و دوم تقسیم می‌شود. در این مقاله با طرح سانسور هیبرید نوع اول در حالت بدون جایگذاری و با جایگذاری، برآوردگر بیزی پارامترهای توزیع نمایی دو-پارامتری و برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس را برای انتخاب برآوردگری بهینه، تحت تابع زیان توان دوم خطا به‌دست می‌آوریم. در ادامه مینیماکس و مجاز بودن برآوردگر بیزی تعمیم‌یافته را تحت تابع زیان توان دوم خطا در برخی حالت‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی**: سانسور هیبرید نوع اول، توزیع نمایی دوپارامتری، برآوردگر بیزی، برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس، برآوردگر مجاز، برآوردگر مینیماکس، تابع زیان توان دوم خطا.

**رده‌بندی ریاضی**: ۶۲C۱۰،۶۲C۱۵

## ۱- مقدمه

سانسورهای نوع اول و دوم دو نوع از رایج‌ترین سانسورها می‌باشند. در سانسور نوع اول، آزمایش ادامه دارد تا این‌که به زمان $T$ برسد. در سانسورنوع دوم نیز آزمایش تا مشاهده $r$ امین رویداد ادامه پیدا می‌کند. $r$ از قبل تعیین شده است و این انتظار ممکن است بسیار طولانی و هزینه‌بر باشد. به‌منظور اجتناب از این مشکل سانسور دیگری به نام سانسور هیبرید معرفی شد که خود بر حسب تعیین معیار پایان دادن به آزمایش به دو نوع اول و دوم تقسیم می‌شود. برای اولین بار اپستین [۱] طرحی را در یک آزمایش بقاء به‌کار برد که در آن آزمایش در زمان $T^* = min\{T, X_{(r)}\}$ خاتمه می‌یافت و مقادیر $T$ و $r$ از قبل تعیین شده بودند. وی همچنین یک فاصله اطمینان دو طرفه برای میانگین طول عمر (پارامتر توزیع نمایی) بدون هیچ فرمولی ارائه کرد. فیربنکس و همکاران [۲] پیشنهادات اپستین را تا حدودی اصلاح کردند. چن و

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسؤل مقاله: فریبا عزیزی fariba.azizi65@yahoo.com.

باتاچاریا [۳] فاصله اطمینان دقیق‌تری را برای پارامتر توزیع نمایی براساس توزیع دقیق از برآوردگر حداکثر درست‌نمایی آن ارائه کردند. توزیع دقیق و ساده‌تری از برآوردگر پارامتر توزیع نمایی توسط [۴] مورد بحث قرار گرفت. درپر و گاتمن [۵] برآوردگر بیزی و فاصله اطمینان را براساس توزیع پیشین گامای معکوس برای میانگین توزیع نمایی ارائه کردند. گوپتا و کوندو [۶] روش‌های متفاوت فاصله اطمینان برای پارامتر توزیع نمایی را با استفاده از شبیه‌سازی مونت - کارلو مقایسه کردند. ابراهیمی [۷ و ۸] برآورد پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری را مورد بررسی قرار داد. چایلدز و همکاران [۴] این طرح را سانسور هیبرید نوع اول نامیدند. کوندو [۹] برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی و برآوردگرهای بیزی پارامترهای توزیع وایبل را نسبت به توزیع پیشین مناسب تحت این سانسور به‌دست آورد. بالاکریشنان و همکاران [۱۰] مدل استرس پله‌ای را تحت سانسور هیبرید نوع اول مورد بررسی قرار دادند. در این طرح ممکن است تا زمان $T$ تعداد بسیار کمی شکست رخ دهد. برای حل این مشکل چایلدز و همکاران [۴] آزمایشی را طراحی کردند که در آن، آزمایش در زمان $T^* = max\{T, X_{(r)}\}$ خاتمه می‌یافت. این طرح موسوم به طرح سانسور هیبرید نوع دوم شد. واضح است که این طرح مشکل طرح قبل را ندارد؛ حتی ممکن است قبل از زمان $T$ تمام واحدها با شکست روبه‌رو شوند، اما زمان لازم برای آزمایش قابل پیش بینی نیست. توزیع نمایی با پارامتر مکان نامعلوم $\mu$، در بسیاری از مسائل صنعتی و پزشکی به‌کار می‌رود. در صنعت، پارامتر $\mu$ زمان تضمین را نشان می‌دهد، جایی که هیچ شکستی قبل از سپری شده $\mu$ واحد از زمان رخ نمی‌دهد. در پزشکی و اپیدمیولوژی، پارامتر $\mu$ ممکن است نمایان‌گر دوره‌ی پنهان یک بیماری باشد. این دوره به‌عنوان زمان سپری شده بین قرار گرفتن در معرض یک بیماری برای اولین بار و ظهور علائم آن تعریف می‌شود.

فرض کنید $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ طول عمر مرتب شده‌ی $n$ مؤلفه تحت آزمایش باشد، به‌طوری که طول عمر آن‌ها از توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{\sigma}(x-\mu)}, x \geq \mu \quad (1)$$

پیروی می‌کند. در این مقاله در بخش‌های ۲ و ۳، با فرض معلوم و نامعلوم بودن پارامتر $\mu$، برآوردگرهای بیزی، بیزی تعمیم‌یافته و تأسف پسین گاما مینیماکس را تحت تابع زیان توان دوم خطا محاسبه می‌کنیم. سپس در بعضی موارد مجاز و مینیماکس بودن برآوردگر بیزی تعمیم‌یافته پارامترها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲- سانسور هیبرید نوع اول( $\mu$ معلوم)

در این بخش در مدل (۱) فرض می‌کنیم $\mu$ معلوم و $\sigma$ نامعلوم باشد. بنابراین بدون این‌که از کلیت مسأله کم شود، فرض می‌کنیم $\mu=0$. بنابراین $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل طول عمر $n$ مؤلفه با تابع چگالی احتمال یکسان به‌صورت

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}},x>0,\sigma>0 \tag{۲}$$

هستند. مقادیر مرتب شده‌ی طول عمر را با $X_{(1)}<\ldots<X_{(r)}$ نمایش می‌دهیم. در طراحی-های مختلف اغلب آزمایش قبل از خرابی تمامی مؤلفه‌ها به پایان می‌رسد. همان‌طور که اشاره شد در سانسور هیبرید نوع اول آزمایش در زمان $T^*=min\{T,X_{(r)}\}$ متوقف می‌شود که در آن $r$ و $T$ از قبل تعیین شده‌اند.

### ۲-۱- حالت بدون جایگذاری

در این قسمت آزمایش بدون جایگذاری در نظر گرفته می‌شود. یعنی اگر مؤلفه‌ای خراب شود، از آزمایش خارج می‌گردد و مؤلفه‌ی دیگری جایگزین آن نخواهد شد. بنابراین اگر $D$ نمایانگر تعداد مشاهدات قبل از $T$ باشد، آن‌گاه مجموعه مشاهدات تحت سانسور هیبرید نوع اول یکی از دو حالت زیر خواهد بود:

حالت اول: $\{X_{(1)}<\ldots<X_{(r)}\}$

حالت دوم: $\{X_{(1)}<\ldots<X_{(d)}\}$ $\qquad x_{(d)}<T<x_{(d+1)},d<r,$

خواهد بود، که در آن‌ها $x_{(1)},x_{(2)},\ldots$ زمان‌های خرابی مشاهده شده از مؤلفه‌های آزمایش و $d$ مقدار مشاهده شده برای $D$ می‌باشند. همچنین تابع درست‌نمایی حاصل از داده‌های سانسور هیبرید نوع اول به‌صورت

$$L(\sigma,x)=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-r)!\sigma^r}e^{-\frac{s}{\sigma}},X_{(r)}\le T\\[2ex]\dfrac{n!}{(n-D)!\sigma^D}e^{-\frac{s}{\sigma}},X_{(r)}>T\ ,\ D=1,2,\ldots,r-1\end{cases} \tag{۳}$$

به‌دست می‌آید، که در آن $S$ نمایان‌گر زمان کل آزمایش و به‌صورت زیر است:

$$S=\begin{cases}\sum_{i=1}^{r}X_{(i)}+(n-r)X_{(r)}, X_{(r)}\le T, D=r\\ \sum_{i=1}^{D}X_{(i)}+(n-D)T, X_{(r)}>T, D=1,2,\dots,r-1\end{cases} \tag{۴}$$

اگر $D^*$ نمایان‌گر تعداد مشاهدات قبل از $T^*$ باشد، آن‌گاه تابع درست‌نمایی را می‌توان به‌صورت

$$L(\sigma|\underline{x})=\frac{n!}{\left(n-D^*\right)!\sigma^{D^*}}e^{-\frac{s}{\sigma}} \tag{۵}$$

نوشت (چن و باتاچاریا، [۳])، که در آن $D^*=min(D,r)$ و

$$S=\sum_{i=1}^{D^*}X_{(i)}+(n-D^*)T^*,\quad D^*\ge 1. \tag{۶}$$

## برآوردگر بیزی پارامتر $\sigma$

با توجه به تابع درست‌نمایی به‌دست آمده در رابطه (۵)، اگر $\sigma$ دارای توزیع پیشین گامای معکوس $IG(b_1,a_1)$ و با تابع چگالی احتمال

$$\pi_{a_1,b_1}(\sigma)\propto\sigma^{-(b_1+1)}e^{-\frac{a_1}{\sigma}},\ \ b_1>0,\ \ a_1>0 \tag{۷}$$

باشد، به‌سادگی توزیع پسین $\sigma$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\pi_{a_1,b_1}(\sigma|\underline{x})\propto\frac{1}{\sigma^{D^*+b_1+1}}e^{-\frac{1}{\sigma}(s+a_1)} \tag{۸}$$

