سه مدل اساسی در ریاضیات مالی

عبدالساده نیسی[۱]، رویا چمنی انباجی، لیلی شجاعی‌منش

گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه علامه طباطبایی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۱/۱   تاریخ پذیرش: ۱۳۹۱/۱۲/۲۳

چکیده: در این مقاله در نظر داریم بازارهای مهم مالی را با استفاده از روش‌های پیشرفته‌ی ریاضی مدل‌سازی کنیم. از آن‌جا که وابستگی تنگاتنگی بین بازار سهام و بازار مشتقات وجود دارد، مدل‌هایی را معرفی می‌کنیم که ضمن مدل‌سازی این دو بازار، رابطه‌ی بین محققان ریاضی، آمار، کامپیوتر و علوم مالی را مشخص کنند. علاوه بر این بازارها را طوری مدل‌سازی می‌کنیم که در آن، مدل‌های حاصل نقص مدل‌های پیشین را جبران کرده تا بدین‌صورت مدل‌های نوینی جهت تولید علم در بخش ریاضی و مالی حاصل شوند. سرانجام در این مقاله سه مسئله‌ی مهم در ابزارهای مالی را مدل‌سازی کرده که مدل‌های حاصل به معادلات دیفرانسیل جزیی شامل جمله‌ی انتگرالی(معادلات انتگرالی-دیفرانسیلی جزیی) تبدیل می‌گردند، همچنین بستگی به نوع بازار کاربرد مسائل معکوس و مسایل مقدار اولیه و مرزی با کران آزاددر علوم مالی نیز تشریح می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی مالی، اوراق مشتقه، مسایل مقدار اولیه و مرزی با کران آزاد، مسئله‌ی معکوس، نوسان پذیری تصادفی.

رده‌بندی ریاضی: ۹۱G۱۰، ۰۵C۶۳

۱- مقدمه

برای پژوهش‌گران و تحلیل‌گران مالی، اقتصادی، حسابرسان و مدیران ریسک در سازمان‌های پولی و مالی، تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از اهمیت بالایی برخوردار است. معمولاً در تجزیه و تحلیل اوراق بهادار از جمله اوراق قرضه، سهام و اوراق مشتقه بدون داشتن یک مدل ریاضی، اشتباهات ظریف، خطاهای غیر قابل تشخیص و سوءِ تفاهم‌هایی پیش خواهد آمد که هیچ‌کدام از گروه‌های تحلیل‌گر مالی و اقتصاددانان نمی‌توانند و نباید از آن چشم‌پوشی کنند. خوشبختانه

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: عبدالساده نیسی a_neisy@iust.ac.ir

اخیراً پژوهش‌گران و تحلیل‌گران مالی و ریسک با استفاده از روش‌های پیشرفته‌ی ریاضی و کمک ریاضی‌دانان و اقتصاددانان توانسته‌اند مدل‌های نوینی طراحی کنند که در مقابل تغییرات بازار از خود واکنش نشان داده و برخی از مشکلات بازار را حل کنند.

مدل‌سازی چنین مسائلی سبب می‌شود تا علاوه بر تولید علم در این زمینه رابطه‌ی بسیار مفیدی بین محققان ریاضیات کاربردی و علوم مالی ایجاد شود تا با تشکیل تیم‌های تحقیقاتی به‌توان مدل‌های بازارهای مالی کشور را تعمیم داد. خوشبختانه، در سال‌های اخیر اهمیت این موضوع برای محققان ایرانی به‌گونه‌ای مشخص شده است که طیف عظیمی از محققان در این زمینه تحقیقات مفیدی انجام داده‌اند. این مقاله نتیجه‌ی تحقیقات چند ساله بر روی مدل‌های مالی ارائه شده در مقالات معتبر دنیا بوده است که یکی از اهداف آن بومی‌سازی آن مدل‌ها به مدل‌های قابل قبول و نزدیک به اقتصاد ایران می‌باشد.

از آن‌جا که قیمت‌گذاری برخی از کمیت‌های مالی متأثر از بازارهای جهانی است، لذا برای کشور بسیار مفید بوده‌که ما نحوه‌ی مدل‌سازی این کمیت‌ها را بیان و روند بومی‌سازی را تشریح کنیم. برای این‌منظور سه مسئله‌ی بسیار مهم در بازارهای سهام و مشتقات مالی را بیان می‌کنیم.

یکی از مشهورترین مدل‌ها در بازارهای مالی مدل بلک – شولز است. در حوزه‌ی مدل‌سازی‌های مالی، مدل بلک - شولز نقش مهمی در تعیین قیمت دارایی‌های پرمخاطره (دارای ریسک بالا) بازی می‌کند و شالوده‌ای برای بسیاری از چارچوب‌های مدل‌سازی قیمت اختیارات به‌شمار می‌رود [۱ و ۲]. مفید بودن این مدل مشهور در مقام یک پایه‌ی نظری در بازارهای مالی ثابت شده است. اما به‌هرحال نشان داده شده است که این مدل در پیش‌بینی خصوصیات مهم مشاهده شده در درآمدهای دارایی‌ها و نوسانات ضمنی بازار ناتوان است. به‌همین دلیل استدلال‌های زیادی به توسعه‌ی مدل‌های جانشین معطوف و فعالیت‌هایی در این زمینه انجام شده است.

در مدل بلک – شولز قیمت دارایی‌پایه از فرایند حرکت براونی هندسی تبعیت می‌کند که در آن نوسانات و جابجایی قیمت دارایی ثابت فرض شده است، لذا به‌همین دلیل نمی‌تواند رفتار دینامیک یا تصادفی در تغییرات قیمت را پیش‌بینی یا توضیح دهد. برای رفع این مشکل در این مقاله سه مدل برای دارایی پایه پیشنهاد می‌شود، از آن‌جا که یک برگه‌ی مشتقه برروی یک دارایی پایه تعریف می‌شود، لذا سه مدل در بازار مشتقات حاصل می‌شود.

در مدل اول نوسانات مجهول و مدل دارایی پایه را به‌صورت مجموع دو بخش انتشار و پرش در نظر گرفته سپس مدل قیمت اختیارات آمریکایی را تحت این مدل دارایی پایه به دست می‌آوریم، مدل‌سازی چنین مسئله‌ای به مسئله‌ی معکوس با کران آزاد تبدیل می‌شود که در آن

معادله دیفرانسیل جزیی شامل جمله‌ی انتگرالی می‌باشد. کاربرد این مدل در بازارهای مالی به این‌صورت است که علاوه بر تخمین نوسانات بازار، پرش‌های بزرگ نیز اندازه‌گیری می‌شود. محققین ریاضیات کاربردی می‌توانند روش‌های پیشرفته‌ی ریاضی برای حل این مدل ارایه دهند تا برخی از ناکامی‌های روش‌های پیشین از جمله دقت همگرایی، بدخیمی و غیره رفع شوند.

