نیم‌حلقه‌های مثبت

رستم محمدیان[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۹۲/۴/۲ تاریخ پذیرش: ۹۳/۵/۴

چکیده: در این مقاله به بررسی نیم‌حلقه‌های مثبت می‌پردازیم (نیم‌حلقه‌ی R را مثبت می‌گوییم، هرگاه برای هر $x \in R$ عضو $1+x$ وارون‌پذیر باشد). در واقع با مشخص کردن مجموعه‌ی اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال شامل یک عضو، مفهوم $z-$ایدآل را در این نیم‌حلقه‌ها مطرح می‌کنیم و ویژگی‌های شناخته شده‌ی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هم‌چنین روابطی چند را میان خواص توپولوژیکی فضای X و خواص جبری نیم‌حلقه‌ی مثبت τ، یعنی توپولوژی روی X، به‌دست می‌آوریم و نیم‌حلقه‌های مثبت متعارف، از جمله $C^{+}(X)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: نیم‌حلقه مثبت، $z-$ایدآل، ایدآل تفریقی، ایدآل قوی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۱۶Y۶۰، ۵۴C۴۰.

۱- مقدمه

در سرتاسر این مقاله نماد R معرف نیم‌حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یک‌دار است. مجموعه عناصر وارون‌پذیر R را با $U(R)$ نشان می‌دهیم. نمادهای $Max(R)$ و $Jac(R)$ به ترتیب معرف مجموعه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال و اشتراک همه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال نیم‌حلقه R می‌باشند و با فرض $a \in R$، نماد aR را برای ایدآل اصلی تولیدشده توسط a به‌کار می‌بریم. اگر $S \subseteq R$، آن‌گاه نماد M_S بیانگر اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال شامل S است و در حالتی که داشته باشیم $S=\{a\}$، به‌جای $M_{\{a\}}$ می‌نویسیم M_a.

هم‌چنین اگر X یک مجموعه باشد، آن‌گاه نماد $F^{+}(X,\mathbb{R})$ را برای تمام توابع حقیقی‌مقدار نامنفی تعریف شده روی X به‌کار می‌بریم و اگر X یک فضای توپولوژی هاسدورف و کاملاً منظم باشد، مجموعه تمام توابع پیوسته حقیقی‌مقدار (نامنفی)، روی فضای توپولوژی X را با

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئوول مقاله: رستم محمدیان mohamadian_r@scu.ac.ir.

$C(X)$ ($C^{+}(X)$) و مجموعه تمام توابع پیوسته و کران‌دار حقیقی‌مقدار (نامنفی)، روی فضای توپولوژی X را با $C^*(X)$ ($C^{*+}(X)$) نشان می‌دهیم و اگر $f \in C(X)$، آن‌گاه قرار می‌دهیم:

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = \circ\} \;, \quad Coz(f) = X \setminus Z(f).$$

در بخش دوم، ابتدا به معرفی مختصری از نیم‌حلقه‌ها پرداخته، سپس حقایق مهم و شناخته شده‌ای درباره‌ی آن‌ها و در راستای اهداف این مقاله بیان می‌کنیم. در بخش سوم، ماهیت عنصرگونه‌ی مجموعه M_a را در نیم‌حلقه‌های مثبت شناسایی و سپس نتایجی از آن را بیان می‌کنیم. بخش‌های چهارم و پنجم به ترتیب به برخی خواص نیم‌حلقه‌های $C^{+}(X)$ و τ اختصاص دارد. در بخش ششم، به بیان مفهوم z‑ایدآل در نیم‌حلقه‌ها پرداخته، قضایا و خواص متعارف z‑ایدآل‌ها را در نیم‌حلقه‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

برای اطلاعات بیشتر در زمینه نیم‌حلقه‌های تعویض‌پذیر به [۱ و ۲]، فضاهای توپولوژی به [۳]، حلقه توابع پیوسته به [۴]، حلقه‌های تعویض‌پذیر به [۵] و z‑ایدآل‌ها به [۶، ۷ و ۸] مراجعه شود.

۲- نیم‌حلقه‌ها

در این بخش ابتدا به معرفی نیم‌حلقه‌ها و نیم‌حلقه‌های مثبت می‌پردازیم و سپس به برخی از ویژگی‌های ایدآل‌های ماکسیمال اشاره می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر در این راستا به [۱ و ۲] مراجعه شود.

تعریف ۱: مجموعه R با دو عمل دوتایی جمع «+» و ضرب «·» را یک نیم‌حلقه تعویض‌پذیر می‌نامیم، هرگاه خواص زیر برقرار باشند:

الف) دو عمل جمع و ضرب شرکت‌پذیر باشند.

ب) دو عمل جمع و ضرب تعویض‌پذیر باشند.

پ) عمل ضرب روی عمل جمع توزیع‌پذیر باشد؛ یعنی برای هر $a, x, y \in R$ داشته باشیم $a(x+y) = ax + ay$.

ت) عناصر متمایز ۰ و ۱ در R موجود باشند به طوری‌که برای هر $x \in R$ داشته باشیم $x + \circ = x \;,\; \text{۱}x = x$.

مثال ۱: الف) هر حلقه‌ی تعویض‌پذیر و یک‌دار یک نیم‌حلقه است.

ب) فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد. در این‌صورت توپولوژی τ با دو عمل اجتماع (به عنوان جمع) و اشتراک (به عنوان ضرب) یک نیم‌حلقه است. در این نیم‌حلقه داریم $\circ_\tau=\varnothing$ و $۱_\tau=X$.

پ) فرض کنیم (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد. در این‌صورت توپولوژی τ با دو عمل اجتماع (به عنوان ضرب) و اشتراک (به عنوان جمع) یک نیم‌حلقه است. در این نیم‌حلقه داریم $۱_\tau=\varnothing$ و $\circ_\tau=X$.

ت) مجموعه $F^+(X,\mathbb{R})$ با دو عمل جمع و ضرب معمولی توابع یک نیم‌حلقه است.

ث) مجموعه‌های $C^+(X)$ و $C^{*+}(X)$ با دو عمل جمع و ضرب معمولی توابع یک نیم‌حلقه است.

ج) اگر مجموعه‌ی تمام ایدآل‌های حلقه‌ی A را با $Id(A)$ نشان دهیم، آن‌گاه $R=Id(A)$ با دو عمل جمع و ضرب متعارف ایدآل‌ها یک نیم‌حلقه است که در آن $\circ_R=I=(\circ)$ و $۱_R=A$.

چ) اگر A یک حلقه حسابی باشد، یعنی حلقه‌ای که برای هر سه ایدآل I، J و K آن تساوی

$$I\bigcap(J+K)=I\bigcap J+I\bigcap K$$

برقرار باشد، آن‌گاه $R=Id(A)$ با دو عمل جمع ایدآل‌ها و ضرب $I\otimes J=I\bigcap J$ یک نیم‌حلقه است که در آن $\circ_R=I=(\circ)$ و $۱_R=A$.

ح) با فرض این‌که X یک مجموعه ناتهی باشد، مجموعه توانی آن، یعنی $P(X)$ با اعمال $A+B=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$ و $AB=A\bigcap B$ یک نیم‌حلقه است که در آن $۱_R=X$ و $\circ_R=\varnothing$ (در واقع $P(X)$ با این اعمال یک حلقه بولی است و در این‌جا صرفاً جهت استناد آورده شده است).

در این مقاله هرگاه سخن از نیم‌حلقه τ به میان آید، بدون این‌که به اعمال جمع و ضرب اشاره شود، منظور نیم‌حلقه قسمت (ب) مثال (۱) است. دقت شود که این نیم‌حلقه یک حلقه نیست. زیرا اگر $\varnothing\neq A\in\tau$، آن‌گاه هیچ عضوی چون B در τ وجود ندارد که به ازای آن داشته باشیم $A+B=A\bigcup B=\varnothing$.

تعریف ۲: زیر مجموعه ناتهی و سره I از نیم‌حلقه R را یک ایدآل می‌نامیم، هرگاه:

الف) اگر $a \in I$ و $b \in I$، آن‌گاه $a + b \in I$؛

ب) اگر $a \in I$ و $r \in R$، آن‌گاه $ra \in I$.