یعنی توزیع پسین $\sigma$ هم توزیع گامای معکوس $IG(D^*+b_1,s+a_1)$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر انتخاب پیشین یک انتخاب مزدوج است. بنابراین برآوردگر بیزی $\sigma$، تحت تابع زیان توان دوم خطا برای $D^*+b_1>1$ به‌صورت زیر است (دراپر و گاتمن، [۵]):

$$\delta^{\pi}_{a_1,b_1}=E(\sigma|\underline{x})=\frac{S+a_1}{D^*+b_1-1}. \tag{۹}$$

اگر در رابطه (۹) $a_1\to 0$ و $b_1\to 1$، آن‌گاه

$$\delta^{\pi}_{0,1}=\lim_{\substack{a_1\to 0\\ b_1\to 1}}\delta^{\pi}_{a_1,b_1}=\frac{S}{D^*}$$

که آن را برآوردگر بیز حدی $\sigma$ تحت تابع زیان توان دوم خطا می‌نامیم. به‌سادگی معلوم می‌شود که $\delta^{\pi}_{0,1}$ برآوردگر بیزی تعمیم‌یافته $\sigma$ نسبت به پیشین ناآگاهی بخش $\pi_{0,1} \propto 1/\sigma^2$ است. ریسک $\delta^{\pi}_{0,1}$ برابر است با (چیلدز و همکاران، [۴])

$$\begin{aligned} R(\sigma,\delta^{\pi}_{0,1}) &= E(\delta^{\pi}_{0,1}-\sigma)^2 \\ &= (1-q^n)^{-1}\left\{\sum_{d=1}^{r-1}\sum_{k=0}^{d} C_{k,d}[\sigma^2(\frac{d+1}{d}-2)+T^2_{k,d}]+\sigma^2(\frac{r+1}{r}-2)\right. \\ &\left. +r\binom{n}{r}\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k q^{n-r+k}}{n-r+k}\binom{r-1}{k-1}[\sigma^2(\frac{r+1}{r}-2)+T^2_{k,r}]\right\}+\sigma^2 \end{aligned} \qquad (10)$$

که در آن

$$T_{k,d}=\frac{(n-d+k)T}{d}, \quad T_{k,r}=\frac{(n-r+k)T}{r}, \quad q=e^{-\frac{T}{\sigma}},$$
$$C_{k,d}=(-1)^k\binom{n}{d}\binom{d}{k}q^{n-d+k}.$$

## تأسف پسین گاما مینیماکس پارامتر $\sigma$

در عمل ممکن است دانسته‌های پیشین ما ناچیز باشد و اگر مسأله توسط دو یا چند تصمیم‌گیرنده حل شده باشد ممکن است آن‌ها موافق با توزیع پیشین استفاده شده توسط دیگری نباشند و یا ممکن است بر پایه یک توزیع پیشین توافق داشته باشند، اما در مورد ابرپارامترهای آن باهم به توافق نرسند. رهیافت عمومی در برخورد با عدم قطعیت توزیع پیشین در تحلیل بیزی، انتخاب کلاسی از توزیع‌های پیشین (به‌نام $\Gamma$) و به‌دست آوردن دامنه‌ی عمل‌های بیزی مطابق با دامنه تغییرات توزیع‌های پیشین متعلق به $\Gamma$ می‌باشد. این روش به روش بیزی استوار معروف است. با استفاده از تحلیل بیزی استوار، دامنه‌ای از تغییرات برآوردگرهای بیزی به‌دست می‌آید. حال اگرچه آماردان دامنه تغییرات احتمالی عمل‌های بیزی را در اختیار دارد اما ممکن است برای او مشخص نباشد که کدام‌یک از آن‌ها مناسب‌ترین است. بنابراین باید به دنبال روشی برای انتخاب برآوردگری بهینه در بین تمامی برآوردگرها باشد. یکی از روش‌های متداول در دست‌یابی به برآوردگر بهینه بر روی کلاس $\Gamma$ برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس است؛ برای اطلاع بیشتر به [۱۱] مراجعه نمائید.

فرض کنید $X=x$ مشاهده‌ای از توزیع $P_\theta(x)$ با تابع چگالی احتمال $p_\theta(x)$ باشد به‌طوری که $\theta\in\Theta$. اگر $\pi(\theta)$ چگالی پیشین و $\pi_x(\theta)$ چگالی پسین $\theta$ به‌شرط $x$ باشد، آن‌گاه

$\rho(\pi_x,\delta)=E_{\pi_x}(L(\theta,\delta))$ را زیان مورد انتظار پسین برآوردگر $\delta\in D$ می‌نامیم. تأسف پسین برآوردگر $\delta$ به‌صورت $d(\delta_{\pi_x},\delta)=\rho(\pi_x,\delta)-\rho(\pi_x,\delta_{\pi_x})$ تعریف می‌شود، که در آن $\delta_{\pi_x}$ برآوردگری است که $\rho(\pi_x,\delta)$ را مینیمم می‌کند.

**تعریف ۱:** $\delta_{PR}$ برآورد تأسف پسین گاما مینیماکس نامیده می‌شود هرگاه

$$inf_{\delta\in D}\sup_{\pi\in\Gamma} d(\delta_{\pi_x},\delta)=\sup_{\pi\in\Gamma} d(\delta_{\pi_x},\delta_{PR}).$$

در این قسمت با استفاده از قضیه زیر برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\sigma$ تحت تابع زیان توان دوم خطا و کلاس‌های متفاوت از توزیع پیشین را ارائه می‌کنیم.

**قضیه ۱:** با تعریف $\underline{\delta}=\underline{\delta}(x)=\inf_{\pi\in\Gamma} E(\sigma|x)$ و $\overline{\delta}=\overline{\delta}(x)=\sup_{\pi\in\Gamma} E(\sigma|x)$ به‌گونه‌ای که $\underline{\delta}\leq\overline{\delta}$ متناهی باشد، برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\sigma$ تحت تابع زیان توان دوم خطا به‌صورت $\delta_{PR}(X)=\dfrac{\overline{\delta}(x)+\underline{\delta}(x)}{۲}$ به‌دست می آید [۱۱].

حال اگر توزیع پیشین را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Gamma_{a_{۱۰}}=\{\pi_{a_{۱۰},b_۱}:\pi_{a_{۱۰},b_۱}=IG(b_۱,a_{۱۰}),b_۱\in[b_{۱۱},b_{۱۲}]\}$$

به‌طوری که $b_{۱۱}<b_{۱۲}$ و $a_{۱۰}$ مقادیر ثابت و معلوم باشند؛

$$\Gamma_{b_{۱۰}}=\{\pi_{a_۱,b_{۱۰}}:\pi_{a_۱,b_{۱۰}}=IG(b_{۱۰},a_۱),a_۱\in[a_{۱۱},a_{۱۲}]\}$$

به‌طوری که $a_{۱۱}<a_{۱۲}$ و $b_{۱۰}$ مقادیر ثابت و معلوم باشند؛

$$\Gamma=\{\pi_{a_۱,b_۱}:\pi_{a_۱,b_۱}=IG(b_۱,a_۱),a_۱\in[a_{۱۱},a_{۱۲}],b_۱\in[b_{۱۱},b_{۱۲}]\}$$

به‌طوری که $a_{۱۱}<a_{۱۲}$ و $b_{۱۱}<b_{۱۲}$، آن‌گاه می‌توان برآوردگرهای تأسف پسین گاما مینیماکس را تحت تابع زیان توان دوم خطا، در کلاس‌های $\Gamma_{a_{۱۰}}$، $\Gamma_{b_{۱۰}}$ و $\Gamma$ به‌دست آورد. با توجه به رابطه (۹) می‌توان نشان داد که $E_{\Gamma_{a_{۱۰}}}(\sigma|X)=\dfrac{S+a_{۱۰}}{D*+b_۱-۱}$. بنابراین داریم:

$$\overline{\delta}=\sup_{\pi\in\Gamma_{a_{۱۰}}} E_{\Gamma_{a_{۱۰}}}(\sigma|X)=\frac{S+a_{۱۰}}{D^*+b_{۱۱}-۱}$$

و

$$\underline{\delta}=\inf_{\pi\in\Gamma_{a_{۱۰}}} E_{\Gamma_{a_{۱۰}}}(\sigma|X)=\frac{S+a_{۱۰}}{D^*+b_{۱۲}-۱}.$$

در نتیجه با توجه به قضیه ۱، برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس تحت تابع زیان توان دوم خطا در کلاس $\Gamma_{a_{10}}$ به‌صورت $\delta_{PR}^{a_{10}}(X)=\frac{1}{2}\frac{S+a_{10}}{D^*+b_{11}-1}+\frac{1}{2}\frac{S+a_{10}}{D^*+b_{12}-1}$ است. اگر $\pi\in\Gamma_{b_{10}}$، آن‌گاه $E_{\Gamma_{b_{10}}}(\sigma|X)=\frac{S+a_1}{D^*+b_{10}-1}$. بنابراین

$$\underline{\delta}=\inf_{\pi\in\Gamma_{b_{10}}} E_{\Gamma_{b_{10}}}(\sigma|X)=\frac{S+a_{11}}{D^*+b_{10}-1}$$

و

$$\overline{\delta}=\sup_{\pi\in\Gamma_{b_{10}}} E_{\Gamma_{b_{10}}}(\sigma|X)=\frac{S+a_{12}}{D^*+b_{10}-1}\,.$$