در مدل دوم ابتدا با اعمال رژیم‌های اقتصادی، مدل نوینی حاصل می‌شود که در آن پارامترهای مدل، توابع تکه‌ای ثابت در فضای مارکوف در نظر گرفته می‌شوند، سپس با تعریف یک اختیار آمریکایی روی دارایی پایه مذکور، یک مدل برای قیمت اختیارات آمریکایی در بازار مشتقات به دست می‌آوریم، بر این اساس با یک مسئله‌ی کران آزاد در معادلات دیفرانسیل جزیی سهموی روبرو هستیم. به‌علاوه این مدل قابلیت آن را دارد که تغییرات متناوب و تکراری رژیم‌های اقتصادی را به‌صورت درون‌زا در نظر بگیرد، همچنین اثر لبخند نوسانات بازار را به‌خوبی توصیف کند و از آن‌جا که این مدل به واقعیت اقتصاد کشورمان بسیار نزدیک است، لذا با ارایه‌ی روش‌های پیشرفته عددی و داشتن برخی داده‌های مفید از بازارهای مالی می‌تواند از پروژه‌های مفید در بازارهای مالی کشور باشد. اما از آن‌جا که نوسان‌پذیری در دوره‌های زمانی طولانی نمی‌تواند ثابت فرض شود، در مدل سوم با تصادفی در نظر گرفتن این کمیت مهم مالی در صدد تعمیم یکی دیگر از محدودیت‌های مدل‌های بازارهای مالی بر می‌آییم.

با این توضیحات ساختار مقاله را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت. در بخش دوم به تشریح مسئله‌ی معکوس و کاربردهای آن در علوم مالی می‌پردازیم. در بخش سوم، مدل اختیارات با رژیم سوئچینگ جهت استفاده در بازارهای ایران طراحی می‌شود. در بخش چهارم، اختیارات آمریکایی را تحت دینامیک نوسان‌پذیری تصادفی مدل‌سازی می‌کنیم. در بخش پنجم، به ارایه-ی روش‌های حل و در بخش ششم به پیشنهاد برای کارهای آتی می‌پردازیم.

۲-مسئله‌ی معکوس در علوم مالی

در این بخش در نظر داریم مدل قیمت اختیاری را به‌دست آوریم که دارایی پایه‌ی آن از دو بخش انتشار و پرش تشکیل شده است. نظر به اینکه در حالت کلی فرایند تغییر قیمت سهام فقط انتشاری نبوده و در بعضی حالات دارای جهش‌های بزرگ می‌باشد، همچنین در اکثر مواقع لگاریتم بازه‌ی سهام به‌صورت نرمال نیست، لذا مدل حرکت براونی هندسی نمی‌تواند تصویر واقعی از مدل دارایی پایه داشته باشد، بدین ترتیب از مدل جایگزین برای دارایی پایه استفاده می‌کنیم. برای این منظور فرض کنید S قیمت دارایی پایه(سهام)، μ میزان جابجایی و σ

تغییرپذیری باشد، پس می‌توان مدل پیشنهادی زیر را که ترکیبی از انتشار و پرش است، برای دارایی پایه‌ی قیمت اختیار آمریکایی در نظر گرفت:

$$dS = \left(\mu - \gamma k\right) S\,dt + \sigma S\,dW + \left(J - ۱\right) S\,dp = dS_{BM} + dS_{JM}, ۰ < t < T$$

که در آن dW فرایند استاندارد وینر، J طول پرش، dS_{BM} حرکت براونی، dS_{JM} جمله‌ی پرش و dp فرایند پواسون با چگالی $\gamma > ۰$ بوده و داریم:

$$dp = \begin{cases} ۰ & ۱ - \gamma dt \quad \text{با احتمال} \\ ۱ & \gamma dt \quad \text{با احتمال} \end{cases}$$

علاوه براین عبارت $\left(J - ۱\right) \mathrm{S}\,dp$ جمله‌ی پرش بوده که در آن فرایند J دارای تابع چگالی به‌شکل زیر است:

$$\wp\left(J\right) = ۰ \qquad J \leq ۰$$

و برای هر تابع $f = f(J)$ داریم:

$$\mathrm{E}\left(f\right) = \int_{۰}^{+\infty} f(J)\ \wp\left(J\right) dJ\ .$$

لذا خواهیم داشت:

$$k = \mathrm{E}\left(J - ۱\right) = \int_{۰}^{+\infty} (J - ۱)\ \wp\left(J\right) dJ\ .$$

لازم به یادآوری است که محققین زیادی در مورد ساختن و کاربرد جمله‌ی پرش در قیمت-گذاری تحقیق کرده اند، علاقه مندان می‌توانند مراجع [۳ و ۴] را ملاحظه کنند.

اکنون برای رسیدن به مدل مورد نظر، پرتفویی(سبدمالی) را در نظر بگیرید که متشکل از یک برگه‌ی اختیار به قیمت $V = V(S, t)$ و Δ دارایی پایه که قیمت آن از مدل فوق تبعیت می-کند، باشد. ارزش این پرتفوی به‌صورت زیر است:

$$\pi = V - \Delta S$$

و تغییرات ارزش این پرتفوی برابر است با

$$d\pi = d\pi_{BM} + d\pi_{JM}$$

که در آن $d\pi_{BM}$ تغییرات ارزش پرتفوی به ازای دارای پایه با مدل حرکت براونی هندسی و $d\pi_{JM}$ تغییرات به‌ازای پرش محض می‌باشد. در این‌صورت بنا بر لم ایتو داریم:

$$\begin{aligned} d\pi_{BM} &= d\mathrm{V}(S,t) - \Delta\, dS_{BM} = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS_{BM} + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲} V}{\partial S^{۲}}dt - \Delta\, dS_{BM} \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\mu - \gamma k)S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲} V}{\partial S^{۲}}\right)dt + \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)d\mathrm{W} \end{aligned}.$$

بلک و شولز نشان دادند برای حذف جمله‌ی تصادف در مدل پرتفوی مورد نظر، می‌توان شرط $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ را فرض کرد که چنین فرضی در بازارهای کامل امکان‌پذیر است. لذا با این فرض خواهیم داشت:

$$d\pi_{BM} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲} V}{\partial S^{۲}}\right)dt$$

همچنین

$$d\pi_{JM} = \left[V(JS,t) - V(S,t)\right]dq - \frac{\partial V}{\partial S}(J-۱)S\,dq .$$

اکنون فرض کنید که پرش ناهمبسته و ریسک بسیار کوچک باشد، یعنی واریانس کم باشد، آن‌گاه عایدی مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$r\pi dt = E[d\pi] = E[\pi_{BM}] + E[\pi_{JM}].$$