تعریف فوق همان تعریف ایدآل سره در حلقه‌ها است. مفاهیم ایدآل اول، ایدآل اول مینیمال، ایدآل ماکسیمال و رادیکال یک ایدآل در نیم‌حلقه‌ها، کاملاً مشابه با تعاریفشان در نظریه ی حلقه‌های تعویض‌پذیر هستند، بنابراین از آوردن آن‌ها خودداری می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر به [۹، ۱۰، ۱ و ۱۱] رجوع شود.

تعریف ۳: عضو a در نیم‌حلقه R را یک عضو جاذب می‌نامیم، هرگاه برای هر $r \in R$ داشته باشیم $ar = a$.

بنابر تعریف قبل $\circ_R$ جاذب است، هرگاه برای هر $r \in R$ داشته باشیم $\circ r = \circ$. به‌علاوه آشکار است که زیرمجموعه $I = \{a\}$ در نیم‌حلقه R یک ایدآل است اگر و تنها اگر a یک عضو جاذب R باشد.

تذکر ۱: در بیشتر مقالات در زمینه‌ی نیم‌حلقه‌ها، برای راحتی و روانی بحث، شرط جاذب بودن $\circ_R$ را جزء شرایط تعریف نیم‌حلقه می‌آورند. ما در این مقاله این شرط را در تعریف در نظر نگرفته‌ایم، بنابراین در مثال بعد، یک نیم‌حلقه ارائه می‌کنیم که در آن $\circ_R$ جاذب نیست. لازم است که گفته شود در بیشتر متون، از جمله مرجع [۱] همین مقاله، که شاید یکی از منابع اصلی در این زمینه است، مثالی به‌غلط آورده شده است. در این مثال فرض می‌شود که X یک مجموعه ناتهی است و گفته می‌شود که مجموعه توانی آن، یعنی $P(X)$، با اعمال $A + B = A \bigcap B$ و $AB = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$ یک نیم‌حلقه است که در آن $1_R = \varnothing$ و $\circ_R = X$. به علاوه اگر $\varnothing \neq A \in R$، آن‌گاه

$$\circ A = XA = (X \bigcup A) \setminus (X \bigcap A) = X \setminus A = A^c \neq X = \circ ,$$

بنابراین $\circ A \neq \circ$، یعنی $\circ_R$جاذب نیست. اما باید گفت که $P(X)$، با این دو عمل اصلاً نیم حلقه نیست، زیرا عمل ضرب روی عمل جمع توزیع‌پذیر نیست.

مثال ۲: مجموعه $R = [\circ, \infty]$ را با اعمال جمع و ضرب معمولی در دستگاه توسیعی اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $\circ \cdot \infty = \infty$. در این‌صورت R یک نیم‌حلقه است که در آن $\circ_R = \circ$ و $1_R = 1$. با توجه به تساوی $\circ \cdot \infty = \infty$، معلوم می‌شود که $\circ$ جاذب نیست، اما در این نیم‌حلقه عضو ∞ جاذب است.

تعریف ۴: فرض کنیم R یک نیم‌حلقه باشد. گوییم $x \in R$ وارون‌پذیر است، هرگاه $x^{-1} \in R$، موسوم به وارون x، موجود باشد به طوری‌که $xx^{-1} = 1$.

همان‌طور که در مقدمه اشاره کردیم، مجموعه‌ی تمام عناصر وارون‌پذیر نیم‌حلقه‌ی R را با $U(R)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $1 \in U(R)$ و اگر $x, y \in U(R)$ آن‌گاه $xy \in U(R)$. در قسمت (ب) مثال (۱) داریم $U(\tau) = \{X\}$ و در قسمت (پ) داریم $U(\tau) = \{\varnothing\}$. در نیم‌حلقه‌های قسمت (ث) مثال (۱) به ترتیب داریم:

$$U(C^+(X)) = \{f \in C^+(X) : f(x) \neq 0, \forall x \in X\},$$

$$U(C^{*+}(X)) = \{f \in C^{*+}(X) : \exists r > 0 \quad |f| \geq r\}.$$

اکنون تعریف نیم‌حلقه مثبت را بیان می‌کنیم که در این مقاله نقش اساسی دارد.

تعریف ۵: نیم‌حلقه R را مثبت می‌گوییم، اگر برای هر $x \in R$ داشته باشیم $1 + x \in U(R)$. لازم به ذکر است که در برخی منابع، از جمله [۱]، عنوان «گلفاند» به‌جای «مثبت» به‌کار رفته است. به نظر می‌رسد این نام‌گذاری اشتباه است؛ زیرا مفهوم «گلفاند» قبلاً در نظریه حلقه‌ها به‌صورت دیگری تعریف شده است و این مفهوم در نیم‌حلقه‌ها با مفهوم «مثبت» متفاوت است.

نیم‌حلقه‌های معرفی شده در قسمت‌های (ب)، (پ)، (ت)، (ث)، (ج) و (چ) مثال (۱) مثبت هستند. در واقع در نیم‌حلقه $C^+(X)$، اگر $f \in C^+(X)$، آن‌گاه چون $f \geq 0$، پس $Z(1+f) = \varnothing$ و درنتیجه $1 + f \in U(C^+(X))$. در نیم‌حلقه $C^{*+}(X)$، اگر $f \in C^{*+}(X)$، آن‌گاه چون $f \geq 0$، پس $1 + f = |1 + f| \geq 1 = r$ و ازاین‌رو $1 + f \in U(C^{*+}(X))$. اما نیم‌حلقه مثال (۲) مثبت نیست، زیرا $1 + \infty = \infty \notin U(R) = (0, \infty)$. هم‌چنین نیم‌حلقه قسمت (ح) مثال (۱) مثبت نیست، زیرا $U(P(X)) = \{X\}$.

تذکر ۲: نیم‌حلقه R را گلفاند می‌گوییم، هرگاه هر ایدآل اولش در یک ایدآل ماکسیمال یکتا قرار بگیرد. در ادامه مثال‌هایی ارائه خواهیم کرد که نشان می‌دهند دو مفهوم «گلفاند» و «مثبت» کاملاً متفاوت هستند. برای اطلاعات بیشتر در باره نیم‌حلقه‌های گلفاند به [۱۲] مراجعه شود.

برای ورود به مبحث z–ایدآل‌ها لازم است درباره‌ی ایدآل‌های ماکسیمال بیشتر بدانیم. بنابراین در این‌جا به حقایقی چند درباره‌ی ایدآل‌های ماکسیمال در نیم‌حلقه R اشاره می‌کنیم که اکثر آن‌ها را می‌توان در [۱] و [۲] یافت.

الف) هر ایدآل، حداقل در یک ایدآل ماکسیمال قرار می‌گیرد.

ب) $x \in R$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $x \notin M$، برای هر $M \in Max(R)$.

پ) با فرض $M \in Max(R)$ و $x \in R$ داریم $(M, x) = R$ اگر و تنها اگر $x \notin M$.

ت) هر ایدآل ماکسیمال، یک ایدآل اول است.

ث) همواره داریم $Jac(R) \subseteq M_{\circ}$.

از آن‌جا که در تعریف نیم‌حلقه در این مقاله $\circ_R$ لزوماً جاذب نیست، ممکن است مجموعه $\{\circ_R\}$ ایدآل نباشد، بنابراین شمول قسمت (ث) ممکن است اکید باشد. به عبارت دیگر ممکن است ایدآل ماکسیمالی شامل $\circ_R$ نباشد. تلاش ما برای یافتن ایدآل ماکسیمالی که شامل $\circ_R$ نباشد تاکنون بی‌نتیجه مانده است. اما در مثال بعد می‌بینیم که $\{\circ_R\}$ ایدآل نیست و هم‌چنین ایدآل اولی ارائه می‌کنیم که شامل $\circ_R$ نیست.

