قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش

فرشید مهردوست[۱] و نغمه صابر

گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه گیلان

تاریخ دریافت: ۹۲/۵/۲۸ تاریخ پذیرش: ۹۳/۳/۲۰

چکیده: در این مقاله، ضمن معرفی مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف، با توجه به این‌که قیمت دارایی‌های پایه در بازارهای مالی دست‌خوش تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون می‌باشند، با اضافه کردن جمله پرش به این مدل، یک مدل جدید به نام مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف پرشی ارائه می‌دهیم. سپس با تعیین تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی پایه در مدل جدید، فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت این مدل با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع استخراج می‌نماییم. این مدل با توجه به انعطاف‌پذیری بیشتر نسبت به مدل هستون و پوشش تغییرات ناگهانی قیمت دارایی‌های پایه، به‌دلیل وجود جمله پرش در فرایند قیمت، می‌تواند تا حد زیادی در بازارهای مالی، مانند بازار نفت، طلا و سهام مورد استفاده قرار گیرد. هدف اصلی در این مقاله معرفی این مدل و استخراج یک روش قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت آن است.

واژه‌های کلیدی: مدل تلاطم تصادفی، مدل هستون مضاعف، فرایند پرشی، اندازه ریسک خنثی، تبدیل فوریه سریع.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۱G۶۰، ۹۱G۸۰.

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین مدل‌های قیمت‌گذاری مشتقات مالی، مدل بلک - شولز است که بی‌تردید پایه و اساس شکل‌گیری بسیاری از مدل‌های مالی در حال حاضر است. فرض اساسی در مدل بلک-شولز[۲] این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی‌های پایه (سهام)، لگ نرمال است [۱]. اما در بازارهای مالی واقعی، فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع لگ‌نرمال، دارای دم سنگین-

---

۱-آدرس پست الکترنیکی نویسنده مسئول مقاله: فرشید مهردوست fmehrdoust@guilan.ac.ir

2- Black-Scholes

تری است. بدین ترتیب، با توزیع‌های مختلفی از قیمت‌های اختیار خرید یا فروش مواجه خواهیم شد که تفاوت آن‌ها در دم توزیع است [۲]. از طرف دیگر، در مدل بلک- شولز تلاطم قیمت سهام، ثابت در نظر گرفته شده است، در صورتی که نتایج تجربی غیر مسطح بودن تلاطم قیمت دارایی‌های پایه را نشان می‌دهد. ایده تلاطم تصادفی، به‌خصوص پس از رکود اقتصادی سال۱۹۷۸ مورد توجه قرار گرفت و تا قبل از آن زمان مدل بلک- شولز بهترین و کارآمدترین مدل برای قیمت‌گذاری حرکت سهام به شمار می‌آمد. هال و وایت[۱] در [۳]، اسکات[۲] در [۴]، استین[۳] در [۵] و هستون[۴] در [۶] مدل‌هایی از تلاطم تصادفی را برای قیمت‌گذاری دارایی‌های پایه ارائه کردند. مدل هستون یکی از مشهورترین مدل‌های تلاطم تصادفی است که تا حد قابل قبولی کمبودهای مدل بلک- شولز را برطرف کرده است. در مدل هستون، تلاطم قیمت سهام ثابت نبوده و خود از یک فرایند تصادفی پیروی می‌کند. در این مدل تلاطم و مدل دارایی پایه هر کدام شامل یک فرایند انتشار هستند که با یکدیگر همبسته‌اند. از دیگر مزایای مدل هستون، فرایند بازگشت به میانگین تعریف‌شده در این مدل است که رفتار بازگشت به میانگین تلاطم‌ها را در بازارهای مالی توجیه می‌کند. ساختار کلی این مدل به‌صورت زیر است:

$$dS_t = r\,S_t dt + \sqrt{V_t}\,S_t dW_t$$
$$dV_t = \alpha(\theta - V_t)\,dt + \delta\sqrt{V_t}\,dB_t$$
$$dW_t\,dB_t = \rho\,dt$$

که در آن ρ همبستگی بین دو فرایند براونی B_t و W_t، پارامترهای θ و α به ترتیب میانگین بلندمدت و سرعت بازگشت به میانگین تلاطم و ثابت δ، واریانس فرایند تلاطم و r نرخ بهره بدون ریسک در مدل بالا هستند.

در سال ۲۰۰۹ کریستفرسن[۵] با اضافه کردن یک فرایند تصادفی دیگر به مدل هستون، این مدل را بهبود داد. مدل هستون با دو فرایند تلاطم تصادفی تحت عنوان مدل هستون مضاعف، در مقایسه با مدل هستون استاندارد انعطاف بیشتری نسبت به قیمت‌های پرت دارد و در حدود ۲۴٪ بیشتر از هستون استاندارد آن‌ها را پوشش داده و نیز نسبت به تلاطم جزئی قیمت‌ها حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهد [۷]. با این وجود، قیمت دارایی‌های پایه در بازارهای مالی اغلب دست‌خوش تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون محیطی، اجتماعی، سیاسی و اقتصادی روز دنیا است که روند استاندارد قیمت‌گذاری‌ها، هر چند انعطاف‌پذیر، این تغییرات و

1- Hull and White
2- Scott
3- Stein
4- Heston
5- Christoffersen

نوسانات ناگهانی را پوشش نمی‌دهد. برای رفع این مشکل مدل‌های تلاطم تصادفی پرشی، توسط محققان عرصه مالی پیشنهاد شده است [۸ و ۹]. مدل‌سازی بازارهای مالی، تنها چالش پیش روی محققان و مهندسان مالی نیست و قدم بعدی یافتن روشی کارا و مناسب برای حل مدل‌های پیشنهادی و پیش‌بینی قیمت دارایی‌ها در زمان آتی است.