با جایگزینی عبارات فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt &= E\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲} V}{\partial S^{۲}}\right)dt\right] \\ &\quad + E\left[V(JS,t) - V(S,t)\right]E[dq] - \frac{\partial V}{\partial S}E\left[(J-۱)\right]S\,E[dq] \end{aligned}$$

چون $E[dq] = \gamma dt \times ۱ + (۱ - \gamma dt) \times ۰ = \gamma dt$، پس داریم:

$$\begin{aligned} r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)dt &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲} V}{\partial S^{۲}}\right)dt \\ &\quad + E\left[V(JS,t)\right]\gamma dt - V(S,t)\,\gamma dt - \frac{\partial V}{\partial S}E\left[(J-۱)\right]\mathrm{S}\,\gamma dt \end{aligned}$$

سرانجام با حذف dt از دوطرف تساوی فوق به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}S^{۲}\frac{\partial^{۲} V}{\partial S^{۲}} + (r - \gamma k)S\frac{\partial V}{\partial S} - (r+\gamma)V + \gamma E\left[V(JS,t)\right] = ۰ \quad (۱)$$

$$E\left[V\left(JS,t\right)\right]=\int_{\circ}^{\infty} V(JS,t)\,\wp\left(J\right)dJ$$

معادله‌ی (۱) یک معادله دیفرانسیل جزیی انتگرالی است و برای حل آن نیاز به شرایط اولیه و مرزی می‌باشد، لذا با معلوم شدن این شرایط مشخص می‌شود که این معادله مربوط به کدام برگه‌ی اختیار می‌باشد. این موضوع در بخش‌های بعدی تشریح می‌شود.

۲-۱- مسئله‌ی مستقیم مالی

فرض کنید S قیمت دارایی پایه(سهام)، با مدل پرش-انتشار معرفی شده در فوق بوده و $V=V(S,t)$ قیمت اختیار فروش آمریکایی روی دارایی پایه‌ی S باشد. همچنین فرض کنید r ریسک خنثی، μ میزان جابجایی و σ تغییر پذیری، t زمان، T زمان سررسید و K قیمت توافقی باشند. از آن‌جا که اختیارات آمریکایی این خاصیت مهم را دارند که در هر زمان قبل از تاریخ سررسید قابل اجرا گذاشتن می‌باشند، پس فرض می‌کنیم $\mathcal{G}=\mathcal{G}(t)$ مرز اجرای این اختیار است، در این‌صورت بنابر مطالب ابتدای بخش ۲ قیمت این برگه برای فرصت بدون آربیتراژ باید درمعادله انتگرالی-دیفرانسیلی جزیی زیر برای $\circ<t<T$، صدق کند:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+\left(r-\gamma k\right)S\frac{\partial V}{\partial S}-\left(r+\gamma\right)V+\gamma E\left[V\left(JS,t\right)\right]=\circ,\quad S>\mathcal{G}(t)$$
$$V\left(S,t\right)=K-S,\qquad \circ\le S\le\mathcal{G}(t)$$

همچنین شرایط اولیه و مرزی زیر بر روی این برگه حاکم است:

$$\begin{aligned}
&V\left(S,T\right)=max\left\{K-S,\circ\right\},\\
&V\left(\circ,t\right)=\circ,\\
&\lim_{S\to+\infty}V\left(S,t\right)=\circ\\
&V(\mathcal{G}(t),t)=K-\mathcal{G}(t),\\
&\frac{\partial V\left(\mathcal{G}(t),t\right)}{\partial S}=-1\\
&\mathcal{G}\left(T\right)=K.
\end{aligned}\tag{۲}$$

مسئله‌ی فوق یک مسئله‌ی مقدار اولیه و مرزی با کران آزاد است. اگر در این مسئله تمام توابع و پارامتر ها معلوم بوده و فقط تابع $V=V(S,t)$ مجهول باشد، آن‌گاه مسئله را مسئله‌ی مستقیم مالی می‌نامیم.

۲-۲- مسئله‌ی معکوس مالی

از آن‌جائی‌که نوسانات بازار وابسته به σ است، لذا طبیعی است که تغییرپذیری بازار در مدت زمان طولانی نمی‌تواند ثابت بماند. علاوه براین قیمت‌گذاری صحیح مشتقات نیاز به این دارد که بدانیم نوسانات قیمت دارایی پایه چگونه است، بنابراین یافتن راه‌هایی جهت شناخت و محاسبه نوسانات از درجه اهمیت بالایی در بازارهای سهام و مشتقات برخوردار است.

محققین زیادی پژوهش‌های خود را روی برآورد تغییرپذیری متمرکز کرده و پژوهش‌های فراوانی در این زمینه انجام شده است، از جمله‌ی این پژوهش‌ها برآورد نوسان‌پذیری از طریق داده‌های گذشته‌نگر و یا روش ضمنی که در این روش میزان تخمین نوسان‌پذیری از طریق ضمنی از معادلات قیمت‌گذاری مشتقات (مثلا بلک وشولز) به‌دست می‌آیند. در این میان پژوهش‌گران تحقیقات مفیدی انجام داده‌اند [۵، ۶، ۷ و ۸]. در تحقیقات این پژوهش‌گران و پژوهش‌گران دیگر در این زمینه روش‌هایی برای تخمین نوسان‌پذیری ارایه شده که هر کدام از این روش‌ها دارای مزایا و معایبی بوده‌اند. برای نمونه در اکثر این تحقیقات پرش‌های بزرگ در فرایند پایه منظور نشده است و یا حالت خاصی از تغییرپذیری برآورد می‌شود. ما در اینجا بدون پرداختن به مزایا و معایب این روش‌ها در نظر داریم با استفاده از مفهوم مسئله‌ی معکوس در معادلات دیفرانسیل جزیی، تغییرپذیری را در مدل‌های قیمت گذاری اختیار آمریکایی با دارایی پایه‌ای پرش-انتشار را برآورد کنیم. برای این منظور ابتدا مدل مسئله‌ی معکوس مالی را در بخش زیر تعریف می‌کنیم:

۳-۲- مدل ریاضی مسئله‌ی معکوس

همان‌گونه که در بخش فوق اشاره شد حالت‌های زیادی برای تغییرپذیری بازار در نظر گرفته می‌شود، یکی از این حالت‌های مورد نظر در این مقاله این است که تغییرپذیری را مجهول و تصادفی در نظر گیریم. برای این منظور فرض کنید S قیمت دارایی پایه(سهام)، با مدل پرش- انتشار معرفی شده در ابتدای این بخش بوده که در آن تغییرپذیری، $\sigma=\sigma(S,t)$ ، یک تابع مجهول می‌باشد. همچنین فرض کنید $V=V(S,t)$ قیمت اختیار فروش آمریکایی روی دارایی پایه‌ی S باشد. در این‌صورت بنا بر مطالب ارایه شده در فوق، قیمت این برگه برای فرصت بدون آربیتراژ باید درمدل زیر برای $0<t<T$، صدق کند:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2(S,t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-\gamma)S\frac{\partial V}{\partial S}$$
$$-(r+\gamma)V+\gamma E\left[V\left(JS,t\right)\right]=0,\qquad S>\mathcal{G}(t)$$

$$V\left(S,t\right)=K-S,\circ\leq S\leq\mathcal{G}(t)$$

که در آن شرایط اولیه و مرزی همان شرایط اولیه و مرزی مسئله‌ی ۲ می‌باشند. مسئله‌ی فوق یک مسئله‌ی مقدار اولیه و مرزی با کران آزاد است که در آن توابع $\sigma=\sigma(S,t)$ و $V=V(S,t)$ مجهول و بقیه‌ی توابع و پارامترها معلوم می‌باشند. این مسئله در ادبیات معادلات دیفرانسیل جزیی، مسئله‌ی معکوس نامیده می‌شود و چون در حل یک مسئله‌ی مالی مورد استفاده قرار گرفته شده است، آن‌را مسئله معکوس مالی می‌نامیم.

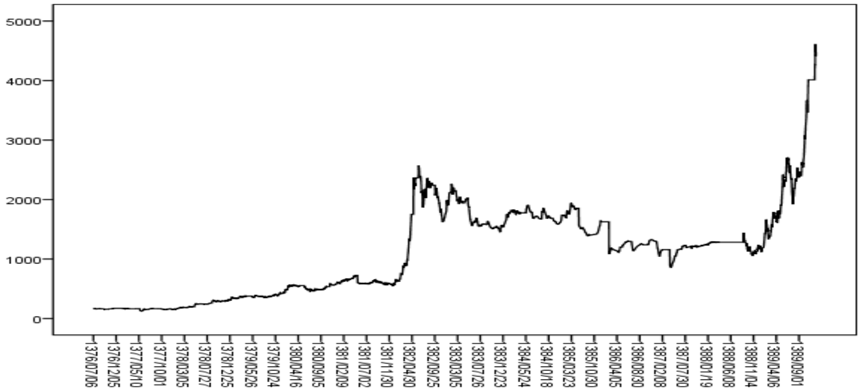
از آن‌جا که مسئله‌ی معکوس دارای دو مجهول می‌باشد، لذا برای حل آن نیاز به یک شرط فوق اضافی داریم که به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

روش‌های متفاوتی برای تعیین شرط فوق اضافی موجود است. در این‌جا برای تعیین شرط فوق اضافی فرض کنید N_B کران آزاد $\mathcal{G}_1(t)$،$\mathcal{G}_2(t)$،$\mathcal{G}_3(t)$،...,$\mathcal{G}_{N_B}(t)$ را داشته باشیم که روی هر کران مانند $\mathcal{G}_i(t)$، N_i قیمت توافقی K_{i1}،K_{i2}،K_{i3}،...,K_{iN_i} موجود باشند، در این‌صورت مجموعه‌ای از قیمت‌های تجربی $\{V_{ij}\}$ برای یک برگه‌ی اختیار آمریکایی به‌ازای قیمت‌های توافقی $K_{ij}(i=1,2,\ldots,N_B, j=1,2,\ldots,N_i)$ را خواهیم داشت. لذا می‌توان روی یک دامنه از مقادیر s و t یک مجموعه‌ی $\{V_{ij}\}$ از قیمت‌های اختیار تجربی در نظر گرفت.

۳- یک مسئله‌ی کران آزاد در علوم مالی

می‌دانیم که بسیاری از پارامترها دست‌خوش حوادثی می‌شوند که به‌واسطه آن دینامیک دارایی پایه (رفتارسری) به‌طور چشم‌گیری تغییر می‌کند. این مطلب در هر اقتصاد کلانی و در سری‌های زمانی مالی برای دوره‌های به‌اندازه‌ی کافی طولانی دیده می‌شود. چنین تغییراتی در فرایند سری زمانی می‌تواند در نتیجه‌ی رخدادهایی چون جنگ، بحران‌های مالی، تغییرات مهم در سیاست‌های حکومتی و غیره پدید آید. مدلی که به‌تواند این تغییرات را تجزیه و تحلیل نموده و اثر لبخند نوسان‌پذیری را توصیف کند، مدل رژیم سوئچینگ می‌باشد [۴]. این مدل قابلیت آن را دارد که تغییرات متناوب و تکراری رژیم‌های اقتصادی را به‌صورت درون‌زا در نظر بگیرد. حال با مثالی ساده به‌اختصار مدل را شرح می‌دهیم.

شکل ۱ بیان‌گر مثالی است که شرکت ایران خودرو تدبیری اندیشید که میل افراد به خرید محصولاتشان افزایش یابد. این تدبیر سبب شکست چشم‌گیری در دینامیک سهام این شرکت شده است.



شکل ۱: سهام شرکت ایران خودرو طی سال‌های ۱۳۸۱-۱۳۹۰

حال فرض کنید که رفتار قیمت این سهم را با فرایند براونی هندسی زیر توصیف کنیم:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

که در آن r نرخ بهره و σ نوسان‌پذیری دارایی پایه (ثابت) و W فرایند براونی هندسی می‌باشد. سوالی که به ذهن می‌رسد آن است که چگونه باید شکست موجود در نمودار ۱ را در مدل‌سازی لحاظ کرد؟ یک ایده ساده آن است که بگوییم که طی این حادثه مولفه‌ها تغییر کرده‌اند، عموماً داده‌ها تا قبل از سال ۱۳۸۲ از مدل زیر تبعیت می‌کنند:

$$dS_t = r_1 S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t$$

و بعد از سال ۱۳۸۲، داده‌ها به‌صورت زیر مدل می‌شوند:

$$dS_t = r_2 S_t dt + \sigma_2 S_t dW_t.$$

لذا، دینامیک‌های فوق توصیف خوبی برای نمودار می‌باشند، اما نحوه‌ی پیش‌بینی در این مدل‌ها معلوم نیست. اگر یک فرایند در گذشته تغییر کرده، واضح است که در آینده نیز می‌تواند تغییر کند و این باید در پیش‌بینی در نظر گرفته شود. به‌هر حال، تغییر در رژیم یقیناً نباید به‌عنوان برآمدی از یک رخ داد تعیینی، قابل پیش‌بینی انتظار رود. بلکه، تغییر در رژیم خود یک متغیر تصادفی است. بنابراین یک مدل کامل باید شامل توصیفی از احتمال قوانین حکومتی و سازمانی در تغییر متغیرها باشد.