درنتیجه برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس تحت تابع زیان توان دوم خطا در کلاس $\Gamma_{b_{10}}$ به‌صورت $\delta_{PR}^{b_{10}}(X)=\frac{2S+a_{11}+a_{12}}{2(D^*+b_{11}-1)}$ است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $a^*=\frac{a_{11}+a_{12}}{2}\in(a_{11},a_{12})$ و $\delta_{PR}^{b_{10}}(X)=\frac{S+a^*}{(D^*+b_{11}-1)}$. بنابراین $\delta_{PR}^{b_{10}}$ برآوردگر بیزی یکتا برای پارامتر $\sigma$ با چگالی پیشین متعلق به کلاس $\Gamma_{b_{10}}$ با $a^*=\frac{a_{11}+a_{12}}{2}$ است. همچنین اگر $\pi\in\Gamma$ باشد، آن‌گاه

$$\underline{\delta}=\inf_{\pi\in\Gamma} E_{\Gamma}(\sigma|X)=\frac{S+a_{11}}{D^*+b_{12}-1}$$

و

$$\overline{\delta}=\sup_{\pi\in\Gamma} E_{\Gamma}(\sigma|X)=\frac{S+a_{12}}{D^*+b_{11}-1}\,.$$

درنتیجه برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس $\sigma$ تحت تابع زیان توان دوم خطا برابر است با

$$\delta_{PR}(X)=\frac{1}{2}\frac{S+a_{12}}{(D^*+b_{11}-1)}+\frac{1}{2}\frac{S+a_{11}}{(D^*+b_{12}-1)}\,.$$

## ۲-۲- حالت باجایگذاری

در حالت باجایگذاری، زمانی که مؤلفه‌ای خراب می‌شود آن را تعمیر کرده یا آن را با مؤلفه‌ای که تمامی ویژگی‌های اولیه از مؤلفه خراب شده را داشته باشد، جایگزین می‌کنند و آزمایش

ادامه پیدا می‌کند. در این حالت تابع درست‌نمایی از مشاهدات به‌صورت زیر است (گندنکو و همکاران، [۱۲]):

$$L(\nu|\underline{x}) = \nu^{\delta r+(1-\delta)d(T)} e^{-(\delta x_{(r)}+(1-\delta)T)\nu},\ d(T)=1,2,... \qquad (11)$$

که در آن $\nu=\frac{n}{\sigma}$، $d(T)$ تعداد مشاهدات قبل از زمان $T$ و $\delta$ عبارت است از

$$\delta=\begin{cases}1, & x_{(r)}\le T\\ 0, & x_{(r)}>T\end{cases}. \qquad (12)$$

## برآوردگر بیزی پارامتر $\nu$

با توجه به رابطه (۱۱)، در برآورد بیزی پارامتر $\nu$ تحت تابع زیان توان دوم خطا، اگر $\nu$ دارای توزیع پیشین گاما با پارامترهای $b_2$ و $a_2$ به‌فرم $G(b_2,a_2)$ و تابع چگالی احتمال به‌صورت

$$\pi(\nu)\propto \nu^{b_2-1}e^{-a_2\nu},\ \nu>0 \qquad (13)$$

باشد، آن‌گاه توزیع پسین به‌صورت

$$\pi(\nu|\underline{x})\propto \nu^{\delta r+(1-\delta)d(T)+b_2-1}e^{-[\delta x_{(r)}+(1-\delta)T+a_2]\nu} \qquad (14)$$

محاسبه می‌شود، که نشان دهنده‌ی پسین مزدوج می‌باشد. بنابراین برآوردگر بیزی $\nu$ تحت تابع زیان توان دوم خطا عبارت است از

$$\begin{aligned}\delta^{\pi}_{a_2,b_2} &= E(\nu|\underline{x}) = \frac{\delta r+(1-\delta)d(T)+b_2}{\delta x_{(r)}+(1-\delta)T+a_2}\\ &= \begin{cases}\dfrac{r+b_2}{x_{(r)}+a_2}, & x_{(r)}\le T\\[2mm] \dfrac{d(T)+b_2}{T+a_2}, & x_{(r)}>T.\end{cases}\end{aligned} \qquad (15)$$

## برآوردگر مجاز پارامتر $\nu$

اگر در رابطه (۱۵)، $a_2,b_2\to 0$، آن‌گاه

$$\delta^{\pi}_{\circ,\circ}=\lim_{\substack{a_{\text{۲}}\to\circ\\ b_{\text{۲}}\to\circ}}\delta^{\pi}_{a_{\text{۲}},b_{\text{۲}}}=\frac{\delta r+(\text{۱}-\delta)d(T)}{\delta x_{(r)}+(\text{۱}-\delta)T}=\begin{cases}\dfrac{r}{x_{(r)}}, x_{(r)}\le T\\ \dfrac{d(T)}{T}, x_{(r)}>T\end{cases}$$

که آن را برآوردگر بیز حدی $\nu$، تحت تابع زیان توان دوم خطا می‌نامیم. به‌سادگی معلوم می‌شود که $\delta^{\pi}_{\circ,\circ}$ برآوردگر بیزی تعمیم یافته $\nu$ نسبت به پیشین ناآگاهی بخش $\pi(\nu)\propto\frac{\text{۱}}{\nu}$ با ریسک زیر است (پیوست ۱ را ببینید):

$$R(\nu,\delta^{\pi}_{\circ,\circ})=\nu^{\text{۲}}-\text{۲}\int_{\circ}^{T}\frac{r\nu^{r+\text{۱}}x^{r-\text{۲}}e^{-\nu x}}{\Gamma(r)}dx+\int_{\circ}^{T}\frac{r^{\text{۲}}\nu^{r}x^{r-\text{۳}}e^{-\nu x}}{\Gamma(r)}dx$$
$$+(\frac{\nu}{T}-\nu^{\text{۲}})\sum_{d=\circ}^{r-\text{۲}}\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!}-\nu^{\text{۲}}\frac{(\nu T)^{r-\text{۲}}e^{-\nu T}}{(r-\text{۲})!}.$$

با استفاده از قضیه ۱۳ فصل ۸ از [۱۳]، نشان می‌دهیم که $\delta^{\pi}_{\circ,\circ}$ یک برآوردگر مجاز $\nu$ است. شرط (a) این قضیه با استفاده از قضیه ۱۱ و مثال ۹ فصل ۸ از [۱۳]، تحقیق می‌شود. حال فرض کنیم $\{\pi_m\}$ یک دنباله از توزیع‌های پیشین با تابع چگالی $\pi_m(\nu)=\nu^{m^{-\text{۱}}-\text{۱}}e^{-\frac{\nu}{m}},\nu>\circ$ باشد، می‌توان نشان داد برای هر مجموعه محدب ناتباهیده $C\in\Theta$، $K>\circ$ و عدد صحیح $M$ وجود دارند، به‌طوری که برای هر $m\ge M$، $\int_C\pi_m(\nu)d\nu\ge K$. قرار دهید $C[a,b]$، برای $a,\ b>\text{۱}$ یا $a<\text{۱}<b$ داریم:

$$\int_a^b\nu^{m^{-\text{۱}}-\text{۱}}e^{-\frac{\nu}{m}}d\nu\ge\frac{(e^{-a}-e^{-b})}{b}=K_{\text{۱}}$$

و برای $a,\ b<\text{۱}$ داریم:

$$\int_a^b\nu^{m^{-\text{۱}}-\text{۱}}e^{-\frac{\nu}{m}}d\nu\ge b^{m^{-\text{۱}}-\text{۱}}(e^{-a}-e^{-b})=K_{\text{۲}}$$

بنابراین شرط (b) قضیه تحقق پیدا می‌کند. از طرفی ریسک بیزی $\delta^{\pi}_{\circ,\circ}$ نسبت به پیشین $\pi_m$ برابر است با

$$r_m^* = E[R(\nu,\delta_{\circ,\circ}^{\pi})] = \int_{\circ}^{\infty} \nu^{m^{-1}+1} e^{-\frac{\nu}{m}} d\nu + \int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{T} \frac{r^{2}}{\Gamma(r)} \nu^{m^{-1}+r-1} x^{r-3} e^{-\nu(x+m^{-1})} dx d\nu$$
$$-2\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{T} \frac{r}{\Gamma(r)} \nu^{m^{-1}+r} x^{r-2} e^{-\nu(x+m^{-1})} dx d\nu + \sum_{d=\circ}^{r-1} (\frac{d(T)}{T})^{2} \int_{\circ}^{\infty} \frac{T^{d}}{d!} \nu^{m^{-1}+d-1} e^{-\nu(T+m^{-1})} d\nu$$
$$-2\sum_{d=\circ}^{r-1} \frac{d(T)}{T} \int_{\circ}^{\infty} \frac{T^{d}}{d!} \nu^{m^{-1}+d} e^{-\nu(T+m^{-1})} d\nu.$$

برآوردگر بیزی $\nu$ نسبت به پیشین $\pi_m$ و تابع زیان توان دوم خطا به‌صورت زیر است (پیوست ۲ را ببینید).

$$\delta_m = \frac{\delta r + (1-\delta) d(T) + m^{-1}}{\delta X_{(r)} + (1-\delta) T + m^{-1}} = \begin{cases} \dfrac{r+m^{-1}}{X_{(r)}+m^{-1}}, X_{(r)} \le T \\ \dfrac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}, X_{(r)} > T \end{cases}$$

با تابع مخاطره

$$R(\nu,\delta_m) = \nu^{2} - 2\nu \sum_{d=\circ}^{r-1} \frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}} \frac{(\nu T)^{d} e^{-\nu T}}{d!} - 2\nu \int_{\circ}^{T} \frac{r+m^{-1}}{x+m^{-1}} \frac{x^{r-1}\nu^{r} e^{-\nu x}}{\Gamma(r)} dx$$
$$+ \sum_{d=\circ}^{r-1} (\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}})^{2} \frac{(\nu T)^{d} e^{-\nu T}}{d!} + \int_{\circ}^{T} (\frac{r+m^{-1}}{x+m^{-1}})^{2} \frac{x^{r-1}\nu^{r} e^{-\nu x}}{\Gamma(r)} dx$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود وقتی $m \to \infty$، $\delta_m \to \delta_{\circ,\circ}^{\pi}$، با به‌کارگیری قضیه ۱۶ (ص ۲۲۹) از [۱۴] و قضیه ۱۰- ۳۱ (ص ۲۴۶) از [۱۵]، انتگرال‌های یگانه و دوگانه موجود در $r_m^*$ و $r_m$ به صفر میل می‌کنند. در نتیجه تفاضل ریسک بیزی یعنی $D_m = r_m - r_m^*$ به صفر میل می‌کند. این امر مجاز بودن $\delta_{\circ,\circ}^{\pi}$ را تضمین می‌کند.