برای حل مدل‌های مالی دارایی‌های پایه روش‌های گوناگونی وجود دارد. یکی از روش‌های مشهور در این زمینه، استفاده از تبدیل فوریه سریع (FFT)[1] است که در سال ۱۹۹۹توسط کار و مادان[2] معرفی شد. در این روش از تابع مشخصه فرایند دارایی پایه استفاده می‌شود. آن‌ها روش تبدیل فوریه سریع را برای قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون به‌کار بردند. این روش به‌دلیل سرعت بالا و استفاده از تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی پایه، که همواره موجود هستند، روشی مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است [۱۰].

ساختار این مقاله به صورت زیر می‌باشد. در بخش دوم مقاله، به معرفی مدل هستون مضاعف می‌پردازیم و در بخش سوم با اضافه کردن جمله پرش به قیمت دارایی پایه، یک مدل تلاطم تصادفی با پرش ارائه می‌کنیم. در بخش چهارم، با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع، فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی تحت مدل هستون مضاعف پرشی پیشنهاد شده است. در بخش پنجم، نتایج عددی حاصل از قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت مدل هستون مضاعف پرشی با استفاده از دو روش انتگرال‌گیری عددی و تبدیل فوریه سریع با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۲- مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف

پالایه $\{F_t\}_{t\geq 0}$ تولیدشده توسط فرایندهای براونی $B_1 = B_1(t)$ ، $B_2 = B_2(t)$ ، $W_1 = W_1(t)$ و $W_2 = W_2(t)$ برای $0 \leq t \leq T$ را بر روی فضای احتمال (Ω, F, Q) در نظر می‌گیریم، که در آن Q اندازه احتمال ریسک خنثی تحت فرایند قیمت دارایی پایه $\{S_t\}_{t\geq 0}$ و دو فرایند تلاطم تصادفی $V_1 = V_1(t)$ و $V_2 = V_2(t)$ می‌باشد. مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف، تحت فضای ریسک خنثی، به‌صورت زیر است:

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{V_1} S_t dW_1 + \sqrt{V_2} S_t dW_2 \tag{1}$$

$$dV_1 = \alpha_1(\theta_1 - V_1)\,dt + \sigma_1 \sqrt{V_1}\, dB_1 \tag{2}$$

$$dV_2 = \alpha_2(\theta_2 - V_2)\,dt + \sigma_2 \sqrt{V_2}\, dB_2 \tag{3}$$

1- Fast Fourier Transform
2-Carr and Madan

$$dW_1 dB_1 = \rho_1 dt$$
$$dW_2 dB_2 = \rho_2 dt$$
$$dW_1 dW_2 = dB_1 dB_2 = 0$$

که در آن ρ_1 ضریب همبستگی بین فرایندهای براونی B_1 و W_1 و همچنین ρ_2 ضریب همبستگی بین فرایندهای براونی B_2 و W_2 است. پارامترهای θ_1 و θ_2 میانگین بلندمدت و α_1 و α_2 سرعت بازگشت به میانگین تلاطم و مقادیر ثابت σ_1 و σ_2 واریانس‌های فرایندهای تلاطم و r نرخ بهره بدون ریسک در این مدل هستند. قرار می‌دهیم $X_t = \ln S_t$. حال با استفاده از فرمول ایتو خواهیم داشت:

$$dX_t = S_t^{-1} dS_t - \frac{1}{2} S_t^{-2} dS_t dS_t \tag{4}$$

که در آن

$$dS_t = r S_t dt + \sqrt{V_1} S_t dW_1 + \sqrt{V_2} S_t dW_2 \tag{5}$$

$$dS_t dS_t = S_t^2 (V_1 + V_2) dt \ . \tag{6}$$

بعد از جای‌گذاری معادلات (۵) و (۶) در معادله (۴)، معادله دیفرانسیل جزیی مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$dX_t = [r - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)]dt + \sqrt{V_1} dW_1 + \sqrt{V_2} dW_2, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&dV_1 = \alpha_1(\theta_1 - V_1) dt + \sigma_1 \sqrt{V_1} dB_1, \\
&dV_2 = \alpha_2(\theta_2 - V_2) dt + \sigma_2 \sqrt{V_2} dB_2, \\
&dW_1 dB_1 = \rho_1 dt, \qquad -1 \le \rho_1 \le 1, \\
&dW_2 dB_2 = \rho_2 dt, \qquad -1 \le \rho_2 \le 1, \\
&dW_1 dW_2 = dB_1 dB_2 = 0.
\end{aligned}$$