مثال ۳: در نیم‌حلقه مثال (۲)، چون ∞ جاذب است، پس زیرمجموعه $P = \{\infty\}$ یک ایدآل است، در واقع یک ایدآل اول است که شامل $\circ_R$ نیست. اما این ایدآل ماکسیمال نیست، زیرا $M = \{\circ, \infty\}$ ایدآل ماکسیمال شامل P است. چون $\circ_R$ جاذب نیست، پس $\{\circ_R\}$ ایدآل نیست. واضح است که این نیم‌حلقه ایدآل دیگری ندارد، زیرا اگر $\circ, r, \infty \in I \subseteq R$ و $\circ \neq r \neq \infty$، آن‌گاه $r \in U(R)$ و بنابراین $I = R$. به این ترتیب P و M تنها ایدآل‌های این نیم‌حلقه هستند.

در نیم‌حلقه‌های مثبت می‌توان حقایق بیشتری درباره‌ی ایدآل‌های ماکسیمال مطرح کرد که اینک به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. البته در گزاره اول که همان قضیه (۶.۶۲) مرجع [۱] است، یک معادل برای این نیم‌حلقه‌ها ارائه شده است.

الف) نیم‌حلقه‌ی R مثبت است اگر و تنها اگر برای هر $M \in Max(R)$ و هر $x, y \in R$، از $x + y \in M$ نتیجه شود که $x \in M$ و $y \in M$؛ به عبارت دیگر M یک ایدآل قوی باشد. تعریف ایدآل قوی در تعریف (۶) آورده شده است.

ب) نیم‌حلقه‌ی R مثبت است اگر و تنها اگر برای هر $r \in R$ و هر $x \in U(R)$، داشته باشیم $x + r \in U(R)$.

پ) در هر نیم‌حلقه مثبت، $\circ_R$ جاذب است. اثبات این گزاره در قضیه (۱.۴) مرجع [۱۳] ارائه شده است.

بنابراین در نیم‌حلقه مثبت R، هر ایدآل شامل $\circ_R$ است و در نتیجه همواره داریم $Jac(R) = M_\circ$. دقت شود که نیم‌حلقه قسمت (ح) مثال (۱)، اگر چه مثبت نیست، اما عضو $\circ_R$ آن جاذب است.

تذکر ۳: اکنون با ارائه چند نمونه نشان می‌دهیم که دو مفهوم نیم‌حلقه مثبت و نیم‌حلقه گلفاند متفاوت هستند.

الف) نیم‌حلقه $C^+(X)$ هم مثبت و هم گلفاند است. در انتهای مقاله، مثال دیگری از این دست ارائه می‌کنیم.

ب) نیم‌حلقه $\mathbb{Z}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی، نه مثبت و نه گلفاند است.

پ) نیم‌حلقه‌ی مثال (۲) گلفاند است، اما مثبت نیست.

ت) نیم‌حلقه‌ی مثال بعد مثبت است، اما گلفاند نیست.

مثال ۴: در فضای توپولوژی معمولی $(\mathbb{R},\tau)$ نیم‌حلقه τ قسمت (پ) مثال (۱) را در نظر می‌گیریم. این نیم‌حلقه به وضوح یک نیم‌حلقه مثبت است، اما نشان می‌دهیم که گلفاند نیست. در واقع ایدآل اولی معرفی می‌کنیم که در دو ایدآل ماکسیمال متفاوت قرار می‌گیرد. فرض کنیم $P = \{A \in \tau : \circ \in A\}$، بدیهی است که P یک ایدآل اول است. قرار می‌دهیم: $I = \{A_۱ \in \tau :\ \exists a > \circ,\ (\circ, a) \subseteq A_۱\}$, $J = \{A_۲ \in \tau :\ \exists a > \circ,\ (-a, \circ) \subseteq A_۲\}$. در این‌صورت I و J ایدآل‌های τ هستند و واضح است که $P \subseteq I$ و $P \subseteq J$. از این رو ایدآل‌های ماکسیمال $M_۱$ و $M_۲$ وجود دارند آن‌چنان که $I \subseteq M_۱$ و $J \subseteq M_۲$. بنابراین $P \subseteq M_۱$ و $P \subseteq M_۲$، در صورتی‌که $M_۱ \neq M_۲$.

تعریف ۶: ایدآل I را در نیم‌حلقه R تفریقی (k–ایدآل) می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in R$ از $a+b \in I$ و $a \in I$ نتیجه شود که $b \in I$. هم‌چنین I را یک ایدآل قوی (l–ایدآل) می‌گوییم، هرگاه از $a+b \in I$ نتیجه شود که $a \in I$ و $b \in I$.

واضح است که:

الف) هر ایدآل قوی، یک ایدآل تفریقی است. اما عکس آن در حالت کلی درست نیست. به‌عنوان نمونه در نیم‌حلقه $\mathbb{Z}$ با اعمال جمع و ضرب معمولی، ایدآل $I = ۴\mathbb{Z}$ تفریقی است، اما قوی نیست.

ب) هر ایدآل ماکسیمال در یک نیم‌حلقه مثبت، یک ایدآل قوی است. اما عکس آن در حالت کلی درست نیست، نمونه در مثال بعد ارائه شده است. به‌علاوه مثبت بودن نیم‌حلقه، ضروری است؛ زیرا در مثال (۲) ایدآل ماکسیمال M قوی نیست.

مثال۵: فرض کنیم فضای توپولوژی (X,τ) هاسدورف باشد، $x,y\in X$ و $x\neq y$، در این‌صورت مجموعه $P=\{H\in\tau : H\subseteq X\setminus\{x,y\}\}$ یک ایدآل در نیم‌حلقه τ است. در واقع یک ایدآل قوی است، اما اول نیست. چون $x\neq y$، پس مجموعه‌های $U,V\in\tau$ وجود دارند به‌طوری‌که $U\bigcap V=\varnothing$، $y\in U$ و $y\in V$. در این‌صورت $UV=U\bigcap V=\varnothing\in P$، اما $U\notin P$ و $V\notin P$. پس P اول نیست. اما یک ایدآل قوی است به این دلیل که اگر $G+H=G\bigcup H\in P$، آن‌گاه $G,H\subseteq H\bigcup G\subseteq X\setminus\{x,y\}$، بنابراین $G,H\in P$.

تعریف ۷: نیم‌حلقه R را ساده می‌گوییم، هرگاه برای هر $x\in R$ داشته باشیم $۱+x=۱$.

لم ۱: نیم‌حلقه مثبت R، ساده است اگر و تنها اگر $U(R)=\{۱\}$.

اثبات: ابتدا فرض کنیم $U(R)=\{۱\}$ و $x\in R$. چون R مثبت است، پس $۱+x\in U(R)$، بنابراین $۱+x=۱$، یعنی R ساده است. به‌عکس فرض کنیم $x\in U(R)$. از آن‌جا که R یک نیم‌حلقه ساده است، می‌توان نوشت:

$$۱=۱+x=xx^{-۱}+x=x(x^{-۱}+۱)=x۱=x\ .$$

تعریف ۸: گفته می‌شود در نیم‌حلقه R قانون حذف ضربی برقرار است، هرگاه برای هر $a,b,c\in R$ و $a\neq ۰$، از $ab=ac$ نتیجه شود $b=c$. هم‌چنین گوییم نیم‌حلقه R دارای خاصیت خودتوان جمعی است، هرگاه برای هر $a\in R$ داشته باشیم $a+a=a$.

قضیه ۱: فرض کنیم در نیم‌حلقه R قانون حذف ضربی و خاصیت خودتوان جمعی برقرار باشد. در این‌صورت برای هر $a,b\in R$ و هر عدد طبیعی n داریم $(a+b)^n=a^n+b^n$.

اثبات: به قضیه (۴.۴۳) مرجع [۱] رجوع شود.

لم ۲: فرض کنیم در نیم‌حلقه R قانون حذف ضربی و خاصیت خودتوان جمعی برقرار باشد. در این‌صورت اگر I یک ایدآل تفریقی باشد، آن‌گاه $\sqrt{I}$ نیز تفریقی است.

اثبات: گیریم $a+b\in\sqrt{I}$ و $a\in\sqrt{I}$. در این صورت اعداد n و m وجود دارند به طوری‌که $(a+b)^n\in I$ و $a^m\in I$. با فرض $nm=k$ داریم $(a+b)^k\in I$ و $a^k\in I$. اما

$(a+b)^k = a^k + b^k$، بنابراین $a^k + b^k \in I$ و $a^k \in I$. از این‌که I تفریقی است نتیجه می‌شود که $b^k \in I$ و این یعنی $b \in \sqrt{I}$.