## تأسف پسین گاما مینیماکس پارامتر $\nu$

برای به‌دست آوردن تأسف پسین گاما مینیماکس پارامتر ν تحت تابع زیان توان دوم خطا، اگر کلاس توزیع‌های پیشین ν را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Gamma_{a_{20}} = \{\pi_{a_{20},b_2} : \pi_{a_{20},b_2} = G(b_2,a_{20}), b_2 \in [b_{21},b_{22}]\}$$

به‌طوری که $b_{21} < b_{22}$ و $a_{20}$ ثابت و معلوم باشند؛

$$\Gamma_{b_{20}} = \{\pi_{a_2,b_{20}} : \pi_{a_2,b_{20}} = G(b_{20},a_2), a_2 \in [a_{21},a_{22}]\}$$

به‌طوری که $a_{۲۱} < a_{۲۲}$ و $b_{۲۰}$ ثابت باشند؛

$$\Gamma = \{\pi_{a_۲,b_۲} : \pi_{a_۲,b_۲} = G(b_۲,a_۲), a_۲ \in [a_{۲۱},a_{۲۲}], b_۲ \in [b_{۲۱},b_{۲۲}]\}$$

به‌طوری که $a_{۲۱} < a_{۲۲}$ و $b_{۲۱} < b_{۲۲}$ با استفاده از رابطه (۱۵) و قضیه ۱، برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس پارامتر $\nu$، در کلاس‌های $\Gamma_{a_{۲۰}}$، $\Gamma_{b_{۲۰}}$ و $\Gamma$ به ترتیب برابر است با

$$\delta_{PR}^{a_{۲۰}}(X) = \frac{۱}{۲}\frac{\delta r + (۱-\delta)d(T) + b_{۲۲}}{\delta X_{(r)} + (۱-\delta)T + a_{۲۰}} + \frac{۱}{۲}\frac{\delta r + (۱-\delta)d(T) + b_{۲۱}}{\delta X_{(r)} + (۱-\delta)T + a_{۲۰}}$$

$$\delta_{PR}^{b_{۲۰}}(X) = \frac{۱}{۲}\frac{\delta r + (۱-\delta)d(T) + b_{۲۰}}{\delta X_{(r)} + (۱-\delta)T + a_{۲۱}} + \frac{۱}{۲}\frac{\delta r + (۱-\delta)d(T) + b_{۲۰}}{\delta X_{(r)} + (۱-\delta)T + a_{۲۲}}$$

$$\delta_{PR}(X) = \frac{۱}{۲}\frac{\delta r + (۱-\delta)d(T) + b_{۲۲}}{\delta X_{(r)} + (۱-\delta)T + a_{۲۱}} + \frac{۱}{۲}\frac{\delta r + (۱-\delta)d(T) + b_{۲۱}}{\delta X_{(r)} + (۱-\delta)T + a_{۲۲}}.$$

لازم به ذکر است که $\delta_{PR}^{a_{۲۰}}(X)$ برآوردگر بیزی یکتا برای پارامتر $\nu$ با چگالی پیشین متعلق به کلاس $\Gamma_{a_{۲۰}}$ با $b^* = \frac{b_{۲۱} + b_{۲۲}}{۲}$ است.

## ۳- سانسور هیبرید نوع اول ($\mu$ مجهول)

در این بخش، $n$ مؤلفه تحت آزمایش دارای طول عمر از توزیع نمایی دوپارامتری با تابع چگالی احتمال یکسان (۱) می‌باشند، که در آن $\mu$ و $\sigma$ می‌توانند هر دو مجهول باشند. براساس سانسور هیبرید نوع اول آزمایش را تا لحظه‌ی $T^* = min\{T, X_{(r)}\}$ ادامه می‌دهیم، که در آن $T$ و $r>۲$ از قبل تعیین شده‌اند. می‌خواهیم برآوردگر بیزی پارامترهای $\mu$ و $\sigma$ را تحت سانسور هیبرید نوع اول در حالت باجایگذاری به‌دست آوریم. فرض کنید $X_{(۱)} < \ldots < X_{(n)}$ طول عمر مرتب شده‌ی مؤلفه‌ها تا شکست آن‌ها باشد. در این حالت تابع درست‌نمایی مشاهدات با فرض $d(T) > ۰$ به‌صورت زیر است:

$$L(\mu,\sigma|\underline{x}) = (\frac{n}{\sigma})^{\delta r + (۱-\delta)d(T)} e^{-\frac{n}{\sigma}(\delta x_{(r)} + (۱-\delta)T - \mu)} I(\mu < x_{(۱)} < T)$$

برای دست‌یابی به برآوردگر بیزی سه حالت را در نظر خواهیم گرفت.

### الف) $\sigma$ معلوم و $\mu$ مجهول

بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنیم $\sigma = ۱$ و تابع چگالی پیشین $\mu$ به‌صورت

$$\pi(\mu)=\frac{۱}{\gamma}e^{\frac{۱}{\gamma}(\mu-\eta)},\mu\le\eta,\ \eta\in R,\gamma>۰$$

باشد [۱۶]. با توجه به تابع درست‌نمایی و تابع چگالی پیشین پارامتر $\mu$، چگالی پسین آن به صورت زیر است:

$$\pi(\mu|\underline{x})=(n+\frac{۱}{\gamma})e^{(n+\frac{۱}{\gamma})(\mu-min(x_{(۱)},\eta))},\ \mu\le min(x_{(۱)},\eta) \quad (۱۶)$$

بنابراین برآوردگر بیزی پارامتر $\mu$، تحت تابع زیان توان دوم خطا به‌صورت

$$E(\mu|\underline{X})=min(X_{(۱)},\eta)-\frac{۱}{n+\frac{۱}{\gamma}} \quad (۱۷)$$

است. اگر چگالی پیشین ناآگاهی بخش $\pi(\mu)\propto ۱$ را برای پارامتر $\mu$ در نظر بگیریم، چگالی پسین پارامتر $\mu$ به‌صورت

$$\pi(\mu|\underline{X})=ne^{n(\mu-x_{(۱)})},\mu<x_{(۱)} \quad (۱۸)$$

خواهد بود. بنابراین تحت تابع زیان توان دوم خطا برآوردگر بیزی تعمیم یافته‌ی آن به‌صورت $\hat{\mu}=E(\mu|\underline{X})=x_{(۱)}-\frac{۱}{n}$ به‌دست می‌آید. ریسک $\hat{\mu}$ تحت تابع زیان توان دوم خطا برابر $R(\mu,\hat{\mu})=\frac{۱}{n^{۲}}$ است. با استفاده از قضیه ۱۳ فصل ۸ از [۱۳]، نشان می‌دهیم که $\hat{\mu}$ یک برآوردگر مجاز برای $\mu$ می باشد. شرط (a) این قضیه با استفاده از قضیه ۱۱ و مثال ۹ فصل ۸ از [۱۳]، تحقیق می‌شود. حال فرض کنید $\{\pi_m\}$ یک دنباله از توزیع‌های پیشین با تابع چگالی $\pi_m(\mu)=m^{-۱}e^{m^{-۱}(\mu-m)},\mu\le m$ باشد، می‌توان نشان داد برای هر مجموعه محدب ناتباهیده $C\in\Theta$، وجود دارد $K>۰$ و عدد صحیح $M$، به‌طوری که برای هر $m\ge M$، $\int_C \pi_m(\mu)d\mu\ge K$. قرار دهید $C=[a,b]$ برای $a<b<m$ داریم:

$$\int_a^b m^{-۱}e^{m^{-۱}(\mu-m)}d\mu>e^{\frac{b}{a}-۱}-۱$$

که با انتخاب $K=e^{\frac{b}{a}-۱}-۱$ شرط (b) قضیه تحقق پیدا می‌کند. بنابراین

$$\pi_m(\mu|\underline{X})=(m^{-۱}+n)e^{(m^{-۱}+n)(\mu-min(x_{(۱)},m))} \quad (۱۹)$$

برآوردگر بیزی $\mu$ نسبت به پیشین $\pi_m$ و تابع زیان توان دوم خطا به‌صورت

$$\hat{\mu}=E(\mu|\underline{X})=\int_{-\infty}^{min(x_{(1)},m)}\mu(m^{-1}+n)e^{(m^{-1}+n)(\mu-min(x_{(1)},m))}d\mu$$
$$=min(x_{(1)},m)-\frac{1}{(m^{-1}+n)}$$

به‌دست می‌آید، که تابع مخاطره‌ی آن

$$R(\mu,\hat{\mu}_m)=E(min(x_{(1)},m)-\frac{1}{m^{-1}+n}-\mu)^2$$
$$=\int_{\mu}^{m}(x_{(1)}-\frac{1}{m^{-1}+n}-\mu)^2 ne^{-n(x_{(1)}-\mu)}dx_{(1)}$$
$$+\int_{m}^{\infty}(m-\frac{1}{m^{-1}+n}-\mu)^2 ne^{-n(x_{(1)}-\mu)}dx_{(1)}$$
$$=e^{n\mu}(-m^2e^{-nm}-\frac{2}{n}e^{-nm}m-\frac{2}{n^2}e^{-nm})+\mu^2+\frac{2}{n}\mu+\frac{2}{n^2}$$
$$+(\frac{1}{m^{-1}+n}+\mu)^2e^{n\mu}(-e^{-nm}+e^{-n\mu})$$
$$-2e^{n\mu}(\frac{1}{m^{-1}+n}+\mu)(-e^{-nm}m-\frac{1}{n}e^{-nm}+\mu e^{-n\mu}$$
$$+\frac{1}{n}e^{-n\mu})+(m-\frac{1}{m^{-1}+n}-\mu)^2e^{-n(m-\mu)}$$