۳- مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف پرشی

فرض کنیم $\{N_t\}_{0 \le t \le T}$ با پارامتر تشدید λ، یک فرایند پواسن مستقل از حرکت‌های براونی در فضای احتمال (Ω, F, Q) در مدل هستون مضاعف باشد. همچنین e^{J_i} به ازای هر $1 \le i \le N_t$، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع، معرف اندازه پرش است که در آن J_i ها دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس γ^2 باشند. بنابراین e^{J_i} ها دارای توزیع

لگ-نرمال خواهند بود [۱۲]. حال مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف را برای فرایند قیمت دارایی پایه، به همراه فرایند پواسن مرکب به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$dS_t = r\,S_t dt + \sqrt{V_1} S_t dW_t + \sqrt{V_2} S_t dW_2 + (e^{J_i} - 1)\,S_{t-} dN_t - E\{(e^{J_i} - 1))S_t dN_t\}. \quad (8)$$

از آنجا که e^{J_i}ها هم‌توزیع و مستقل هستند، برای ساده شدن فرمول‌ها و روابط از نوشتن اندیس‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. در ضمن فرض می‌کنیم S_{t-} مقدار فرایند S_t دقیقاً قبل از وقوع پرش در فرایند قیمت باشد. حال قرار می‌دهیم $S_u = e^{J_1} S_{u-}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$E\{[e^{J_i} - 1)]S_t dN_t\} = E(e^{J_i} - 1)E(dN_t)S_t = m\lambda S_t dt \quad (9)$$

$$m = e^{\mu + \frac{1}{2}\gamma^2} - 1 \quad (10)$$

با جای‌گذاری معادله (۹) در معادله (۸) داریم:

$$dS_t = (r - \lambda m)\,S_t dt + \sqrt{V_1}\,S_t dW_1 + \sqrt{V_2}\,S_t dW_2 + (e^J - 1)\,S_{t-} dN_t. \quad (11)$$

قرار می‌دهیم $X_t = \ln S_t$، با استفاده از فرمول ایتو روی فرایند X_t خواهیم داشت:

$$X_t = X_0 + \int_0^t S_t^{-1} dS_u^c - \frac{1}{2}\int_0^t S_t^{-2} dS_u^c dS_u^c + \sum_{u=0}^{t} (X_u - X_{u-}) \quad (12)$$

که در آن

$$dS_t^c = (r - \lambda m)\,S_t dt + \sqrt{V_1}\,S_t\,dW_1 + \sqrt{V_2}\,S_t\,dW_2 \quad (13)$$

$$dS_t^c\,dS_t^c = S_t^2 (V_1 + V_2)\,dt\ . \quad (14)$$

منظور از S_t^c، جزء پیوسته معادله دیفرانسیل (۱۱) است و X_{u-} مقدار X_t دقیقاً قبل از وقوع جهش در لحظه u است. حال اگر یک جهش در لحظه u رخ دهد، بزرگی جهش در فرایند S_t برابر e^J است. از طرفی داریم $X_u = \ln S_u$. پس $X_u = JX_{u-}$ و بنابراین می‌توان نوشت:

$$X_u - X_{u-} = (J - 1)X_{u-} \quad (15)$$

اگر در لحظه u، پرشی رخ ندهد، آنگاه $X_u - X_{u-} = 0$. در مواردی که بیش از یک پرش رخ دهد، خواهیم داشت:

$$X_u - X_{u-} = (J - 1)\,X_{u-}\,\Delta N_u \quad (16)$$

$$\sum_{u=0}^{t} (X_u - X_{u-}) = \sum_{u=0}^{t} (J - 1)\,X_{u-} \Delta N_u = \int_0^t (J - 1)\,X_{u-} dN_u\ . \quad (17)$$

با جای‌گذاری معادله (۱۷) در (۱۲) و سپس مشتق‌گیری از معادله (۱۲) نتیجه می‌شود:

$$dX_t = S_t^{-1}\, dS_t^c - \frac{1}{2} S_t^{-2}\, dS_t^c\, dS_t^c + (J-1)\, X_{t-}\, dN_t \tag{18}$$

همچنین با جای‌گذاری معادلات (۱۳) و (۱۴) در معادله (۱۸) و با اندکی محاسبه، مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف پرشی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$dX_t = [r - \lambda m - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)]dt + \sqrt{V_1}\, dW_1 + \sqrt{V_2}\, dW_2 + (J-1)X_{t-}\, dN_t, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} dV_1 &= \alpha_1(\theta_1 - V_1)\,dt + \sigma_1 \sqrt{V_1}\, dB_1, \\ dV_2 &= \alpha_2(\theta_2 - V_2)\,dt + \sigma_2 \sqrt{V_2}\, dB_2, \\ dW_1\, dB_1 &= \rho_1\, dt, \\ dW_2\; dB_2 &= \rho_2\, dt, \\ dW_1\, dW_2 &= dB_1\; dB_2 = 0. \end{aligned}$$

در بخش بعدی ضمن تعیین تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی پایه، یک روش عددی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت مدل هستون مضاعف پرشی ارائه می‌کنیم.