مشاهدات پیشنهاد می‌کنند که فرض کنیم فرایند تحت تاثیر متغیر تصادفی غیرقابل مشاهدی X_t قرار گرفته است، که رژیم یا حالت نامیده می‌شود. در این‌صورت $X_t = ۱$، یعنی فرایند در

رژیم اول می‌باشد و $X_t = ۲$ بدین معناست که فرایند در رژیم دوم قرار دارد. با این توضیحات، دو معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$dS_t = r_{X_t} S_t dt + \sigma_{X_t} S_t dW_t$$

در رژیم ۱ داریم:

$$r_{X_t} \equiv r_۱, \sigma_{X_t} \equiv \sigma_۱$$

و در رژیم ۲:

$$r_{X_t} \equiv r_۲, \sigma_{X_t} \equiv \sigma_۲ .$$

بدین ترتیب دینامیک دارایی پایه را برای دو رژیم به‌صورت بالا طراحی کردیم. پس می‌توان مدل پیشنهادی برای دارایی پایه را برای هر تعداد متناهی رژیم به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$dS_t = r_{X_t} S_t dt + \sigma_{X_t} S_t dW_t, \tag{۳}$$

که در آن r_{X_t} نرخ بهره و σ_{X_t} نوسان‌پذیری دارایی پایه وابسته به زنجیر مارکوف هستند که در هر رژیم مقادیر مختلفی را می‌توانند اختیار کنند، همچنین W_t فرایند براونی استاندارد تعریف شده روی فضای احتمال ریسک‌خنثی $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$، مستقل از زنجیر مارکوف X_t است.

حال برای بدست آوردن یک مدل برای قیمت اختیارات، بازار مالی شامل دو دارایی، یکی دارایی ریسکی S_t و دیگری دارایی غیر ریسکی l_t به‌صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$dl_t = r_{X_t} l_t dt$$

$$dS_t = r_{X_t} S_t dt + \sigma_{X_t} S_t dW_t$$

که در آن‌ها، وضعیت‌های اقتصادی با زنجیر مارکوف زمان پیوسته- متناهی مقدار $\{X_t,\ t \geq ۰\}$ معین می‌گردد. بدون آنکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم که $X_t \in \{e_۱, e_۲, \ldots, e_M\}, e_i = (۰, \ldots, ۱, \ldots, ۰)$ (بردارهای یکه) و دارای دینامیک

$$X_t = X_۰ + \int_۰^t HX_s ds + M_t$$

می‌باشد (عبارت فوق نمایش نیم-مارتینگل زمان پیوسته برای X_t می‌باشد).

همچنین، در رابطه‌ی (۳)، نرخ بهره و نوسان‌پذیری به $\{X_t,\ t \geq ۰\}$ از اقتصاد بستگی دارد که به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند($\langle . \rangle$ نماد ضرب داخلی است).

$$r_{X_t}=\langle r,X_t\rangle=(r_1,\ldots,r_M)'$$
$$\sigma_{X_t}=\langle \sigma,X_t\rangle=(\sigma_1,\ldots,\sigma_M)'$$

در زمان $t\in[0,T]$, $S_t=S$ و $X_t=X$، قیمت یک اختیار فروش اروپایی با سررسید T و قیمت توافقی K به‌صورت زیر می‌باشد[۹]:

$$V(S,t,T,X)=E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_u du\right)(K-S_T)^+\middle| S_t=S,X_t=X\right]$$

حال $\tilde V(S,t,X)=\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)V(S,t,T,X)$ می‌باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\tilde V(S,t,X)&=\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)V(S,t,T,X)\\&=E^Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_u du\right)(K-S_T)^+\middle| S_t=S,X_t=X\right]\\&=E^Q\left[\exp\left(-\int_0^T r_u du\right)(K-S_T)^+\middle| G_t\right]\end{aligned}$$

که در آن $G_t=\sigma\{S_u,X_u:u\le t\}$. در نتیجه $\tilde V$ یک G_t مارتینگل، تحت اندازه‌ی Q است.

$$\tilde V(S,t)=(\tilde V(S,t,e_1),\ldots,\tilde V(S,t,e_M))$$

بنابراین $\tilde V(S_t,t,X_t)=\langle\tilde V(S_t,t),X_t\rangle$. با به‌کار بردن فرمول ایتو برای $\tilde V$ داریم [۱۰]:

$$\begin{aligned}\tilde V(S_t,t,X_t)=&\tilde V(S_t,0,X_t)+\int_0^t\frac{\partial\tilde V}{\partial u}du+\int_0^t\frac{\partial\tilde V}{\partial S}(r_uS_u du+\sigma_uS_u dW_u)\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2\tilde V}{\partial S^2}(\sigma_uS_u)^2du+\int_0^t\tilde V,dX_u.\end{aligned}$$

و با نماد دیفرانسیلی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde V_t=\frac{\partial\tilde V}{\partial t}dt+r_tS_t\frac{\partial\tilde V}{\partial S}dt+\frac{1}{2}(\sigma_tS_t)^2\frac{\partial^2\tilde V}{\partial S^2}dt+\sigma_tS_t\frac{\partial\tilde V}{\partial S}dW_t+\tilde V,dX_t,\quad (۴)$$

با توجه به آن‌که $dX_t=HX_tdt+dM_t$ و M_t مارتینگل است. همچنین توجه به لم زیر:

لم ۱: یک فرایند تصادفی Y (که دارای یک دیفرانسیل تصادفی است) مارتینگل است، اگر و فقط اگر دیفرانسیل تصادفی آن به‌صورت زیر باشد [۱۱]:

$$dY(t) = g(t)dW(t)$$

یعنی Y عبارت برحسب dt نداشته باشد.

استنباط می‌کنیم که عبارات برحسب dt در رابطه‌ی (۴) برابر صفر می‌باشند. لذا داریم:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + r_t S\frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma_t S)^2\frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial S^2}dt + \langle \tilde{V}, HX\rangle = 0$$

حال $\tilde{V} = exp(-\int_0^t r_u du)V$ و بنابراین با

$$V(S,t) = (V(S,t,T,e_1),\ldots,V(S,t,T,e_M))$$

داریم:

$$\frac{\partial(exp(-\int_0^t r_u du)V)}{\partial t} + r_t S\frac{\partial(exp(-\int_0^t r_u du)V)}{\partial S} + \frac{1}{2}(\sigma_t S)^2\frac{\partial^2(exp(-\int_0^t r_u du)V)}{\partial S^2} + \langle exp(-\int_0^t r_u du)V, HX\rangle = 0.$$

که در آن

$$\frac{\partial\left(exp\left(-\int_0^t r_u du\right)V\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\right)}{\partial t}V + exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\frac{\partial V}{\partial t} = r_t V\, exp\left(-\int_0^t r_u du\right) + exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\frac{\partial V}{\partial t}.$$

پس داریم:

$$exp\left(-\int_0^t r_u du\right)\left(-r_t V + \frac{\partial V}{\partial t} + r_t S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt + \langle V, HX\rangle\right) = 0, \quad (5)$$