و ریسک بیزی آن به‌صورت

$$r_m=E_\mu[R(\mu,\hat{\mu}_m)]=\frac{m}{m^{-1}+n}\frac{1}{m^{-1}+n}\frac{2}{n}\frac{m^{-1}}{m^{-1}+n}\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{(m^{-1}+n)^2}$$
$$+\frac{m^{-1}}{(m^{-1}+n)^2}\frac{2}{n}-\frac{1}{m^{-1}+n}\frac{2}{n}+\frac{2n\,m}{(m^{-1}+n)^2}+\frac{2}{(m^{-1}+n)^2}-\frac{m^{-1}}{(m^{-1}+n)^3}$$
$$+\frac{1}{(m^{-1}+n)^2}-2\frac{n}{(m^{-1}+n)^3}-\frac{n^2m}{(m^{-1}+n)^3}$$

به‌دست می‌آید. حال اگر $m\to\infty$ آن‌گاه $\hat{\mu}_m\to\hat{\mu}$ و تفاضل ریسک بیزی آن‌ها $D_m=r_m-r_m^*$ نیز به صفر میل می‌کند که این امر مجاز بودن برآوردگر $\hat{\mu}$ را تضمین می‌کند (قضیه ۱۳، فصل ۸ از [۱۳] را ببینید).

مینیماکس بودن برآوردگر بیزی تعمیم یافته، $\hat{\mu}$، به‌سادگی معلوم می‌شود. با توجه به‌اینکه $\sup_{\mu} R(\mu,\hat{\mu}) = \frac{۱}{n^۲}$ و $\lim_{m\to\infty} r_m = \sup_{\mu} R(\mu,\hat{\mu})$ بنابراین با استفاده از قضیه ۱-۱۲ از [۱۷]، $\hat{\mu}$ یک برآوردگر مینیماکس تحت تابع زیان توان دوم خطا است.

**تأسف پسین گاما مینیماکس پارامتر $\mu$**

در این قسمت برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس را برای پارامتر $\mu$ تحت تابع زیان توان دوم خطا و در سه کلاس متفاوت از توزیع های پیشین به‌دست می‌آوریم. اگر کلاس توزیع‌های پیشین $\mu$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\Gamma_{\eta_۰} = \{\pi_{\eta_۰,\gamma} : \pi_{\eta_۰,\gamma}(\mu) = \frac{۱}{\gamma} e^{\frac{۱}{\gamma}(\mu-\eta_۰)}, \mu \le \eta_۰, \gamma \in [\gamma_۱,\gamma_۲]\}$$

به‌طوری که $\gamma_۱ < \gamma_۲$ و $\eta_۰$ مقادیر ثابت و معلوم باشند.

$$\Gamma_{\gamma_۰} = \{\pi_{\eta,\gamma_۰} : \pi_{\eta,\gamma_۰}(\mu) = \frac{۱}{\gamma_۰} e^{\frac{۱}{\gamma_۰}(\mu-\eta)}, \mu \le \eta, \eta \in [\eta_۱,\eta_۲]\}$$

به‌طوری که $\eta_۱ < \eta_۲$ و $\gamma_۰$ ثابت باشند.

$$\Gamma = \{\pi_{\eta,\gamma} : \pi_{\eta,\gamma}(\mu) = \frac{۱}{\gamma} e^{\frac{۱}{\gamma}(\mu-\eta)}, \mu \le \eta, \gamma \in [\gamma_۱,\gamma_۲], \eta \in [\eta_۱,\eta_۲]\}$$

به‌طوری که $\gamma_۱ < \gamma_۲$ و $\eta_۱ < \eta_۲$. با استفاده از رابطه (۱۷) و قضیه ۱، برآوردگر تآسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\mu$، در کلاس‌های $\Gamma_{\eta_۰}$، $\Gamma_{\gamma_۰}$ و $\Gamma$ به‌ترتیب برابر است با

$$\delta_{PR}^{\eta_۰}(X) = \frac{۱}{۲}[\min(X_{(۱)},\eta_۰) - \frac{۱}{n+\gamma_۱^{-۱}}] + \frac{۱}{۲}[\min(X_{(۱)},\eta_۰) - \frac{۱}{n+\gamma_۲^{-۱}}]$$

$$\delta_{PR}^{\gamma_۰}(X) = \frac{۱}{۲}[\min(X_{(۱)},\eta_۲) - \frac{۱}{n+\gamma_۰^{-۱}}] + \frac{۱}{۲}[\min(X_{(۱)},\eta_۱) - \frac{۱}{n+\gamma_۰^{-۱}}]$$

$$\delta_{PR}(X) = \frac{۱}{۲}[\min(X_{(۱)},\eta_۲) - \frac{۱}{n+\gamma_۱^{-۱}}] + \frac{۱}{۲}[\min(X_{(۱)},\eta_۱) - \frac{۱}{n+\gamma_۲^{-۱}}].$$

**ب۱) $\mu$ و $\sigma$ هر دو نامعلوم**

اگر چگالی پیشین تؤام $\mu$ و $\sigma$ را به‌صورت پیشین ناآگاهی بخش زیر فرض کنیم، [۱۶]،

$$\pi(\mu,\sigma)=\pi_{۱}(\mu|\sigma)\pi_{۲}(\sigma) \qquad (۲۰)$$

که در آن $\pi_{۱}(\mu|\sigma)\propto\frac{۱}{\sigma}$ و $\pi_{۲}(\sigma)\propto\sigma^{-(\alpha+۱)}e^{-\frac{\beta}{\sigma}},\sigma>۰,\alpha>۰,\beta>۰$. با توجه به تابع درست‌نمایی و تابع چگالی پیشین توأم فوق، توزیع پسین توأم ($\mu,\sigma$) به‌صورت

$$\pi(\mu,\sigma|\underline{x})\propto\frac{۱}{\sigma^{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha+۲}}\exp\left\{-\frac{۱}{\sigma}[n(\delta x_{(r)}+(۱-\delta)T-\mu)+\beta]\right\} \qquad (۲۱)$$

محاسبه می‌شود، که در آن $-\infty<\mu<x_{(۱)}$ و $\sigma>۰$ است. تابع چگالی پسین حاشیه‌ای $\mu$ عبارت است از

$$\pi(\mu|\underline{x})=\frac{n[\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha][n(\delta x_{(r)}+(۱-\delta)T-x_{(۱)})+\beta]^{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha}}{[n(\delta x_{(r)}+(۱-\delta)T-\mu)+\beta]^{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha+۱}}$$

و برآوردگر بیزی آن تحت تابع زیان توان دوم خطا به‌صورت

$$\hat{\mu}=X_{(۱)}-\frac{\delta x_{(r)}+(۱-\delta)T-x_{(۱)}+\frac{\beta}{n}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha-۱} \qquad (۲۲)$$

به‌دست می‌آید. همچنین توزیع پسین حاشیه‌ای $\delta$ دارای توزیع گامای معکوس با پارامترهای $\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha$ و $n(\delta x_{(r)}+(۱-\delta)T-x_{(۱)})+\beta$ می‌باشد. درنتیجه برآوردگر بیزی آن تحت تابع زیان توان دوم خطا برابر است با

$$\hat{\sigma}=\frac{n(\delta x_{(r)}+(۱-\delta)T-x_{(۱)})+\beta}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha-۱}. \qquad (۲۳)$$

### تأسف پسین گاما مینیماکس پارامترهای $\mu$ و $\sigma$

با توجه به رابطه (۲۰)، کلاس توزیع های توأم پیشین $\mu$ و $\sigma$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_{\alpha_{۰}}=\{\pi_{\alpha_{۰},\beta}:\pi_{\alpha_{۰},\beta}(\mu,\sigma)=\pi_{۱}(\mu|\sigma)\pi_{۲}(\sigma),\pi_{۲}(\sigma)=IG(\alpha_{۰},\beta),\beta\in[\beta_{۱},\beta_{۲}]\}$$

که در آن $\pi_{۱}(\mu|\sigma)\propto\frac{۱}{\sigma}$، $\beta_{۱}<\beta_{۲}$ و $\alpha_{۰}$ ثابت و معلوم می‌باشند.

$$\Gamma_{\beta_{۰}}=\{\pi_{\alpha,\beta_{۰}}:\pi_{\alpha,\beta_{۰}}(\mu,\sigma)=\pi_{۱}(\mu|\sigma)\pi_{۲}(\sigma),\pi_{۲}(\sigma)=IG(\alpha,\beta_{۰}),\alpha\in[\alpha_{۱},\alpha_{۲}]\}$$

که در آن $\alpha_{۱}<\alpha_{۲}$ و $\beta_{۰}$ ثابت و معلوم می‌باشند.

$$\Gamma=\{\pi_{\alpha,\beta}:\pi_{۲}(\sigma)=IG(\alpha,\beta),\alpha\in[\alpha_{۱},\alpha_{۲}],\beta\in[\beta_{۱},\beta_{۲}]\}$$