۴- قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت مدل هستون مضاعف پرشی

روش تبدیل فوریه سریع (FFT) توسط کار و مادان در سال ۱۹۹۹پیشنهاد شد. این روش به دلیل داشتن سرعت مناسب در مقایسه با سایر روش‌های قیمت‌گذاری اختیار و نیز استفاده از تابع مشخصه فرایند لگاریتم قیمت دارایی پایه به جای تابع چگالی لگاریتم قیمت دارایی پایه، یکی از روش‌های مشهور و کارا در قیمت‌گذاری اختیار مدل‌های مالی محسوب می‌شود [۱۰]. ایده اصلی این روش، استفاده از تبدیل فوریه قیمت‌گذاری اختیار و سپس استفاده از تبدیل فوریه معکوس برای محاسبه قیمت اختیار است. به‌طور کلی تبدیل فوریه سریع به عنوان یک روش موثر، برای محاسبه مجموع مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۰]:

$$w(k) = \sum_{j=1}^{N} e^{-\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j)\,.$$

فرض کنیم $C(T, K)$ تابع قیمت اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی K و زمان سررسید T باشد. در این صورت طبق تعریف قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی تحت اندازه ریسک خنثی به صورت زیر است:

$$C(T,K) = e^{-r(T-t)} E[(S_T - K)^+ \mid F_t] \tag{20}$$

که در آن $(S_T-K)^+=\max\{S_T-K,\circ\}$. حال قرار می‌دهیم $t=\circ$، $k=\ln K$ و $X_t=\ln S_t$؛ در این‌صورت خواهیم داشت:

$$C(T,k)=e^{-rT}E[(e^{X_T}-e^k)^+\left|F_t\right.]=e^{-rT}\int_k^{+\infty}(e^{x_T}-e^k)\,q_T(x_T)dx_T \tag{۲۱}$$

که در آن $q_T=q_{X_T}$ تابع چگالی فرایند تصادفی X_T است. همچنین کار و مادان تابع قیمت اختیار خرید را به‌صورت زیر اصلاح کردند [۱۰]:

$$c(T,k)=e^{\beta k}C(T,k),\quad \beta>\circ \tag{۲۲}$$

که در آن β ضریب اصلاح‌شده قیمت خرید و وابسته به مدل قیمت دارایی پایه S_t است. این پارامتر باید طوری انتخاب شود که داشته باشیم:

$$E({S_T}^{\beta+1})<\infty\Rightarrow F_{C_T}(-(\beta+1)i)<\infty.$$

تبدیل فوریه روی $c(T,k)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{c_T}(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\varphi k}c(T,k)\,dk\,. \tag{۲۳}$$

با جای‌گذاری معادله (۲۱) در (۲۲) و همچنین معادله (۲۲) در معادله (۲۳) داریم:

$$\begin{aligned}F_{c_T}(\varphi)&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\varphi k}e^{\beta k}e^{-rT}\int_k^{+\infty}(e^{x_T}-e^k)\,q_T(x_T)\,dx_T\,dk\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-rT}q_T(x_T)\int_{-\infty}^{x_T}(e^{x_T+\beta k}-e^{(\beta+1)k})e^{i\varphi k}dk\,dx_T\\&=\frac{e^{-rT}}{(1+\beta+i\varphi)(\beta+i\varphi)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\varphi-(\beta+1)i)ix_T}\,q_T(x_T)\,dx_T\\&=\frac{e^{-rT}\Psi_T(\varphi-(\beta+1)i)}{(1+\beta+i\varphi)(\beta+i\varphi)}\end{aligned} \tag{۲۴}$$

که در آن $\Psi_T(u)$ تابع مشخصه X_t تحت اندازه احتمال ریسک خنثی است. طبق تعریف، معکوس تبدیل فوریه تابع $c(T,k)$ به‌صورت زیر است:

$$c(T,k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\varphi k}F_{c_T}(\varphi)\,d\varphi\,. \tag{۲۵}$$

از طرفی با توجه به فرمول (۲۲) نتیجه می‌شود:

$$C(T,k)=\frac{e^{-\beta k}}{\pi}\int_{\circ}^{+\infty}e^{-i\varphi k}F_{c_T}(\varphi)\,d\varphi\,. \tag{۲۶}$$

بنابراین قیمت اصلاح‌شده خرید اروپایی با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع به‌صورت زیر است:

$$C(T,k)=\frac{e^{-\beta k_u}}{\pi}\sum_{j=1}^{N}e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)}e^{ib\upsilon_j}F_{c_T}(\upsilon_j)\frac{\eta}{3}(3+(-1)^j-\delta_{j-1}) \qquad (۲۷)$$

که در آن پارامتر η وابسته به N و مقدار N توانی از دو است. همچنین داریم:

$$\upsilon_j=\eta(j-1),\ b=\frac{\pi}{\eta},\ k_u=-b+\frac{2b}{N}(u-1),\quad u=1,2,\ldots,N+1.$$