۳- اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال شامل یک عضو

در این بخش ابتدا قضیه اصلی این مقاله را اثبات کرده و پس از آن چندین نتیجه‌ی حاصل شده از آن را بیان می‌کنیم. در واقع در این قضیه مجموعه M_a، یعنی اشتراک تمام ایدآل‌های ماکسیمال شامل a را در نیم‌حلقه‌های مثبت مشخص می‌کنیم. البته در این نیم‌حلقه‌ها، در قضیه (۵) مرجع [۲] و قضیه (۶.۶۳) مرجع [۱] به نوعی $M_{\circ}$ مشخص شده است و می‌توان این اثبات‌ها را برای مشخص کردن M_a نیز به‌کار برد.

اهمیت M_a در آن است که مبنای تعریف مفهوم z-ایدآل است. بحث z-ایدآل‌ها در $C(X)$ بسیار با اهمیت بوده و در حلقه‌های تعویض‌پذیر نیز مطرح شده است، برای جزئیات بیشتر در این زمینه و اطلاعات بیشتر درباره‌ی M_a، می‌توان به [۶، ۷، ۸ و ۱۴] مراجعه کرد.

قضیه ۲: فرض کنیم R یک نیم‌حلقه مثبت باشد و $a \in R$. در این‌صورت:

$$M_a = \{x \in R :\ \forall y \in R ,\ a + y \notin U(R) \ \Rightarrow\ a + x + y \notin U(R)\} .$$

اثبات: فرض کنیم $x \in R$ و برای هر $y \in R$ از $a + y \notin U(R)$ نتیجه شود $a + x + y \notin U(R)$. باید نشان دهیم $x \in M_a$. گیریم $a \in M \in Max(R)$، باید نشان دهیم $x \in M$. به فرض خلاف که چنین نباشد، یعنی $x \notin M$. در این‌صورت $(M,x) = R$، بنابراین $m_{\circ} \in M$ و $x_{\circ} \in R$ وجود دارند که $1 = m_{\circ} + xr_{\circ}$. چون $a \in M$ و $m_{\circ} \in M$، پس $a + m_{\circ} \in M$ و درنتیجه $a + m_{\circ} \notin U(R)$. از طرف دیگر واضح است که $1 + ar_{\circ} = m_{\circ} + (x+a)r_{\circ}$. اکنون بنا بر فرض داریم $m_{\circ} + (x+a) \notin U(R)$، بنابراین ایدآل $N \in Max(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $m_{\circ} + (x+a) \in N$. چون R یک نیم‌حلقه مثبت است نتیجه می‌شود که $m_{\circ} \in N$ و $x + a \in N$ و درنتیجه $m_{\circ} + (x+a)r_{\circ} \in N$. بنابراین خواهیم داشت $1 + ar_{\circ} \in N$ و این در تناقض است با این‌که $1 + ar_{\circ} \in U(R)$. اکنون فرض کنیم $x \in M_a$ و به فرض خلاف $y \in R$ چنان موجود باشد که $a + y \notin U(R)$، اما $a + x + y \in U(R)$. چون $a + y \notin U(R)$، پس ایدآل $M \in Max(R)$ وجود دارد که $a + y \in M$. چون R مثبت است، پس خواهیم داشت $a, y \in M$. چون $a \in M$، با توجه به فرض خواهیم داشت $x \in M$. در این‌صورت نتیجه می‌شود $a + x + y \in M$ که تناقض است.

نتیجه ۱: فرض کنیم R یک نیم‌حلقه مثبت باشد. در این‌صورت:

$$Jac(R) = \{x \in R : \ \forall y \in R \, , y \notin U(R) \ \Rightarrow \ x + y \notin U(R)\} .$$

اثبات: با توجه به قضیه قبل بدیهی است.

در نیم‌حلقه‌ی R، عضو x را کوچک می‌نامیم، هرگاه برای هر $y \notin U(R)$ داشته باشیم $x + y \notin U(R)$. مجموعه تمام عناصر کوچک را با $s(R)$ نشان می‌دهیم. در مرجع [۱]، در قضیه (۶.۴۸) و با کمک قضیه (۴.۵۰) نشان داده شده است که در نیم‌حلقه‌های مثبت $s(R)$ یک ایدآل است و هم‌چنین در قضیه (۶.۶۳) نیز نشان داده شده است که در نیم‌حلقه‌های مثبت داریم $s(R) = Jac(R)$. اما طبق نتیجه‌ی بالا آشکار است که $s(R) = Jac(R) = M_{\circ}$ و با توجه به بخش ششم همین مقاله به راحتی معلوم می‌شود که $s(R)$ یک z-ایدآل است.

تعریف ۹: نیم‌حلقه R را نیم‌ساده می گوییم، هرگاه $Jac(R) = \{\circ\}$.

در نتیجه‌ی بعد، که همان قضیه (۵) مرجع [۲] است، معادلی برای نیم‌ساده بودن نیم‌حلقه‌های مثبت ارائه می‌شود.

نتیجه ۲: فرض کنیم R یک نیم‌حلقه مثبت باشد. در این‌صورت $Jac(R) = \{\circ\}$ اگر و تنها اگر برای هر $\circ \neq x \in R$، عضو $y \notin U(R)$ موجود باشد به طوری‌که $x + y \in U(R)$.

اثبات: بدیهی است.

ثابت شده است که اگر X یک F-فضا باشد، آن‌گاه حلقه $C(X)$ یک حلقه حسابی است و برعکس. بنابراین اگر X یک F-فضا باشد، آن‌گاه طبق قسمت (چ) مثال (۱) مجموعه $Id(C(X))$ یک نیم‌حلقه است. هم‌چنین اگر مجموعه‌ی تمام z-ایدآل‌های حلقه $C(X)$ به انضمام خود $C(X)$ را با $zid(C(X))$ نشان دهیم، آن‌گاه $zid(C(X))$ با جمع و ضرب ایدآل‌ها یک نیم‌حلقه است. اشاره کنیم که در $C(X)$، ضرب z-ایدآل‌ها با اشتراکشان برابر است. این دو نیم‌حلقه به وضوح مثبت و ساده هستند و در تذکر بعد نشان می‌دهیم که $Id(C(X))$ نیم‌ساده نیز است. برای اطلاعات بیشتر درباره‌ی F-فضاها به [۴] رجوع شود.

تذکر ۴: برای نشان دادن این‌که $Id(C(X))$ نیم‌ساده است، از نتیجه (۲) استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $I \neq (\circ)$ یک ایدآل $C(X)$ باشد. بنابراین $\circ \neq f \in I$ وجود دارد و از این‌رو $x \in X$ وجود دارد که $x \notin Z(f)$. چون X کاملاً منظم است، پس $g \in C(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(x) = \circ$ و $g(Z(f)) = \{۱\}$. درنتیجه $Z(f^{۲} + g^{۲}) = Z(f) \bigcap Z(g) = \varnothing$،

یعنی $f^{2}+g^{2}$ وارون‌پذیر است. اکنون ایدآل اصلی تولیدشده توسط g، یعنی $J=gC(X)$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $J\neq C(X)$؛ چرا که $g(x)=0$. به علاوه چون $f^{2}+g^{2}\in I+J$، نتیجه می‌شود که $I+J=C(X)$. بنابراین طبق نتیجه (۲) داریم $Jac(Id(C(X)))=\{0\}$.

از آن‌جا که هر حلقه یک نیم‌حلقه است، گاهی می‌توان از گزاره‌ای درباره‌ی نیم‌حلقه‌ها به گزاره‌ی شناخته‌شده‌ای در نظریه حلقه‌ها دست یافت. به‌عنوان نمونه و با الهام از قضیه (۲)، نتیجه زیر را در ارتباط با رادیکال جیکوبسن حلقه‌ها داریم.