که در آن $\beta_{۱}<\beta_{۲}$ و $\alpha_{۱}<\alpha_{۲}$. با استفاده از رابطه (۲۳)، برآورد تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\mu$، در کلاس‌های $\Gamma_{\alpha_{\circ}}$، $\Gamma_{\beta_{\circ}}$ و $\Gamma$ به ترتیب برابر است با

$$\delta_{PR}^{\alpha_{\circ}}(X)=X_{(۱)}-\frac{\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)}+\frac{\beta^{*}}{n}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{\circ}-۱},\ \beta^{*}=\frac{\beta_{۱}+\beta_{۲}}{۲}\in(\beta_{۱},\beta_{۲})$$

$$\delta_{PR}^{\beta_{\circ}}(X)=X_{(۱)}-\frac{۱}{۲}\left[\frac{\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)}+\frac{\beta_{\circ}}{n}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۲}-۱}\right]-\frac{۱}{۲}\left[\frac{\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)}+\frac{\beta_{\circ}}{n}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۱}-۱}\right]$$

$$\delta_{PR}(X)=X_{(۱)}-\frac{۱}{۲}\left[\frac{\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)}+\frac{\beta_{۱}}{n}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۲}-۱}\right]-\frac{۱}{۲}\left[\frac{\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)}+\frac{\beta_{۲}}{n}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۱}-۱}\right].$$

همانطور که مشاهده می‌شود $\delta_{PR}^{\alpha_{\circ}}(X)$ برآوردگر بیزی یکتا برای پارامتر $\mu$ با چگالی پیشین متعلق به کلاس $\Gamma_{\alpha_{\circ}}$ با $\beta^{*}=\frac{\beta_{۱}+\beta_{۲}}{۲}$ است. با توجه به رابطه (۲۳)، برآوردگر تأسف پسین گاما مینیماکس پارامتر $\sigma$، در کلاس‌های $\Gamma_{\alpha_{\circ}}$، $\Gamma_{\beta_{\circ}}$ و $\Gamma$ به ترتیب برابر است با

$$\delta_{PR}^{\alpha_{\circ}}(X)=\frac{n(\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)})+\beta^{*}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{\circ}-۱},\ \beta^{*}=\frac{\beta_{۱}+\beta_{۲}}{۲}$$

$$\delta_{PR}^{\beta_{\circ}}(X)=\frac{۱}{۲}\left[\frac{n(\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)})+\beta_{\circ}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۱}-۱}+\frac{n(\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)})+\beta_{\circ}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۲}-۱}\right]$$

$$\delta_{PR}(X)=\frac{۱}{۲}\left[\frac{n(\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)})+\beta_{۲}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۱}-۱}+\frac{n(\delta X_{(r)}+(۱-\delta)T-X_{(۱)})+\beta_{۱}}{\delta r+(۱-\delta)d(T)+\alpha_{۲}-۱}\right].$$

ملاحظه می‌شود که $\delta_{PR}^{\alpha_{\circ}}(X)$ برآوردگر بیزی یکتا برای پارامتر $\sigma$ با چگالی پیشین متعلق به کلاس $\Gamma_{\alpha_{\circ}}$ با $\beta^{*}=\frac{\beta_{۱}+\beta_{۲}}{۲}$ است.

**ب۲) $\mu$ و $\sigma$ هر دو نامعلوم**

در این حالت چگالی پیشین توأم $\mu$ و $\sigma$ را به‌صورت $\pi(\mu,\sigma)=\pi_1(\mu|\sigma)\pi_2(\sigma)$ تعریف می‌کنیم، که یک چگالی پیشین آگاهی بخش است [۱۸] که در آن

$$\pi_1(\mu|\sigma)=\frac{c}{\sigma}e^{-\frac{c}{\sigma}(\theta-\mu)}I(\mu<\theta),-\infty<\mu<\infty,-\infty<\theta<\infty$$

و

$$\pi_2(\sigma)\propto\sigma^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{\beta}{\sigma}},\sigma>0,\alpha>0,\beta>0.$$

با توجه به تابع درست‌نمایی، چگالی پسین توأم $\mu$ و $\sigma$ به‌صورت

$$\pi(\mu,\sigma|\underline{x})\propto\sigma^{-[\delta r+(1-\delta)d(T)+\alpha+2]}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma}[n(\delta x_{(r)}+(1-\delta)T)+c\theta+\beta-(c+n)\mu]\right\}$$

محاسبه می‌شود، که در آن $\mu<min(x_{(1)},\theta)$. در این‌صورت $\sigma$ دارای توزیع پسین

$$IG(\delta r+(1-\delta)d(T)+\alpha,n(\delta x_{(r)}+(1-\delta)T)+c\theta+\beta-(c+n)min(x_{(1)},\theta))$$

است و برآوردگر بیزی آن تحت تابع زیان توان دوم خطا برابر است با

$$\hat{\sigma}=\frac{n(\delta x_{(r)}+(1-\delta)T)+c\theta+\beta-(c+n)min(x_{(1)},\theta)}{\delta r+(1-\delta)d(T)+\alpha-1} \qquad (۲۴)$$

چگالی پسین حاشیه‌ای $\mu$ برابر است با

$$\pi(\mu|\underline{x})=\int_0^\infty\pi(\mu,\sigma|\underline{x})d\sigma=\frac{(c+n)[\delta r+(1-\delta)d(T)+\alpha]}{[n(\delta x_{(r)}+(1-\delta)T)+c\theta+\beta-(c+n)\mu]^{\delta r+(1-\delta)d(T)+\alpha+1}}$$
$$\times[n(\delta x_{(r)}+(1-\delta)T)+c\theta+\beta-(c+n)min(x_{(1)},\theta)]^{\delta r+(1-\delta)d(T)+\alpha}.$$

و برآوردگر بیزی آن تحت تابع زیان توان دوم خطا عبارت است از

$$E(\mu|\underline{X})=\int_{-\infty}^{min(x_{(1)},\theta)}\mu\pi(\mu|\underline{x})d\mu$$
$$=min(x_{(1)},\theta)-\frac{n(\delta x_{(r)}+(1-\delta)T)+c\theta+\beta-(c+n)min(x_{(1)},\theta)}{(c+n)(\delta r+(1-\delta)d(T)+\alpha-1)}.$$

**مثال:** داده‌های زیر طول عمر دستگاه تهویه هوای یک نوع هواپیما می‌باشند که از توزیع نمایی، $E(\sigma)$ تبعیت می‌کنند [۱۹]:

۲۳,۲۶۱,۸۷,۷,۱۲۰,۱۴,۶۲,۴۷,۲۲۵,۷۱,۲۴۶,۲۱,۴۲,۲۰ ,
۵,۱۲,۱۲۰,۱۱,۳,۱۴,۷۱,۱۱,۱۴,۱۱,۱۶,۹۰,۱,۱۶,۵۲,۹۵

**جدول ۱:** برآورد بیزی، بیز حدی و تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\sigma$ در حالت $\mu$ معلوم و $T=۹۰$

| | $r=۲۰$ | $r=۲۵$ |
|---|---|---|
| $\delta^{\pi}_{a_1,b_1}$ | $(۱۰۲۲+a_1)/(۱۹+b_1)$ | $(۱۲۶۱+a_1)/(۲۳+b_1)$ |
| $\delta^{\pi}_{0,1}$ | ۵۱/۱۰۰ | ۵۲/۵۴۲ |
| $\delta^{a_{10}}_{PR}$ | ۶۱/۷۱۴ | ۶۱/۷۱۱ |
| $\delta^{b_{10}}_{PR}$ | ۵۹/۳۳۷ | ۵۹/۳۸۸ |
| $\delta_{PR}$ | ۶۱/۵۳۳ | ۶۱/۵۳۰ |

برآورد حداکثر درست‌نمایی پارامتر $\sigma$ از داده‌های کامل برابر با ۵۹/۶ است و برآورد حداکثر درست‌نمایی آن تحت سانسور هیبرید نوع اول بدون جایگذاری با $T=۹۰$ و $r=۲۰$ برابر با ۵۱/۱ و با $T=۹۰$ و $r=۲۵$ برابر با ۵۲/۵۴۲ است. نتایج به‌دست آمده از این داده‌ها تحت سانسور هیبرید نوع اول در جدول‌های ۱ و ۲ خلاصه شده است. در جدول ۱، $a_{10}=۲۱۱۷۶۸/۳۴$، $b_1\in(۳۵۵۵،۳۵۵۴)$، $b_{10}=۳۵۵۴/۱۶$ و $a_1\in(۲۱۱۷۶۹،۲۱۱۷۶۸)$ اختیار شده است.

**جدول۲:** برآورد بیزی، بیز حدی و تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\nu=\frac{n}{\sigma}$ در حالت $\mu$ معلوم و $T=۹۰$

| | $r=۲۰$ | $r=۲۵$ |
|---|---|---|
| $\delta^{\pi}_{a_2,b_2}$ | $(۲۰+a_2)/(۶۲+b_2)$ | $(۲۴+a_2)/(۹۰+b_2)$ |
| $\delta^{\pi}_{0,0}$ | ۰/۳۲۲ | ۰/۲۶۷ |
| $\delta^{a_{20}}_{PR}$ | ۰/۵۶۰ | ۰/۴۲۱ |
| $\delta^{b_{20}}_{PR}$ | ۰/۳۲۴ | ۰/۲۶۹ |
| $\delta_{PR}$ | ۰/۵۶۳ | ۰/۴۳۳ |

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برآوردهای تأسف پسین گاما مینیماکس به برآورد حداکثر درست‌نمایی داده‌های کامل در مقایسه با برآورد حداکثر درست‌نمایی تحت سانسور، نزدیک‌تر هستند. به‌منظور دست‌یابی به داده‌هایی از توزیع نمایی دوپارامتری مقادیر داده‌های فوق را با ۵ جمع می‌کنیم تا داده‌هایی از توزیع نمایی دوپارامتری، $E(\mu,\sigma)$، حاصل شود. در این حالت برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر $\mu$ برابر۶ است و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر $\sigma$ برابر ۵۸/۹۶ است. نتایج به‌دست آمده از این داده‌ها تحت سانسور هیبرید نوع اول با جایگذاری در جدول‌های ۳، ۴، ۵ و ۶ آمده است.