معادله‌ی (۵) را به M معادله با $X = e_1, e_2, \ldots, e_M$ کاهش می‌دهیم. با در نظر گرفتن $X = X_t = e_i$ و

$$r_t = \langle r, X_t\rangle = r_i$$

$$\sigma_t = \langle \sigma, X_t \rangle = \sigma_i$$

همچنین

$$V_i = V\left(S, t, T, e_i\right), \qquad V = (V_1, V_2, \ldots, V_M)$$

V در معادله دیفرانسیل جفت‌شده‌ی بلک شولز (معادله‌ی دیفرانسیل رژیم سوئچینگ) زیر صدق می‌کند.

$$-r_i V_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} + r_i S \frac{\partial V_i}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} + \langle V, H e_i \rangle = 0$$

این معادله یک معادله‌ی دیفرانسیل جزیی سهموی خطی می‌باشد که با توجه به تعریف H (ماتریس نرخ انتقال همگن [۷]) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$-r_i V_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} + r_i S \frac{\partial V_i}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} + \sum_{l \neq i} q_{il}(V_l - V_i) = 0 .$$

البته برای حل آن نیاز به شرایط اولیه و مرزی است $(e_i = i)$.

۳-۱- مسئله‌ی مستقیم مالی

فرض کنید S قیمت دارایی پایه (سهام)، با مدل رژیم سوئچینک معرفی شده در فوق بوده و $V_i = V_i(S, t)$, $i = 1, \ldots, m$ قیمت اختیار فروش آمریکایی روی دارایی پایه‌ی S باشد. همچنین فرض کنید r ریسک خنثی، μ میزان جابجایی و σ تغییر پذیری، t زمان، T زمان سررسید و K قیمت توافقی باشند. از آن‌جا که اختیارات آمریکایی این خاصیت مهم را دارند که در هر زمان قبل از تاریخ سررسید قابل اجرا گذاشتن می‌باشند، پس فرض می‌کنیم $\mathcal{G}_i(t)$ مرز اجرای این اختیار برای هر رژیم $i = 1, \ldots, m$ است، در این‌صورت بنابر مطالب بخش۳، قیمت این برگه با فرصت بدون آربیتراژ باید در معادله دیفرانسیل جزیی زیر برای $0 < t < T$، صدق کند:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_i^2 S^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} + r_i S \frac{\partial V_i}{\partial S} - r_i V_i + \sum_{l \neq i} q_{il}\left(V_l - V_i\right) = 0 \qquad S > \mathcal{G}_i(t)$$

$$V_i\left(S, t\right) = K - S, \qquad 0 \le S \le \mathcal{G}_i(t).$$

همچنین شرایط اولیه و مرزی زیر بر روی این برگه حاکم است:

$$V_i\left(S, T\right) = \max\left\{K - S, 0\right\},$$

$$\lim_{S\uparrow\infty} V_i\left(S,t\right)=0,$$
$$\lim_{S\downarrow\mathcal{G}_i(t)} V_i\left(S,t\right)=K-\mathcal{G}_i\left(t\right),$$
$$\lim_{S\downarrow\bar{S}_i(t)} \frac{\partial V_i(S,t)}{\partial S}=-1,$$
$$\mathcal{G}_i\left(T\right)=K.$$

مسئله‌ی فوق یک مسئله‌ی مقدار اولیه و مرزی با کران آزاد است. اگر در این مسئله تمام توابع و پارامترها معلوم بوده و فقط تابع $V=V(S,t)$ مجهول باشد، یک مسئله‌ی مستقیم مالی را دارا هستیم.

۴- قیمت‌گذاری اختیارات تحت دارایی پایه با نوسان پذیری تصادفی

در بخش‌های قبل، دو حالت از مدل دارایی پایه برای قیمت‌گذاری بازارهای سهام و مشتقات بررسی شد. در این بخش حالت دیگری که تغییرپذیری بازار را دقیق‌تر بیان می‌کند، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور در مدل دارایی پایه، نوسان‌پذیری را تصادفی در نظر می‌گیریم. هستون [۱۲] تغییر پذیری تصادفی برای دارایی پایه را مورد مطالعه قرار داد. این مدل برای اولین بار در ادبیات قیمت‌گذاری اختیارات، تابع مشخصه که حالت خاصی از تبدیل فوریه است را به‌کار گرفته و یک جواب صورت بسته برای قیمت اختیارات تحت این مدل به‌دست آورد. هستون [۱۲] دینامیک قیمت دارایی پایه (نظیر سهام، اوراق قرضه و غیره) را در مدل خود به‌صورت فرایند انتشار زیر در نظر گرفته است:

$$dS=S\left(t\right)(\mu dt+\sqrt{v}dW_s(t))$$

که فرایندی مشابه با فرایند براونی هندسی، با این تفاوت که نوسان‌پذیری تصادفی است. به علاوه فرض بر این است که واریانس در معادله‌ی تصادفی زیر صدق می‌کند:

$$dv=k\left(\theta-v\left(t\right)\right)dt+\varepsilon\sqrt{v}dW_v(t)$$

که در آن W_s و W_v حرکت‌های براونی تحت اندازه‌ی ریسک خنثی با همبستگی $\rho=Cov(W_v,W_s)$ در بازه‌ی $[-1,1]$ بوده و پارامترهای k، θ و ε همگی ثابت و مثبت هستند. θ میانگین بلندمدت نوسان پذیری و k سرعت بازگشت به میانگین می‌باشد. همچنین ε واریانس لحظه‌ای v در واحد زمان را نشان می‌دهد.

برای قیمت‌گذاری اختیارات، معادله‌ی دیفرانسیل جزیی مدل هستون را از طریق ساخت سبدی بدون ریسک و با فرض عدم وجود فرصت آربیتراژ به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

متغیر نوسان‌پذیری در مدل هستون یک دارایی غیر قابل معامله می‌باشد. در این مدل تصادفی بودن نوسان‌پذیری باعث شده است عامل تصادفی دیگری، جز عامل تصادفی موجود در فرایند قیمت دارایی پایه وارد شود. بنابراین دو عامل تصادفی در این مدل وجود دارد. در نتیجه برای ساخت پرتفوی [۱۳]، نمی‌توانیم اختیار را به‌طور کامل با دارایی پایه سهام پوشش دهیم، بنابراین باید آن را با دو قرارداد پوشش دهیم. یکی از این دو قرارداد همان دارایی پایه یعنی سهام است و دیگری اختیاری است که سهام را پوشش می‌دهد. دراینجا یک اختیار خرید C می‌فروشیم وبرای پوشش موقعیت Δ واحد دارایی پایه و Δ_1 واحد از مشتقه‌ی دوم (اختیار) C_1 خریداری می‌کنیم که هر دو مشتقه بر روی دارایی پایه مشابه می‌باشند و تفاوت این دو مشتقه در تاریخ سررسید و قیمت توافقی است. لذا فرض کنید $C(S,v,t)$ قیمت یک اختیار خرید اروپایی باشد، با توجه به لم ایتوی دو متغیره [۱۰] دینامیک C به‌صورت زیر می‌باشد:

$$dC=\left[\frac{\partial C}{\partial t}+\mu_S\frac{\partial C}{\partial S(t)}+\mu_v\frac{\partial C}{\partial v(t)}+\frac{1}{2}\sigma_S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)^2}+\frac{1}{2}\sigma_v^2\frac{\partial^2 C}{\partial v(t)^2}\right.$$
$$\left.+\rho\,\sigma_S\sigma_v\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)\partial v(t)}\right]dt+\sigma_S\frac{\partial C}{\partial S(t)}dW_S(t)+\sigma_v\frac{\partial C}{\partial v(t)}dW_v(t)\,.$$