استفاده از روش تبدیل فوریه سریع برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی، لزوم یافتن تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی پایه در مدل هستون مضاعف پرشی را آشکار می‌سازد. طبق تعریف تابع مشخصه داریم:

$$\Psi(\varphi,T-t,x)=F(T-t,x,\varphi,v_1,v_2)=E(e^{i\varphi X_t}\mid X_t=x,V_1=v_1,V_2=v_2)\,. \qquad (۲۸)$$

با استفاده از فرمول ایتو چند متغیره روی تابع $F(T-t,x,\varphi,v_1,v_2)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}dF(T-t,x,\varphi,v_1,v_2)&=f_t dt+f_x dx+f_{v_1}dv_1+f_{v_2}dv_2+\frac{1}{2}f_{xx}dx\,dx+\frac{1}{2}f_{v_1v_1}dv_1\,dv_1\\&+\frac{1}{2}f_{v_2v_2}dv_2\,dv_2+f_{xv_1}dx\,dv_1+f_{xv_2}dx\,dv_2\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که در آن $f_t=\frac{\partial F}{\partial t}$، $f_i=\frac{\partial F}{\partial i}$ و $f_{ii}=\frac{\partial F}{\partial \omega^2}$ برای $i=x,v_1,v_2$؛ همچنین داریم:

$$.\,f_{xv_1}=\frac{\partial F}{\partial x\,\partial v_1},\ f_{xv_2}=\frac{\partial F}{\partial x\,\partial v_2}\,.$$

دافی و همکاران فرمولی تعمیم‌یافته از فرمول فیمن- کاک را برای فرایندهای آفینی با پرش پیشنهاد کردند [۲]. براساس این قضیه و با جای‌گذاری مقادیر dx، dv_1، dv_2، $dx\,dx=\frac{1}{2}(v_1+v_2)dt$، $dv_2dv_2=\frac{1}{2}\sigma_2^2\,v_2dt$، $dxdv_2=\sigma_2\rho_2\,v_2dt$ و $dx\,dv_1=\sigma_1\rho_1\,v_1dt$ به‌دست آمده از فرمول (۱۹) در رابطه (۲۹) می‌توان تابع $F(T-t,x,\varphi,v_1,v_2)$ را از حل معادله انتگرال- دیفرانسیل جزئی زیر به‌صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
& f_t + \left[r - \lambda m - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \right] f_x + \alpha_1 (\theta_1 - v_1)\, f_{v_1} + \alpha_2 (\theta_2 - v_2)\, f_{v_2} \\
& + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) f_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 v_1\, f_{v_1 v_1} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 v_2\, f_{v_2 v_2} + \sigma_1 \rho_1 v_1 f_{x v_1} + \sigma_2 \rho_2 v_2\, f_{x v_2} \\
& + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [F(T-t, x+J, \varphi, v_1, v_2) - F(T-t, x, \varphi, v_1, v_2)]\, q(J)\, dJ = 0
\end{aligned}
\tag{۳۰}
$$

که در آن $q(J)$ تابع توزیع متغیر تصادفی J است. حال انتگرال بالا را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} & [F(\tau, x+J, \varphi, v_1, v_2) - F(\tau, x, \varphi, v_1, v_2)]\, q(J)\, dJ \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} [E(e^{i\varphi(X_t + J)}) - E(e^{i\varphi X_t})]\, q(J)\, dJ \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} E[e^{i\varphi X_t}(e^{i\varphi J} - 1)]\, q(J)\, dJ \\
&= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} E(e^{i\varphi X_t}) E(e^{i\varphi J} - 1)\, q(J) dJ \\
&= \lambda E(e^{i\varphi X_t}) E[E(e^{i\varphi J} - 1)] \\
&= \Lambda(\varphi) F(\tau, x, \varphi, v_1, v_2)
\end{aligned}
\tag{۳۱}
$$

که در آن $\Lambda(\varphi) = \lambda(e^{i\mu\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2\gamma^2} - 1)$، اندازه پرش‌ها مستقل از X_t است و $\tau = T - t$.

طبق تعریف تابع مشخصه فرایندهای آفینی داریم:

$$
F(\tau, x, \varphi, v_1, v_2) = \exp\{G(\tau, \varphi) + H_1(\tau, \varphi) v_1 + H_2(\tau, \varphi) v_2 + i\varphi x\}. \tag{۳۲}
$$

با دیفرانسیل‌گیری از معادله بالا و قرار دادن آن در رابطه (۳۱) به دستگاه معادلات زیر دست می‌یابیم:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial H_1(\tau, \varphi)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 H_1^2(\tau, \varphi) + (i\sigma_1\rho_1\varphi - \alpha_1) H_1(\tau, \varphi) - \frac{\varphi}{2}(i + \varphi) = 0, \\
& \frac{\partial H_2(\tau, \varphi)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 H_2^2(\tau, \varphi) + (i\sigma_2\rho_2\varphi - \alpha_2) H_2(\tau, \varphi) - \frac{\varphi}{2}(i + \varphi) = 0, \\
& \frac{\partial G(\tau, \varphi)}{\partial t} + i(r - \lambda m)\varphi + \alpha_1\theta_1 H_1(\tau, \varphi) + \alpha_2\theta_2 H_2(\tau, \varphi) + \Lambda(\varphi) = 0.
\end{aligned}
\tag{۳۳}
$$