**جدول ۳:** برآورد بیزی و تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\sigma$ در حالت $\mu$ نامعلوم (ب۱) و $T=۹۰$

| | $r=۲۰$ | $r=۲۵$ |
|---|---|---|
| $\hat{\sigma}$ | $(۱۸۳۰+\beta)/(۱۹+\alpha)$ | $(۲۵۲۰+\beta)/(۲۱+\alpha)$ |
| $\delta_{PR}^{\alpha_0}$ | ۵۸/۷۹۰ | ۵۸/۹۵۵ |
| $\delta_{PR}^{\beta_0}$ | ۵۸/۷۹۸ | ۵۸/۹۴۶ |
| $\delta_{PR}$ | ۵۸/۷۹۸ | ۵۸/۹۶۴ |

**جدول۴:** برآورد بیزی و تأسف پسین گاما مینیماکس برای پارامتر $\mu$ در حالت $\sigma$ نامعلوم(ب۱) و $T=۹۰$

| | $r=۲۰$ | $r=۲۵$ |
|---|---|---|
| $\hat{\mu}$ | $۶-\{(۱۸۳۰+\beta)/(۵۷۰+۳۰\alpha)\}$ | $۶-\{(۲۵۲۰+\beta)/(۶۳۰+۳۰\alpha)\}$ |
| $\delta_{PR}^{\alpha_0}$ | ۴/۰۴۰ | ۴/۰۳۵ |
| $\delta_{PR}^{\beta_0}$ | ۴/۰۴۰ | ۴/۰۳۴ |
| $\delta_{PR}$ | ۴/۰۴۰ | ۴/۰۳۴ |

با توجه به ساختار داده‌ها می‌دانیم که مقدار واقعی $\mu$ برابر ۵ است. ملاحظه می‌شود که برآورد حداکثر درست‌نمایی یک بیش‌برآورد و برآوردهای تأسف پسین گاما مینیماکس یک کم‌برآورد از پارامتر را ارائه می‌کنند. با توجه به ساختار مسأله، در مقایسه، کم‌برآورد بهتر از بیش‌برآورد ارزیابی می‌شود. در جدول ۵، ردیف های ۱ و ۲، ردیف‌های ۳ و ۴ و ردیف‌های ۵ و ۶ برآورد $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}$ را به‌ترتیب برای مقادیر ابرپارامترهای $\alpha=۳۴۸۳$، $\beta=۲۰۵۴۳۸$، $c=۵۹$ و $\theta=۶$

(حالت بسیار آگاهی‌بخش)، برای مقادیر $\alpha = ۸۷۲$، $\beta = ۵۱۳۸۹$، $c = ۳۰$ و $\theta = ۷$ (حالت آگاهی‌بخش معتدل) و برای مقادیر $\alpha = ۳۸۹$، $\beta = ۲۲۸۹۲$، $c = ۲۰$ و $\theta = ۸$ (حالت کم-آگاهی‌بخش) ارائه می‌کند. برای $r = ۲۰$ و $r = ۲۵$، برآورد حاصل برای $\hat{\sigma}$ یک بیش‌برآورد برای $\sigma$ ولی برآوردهای $\hat{\mu}$ یک بیش برآورد (حالت بسیار آگاهی‌بخش)، نزدیک به مقدار واقعی (حالت آگاهی‌بخش معتدل) و یک کم برآورد (حالت کم‌آگاهی‌بخش) برای $\mu$ است.

**جدول۵:** برآورد بیزی پارامترهای $\mu$ و $\sigma$، برای مقادیر مختلف ابرپارامترها در حالت (ب۲) و $T = ۹۰$

| نوع پیشین | | $r = ۲۰$ | $r = ۲۵$ |
|---|---|---|---|
| بسیار آگاهی بخش | $\hat{\sigma}$ | ۵۹/۱۸۶ | ۵۹/۳۴۸ |
| | $\hat{\mu}$ | ۵/۳۳۵ | ۵/۳۳۳ |
| آگاهی بخش معتدل | $\hat{\sigma}$ | ۵۹/۷۶۳ | ۶۰/۴۰۴ |
| | $\hat{\mu}$ | ۵/۰۰۴ | ۴/۹۹۳ |
| کم آگاهی بخش | $\hat{\sigma}$ | ۶۰/۹۶۱ | ۶۲/۰۷۸ |
| | $\hat{\mu}$ | ۴/۷۹۱ | ۴/۷۵۸ |

## ۴- بحث و نتیجه گیری

در این مثال دیده می‌شود که برآوردگر حداکثر درست‌نمایی پارامتر توزیع نمایی با برآوردگرهایی که خواص بهینه آن‌ها (مجاز و مینیماکس بودن) ثابت می‌شود، برابر است. همچنین ملاحظه می‌شود که در صورت انتخاب فاصله مقادیر مناسب برای $a$، $b$، $\alpha$ و $\beta$ در مجموعه‌های $\Gamma$، برآوردهای تأسف پسین گاما مینیماکس برآوردهای مطلوب‌تری را ارائه می کنند. طبعاً اگر ابرپارامترهای توزیع پیشین به درستی انتخاب شوند نتیجه برعکس خواهد شد. به‌عبارت دیگر در این حالت برآورد بیزی بهتر از برآوردهای تأسف پسین گاما مینیماکس عمل می‌کند. تلاش عمده در این مقاله بر توزیع نمایی و تابع زیان مربع خطا متمرکز شده است. ممکن در این راستا توزیع جمعیتی را از توزیع های متداول دیگر در قابلیت اعتماد از جمله گاما و وایبل انتخاب کرد که پژوهشی جداگانه را طلب می‌کند و یا از تابع‌زیان های پایا مقیاس استفاده نمود که بی‌شک در نتایج تغییر حاصل خواهد شد.

## پیوست [۱]

در این پیوست، ریسک برآوردگر بیزی تعمیم یافته‌ی $v$، $R(v,\delta_{0,0}^{\pi})$ به‌صورت زیر ثابت می-شود.

$$R(v,\delta_{0,0}^{\pi}) = E(\delta_{0,0}^{\pi} - v)^2 = E(\delta_{0,0}^{\pi\,2}) - 2vE(\delta_{0,0}^{\pi}) + v^2$$

$$\begin{aligned}
E(\delta_{0,0}^{\pi}) &= E(\delta_{0,0}^{\pi} \mid X_{(r)} > T)p(X_{(r)} > T) + E(\delta_{0,0}^{\pi} \mid X_{(r)} \le T)p(X_{(r)} \le T) \\
&= \sum_{d=0}^{r-1} \frac{d(T)}{T} \frac{(vT)^d e^{-vT}}{d!} + \int_0^T \frac{r}{x} \frac{v^r x^{r-1} e^{-vx}}{\Gamma(r)} dx \\
&= v \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(vT)^d e^{-vT}}{d!} + \int_0^T \frac{r v^r x^{r-2} e^{-vx}}{\Gamma(r)} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\delta_{0,0}^{\pi\,2}) &= E(\delta_{0,0}^{\pi\,2} \mid X_{(r)} > T)p(X_{(r)} > T) + E(\delta_{0,0}^{\pi\,2} \mid X_{(r)} \le T)p(X_{(r)} \le T) \\
&= \sum_{d=0}^{r-1} \left(\frac{d(T)}{T}\right)^2 \frac{(vT)^d e^{-vT}}{d!} + \int_0^T \left(\frac{r}{x}\right)^2 \frac{v^r x^{r-1} e^{-vx}}{\Gamma(r)} dx \\
&= v^2 \sum_{d=1}^{r-1} \frac{d(T)}{T} \frac{(vT)^{d-1} e^{-vT}}{(d-1)!} + \int_0^T \frac{r^2 v^r x^{r-3} e^{-vx}}{\Gamma(r)} dx \\
&= v \sum_{d=0}^{r-2} \frac{d(T)}{T} \frac{(vT)^d e^{-vT}}{d!} + \frac{v}{T} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(vT)^d e^{-vT}}{d!} + \int_0^T \frac{r^2 v^r x^{r-3} e^{-vx}}{\Gamma(r)} dx
\end{aligned}$$

با جایگذاری $E(\delta_{0,0}^{\pi})$ و $E(\delta_{0,0}^{\pi\,2})$ در تابع ریسک داریم:

$$\begin{aligned}
R(v,\delta_{0,0}^{\pi}) = v^2 \sum_{d=0}^{r-3} \frac{(vT)^d e^{-vT}}{d!} + \int_0^T \frac{r^2 v^r x^{r-3} e^{-vx}}{\Gamma(r)} dx - 2v^2 \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(vT)^d e^{-vT}}{d!} \\
- 2v \int_0^T \frac{r v^r x^{r-2} e^{-vx}}{\Gamma(r)} dx + v^2
\end{aligned}$$

که با انجام کمی محاسبات نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
R(\nu,\delta^{\pi}_{0,0}) &= \nu^{2} - 2\int_{0}^{T}\frac{r\nu^{r+1}x^{r-2}e^{-\nu x}}{\Gamma(r)}dx + \int_{0}^{T}\frac{r^{2}\nu^{r}x^{r-3}e^{-\nu x}}{\Gamma(r)}dx \\
&+ \left(\frac{\nu}{T}-\nu^{2}\right)\sum_{d=0}^{r-2}\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!} - \nu^{2}\frac{(\nu T)^{r-2}e^{-\nu T}}{(r-2)!}
\end{aligned}
$$

## پیوست [۲]

در این پیوست، ریسک برآوردگر بیزی $\nu$ نسبت به پیشین $\pi_m$، $R(\nu,\delta_m)$، را به‌صورت زیر تشریح می‌کنیم تا به‌توان بیز ریسک آن را نیز محاسبه کرد. در حالی که در متن تا این حد ساده نشده است.