نتیجه ۳: فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت:

$$Jac(R)=\{x\in R:\ \forall r\in R\ ,\ y\notin U(R)\ \Rightarrow\ xr+y\notin U(R)\}.$$

اثبات: فرض کنیم $x\in Jac(R)$ و به فرض خلاف که $r\in R$ و $y\notin U(R)$ موجود باشند به‌طوری‌که $y+xr\notin U(R)$. چون $y\notin U(R)$، پس $M\in Max(R)$ وجود دارد که $y\in M$. چون $x\in J(R)$، پس $x\in M$. از این‌رو خواهیم داشت $y+xr\in M$ که تناقض است، چون $y+xr$ یکه است. اکنون فرض کنیم برای هر $r\in R$ و هر $y\notin U(R)$ داشته باشیم $y+xr\notin U(R)$. باید نشان دهیم $x\in J(R)$. گیریم چنین نباشد، پس $M\in Max(R)$ وجود دارد که $x\notin M$. در این‌صورت $r_0\in R$ و $m_0\in M$ وجود دارند به‌طوری‌که $1=m_0+r_0x$. چون $m_0\in M$، پس $m_0\notin U(R)$، اکنون بنابر فرض باید داشته باشیم $1=m_0+r_0x\notin U(R)$ که تناقض است.

۴- نیم‌حلقه $C^{+}(X)$

در این بخش ابتدا به بررسی ارتباط بین ایدآل‌های ماکسیمال حلقه $C(X)$، که کاملاً شناخته شده هستند با ایدآل‌های ماکسیمال نیم‌حلقه $C^{+}(X)$ می‌پردازیم. در قضیه گلفاند-کلموگروف (قضیه ۷.۳) مرجع [۴] نشان داده است که هر ایدآل ماکسیمال حلقه $C(X)$ به‌صورت زیر است:

$$M^{p}=\{f\in C(X):\ p\in \mathrm{cl}_{\beta X}Z(f)\}$$

که در آن $p\in\beta X$ و فضای βX فشرده‌شده‌ی استون- چک فضای X است، برای آشنایی کامل درباره‌ی ایدآل‌های ماکسیمال حلقه $C(X)$ و فضای βX، می‌توان به فصل‌های ششم و هفتم مرجع [۴] رجوع کرد.

قضیه ۳: ایدآل M یک ایدآل ماکسیمال نیم‌حلقه $C^{+}(X)$ است اگر و تنها اگر به ازای یک $p\in\beta X$ داشته باشیم $M=M^{p}\bigcap C^{+}(X)$.

اثبات: $(\Rightarrow)$ فرض کنیم $f\in C^{+}(X)\setminus M$، پس $f\notin M^{p}$. بنابراین $g\in M^{p}$ وجود دارد به‌طوری‌که $Z(f^{۲}+g^{۲})=Z(f)\bigcap Z(g)=\varnothing$. در این‌صورت واضح است که $f^{۲}+g^{۲}\in(M,f)\bigcap U(C^{+}(X))$ و در نتیجه $(M,f)=C^{+}(X)$، یعنی M ایدآل ماکسیمال $C^{+}(X)$ است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم $M\in Max(C^{+}(X))$، در این‌صورت واضح است که $Z(M)=\{Z(f):\ f\in M\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است. بنابراین $p\in\bigcap_{f\in M}\mathrm{cl}_{\beta X}Z(f)$ وجود دارد و به‌علاوه بدیهی است که $M\subseteq M^{p}\bigcap C^{+}(X)$. از طرفی چون $M^{p}\bigcap C^{+}(X)$ یک ایدآل $C^{+}(X)$ است نتیجه می‌شود که $M=M^{p}\bigcap C^{+}(X)$.

با توجه به قضیه قبل نتیجه می‌شود که هر ایدآل ماکسیمال $C^{+}(X)$ به ازای یک $p\in\beta X$ به شکل $M^{p}\bigcap C^{+}(X)$ است. این ایدآل را با M^{p+} نشان می‌دهیم.

اگر $f\in C(X)$ آن‌گاه نشان داده شده است که $M_{f}=\{g\in C(X):\ Z(f)\subseteq Z(g)\}$ (از جمله مرجع [۶] را ببینید). هم‌چنین اگر $f\in C^{+}(X)$، در آن صورت با توجه به قضیه (۲)، اگر M_{f}^{+} بیانگر اشتراک همه ایدآل‌های ماکسیمال در $C^{+}(X)$ شامل f باشد، آنگاه:

$$M_{f}^{+}=\{g\in C^{+}(X):\ \forall h,\ Z(f+h)\neq\varnothing\ \Rightarrow\ Z(f+h+g)\neq\varnothing\}\ .$$

اکنون برای $f\in C^{+}(X)$ نشان می‌دهیم که $M_{f}^{+}=M_{f}\bigcap C^{+}(X)$.

نتیجه ۴: با فرض $f\in C^{+}(X)$، داریم $M_{f}^{+}=M_{f}\bigcap C^{+}(X)$.

اثبات: با توجه به قضیه قبل می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}M_{f}^{+}&=\bigcap_{f\in M\in Max(C^{+}(X))}M=\bigcap_{f\in M^{p+}}M^{p+}=\bigcap_{f\in M^{p}}(M^{p}\bigcap C^{+}(X))\\&=(\bigcap_{f\in M^{p}}M^{p})\bigcap C^{+}(X)=(\bigcap_{f\in M}M)\bigcap C^{+}(X)=M_{f}\bigcap C^{+}(X)\end{aligned}$$

که همان نتیجه مطلوب است.

به این ترتیب با توجه به نتیجه بالا آشکار می‌شود که رفتار z–ایدآل‌ها در نیم‌حلقه $C^+(X)$، کاملاً مشابه رفتار z–ایدآل‌ها در حلقه $C(X)$ است. اگر $p\in X$، آن‌گاه در حلقه $C(X)$ می‌نویسیم $M_p=\{f\in C(X):\ f(p)=\circ\}$، بنابراین در نیم‌حلقه $C^+(X)$ نیز می‌نویسیم $M_p^+=\{f\in C^+(X):\ f(p)=\circ\}$. در صورتی‌که فضای X فشرده باشد ثابت می‌شود که هر ایدآل ماکسیمال حلقه $C(X)$ به ازای یک $p\in X$، به شکل M_p است. به‌طور کاملاً مشابه می‌توان نشان داد که در صورت فشرده بودن فضای X، در نیم‌حلقه‌ی $C^+(X)$ نیز هر ایدآل ماکسیمال به ازای یک $p\in X$ به شکل M_p^+ است. در انتهای این بخش نشان می‌دهیم $C^+(X)$ نیم‌ساده است.

نتیجه ۵: نیم‌حلقه $C^+(X)$ نیم‌ساده است.

اثبات: با توجه به نتیجه قبل داریم $Jac(C^+(X))=M_\circ^+=M_\circ\bigcap C^+(X)=\{\circ\}$.

۵- نیم‌حلقه τ در فضای توپولوژی (X,τ)

می‌توان به ارتباط میان خواص توپولوژیکی فضای X و خواص جبری نیم‌حلقه τ پرداخت. در این بخش به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. خاطرنشان شود که یک فضای توپولوژی را فضای T_1 می‌گوییم، هرگاه زیرمجموعه‌های تک‌نقطه‌ای آن بسته باشند. ابتدا اشاره کنیم که اگر $G\in\tau$ با توجه به قضیه (۲) و نتیجه (۱) داریم:

$$M_G=\{H\in\tau:\ \forall V,\ V\bigcup G\neq X\Rightarrow V\bigcup G\bigcup H\neq X\},$$

$$Jac(\tau)=\{H\in\tau:\ \forall V,\ V\neq X\Rightarrow V\bigcup H\neq X\}.$$

قضیه ۴: اگر (X,τ) یک فضای T_1 باشد، آن‌گاه نیم‌حلقه τ نیم‌ساده است.

اثبات: فرض کنیم X یک فضای T_1 باشد و $\varnothing\neq G\in\tau$، بنابراین $x\in G$ وجود دارد. چون X یک فضای T_1 است، پس $\{x\}$ بسته است و از این‌رو $H=X\setminus\{x\}$ باز است. واضح است که $H\notin U(\tau)$، زیرا $U(\tau)=\{X\}$ و $H\neq X$. اما $H+G=H\bigcup G\supseteq(X\setminus\{x\})\bigcup\{x\}=X$. در نتیجه $H+G=X\in U(\tau)$. بنابراین با توجه به نتیجه (۲) خواهیم داشت $Jac(\tau)=\{\circ\}$.