با حل دو معادله دیفرانسیل اول (معادله دیفرانسیل ریکاتی) و همچنین انتگرال‌گیری از معادله سوم داریم:

$$H_j(\tau,\varphi)=\frac{\alpha_j-\rho_j\,\sigma_j\varphi i+d_j}{\sigma_j^{۲}}\left[\frac{۱-\exp(d_j\tau)}{۱-g_j\exp(d_j\tau)}\right]$$

که در آن

$$g_j=\frac{\alpha_j-\rho_j\sigma_j\varphi i+d_j}{\alpha_j-\rho_j\sigma_j\varphi i-d_j},\qquad j=۱,۲$$
$$d_j=\sqrt{(\rho_j\sigma_j\varphi i-\alpha_j)^{۲}+\sigma_j^{۲}(\varphi i+\varphi^{۲})}.$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$G(\tau,\varphi)=i(r-\lambda)\varphi\tau+\frac{\alpha_۱\theta_۱}{\sigma_۱^{۲}}\left[(\alpha_۱-\rho_۱\sigma_۱\varphi i+d_۱)\tau-۲\ln(\frac{۱-g_۱\exp(d_۱\tau)}{۱-g_۱})\right]$$
$$+\frac{\alpha_۲\theta_۲}{\sigma_۲^{۲}}[(\alpha_۲-\rho_۲\sigma_۲\varphi i+d_۲)\tau-۲\ln(\frac{۱-g_۲\exp(d_۲\tau)}{۱-g_۲})]+\Lambda(\varphi)\tau. \quad (۳۴)$$

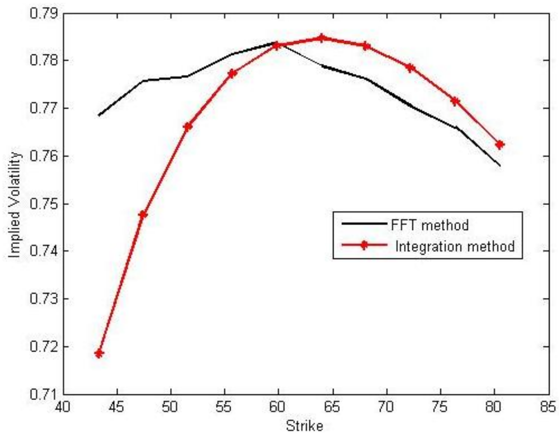
با قرار دادن رابطه (۳۴) در رابطه (۳۲) تابع مشخصه مدل هستون مضاعف پرشی به‌دست می‌آید. بنابراین فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار تحت مدل هستون مضاعف پرشی به فرم بالا به‌دست آمده است. در بخش بعد با استفاده از این فرمول برخی نتایج عددی در خصوص قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت مدل هستون مضاعف پرشی را استخراج کرده و نشان می‌دهیم این مدل قابلیت محاسباتی دارد.

۵- نتایج عددی

در این بخش، برای قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی تحت مدل هستون مضاعف پرشی با جای‌گذاری تابع مشخصه به‌دست آمده در فرمول (۲۶)، انتگرال موجود در فرمول مذکور به روش گاوس- لژاندر محاسبه شده است. همچنین برای استفاده از فرمول قیمت‌گذاری اختیار خرید تحت تبدیل فوریه سریع، تابع مشخصه مدل را در فرمول (۲۷) قرار می‌دهیم. شکل ۱، نمودار تلاطم ضمنی مدل هستون مضاعف پرشی را برای ده مقدار متفاوت از قیمت‌های توافقی با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس- لژاندر و همچنین روش تبدیل فوریه سریع نشان می‌دهد. شکل اخم تلاطم ایجاب شده در شکل ۱، وجود پرش در قیمت دارایی پایه را توجیه می‌کند و منحنی تلاطم ایجاب شده، گویای رفتار تغییرات قیمت‌ها در بازارهای مالی است. رفتار تلاطم ایجاب شده در نقاط نزدیک به وضعیتی که $S_T=K$، در هر دو روش عددی

تقریباً یکسان است . در نواحی که $S_T > K$، در روش تبدیل فوریه سریع تلاطم ایجاب شده در سطح بالاتری قرار دارد و در حالتی که $S_T < K$، سطح تلاطم ایجاب شده در روش انتگرال‌گیری بالاتر از روش FFT است. یعنی قیمت‌های دارایی پایه به‌دست آمده از روش انتگرال‌گیری، برای رسیدن به عایدی مثبت، باید تغییرات چشمگیری کنند. به‌طور کلی، منحنی تلاطم ضمنی در روش FFT مسطح‌تراست و مقادیر تلاطم‌های ایجاب شده در آن، دارای دامنه تغییرات کوچک‌تری نسبت به روش انتگرال‌گیری هستند. مقادیر تلاطم تصادفی برای هر دو روش، در جدول۱ درج شده‌اند. همچنین در جدول۲ مقادیر اختیار خرید اروپایی برای ده مقدار متفاوت از قیمت‌های توافقی تحت دو روش انتگرال‌گیری عددی و روش تبدیل فوریه سریع را آورده‌ایم. همان طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر قیمت‌های توافقی، ارزش اختیار خرید در هر دو روش کاهش پیدا می‌کند، که این یک روند طبیعی است؛ زیرا در اختیار خرید اروپایی با افزایش قیمت توافقی، انتظار می‌رود که قیمت اختیار کاهش یابد. نمودار تلاطم ایجاب شده در مدل هستون مضاعف پرشی نسبت به قیمت توافقی و زمان سررسید تحت روش گاوس- لژاندر در شکل ۲ و با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع در شکل ۳ نشان داده شده است. گفتنی است که مقادیر مورد استفاده برای پارامترهای مدل هستون مضاعف پرشی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند [۱۱]:

$$S_{\circ} = ۶۱/۹,\ T = ۱,\ r = ۰/۰۳,\ v_{\circ ۱} = ۰/۶,\ v_{\circ ۲} = ۰/۷,\ \sigma_۱ = ۰/۱,\ \sigma_۲ = ۰/۲,$$
$$\alpha_۱ = ۰/۹,\ \alpha_۲ = ۱/۲,\ \theta_۱ = ۰/۱,\ \theta_۲ = ۰/۱۵,\ \rho_۱ = -۰/۵,\ \rho_۲ = -۰/۵,$$
$$\lambda = ۰/۲۲,\ \mu = ۰/۲۲,\ \gamma = ۰/۲۵.$$



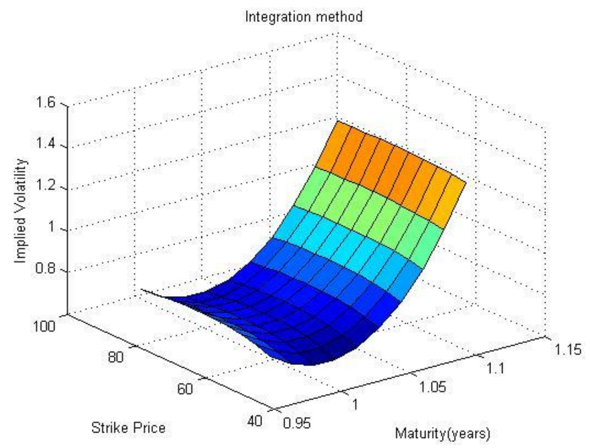
شکل ۱: تلاطم ایجاب شده براساس قیمت‌های توافقی مدل هستون مضاعف با پرش.

جدول ۱: مقادیر نوسانات ضمنی تحت روش انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر و روش تبدیل فوریه سریع

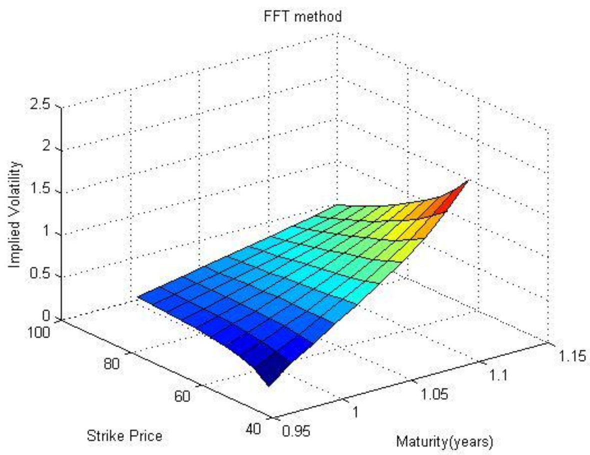
روش تبدیل فوریه سریع	روش انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر	قیمت توافقی
۰/۷۶۸۵	۰/۷۱۸۵	۴۳/۳۳۰۰
۰/۷۷۵۷	۰/۷۴۷۶	۴۷/۴۵۶۷
۰/۷۷۶۶	۰/۷۶۶۱	۵۱/۵۸۳۳
۰/۷۸۱۳	۰/۷۷۷۳	۵۵/۷۱۰۰
۰/۷۸۳۸	۰/۷۸۳۱	۵۹/۸۳۶۷
۰/۷۷۸۹	۰/۷۸۴۷	۶۷/۹۶۳۳
۰/۷۷۶۲	۰/۷۸۳۰	۶۸/۰۹۰۰
۰/۷۷۰۴	۰/۷۷۸۵	۷۲/۲۱۶۷
۰/۷۶۶۰	۰/۷۷۱۵	۷۶/۳۴۳۳
۰/۷۵۷۸	۰/۷۶۲۳	۸/۴۷۰۰

جدول ۲: قیمت‌های اختیار خرید تحت مدل هستون مضاعف پرشی با روش‌انتگرال‌گیری عددی و روش فوریه سریع