فرض کنید π ارزش دارایی پرتفوی شامل فروش یک اختیار خرید و خرید Δ واحد دارایی پایه C و Δ_1 واحد C_1 به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\pi=C-\Delta S-\Delta_1 C_1$$

تغییر درارزش این پرتفوی در یک زمان dt به‌صورت زیر می‌باشد:

$$d\pi=dC-\Delta\, dS-\Delta_1 dC_1.$$

با جایگذاری مقادیر dC و dS از روابط بالا داریم:

$$d\pi=\left[\frac{\partial C}{\partial t}+\mu_S\frac{\partial C}{\partial S(t)}+\mu_v\frac{\partial C}{\partial v(t)}+\frac{1}{2}\sigma_S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)^2}+\frac{1}{2}\sigma_v^2\frac{\partial^2 C}{\partial v(t)^2}\right.$$
$$\left.+\rho\,\sigma_S\sigma_v\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)\partial v(t)}-\Delta\,\mu_S\right]dt-\Delta_1\left[\frac{\partial C_1}{\partial t}+\mu_S\frac{\partial C_1}{\partial S(t)}+\mu_v\frac{\partial C_1}{\partial v(t)}\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sigma_S^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial S(t)^2}+\frac{1}{2}\sigma_v^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial v(t)^2}+\rho\,\sigma_S\sigma_v\frac{\partial^2 C_1}{\partial S(t)\partial v(t)}\Bigg]dt$$
$$+\left[\sigma_S\frac{\partial C}{\partial S(t)}-\Delta\,\sigma_S-\Delta_1\sigma_S\frac{\partial C_1}{\partial S(t)}\right]dW_S(t)+[\,\sigma_v\frac{\partial C}{\partial v(t)}$$
$$-\Delta_1\frac{\partial C_1}{\partial v(t)}]\,dW_v(t)\,.$$

به‌منظور از بین بردن ریسک، باید عوامل تصادفی W_s و W_v را از بین ببریم. بنابراین با صفر قرار دادن ضرایب آن‌ها داریم:

$$\Delta_1=\frac{\frac{\partial C}{\partial v(t)}}{\frac{\partial C_1}{\partial v(t)}};\qquad \Delta=\frac{\partial C}{\partial S(t)}-\frac{\frac{\partial C}{\partial v(t)}}{\frac{\partial C_1}{\partial v(t)}}\frac{\partial C_1}{\partial S(t)}\,.$$

با این شرایط، تغییرات در ارزش پرتفوی پوشش داده شده در فاصله‌ی زمانی کوتاه dt، باید با بازده سرمایه‌گذاری بدون ریسک برابر شود. زیرا در غیر این‌صورت فرصت آربیتراژ به‌وجود می‌آید. بنابراین باید رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$d\pi=r\pi dt=r\left[C-\Delta S-\Delta_1 C_1\right]dt\,.$$

حال با جایگذاری مقادیر Δ و Δ_1 در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial v(t)}}\Bigg[\frac{\partial C}{\partial t}+rS(t)\frac{\partial C}{\partial S(t)}+\mu_v\frac{\partial C}{\partial v(t)}+\frac{1}{2}\sigma_S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_v^2\frac{\partial^2 C}{\partial v(t)^2}+\rho\,\sigma_S\sigma_v\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)\partial v(t)}-rC\Bigg]$$
$$=\frac{1}{\frac{\partial C_1}{\partial v(t)}}\Bigg[\frac{\partial C_1}{\partial t}+rS(t)\frac{\partial C_1}{\partial S(t)}+\mu_v\frac{\partial C_1}{\partial v(t)}+\frac{1}{2}\sigma_S^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial S(t)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_v^2\frac{\partial^2 C_1}{\partial v(t)^2}+\rho\,\sigma_S\sigma_v\frac{\partial^2 C_1}{\partial S(t)\partial v(t)}-rC_1\Bigg].$$

ملاحظه می‌کنیم که عبارت‌های دو طرف تساوی، مشابه‌اند و تنها تفاوت آن‌ها در نوع اختیار است. لذا این تساوی در صورتی برقرار است که هر دو طرف آن، برابر با تابعی از $S(t)$، $v(t)$

و t مستقل از نوع اختیار باشد. این تابع را با $\lambda(S(t),v(t),t)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را ریسک نوسان‌پذیری قیمت بازار می‌نامیم. به‌عبارتی

$$\frac{1}{\frac{\partial C}{\partial v(t)}}\left[\frac{\partial C}{\partial t}+rS(t)\frac{\partial C}{\partial S(t)}+\mu_v\frac{\partial C}{\partial v(t)}+\frac{1}{2}\sigma_S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)^2}+\frac{1}{2}\sigma_v^2\frac{\partial^2 C}{\partial v(t)^2}\right.$$
$$\left.+\rho\,\sigma_S\sigma_v\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)\partial v(t)}-rC\right]=\lambda(S(t),v(t),t).$$

اکنون پارامترهای اصلی را در معادله‌ی بالا جایگذاری کرده و سرانجام برای قیمت دارایی پایه (سهام) S، تحت مدل نوسان‌پذیری تصادفی هستون، ارزش هر برگه‌ی اختیار در معادله‌ی دیفرانسیل جزیی زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+rS(t)\frac{\partial C}{\partial S(t)}+\left[\kappa\left(\theta-v(t)\right)\lambda\left(S(t),v(t),t\right)\right]\frac{\partial C}{\partial v(t)}$$
$$+\frac{1}{2}S(t)^2v(t)\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)^2}+\frac{1}{2}\varepsilon^2v(t)\frac{\partial^2 C}{\partial v(t)^2}+\rho\,\varepsilon S(t)v(t)\frac{\partial^2 C}{\partial S(t)\partial v(t)}-rC=0.$$

علاوه براین شرایط مرزی برای یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی K برای معادله‌ی بالا به‌شرح زیر است:

$$C\left(S(T),v(t),r,K,T,t\right)=max\left(S(T)-K,0\right);$$
$$C\left(0,v(t),r,K,T,t\right)=0;$$
$$\frac{\partial C}{\partial S(t)}\left(\infty,v(t),r,K,T,t\right)=1;$$

شرط اول بازدهی اختیار را در زمان T نشان می‌دهد، شرط دوم به این معناست که با بی-ارزش شدن دارایی پایه، اختیار نیز بی‌ارزش می‌شود و شرط سوم بیان می‌کند که تغییر اختیاری که عمیقا سودده $(S(t)\geq K)$ است و در سررسید حتما اجرا خواهد شد، دقیقا برابر با میزان تغییرات قیمت دارایی پایه می‌باشد.