مثال۶: در قضیه قبل خاصیت T_1 برای فضا ضروری است. به‌عنوان نمونه فرض کنیم $X=\{a,b,c\}$ و $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$، در این‌صورت واضح است که فضا T_1 نیست،

چون مثلاً مجموعه تک نقطه‌ای $\{a\}$ بسته نیست و به‌علاوه $\{a\} \in Jac(\tau)$، بنابراین $Jac(\tau) \neq \{\circ\}$، یعنی τ نیم‌ساده نیست.

قضیه ۵: فرض کنیم (X,τ) یک فضای T_1 باشد و به‌علاوه $x \in X$، $G = X \setminus \{x\}$ و I یک ایدآل τ باشد. در این‌صورت در نیم‌حلقه‌ی τ:

الف) $M(x) = \{H : H \subseteq X \setminus \{x\}\}$ یک ایدآل ماکسیمال است؛

ب) اگر $G \in I$، آن‌گاه $I = M(x)$؛

پ) $M_G = M(x)$.

اثبات: تمام موارد بدیهی هستند.

۶- z-ایدآل‌ها در نیم‌حلقه‌ها

همان‌طور که پیش‌تر نیز گفتیم یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در مبحث حلقه‌های توابع پیوسته مفهوم z-ایدآل است. در این بخش این مفهوم را در نیم‌حلقه‌ها مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱۰: ایدآل I را در نیم‌حلقه R یک z-ایدآل می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \in I$ داشته باشیم $M_a \subseteq I$. همچنین ایدآل I را یک z-ایدآل قوی یا sz-ایدآل می‌گوییم، هرگاه برای هر زیرمجموعه متناهی $S \subseteq I$ داشته باشیم $M_S \subseteq I$.

گزاره‌های زیر به‌طور بدیهی در هر نیم‌حلقه برقرار هستند:

الف) هر اشتراک دلخواه از z-ایدآل‌ها، یک z-ایدآل است.

ب) هر sz-ایدآل، یک z- ایدآل است.

پ) هر ایدآل ماکسیمال، یک sz-ایدآل است.

ت) هر ایدآل M_a، یک sz-ایدآل است.

ث) اگر I یک z-ایدآل باشد، آن‌گاه نیم اول است؛ یعنی $\sqrt{I} = I$.

قضیه ۶: فرض کنیم R یک نیم‌حلقه مثبت، I یک z-ایدآل و P یک ایدآل اول مینیمال روی I باشد، در این‌صورت P نیز یک z-ایدآل است.

اثبات: گیریم $a \in P$، پس $x \notin P$ و $n \in \mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوری که $xa^n \in I$. بنابراین می‌توان نوشت $M_{xa^n} = M_x \bigcap M_{a^n} = M_x \bigcap M_a \subseteq I \subseteq P$، اما $M_x \not\subseteq P$، در نتیجه $M_a \subseteq P$.

نتیجه ۶: هر ایدآل اول مینیمال، در یک نیم‌حلقه مثبت نیم‌ساده، یک z–ایدآل است.

اثبات: با توجه به z–ایدآل بودن $I=(\circ)$ و قضیه قبل بدیهی است.

حکم نتیجه قبل ممکن است به‌طور کلی در هر نیم‌حلقه برقرار نباشد. به‌عنوان نمونه در مثال (۲) مجموعه $P=\{\infty\}$ یک ایدآل اول مینیمال است، اما به‌وضوح z–ایدآل نیست، زیرا $M_\infty = M = \{\circ,\infty\} \not\subseteq P$. حتی در نیم‌حلقه‌های مثبت نیز ممکن است حکم برقرار نباشد، به بیان دیگر نیم‌ساده بودن ضروری است. برای نمونه، مثال (۸) را ببینید.

لم ۳: اگر R یک نیم‌حلقه مثبت باشد و $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$، آن‌گاه $M_S = M_a$ که $a = a_1 + \cdots + a_n$.

اثبات: شمول $M_a \subseteq M_S$ بدیهی است. فرض کنیم $x \in M_S$ و $a \in M \in Max(R)$ در نتیجه $a_i \in M$ برای هر $i=1,\ldots,n$، یعنی $S \subseteq M$، پس $x \in M$، از این‌رو $x \in M_a$.

نتیجه ۷: فرض کنیم R یک نیم‌حلقه مثبت و I یک ایدآل آن باشد. در این‌صورت I یک z–ایدآل است اگر و تنها اگر sz–ایدآل باشد.

اثبات: با توجه به لم قبل بدیهی است.

لم ۴: فرض کنیم R یک نیم‌حلقه مثبت باشد و $a \in R$. در این‌صورت برای هر $b \in R$ داریم $a \in M_{a+b}$.

اثبات: گیریم $a+b \in M \in Max(R)$. چون R مثبت است، پس $b \in M$ و $a \in M$، بنابراین $a \in M_{a+b}$.

لم ۵: هر z–ایدآل در یک نیم‌حلقه‌ی مثبت، یک ایدآل قوی است.

اثبات: گیریم I یک z–ایدآل در نیم‌حلقه R باشد و $a+b \in I$. طبق لم قبل داریم $a \in M_{a+b} \subseteq I$. به علاوه واضح است

که $b \in M_b \subseteq M_{\{a,b\}} = M_{a+b} \subseteq I$.

عکس لم قبل در حالت کلی برقرار نیست؛ مورد نقض را در مثال (۸) ارائه می‌کنیم. هم‌چنین مثبت بودن نیم‌حلقه در لم قبل ضروری است. به‌عنوان نمونه در نیم‌حلقه مثال (۲) که مثبت نیست، دیدیم که ایدآل $M = \{0, \infty\}$ یک ایدآل ماکسیمال و بنابراین z–ایدآل است، در حالی‌که ایدآل تفریقی نیست. زیرا $\infty \in M$ و $1 + \infty = \infty \in M$، اما $1 \notin M$، بنابراین قوی نیست.

قضیه ۷: فرض کنیم $G \in \tau$ و $G\tau$ ایدآل اصلی تولیدشده توسط G در نیم‌حلقه τ باشد. در این‌صورت:

الف) $G\tau = \{H \in \tau : H \subseteq G\}$؛

ب) $G\tau$ یک z–ایدآل است.

اثبات: الف) بدیهی است.

ب) به‌راحتی می‌توان نشان داد که $G\tau = \bigcap_{x \in X \setminus G} M(x)$. از طرفی بنا به قسمت (الف) قضیه (۵)، ایدآل $M(x)$ یک ایدآل ماکسیمال و بنابراین z–ایدآل است. در نتیجه $G\tau$ نیز یک z–ایدآل است.

لم ۶: گیریم (X, τ) یک فضای توپولوژی T_1 و $x \in X$ منفرد باشد، یعنی $\{x\} \in \tau$. در این‌صورت در نیم‌حلقه τ داریم $M_{\{x\}} = \{\varnothing, \{x\}\}$.

اثبات: گیریم $G \in M_{\{x\}}$ و به فرض خلاف که $G \neq \varnothing$ و $G \neq \{x\}$. پس $y \in G$ وجود دارد که $y \neq x$. قرار می‌دهیم $V = X \setminus \{y\}$، چون X یک فضای T_1 است، پس $V \in \tau$ و هم‌چنین $V \cup \{x\} = V \neq X$. اما چون $y \in G$، پس $G \cup V \supseteq (X \setminus \{y\}) \cup \{y\} = X$ که در تناقض است با این‌که $G \in M_{\{x\}}$.

لم ۷: فرض کنیم S مجموعه نقاط منفرد فضای (X, τ) باشد. اگر فضا T_1 و $S \neq X$ متناهی باشد، آن‌گاه در نیم‌حلقه τ گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) مجموعه توانی S، یعنی $P(S)$ یک ایدآل τ است.

ب) $M_{P(S)} = M_S = P(S)$.

پ) $P(S)$ یک z−ایدآل است.