تفاوت نسبی (درصد)	روش تبدیل فوریه سریع	روش انتگرال‌گیری گاوس- لژاندر	قیمت توافقی
۳/۰۴۰۰	۲۷/۲۸۲۷	۲۶/۴۵۳۳	۴۳/۳۳
۲/۰۳۷۹	۲۵/۳۱۹۷	۲۴/۸۰۳۷	۴۷/۴۵۶۷
۰/۸۸۸۵	۲۳/۴۳۲۶	۲۳/۲۲۴۴	۵۱/۵۸۳۳
۰/۳۸۳۱	۲۱/۷۹۰۷	۲۱/۷۰۷۲	۵۵/۷۱۰۰
۰/۰۷۳۵	۲۰/۲۶۰۰	۲۰/۲۴۵۱	۵۹/۸۳۶۷
۰/۷۱۶۶	۱۸/۶۹۸۷	۱۸/۸۳۲۷	۶۳/۹۶۳۳
۰/۹۲۹۲	۱۷/۳۰۴۴	۱۷/۴۶۵۲	۶۸/۰۹۰۰
۱/۲۱۸۶	۱۵/۹۴۴۲	۱۶/۱۳۸۵	۷۲/۲۱۶۷
۰/۹۱۲۶	۱۴/۷۱۴۸	۱۴/۸۴۹۱	۷۶/۳۴۳۳
۰/۸۱۹۵	۱۳/۴۸۳۷	۱۳/۵۹۴۲	۸۰/۴۷۰۰



شکل۲: تلاطم ایجاب شده با استفاده از روش گاوس- لژاندر برای قیمت توافقی: (۸۰/۴۷- ۳۳/ ۴۳) و تاریخ سررسید: (۱/۱- ۰/۹۵۵).



شکل۳: نمودار سطح تلاطم ایجاب شده با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع برای قیمت توافقی: (۸۰/۴۷- ۳۳/ ۴۳) و تاریخ سررسید: (۱/۱- ۰/۹۵۵).

۶- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله بر پایه مدل هستون مضاعف و اضافه کردن پرش به فرایند دارایی پایه، یک مدل تلاطم تصادفی جدید به نام هستون مضاعف پرشی،که دارای انعطاف بیشتری نسبت به مدل معمولی است معرفی شد. با بستن یک اختیار اروپایی روی این مدل، فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت این مدل استخراج نمودیم. همچنین با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع و روش انتگرال‌گیری گاوس- لژاندر، به محاسبه قیمت اختیار معامله اروپایی تحت این مدل تلاطم تصادفی پرداختیم و در پایان برخی نتایج عددی برای قیمت‌های اختیار اروپایی، براساس قیمت‌های توافقی و تاریخ‌های سررسید متفاوت بر روی این مدل مورد تجزیه و تحلیل قراردادیم.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله مراتب تشکر و قدرانی خود را از داوران گران‌قدر به خاطر نکات و پیشنهادهای ارزشمند که باعث بهبود مقاله حاضر گردید، ابراز می‌دارند.

مراجع

[1] Black, F. and Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659.

[2] Duffie, D., Pan, J. and Singleton, K. (2000), Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusion, *Econometrica*, **68**, 1343–1376.

[3] Hull, J. C. and White, A. (1987), The pricing of options on sssets with stochastic volatilities, *Journal of Finance*, **42**, 281–300.

[4] Scott, L. (1987), Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation and An Application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **22**, 419–438.

[5] Stein, E.M. and Stein, J.C. (1991), Stock price distribution with stochastic volatility: An analytic approach. *Review of Financial Studies*, **4**, 727–752.

[6] Heston, S.L. (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options, *The Review of Financial Studies*, **6**(2), 327–343.

[7] Christoffersen, P., Heston, S. and Jacobs, K. (2009), The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well, Management Science, **55**, 1914-1932.

[8] Lewis, A.L. (2001), A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes. Working paper, Envision Financial Systems.

[9] Bates, D.S. (1996), Jumps and stochastic volatility: exchange rate process simplicity in Deutsche mark options. *Review of Financial Studies*, **9**, 69–107.

[10] Carr, P. and Madan, D.B. (1999), Option evaluation the using fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance*, **2**(4), 61–73.

[11] Gauthier, P. and Possama, D., Efficient simulation of the Double Heston model, E-copy available at: http://ssrn.com/abstract=1434853.

[12] Pillay, E. and O'Hara, J.G. (2011), FFT based option pricing under mean reverting process with stochastic volatility and jumps, *Journal of Computational an Applied Mathematics*, **235**, 3378-3384.

The Option Pricing Under Double Heston Model with Jumps

Farshid Mehrdoust and Naghmeh Saber

Department of Applied Mathematics, University of Guilan, Rasht, Iran

Abstract

In this paper, by introducing of the double Heston's stochastic volatility model, since the prices of underlying asset in the financial markets are subject to the abrupt changes caused by different factors, by adding jump term to the double Heston model, we propose a new financial model, called the double Heston's stochastic volatility model with jumps. Then, by determining the characteristic function of the underlying stock price process, we obtain a formula for the European call option pricing under the proposed model by using the Fast Fourier transform method. Due to existence the jump term in the stock price process, the proposed model can be widely used in the financial markets, such as oil, gold and stock financial markets. Therefore, the model is more flexible than the Heston model and covers the abrupt changes of underlying asset price. The main goal of this paper is to present the model and derive a numerical scheme for the European option pricing.

Keywords: Stochastic volatility model, Double Heston, Jumps, Risk neutral measure, Fast Fourier transform.

Mathematics Subject Classification (2010): 91G80, 91G60.