$$
\begin{aligned}
E(\delta_m) &= E(\delta_m \mid X_{(r)} > T)\,p(X_{(r)} > T) + E(\delta_m \mid X_{(r)} \le T)\,p(X_{(r)} \le T) \\
&= \sum_{d=0}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!} + \int_{0}^{T}\frac{r+m^{-1}}{x+m^{-1}}\frac{\nu^{r}x^{r-1}e^{-\nu x}}{\Gamma(r)}dx \\
&= \sum_{d=0}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!} + \int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{r+m^{-1}}{x}\frac{\nu^{r}(x-m^{-1})^{r-1}e^{-\nu(x-m^{-1})}}{\Gamma(r)}dx \\
&= \sum_{d=0}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!} + \sum_{k=0}^{r-1}\binom{r-1}{k}\int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{r+m^{-1}}{\Gamma(r)}\frac{\nu^{r}x^{r-2}e^{-\nu(x-m^{-1})}(-1)^{k}}{(xm)^{k}}dx \\
&= \sum_{d=0}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!} + \binom{r-1}{d}(-1)^{d}(m^{-1})^{d}\int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{r+m^{-1}}{\Gamma(r)}\nu^{r}x^{r-d-2}e^{-\nu(x-m^{-1})}dx\,Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\delta_m^{2}) &= E(\delta_m^{2} \mid X_{(r)} > T)\,p(X_{(r)} > T) + E(\delta_m^{2} \mid X_{(r)} \le T)\,p(X_{(r)} \le T) \\
&= \sum_{d=0}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)^{2}\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!} + \int_{0}^{T}\frac{(r+m^{-1})^{2}}{(x+m^{-1})^{2}}\frac{\nu^{r}x^{r-1}e^{-\nu x}}{\Gamma(r)}dx \\
&= \sum_{d=0}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)^{2}\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!} + \binom{r-1}{d}(-1)^{d}(m^{-1})^{d}\int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{(r+m^{-1})^{2}}{\Gamma(r)}\nu^{r}x^{r-d-3}e^{-\nu(x-m^{-1})}dx
\end{aligned}
$$

با جایگذاری $E(\delta_m)$ و $E(\delta_m^{2})$ در تابع ریسک داریم:

$$
\begin{aligned}
R(\nu,\delta_m) &= \nu^{2} - 2\left\{\left(\frac{m^{-1}}{m^{-1}+T}\right)\nu e^{-\nu T} + \int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{(r+m^{-1})}{\Gamma(r)}\nu^{r+1}x^{r-2}e^{-\nu(x-m^{-1})}dx\right\} + \left(\frac{m^{-1}}{m^{-1}+T}\right)^{2}e^{-\nu T} \\
&+ \int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{(r+m^{-1})^{2}}{\Gamma(r)}\nu^{r}x^{r-3}e^{-\nu(x-m^{-1})}dx + \sum_{d=0}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)^{2}\frac{(\nu T)^{d}e^{-\nu T}}{d!}
\end{aligned}
$$

$$+\binom{r-1}{d}(-m^{-1})^d \int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}} \frac{(r+m^{-1})^2}{\Gamma(r)} \nu^r x^{r-d-3} e^{-\nu(x-m^{-1})}dx - 2\sum_{d=1}^{r-1}\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)\nu\frac{(\nu T)^d e^{-\nu T}}{d!}$$

$$+\binom{r-1}{d}(-m^{-1})^d\int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{(r+m^{-1})}{\Gamma(r)}\nu^{r+1}x^{r-d-2}e^{-\nu(x-m^{-1})}dx$$

بیز ریسک برآوردگر بیزی $\nu$ نسبت به پیشین $\pi_m$، $r_m$، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$r_m = \int_0^\infty \nu^{m^{-1}+1} e^{-\frac{\nu}{m}} d\nu - 2\left(\frac{m^{-1}}{m^{-1}+T}\right)\int_0^\infty \nu^{m^{-1}} e^{-\nu(m^{-1}+T)} d\nu$$

$$-2\left(\frac{r+m^{-1}}{\Gamma(r)}\right)\int_0^\infty\int_{m^{-1}}^{m^{-1}+T} x^{r-2}\nu^{r+m^{-1}}e^{-\nu x}dx\,d\nu + \left(\frac{m^{-1}}{m^{-1}+T}\right)^2\int_0^\infty \nu^{m^{-1}-1}e^{-\nu(T+m^{-1})}d\nu$$

$$+\frac{(r+m^{-1})^2}{\Gamma(r)}\int_0^\infty\int_{m^{-1}}^{m^{-1}+T} x^{r-3}\nu^{r+m^{-1}-1}e^{-\nu x}dx\,d\nu$$

$$+\sum_{d=1}^{r-1}\{\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)\frac{T^d}{d!}\times\int_0^\infty \nu^{m^{-1}+d-1}e^{-\nu(T+m^{-1})}d\nu$$

$$+\binom{r-1}{d}(-m^{-1})^d\int_0^\infty\int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{(r+m^{-1})^2}{\Gamma(r)}\nu^{r+m^{-1}-1}x^{r-d-3}e^{-\nu x}dx\,d\nu\}$$

$$-2\sum_{d=1}^{r-1}\{\left(\frac{d(T)+m^{-1}}{T+m^{-1}}\right)^2\frac{T^d}{d!}\int_0^\infty \nu^{m^{-1}+d}e^{-\nu(T+m^{-1})}$$

$$+\binom{r-1}{d}(-m^{-1})^d\int_0^\infty\int_{m^{-1}}^{T+m^{-1}}\frac{(r+m^{-1})}{\Gamma(r)}\nu^{r+m^{-1}}x^{r-d-2}e^{-\nu x}dx\,d\nu\}$$

با به‌کارگیری قضیه ۱۶ (ص ۲۲۹) از [۱۴] و قضیه ۱۰-۳۱، (ص ۲۴۶) از [۱۴]، انتگرال‌های یگانه و دوگانه موجود در $r_m^*$ و $r_m$ به صفر میل می‌کنند. در نتیجه تفاضل ریسک بیزی یعنی $D_m = r_m - r_m^*$ به صفر میل می‌کند.

## مراجع

[1] Epstein, B. (1954), Truncated life-tests in the exponential case, *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 555-564.

[2] Fairbanks, K., Madsan, R. and Dykstra, R. (1982), A confidence interval for an exponential parameter from hybrid life-test, *Journal of American Statistical Association*, **77**, 137-140.

[3] Chen, S.M. and Bhattacharyya, G.K. (1988), Exact confidence bound for an exponential parameter under hybrid censoring. *Communication in Statistics, Theory and Methods*, **17**, 1857-1870.

[4] Childs, A., Chandrasekar, B., Balakrishnan, N. and Kundu, D. (2003), Exact likelihood inference based on Type-I and Type-II hybrid censored samples from the exponential distribution. *Annals of Institute of Statistical Mathematics,* **55**, 319-225.

[5] Draper, N. and Guttman, T. (1987), Bayesian analysis of Hybrid life-test with exponential failure times, *Annals of Institute of Statistical Mathematics*, **39**, 219-225.

[6] Gupta, R.D. and Kundu, D. (1998), Hybrid censoring with exponential failure distributions. *Communication in Statistics, Theory and Methods*, **27**, 3065-3083.

[7] Ebrahimi, N. (1990), Estimating the parameter of an exponential distribution from hybrid life test. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **23**, 255-261.

[8] Ebrahimi, N. (1992), Prediction intervals for future failures in the exponential distribution under hybrid censoring. *IEEE Transactions on Reliability*., **41**, 127-132.

[9] Kundu, D. (2007), On Hybrid censored weibull distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 2127-2142.

[10] Balakrishnan, N. and QihaoXie (2007), Exact inference for a simple Step-Stress model with Type-I hybrid censored data from the exponential distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 3268-3290.

[11] Zen, M. M. and Das Gupta, A. (1993), Estimating a binomial parameter: Is robust Bayes real Bayes?, *Statistics and Decisions*, **11**, 37-60.

[12] Gnedenko, B.V., Belyayev, Yu. K. and Solovyev, A.D. (1969), *Mathematical Method of Reliability Theory*, Academic Press, New York.

[13] Berger, J.O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer-Verlag, New York.

[14] Royden, H.L. (1963), *Real Analysis, Macmillan*, New York.

[15] Rudin, W. (1964), *Principles of Mathematical Analysis*, McGrow-Hill, New York.

[16] Ahmadi, J., Doostparast, M. and Parsian, A. (2005), Estimation and prediction in a two-parameter exponential distribution based on K-

Record values under LINEX loss function, *Communication in Statistics, Theory and Methods*, **34**, 795-805.

[17] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), *Theory of Point Estimation*, Springer-Verlag, New York.

[18] Madi, M.T. and Leonard, T. (1996), Bayesian estimation for shifted exponential distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **55**, 345-351.

[19] Linhart, H. and Zucchini, W. (1986), *Model Selections*, Wiley, New York.

# Bayesian Inference Based on type-I Hybrid Censored Data from a Two-Parameter Exponential Distribution

Ahmad Parsian, Fariba Azizi

Department of Statistics, Tehran University, Tehran, Iran.

## Abstract

A hybrid censoring is a mixture of type-I and type-II censoring schemes. It is categorized to type-I and type-II hybrid censored based on how the experiment set to terminate. In this paper, we describe the type-I hybrid censoring where lifetime variables have a two-parameters exponential distribution. Bayes estimation of unknown parameters under squared error loss function is developed. Among several methods of constructing the optimal procedures in the context of robust Bayesian methodology, we obtain posterior regret gamma minimax estimation of unknown parameters under squared error loss function. Finally, we discuss minimaxity and admissibility of the generalized Bayes estimator under squared error loss.

***Keywords:*** Admissible Estimator, Bayes Estimator, Minimax Estimator.

**Mathematics subject Classification (2000):** 62C10, 62C15.