مقایسه بازه‌های اطمینان خودگردان برای میانگین زمان پاسخ دریک مطالعه شبیه‌سازی

حسین کاظم‌زاده قره‌چبق، بهمن تارویردی‌زاده[۱]، علیرضا افشاری‌صفوی

گروه ریاضی، واحد ماکو، دانشگاه آزاد اسلامی، ماکو، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۰/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۶/۲۳

چکیده: میانگین زمان پاسخ نقش مهمی را در تحلیل و بهینه‌سازی سامانه‌ی صف‌بندی در تعیین تعداد و نوع سرویس‌دهنده‌ها ایفا می‌کند. در این مقاله برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $M/G/1$ با الگوی ورود $FCFS$ بازه‌های اطمینانی بر اساس روش دلتای ناپارامتری و پنج روش خودگردان تولیدشده است که این روش‌ها عبارت‌اند از: بازه‌ی اطمینان به روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ، بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی نرمال، بازه‌ی اطمینان صدکی خودگردان، بازه‌ی اطمینان تی خودگران، بازه‌ی اطمینان خودگردان تصحیح اریبی شتابیده و بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی کمیت محوری. به‌منظور مقایسه‌ی این شش روش ارائه‌شده، در یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی دقت و عملکرد این بازه‌های اطمینان برای سه نوع مدل صف‌بندی متفاوت $M/G/1$ با الگوی ورود $FCFS$، بر اساس دو معیار درصد پوشش‌دهی و میانگین طول بازه‌های اطمینان موردبررسی قرارگرفته است.

واژه‌های کلیدی: صف‌بندی، بازه‌ی اطمینان بر اساس کمیت محوری، روش دلتای ناپارامتری، تابع نفوذ، میانگین زمان پاسخ.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۴۰، ۶۲G۱۵.

۱- مقدمه

بهینه‌سازی مدل‌های صف‌بندی معمولاً بر اساس معیارهای مؤثر بودن[۱] انجام می‌گیرد. یکی از مهم‌ترین این معیارها میانگین زمان پاسخ[۲] است، زیرا بر اساس آن متقاضیان تصمیم می‌گیرند

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: بهمن تارویردی‌زاده bahtary@gmail.com

که به سامانه وارد شوند یا نه. اما برای به دست آوردن این معیار لازم است متغیرهای موجود در مدل شناسایی و سپس توزیع این متغیرها به دست آورده شوند. با توجه به این‌که توزیع زمان سرویس در بعضی از مدل‌های صف‌بندی کلی بوده و شکل ساده و بسته‌ای برای آن یافت نمی‌شود، لذا در مسائل کاربردی نمی‌توان این معیارهای مؤثر بودن را محاسبه کرد. یکی از روش‌های معمول برای تحلیل، بررسی و برآورد معیارهای مؤثر بودن در این شرایط، استفاده از روش خودگردان[۲] است. این روش یکی از روش‌های تولید نمونه به شیوه‌ی با جایگذاری است برای زمانی که توزیع داده‌ها نامعلوم باشد.

در بررسی مدل‌های صف‌بندی، مبحث‌های استنباط آماری به‌ندرت یافت می‌شود و کارهای انجام‌شده بر روی چنین مسئله‌هایی بیش‌تر از طریق استنباط آماری پارامتری انجام‌گرفته است. به‌طوری‌که در این نوع استنباط توزیع جامعه معلوم فرض می‌شود. بررسی استنباط آماری از این طریق بر روی پارامترهای مدل‌های صف‌بندی توسط افرادی انجام‌گرفته است. نخستین بار، مسئله‌ی برآورد پارامترها در مدل‌های صف‌بندی، توسط کلارک [۱] مطرح شد. وی برآورد ماکسیمم درستنمایی برای نرخ ورود و سرویس در یک مدل صف‌بندی $M/M/1$ را موردمطالعه قرار داد، که M اول نشان‌دهنده‌ی این است که توزیع مدت‌زمان بین دو ورود نمایی، M دوم ارائه‌کننده‌ی این است که الگوی توزیع احتمال زمان سرویس نیز نمایی و عدد یک نشان‌دهنده‌ی تعداد باجه‌های سرویس است. سپس لیلی‌فورس [۲] بازه‌های اطمینان در صف‌های $M/M/1$، $M/E_k/1$ و $M/M/2$ را موردبررسی قرار داد. به‌علاوه باساوا و پرابهو [۳]، دیو و شاه [۴]، جین و تمپلتون [۵]، روبین و رابسون [۶]، جین [۷]، و ابو و هریری [۸] و باساوا و همکاران [۹] در زمینه‌ی استنباط آماری بر روی مدل‌های صف‌بندی کارهای قابل‌توجهی انجام داده‌اند که بیش‌تر نرخ ورود، نرخ سرویس و میانگین تعداد متقاضیان سرویس گرفته را موردبررسی قرار داده‌اند.