اثبات: الف) واضح است که $P(S)\subseteq \tau$ و $P(S)\neq \tau$. گیریم $A,B\in P(S)$، پس $A,B\subseteq S$ و بنابراین $A+B=A\bigcup B\subseteq S$، در نتیجه $A+B\in P(S)$. هم‌چنین اگر $A\in P(S)$ و $B\in \tau$، آن‌گاه $AB=A\bigcap B\subseteq A\subseteq S$؛ بنابراین $AB\in P(S)$.

ب) با توجه به لم قبل داریم $M_{P(S)}=M_{\{A:\,A\subseteq S\}}=M_{\bigcup\{A:\,A\subseteq S\}}=M_S$. اکنون نشان می‌دهیم $M_{P(S)}=M_S=P(S)$. گیریم $A\in P(S)$ و $M\in Max(\tau)$ و $P(S)\subseteq M$. در این‌صورت $A\in M$. بنابراین $A\in M_{P(S)}$؛ یعنی $P(S)\subseteq M_{P(S)}$. اکنون گیریم $G\in M_S$؛ ادعا می‌کنیم $G\in P(S)$. به فرض خلاف که چنین نباشد، پس $G \nsubseteq S$. بنابراین $y\in G$ وجود دارد که $y\notin S$. قرار می‌دهیم $V=X\setminus\{y\}$. واضح است که $V\in\tau$ و $S\subseteq V$، بنابراین $V\bigcup S=V\neq X$، پس با توجه به این‌که $G\in M_S$ باید داشته باشیم $G\bigcup V\bigcup S\neq X$، که چنین نیست.

پ) با توجه به قسمت (ب) بدیهی است.

فرض کنیم R یک نیم‌حلقه باشد و $S\subseteq R$، در این‌صورت مجموعه $Ann(S)=\{r\in R:\ ra=\circ,\ \forall a\in S\}$ را پوچساز S می‌نامیم. اگر $S=\{r\}$، آن‌گاه به جای $Ann(\{r\})$ می‌نویسیم $Ann(r)$. در این ارتباط گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) عضو $\circ_R$ جاذب است اگر و تنها اگر $Ann(\circ_R)=R$.

ب) اگر $\circ_R$ جاذب باشد، آن‌گاه $\circ_R\in Ann(r)$، برای هر $r\in R$.

پ) اگر $a\neq\circ_R$ جاذب باشد و $a\in S\subseteq R$، آن‌گاه $Ann(S)=\varnothing$.

در مثال (۲) داریم $Ann(P)=Ann(M)=\varnothing$ و $Ann(\circ)=[\circ,\infty)$ آشکار است که این مجموعه‌ها ایدآل نیستند. اما در نیم‌حلقه‌های مثبت، برای هر $r\in R$ مجموعه $Ann(r)$ یک ایدآل است و اگر علاوه بر آن نیم‌حلقه نیم‌ساده نیز باشد، آن‌گاه z−ایدآل است، چنان که در قضیه بعد می‌بینیم.

قضیه ۸: فرض‌کنیم R یک نیم‌حلقه مثبت و نیم‌ساده باشد و $r\in R$. در این‌صورت $Ann(r)$ یک z−ایدآل است.

اثبات: برای این منظور گیریم $a\in Ann(r)$، پس $ar=\circ$، بنابراین $M_{ar}=M_\circ=Jac(R)=\{\circ\}$. اکنون اگر $x\in M_a$، آن‌گاه $xr\in M_{ar}=\{\circ\}$. در نتیجه $xr=\circ$، یعنی $x\in Ann(r)$، بنابراین $M_a\subseteq Ann(r)$.

اگر P یک ایدآل اول نیم‌حلقه مثبت R باشد، آن‌گاه مجموعه $A_P=\{r\in R:\exists\, a\in R\setminus P, ra=\circ\}$ یک ایدآل و اگر علاوه بر آن R نیم‌ساده نیز باشد، آن‌گاه یک z-ایدآل است. زیرا اگر $s\in A_P$، آن‌گاه $a\notin P$ وجود دارد که $as=\circ$. بنابراین $M_{as}=M_\circ=Jac(R)=\{\circ\}$. اکنون اگر $x\in M_s$، آن‌گاه $xa\in M_{as}$ و درنتیجه $xa=\circ$. اما $a\notin P$ و ازاین‌رو $x\in A_P$؛ یعنی $M_s\subseteq A_P$.

نکته ۱: یکی از ویژگی‌های حلقه‌ی $C(X)$ و طبیعتاً نیم حلقه‌ی $C^+(X)$، آن است که در این حلقه هر z-ایدآل شامل یک ایدآل اول، خود ایدآلی اول است. اما این حقیقت به‌طور کلی در مبحث نیم‌حلقه‌ها برقرار نیست. به‌عنوان نمونه در مثال (۴) ایدآل‌های ماکسیمال M_1 و M_2 هر دو z-ایدآل هستند، در نتیجه اشتراک آن‌ها، یعنی ایدآل $Q=M_1\bigcap M_2$، نیر یک z-ایدآل است که شامل ایدآل اول P است، اما خود یک ایدآل اول نیست. زیرا $A_1=(\circ,a)\notin Q$ و $A_2=(-a,\circ)\notin Q$، در صورتی‌که

$$A_1A_2=A_1\bigcup A_2=(-a,\circ)\bigcup(\circ,a)\in Q\,.$$

در مثال بعد می‌بینیم که ایدآل I، معرفی شده در مثال (۴) ، z-ایدآل نیست.

مثال ۷: در فضای توپولوژی معمولی $(\mathbb{R},\tau)$ نیم‌حلقه τ قسمت (پ) مثال (۱) را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که ایدآل $I=\{G\in\tau:\ \exists a>\circ,\ (\circ,a)\subseteq G\}$ یک z-ایدآل نیست. گیریم $G\in I$، پس $a>\circ$ وجود دارد که $(\circ,a)\subseteq G$. اکنون ادعا می‌کنیم $M_G\nsubseteq I$. قرار می‌دهیم $H=\mathbb{R}\setminus A$ که در آن $A=\{\circ,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$. چون A بسته است، پس H باز است، یعنی $H\in\tau$. ابتدا نشان می‌دهیم $H\notin I$. زیرا اگر $H\in I$، آن‌گاه $b>\circ$ وجود دارد که $(\circ,b)\subseteq H$. حال بنا بر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی n وجود دارد، به طوری‌که $\frac{1}{n}<b$، از این‌رو $\frac{1}{n}\in H$ که تناقض است. اکنون نشان می‌دهیم $H\in M_G$. ابتدا اشاره کنیم که بنا بر قضیه (۲) داریم:

$$M_G=\{H\in\tau:\ \forall V, V\bigcap G\neq\varnothing\ \Rightarrow\ V\bigcap G\bigcap H\neq\varnothing\}.$$

گیریم $\varnothing \neq V \in \tau$ طوری باشد که $V \bigcap G \neq \varnothing$. باید نشان دهیم $V \bigcap G \bigcap H \neq \varnothing$. چون G و V هر دو بازند، پس $V \bigcap G = B$ یک مجموعه ناشماراست، که این نتیجه می‌دهد $V \bigcap G \bigcap H = B \bigcap H \neq \varnothing$، زیرا در غیر این‌صورت، یعنی اگر $B \bigcap H = \varnothing$، آن‌گاه باید داشته باشیم $B \subseteq \mathbb{R} \setminus H = A$ که تناقض است؛ زیرا B ناشمارا و A شماراست. بنابراین I یک z−ایدآل نیست. اما اشاره کنیم که I یک ایدآل نیم اول است.