۵- روش‌های حل مدل‌های مالی

همانگونه که در مقدمه این مقاله اشاره شد، هدف اصلی این نوشتار ارایه روش‌های حل مدل-های مالی نیست بلکه هدف تشریح مدل‌سازی مالی می‌باشد، با این وجود به‌بیان خلاصه‌ای از روش‌های حل می‌پردازیم:

قبل از شروع راه حل یادآور می‌شویم که مسائل مالی را باید با روش‌های عددی حل کرد زیرا در اکثر موارد نیاز به جواب در فاصله زمانی کوتاه برای سهام‌های معین هستیم، علاوه برآن فرض‌های زیادی بر کمیت‌های مالی اعمال می‌شود که بیشتر در فواصل زمانی کوتاه دقیق و به واقعیت بازار نزدیک است.

در مدل اختیار آمریکایی معمولا یک جمله جریمه به معادله اصلی اضافه می‌کنند و مسئله مقدار مرزی با کران آزاد را به مسئله مقدار مرزی با کران ثابت تبدیل می‌کنند. این عمل سبب می‌شود تا با یک معادله دیفرانسیل جزیی غیرخطی روبرو شویم. برای حل این مسئله می‌توان از روش θ استفاده کرد، حال با ترکیب این روش و استفاده از روش تفاضلات متناهی به یک دستگاه از معادلات غیر خطی می‌رسیم که می‌توان روش‌های رونگه کوتاه را برای حل انتخاب کرد. از جمله روش‌های مفید مورد استفاده در این زمینه می‌توان به تبدیل سیستم غیرخطی با روش‌های انتخاب θ به سیستم خطی و سپس حل آن‌ها اشاره نمود.

بدون پرداختن به جزئیات می‌توان روش‌های زیادی در حل مسائل مطرح شده در این مقاله و به‌طور کلی مالی بیان کرد. از جمله: روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی، روش کنترل حجمی، روش توابع گرین، روش تبدیلات فوریه، و از آنجا که چنین مسائلی در کلاس مسائل سهموی بوده می‌توان اکثر روش‌های عددی و تحلیلی حل مسائل سهموی را نیز برای مسائل مالی مورد مطالعه قرار داد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، نحوه‌ی مدل‌سازی مسائل مالی را با استفاده از روش‌های پیشرفته‌ی ریاضی ارائه کرده‌ایم تا با این کار، محققان بعدی بتوانند مدل‌های این مقاله و مدل‌های دیگر وابسته به بازارهای مالی مورد نیاز را تعمیم دهند. لذا پیشنهاد برای کارهای آتی را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. در قسمت اول، پژوهش‌گران عرصه‌ی ریاضیات و مالی می‌توانند مدل‌های نوینی را ارائه دهند. برای مثال در مدل‌های این مقاله و اکثر مدل‌ها نرخ بهره ثابت فرض شده و می‌توان مدل‌های جدیدی با فرض غیرثابت بودن نرخ بهره به‌دست آورد. علاوه براین مدل دارایی پایه‌ی پرش انتشار را با در نظر گرفتن شدت انتشار به‌عنوان سوئیچ بین رژیم‌ها می‌توان در نظر گرفت. همچنین می‌توان با استفاده از مدل هستون ثمرات رفاهی نفت را در مدل دارایی پایه منظور کرده و آتی‌های نفت را مدل‌سازی کرد. درقسمت دوم، مدل‌های حاصل را می‌توان با روش‌های عددی حل نمود، علاوه براین در کارهایی که تاکنون انجام شده می‌توان به بررسی همگرایی و پایداری جواب پرداخت.

مراجع

[1] Hull, J.C. (2007), *Fundamentals of Futures and Options Markets and Derivagem Package*, 6th Edition, Prentice Hall.

[2] Kou, S. G. (2002), A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science*, **48**(8), 1086-1101.

[3] Bates, DS. (1996), Jumps and Stochastic Volatility, Exchange rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options, *Review of Financial Stadies*, **9**(1), 69-107.

[4] Hamilton, J.D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.

[5] Andersenm, L. and Brotherton-Ratcliffe, R. (1998), The equity option volatility smile: an implicit finite difference approach, *Journal of Computational Finance*, **1**(2), 5-32.

[6] Dupire, B. (1994), Pricing with a smile, *Risk*, **7**(1), 18 20.

[7] Jackson, N. Suli, E. and Howison S.(1999), Computation of Deterministic volatility surfaces, *Journal of computational finance*, **2**(2), 5-32.

[8] Lagnado, R. and Osher, S. (1997), A Technique for Calibrating Derivative Security Pricing Models: Numerical Solution of an Inverse Problem, *The Journal of Computational Finance*, **1**(1), 13-25.

[9] Guo, V. and Lerma, O. (2009) *Continuous-Time Markov Decision Processes Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York .

[10] Cont, R. and Tankov, P. (2003), *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman andHall/CRC, Boca Raton, Florida.

[11] Björk, T. (2004), *Arbitrage theory in continuous time*, 2nd edition, Oxford University Press.

[12] Heston, S. (2007), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applicationsto bond and currency options, *Review of Financial Studies,* **6** 327–343.

[13] Wilmott, J. (2006) *Paul WilmottOn Quantitative Finance, 2nd edition*, John Wiley, New York.

Three Critical Models in Mathematical Finance

Abdolsadeh Neisy, Roya Chamani Anbaji and Leili Shojaee Manesh

Department of Mathematics, Computer and Statistics, AllamehTabataba'i University, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, using mathematical techniques, we are going to model some of the important financial markets. Due to the close relations between stock exchange and derivatives markets, we introduce models which also indicate the collaboration between mathematicians, statisticians, computer and finance researchers. Moreover, in this way, the weakness of the old models has been compensated, thus the new and modern models have been generated to improve financial and mathematical relations for new researches. The aim of this article is not to present the solution of new models, but it is to introduce one of the applied mathematics branchs in finance science. Finally, we make a model with three important problems in financial instruments, which transfer he partial-integral differential equations. Depending on market, application of inverse problems and free boundary value problems in finance science is being explained.

Keywords: Financial Modeling, Financial Derivative, Free Boundary Value Problem, Inverse Problem, Stochastric Volatility.

Mathematics Subject Classification (2000): 05C63, 91G10.