مثال ۸: به‌طور کاملاً مشابه با مثال قبل، می توان نشان داد که ایدآل‌های J و P در مثال (۴) z−ایدآل نیستند. واضح است که P یک ایدآل اول و یک ایدآل قوی است. ابتدا نشان می‌دهیم این نیم‌حلقه نیم‌ساده نیست، برای این منظور مجموعه‌های H و A مثال قبل را در نظر می‌گیریم. واضح است که H باز است و $H \neq \mathbb{R}$. اگر $\varnothing \neq G \in \tau$ موجود باشد که $G \bigcap H = \varnothing$، آن‌گاه باید $G \subseteq A$ که تناقض است؛ زیرا G ناشمارا و A شماراست. بنابراین طبق نتیجه (۲) نیم‌حلقه τ، نیم‌ساده نیست. اکنون نشان می‌دهیم که P ایدآل اول مینیمال است. برای این منظور گیریم $V \in P$، پس $\circ \in V$ و بنابراین $\circ < a \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $(-a, a) \subseteq V$. حال طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $\frac{1}{n} < a$. اکنون قرار می‌دهیم $U = (-\infty, -a + \frac{1}{n}) \bigcup (a - \frac{1}{n}, \infty)$، در این‌صورت بدیهی است که $\circ \notin U \in \tau$، پس $U \notin P$ و به‌علاوه $U \bigcup V = \mathbb{R}$ یا $UV = \circ$. یعنی P اول مینیمال است، اما z−ایدآل نیست.

در مثال بعد که همان مثال (۹.۲۶) مرجع [۱] است نیم‌حلقه‌ی مثبتی ارائه می‌کنیم که گلفاند نیز است. به‌علاوه ایدآل‌های قوی معرفی می‌کنیم که z−ایدآل نیستند.

مثال ۹: مجموعه $R = \mathbb{N} \bigcup \{\infty\}$ با دو عمل جمع و ضرب تعریف شده در زیر یک نیم‌حلقه است.

$$a \oplus b = Max\{a, b\}$$

$$a \otimes b = Min\{a, b\}$$

که در آن $\circ_R = 1$ و $1_R = \infty$. در این نیم‌حلقه گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) واضح است که نیم‌حلقه R هم مثبت و هم ساده است.

ب) بدیهی است که محموعه $\mathbb{N}$ و هر مجموعه به شکل $I_r = \{a \in R : a \leq r\}$ که در آن $r \in \mathbb{N}$، یک ایدآل R است.

پ) تنها ایدآل‌های R مجموعه‌های قسمت (ب) هستند؛ زیرا اگر $I \neq \mathbb{N}$ ایدآل R باشد، آن‌گاه با فرض این‌که $r+1$ کوچک‌ترین عضو با خاصیت $r+1 \in \mathbb{N} \setminus I$ باشد، نتیجه می‌شود که $r \in I$. اکنون ادعا می‌کنیم $I = I_r$. اگر $a \in I_r$، آن‌گاه $a \leq r$، بنابراین $r \otimes a = a \in I$. حال اگر $a \in I$، آن‌گاه $a \leq r$؛ چرا که در غیر این‌صورت باید داشته باشیم $r < a$ یا $r+1 \leq a$، اما در این حالت داریم $(r+1) \otimes a = r+1 \in I$ که درست نیست.

ت) ایدآل‌های R یک زنجیر اکید، صعودی و شمارا به شکل $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset \mathbb{N}$ تشکیل می‌دهند.

ث) هر ایدآل به شکل I_r به وضوح ایدآلی اول است و $\mathbb{N}$ تنها ایدآل ماکسیمال نیم‌حلقه است که شامل تمام I_rهاست. بنابراین هر ایدآل اول نیم‌حلقه، در یک ایدآل ماکسیمال یکتا قرار می‌گیرد. یعنی R یک نیم‌حلقه گلفاند است.

ج) با توجه به قضیه (۲)، برای هر $a \in \mathbb{N}$ نتیجه می‌شود که $M_a = \mathbb{N}$. پس $\mathbb{N}$ یک z–ایدآل و در واقع تنها z–ایدآل این نیم‌حلقه است. زیرا ایدآل‌های I_r اگر بخواهند z–ایدآل باشند، باید شامل $M_{\circ_R} = M_1 = \mathbb{N}$ باشند که چنین نیست. اما این ایدآل‌ها به‌طور بدیهی قوی هستند.

چ) چون $M_{\circ_R} = M_1 = Jac(R) = \mathbb{N}$، پس این نیم‌حلقه نیم‌ساده نیست، اما آشکارا ایدآل I_1 یک ایدآل اول مینیمال این نیم‌حلقه است، در حالی‌که z–ایدآل نیست.

در پایان، پرسشی را که در متن مقاله، فعلاً بی پاسخ مانده است یک بار دیگر بیان می‌کنیم. اما پیش از آن تذکری در پیوند با آن بیان می‌کنیم.

تذکر ۴: در نیم‌حلقه R، وجود ایدآل ماکسیمال فاقد صفر معادل با وجود z–ایدآل فاقد صفر است. هم‌چنین وجود ایدآل ماکسیمال فاقد صفر، تضمین می‌کند که $\circ_R$ جاذب نیست. اما عکس گزاره برقرار نیست، زیرا در مثال (۲) دیدیم که $\circ_R$ جاذب نیست، اما تنها ایدآل ماکسیمال آن شامل صفر است.

پرسش ۱: آیا نیم‌حلقه‌ای وجود دارد که حداقل یک ایدآل ماکسیمال‌اش فاقد صفر باشد؟

قدردانی

در این‌جا لازم است تا از داوران محترم، به‌ویژه داور نهایی که با دقت و حوصله مقاله را بررسی کردند و با نظرات سازنده و پیشنهادات مفید خود، باعث پخته‌تر شدن محتوای مقاله گردیدند قدردانی کرده و سپاسگزار دقت نظرشان باشم.

مراجع

[1] Golan, J.S. (1999). *Semirings and their applications*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.

[2] Slowikowski, W. and Zawadowski, W. (1955). A generalizayion of maximal ideals method of Stone and Gelfand, *Fundamenta Mathematicae*, **42(**2), 215-231.

[3] Willard, S. (1970). *Genernl Topology*, Addison Wesly, Reading Mass.

[4] Gillman, L. and Jerison, M. (1960). *Rings of continuous functions*, Van. Nostrand Reinhold, New York.

[5] Atiyah, M.F. and MacDonald, I.G. (1969). *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading Mass.

[6] Azarpanah, F. and Mohamadian, R. (2007). $\sqrt{\mathbf{z}}$-ideals and $\sqrt{\mathbf{z}^{\circ}}$-ideals in C(X), *Acta Mathematica Sinica.*(*Engl. Ser.*), **23**, 989-996.

[7] Mason, G. (1973). z-ideals and prime ideals, *Journal of Algebra*, **26**, 280-297.

[8] Aliabad, A.R. and Mohamadian, R. (2011). sz°-ideals in polynomial rings, *Communication in Algebra***,** Taylor & Francis Group, LLC, **39**(2), 701-717.

[9] Allen, P.J., Neggers, J. and Kim, H.S. (2006). Ideal theory in commutative A-semirings, *Kyungpook Mathematical. Journal*, **46**, 261-271.

[10] Ebrahimi Atani, S., Ebrahimi Sarvandi, Z. and Shajari Kohan, M. (2013). On primary ideals of commutative semirings, *Romanian Journal of mathematics and computer science,* **3**, 71-81.

[11] Sen, M.K. and Adhikari, M.R. (1993). On maximal k-ideals of semirings, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **118**(3), 699-703.

[12] Ruza, L.M. and Vielma, J. (2009). Gelfand semirings, m-semirings and the zariski topology, *International Journal of Algebra,* **3**(20), 981-991.

[13] Smith, F.A. (1965). *A structure theory for a class of lattice ordered semirings*, Doctoral Dissertation, Purdue University, Lafayette, Ind., 1995; Dissertation Abstracts 26, 1675.

[14] Mohammadian, R. (2005). On the intersection of maximal (minimal prime) ideals containing an idempotent, *Far East Journal of Mathematical Sciences,* **19**(3), 359-365.

Positive Semirings

Rostam Mohamadian

Department of Mathematics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

Abstract

In this article we investigate the positive semirings (a semiring R is called positive if $1+x$ is unit for all $x \in R$). In fact, using the intersection of maximal ideals containing an element of a positive semiring, we give the concept of "z-ideal" in such semirings and investigate some properties of these ideals. We study the relations between topological properties of X and algebraic properties of positive semiring τ, where τ is the topology on X. Furthermore, the familiar positive semiring $C^{+}(X)$ will be studied.

Keywords: Positive Semirings, z-ideal, Subtractive ideal, Strong ideal.

Mathematics Subject Classification (2010): 16Y60, 54C40.