از دیدگاه استنباط آماری ناپارامتری، تاکنون تعداد اندکی از پژوهشگران، مسئله‌های نظریه‌ی صف‌بندی را موردمطالعه قرار داده‌اند. افرون [۱۰ و ۱۱] به روش بازنمونه‌گیری[۳]، روش خودگردان را پیشنهاد و آن را گسترش داد. خودگردان یک روش بازنمونه‌گیری است که به‌طور مؤثری می‌توان آن را در برآورد توزیع نمونه‌ای هر آماره به کاربرد. امروزه، با توجه به هزینه‌های نمونه‌گیری و نرم‌افزارهای آماری، روش خودگردان یکی از پرطرفدارترین و تواناترین روش برآورد ناپارامتری تبدیل شده است، به‌ویژه در زمینه‌ی برآورد بازه‌ای، افرون و گانگ [۱۲]،

1- Measurement of Effectiveness
2- Bootstrap
3- Resampling

افرون و تیبشیرانی [۱۳] و افرون [۱۴] بازه‌ی اطمینان به روش خودگردان ارائه کرده‌اند. همچنین چو و کی [۱۵] در مدل صف‌بندی $M/G/1$ به بررسی بازه‌های اطمینان برای میانگین زمان پاسخ به روش خودگردان پرداختند و چو و کی [۱۶] برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $G/G/1$ چهار بازه‌ی اطمینان خودگردان را ایجاد کردند.

هدف این مقاله، تحقیق و بررسی برآورد بازه‌ای برای میانگین زمان پاسخ بر اساس روش خودگردان و روش دلتای ناپارامتری است. در بخش دوم، ابتدا یک برآوردگر نقطه‌ای برای میانگین زمان پاسخ مدل صف‌بندی $M/G/1$ با الگوی ورود $FCFS$ [۱] (نشان‌دهنده‌ی این است که نظم صف برای دریافت سرویس به ترتیب ورود افراد می‌باشد) به دست آورده می‌شود. سپس در بخش سوم، به‌عنوان مقدمه‌ای برای ورود به بخش اصلی مقاله، تابع نفوذ[۲] و تابع نفوذ تجربی شرح داده می‌شوند. در بخش چهارم، تابع نفوذ و تابع نفوذ تجربی برای میانگین زمان پاسخ به دست آورده می‌شود و با استفاده از روش دلتای ناپارامتری[۳] یک بازه‌ی اطمینان برای میانگین زمان پاسخ ایجاد می‌شود. در بخش پنجم، برآورد خودگردان میانگین زمان پاسخ بررسی می‌شود و سپس بازه‌های اطمینان به پنج روش خودگردان را برای میانگین زمان پاسخ به دست آورده می‌شود. در بخش ششم، بازه‌ی اطمینان خودگردان و روش دلتای ناپارامتری به روش شبیه‌سازی برای سه مدل صف‌بندی را محاسبه کرده و سپس بر اساس درصد پوشش و میانگین طول بازه‌ها عملکرد آن‌ها موردبررسی قرار می‌گیرد. درنهایت در بخش هفتم، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی درباره‌ی روش‌های خودگردان و روش دلتای ناپارامتری برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $M/G/1$ ارائه می‌شود.

۲- برآورد میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $M/G/1$

فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه‌ای تصادفی از X با تابع توزیع $F(.)$ و همچنین $Y_1,...,Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از Y با تابع توزیع $H(.)$ باشند، به‌طوری‌که X دارای توزیع نمایی با میانگین $1/\lambda$ بوده و از Y مستقل است. در اینجا نماد (X_i,Y_i) برای نمایش زمان‌های بین دو ورود متوالی و سرویس برای iامین متقاضی از یک مدل صف‌بندی $M/G/1$ بانظم $FCFS$ به کار می‌رود. بنابراین متوسط تعداد متقاضیان در سامانه برابر است با :

$$E(N)=\rho+\frac{\lambda^2 E(Y^2)}{2(1-\rho)} \tag{۱}$$

1 -First come first served
2 -Influence function
3 -Nonparametric delta method

که در آن N تعداد متقاضیان در سامانه در هرلحظه از زمان، $\rho = \lambda E(Y)$ شدت ترافیک (ضریب بهره‌وری)، $E(Y)$ میانگین زمان سرویس، $E(Y^2)$ نشان‌دهنده‌ی گشتاور مرتبه‌ی دوم توزیع $H(.)$ هستند.

حال فرض کنید R نشان‌دهنده‌ی زمان پاسخ در حالت پایا است. برای محاسبه‌ی میانگین زمان پاسخ یعنی $E(R)$، از رابطه‌ی معروف لیتل استفاده می‌کنیم که در آن $E(N)$ نشان‌دهنده‌ی میانگین تعداد متقاضیان در یک سامانه‌ی صف‌بندی در حالت پایا است و به‌صورت حاصل‌ضرب نرخ ورود در میانگین زمان پاسخ تعریف می‌شود. این رابطه عبارت است از $E(N) = \lambda E(R)$. بنابراین، $E(R)$ برابر است با:

$$E(R) = \frac{E(N)}{\lambda} = E(Y) + \frac{\lambda E(Y^2)}{2(1-\rho)}$$
$$= E(Y) + \frac{E(Y^2)}{2(\lambda^{-1} - E(Y))}.$$

حال فرض کنید $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ به ترتیب میانگین‌های نمونه‌ای $X_1,\ldots,X_n$ و $Y_1,\ldots,Y_n$، همچنین $m_2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 / n$ نشان‌دهنده‌ی گشتاور مرتبه‌ی دوم نمونه‌ای $Y_1,\ldots,Y_n$ باشد. بنا بر قانون قوی اعداد بزرگ $\bar{X}$، $\bar{Y}$ و m_2 به ترتیب برآوردگرهای سازگار قوی از $1/\lambda$، $E(Y)$ و $E(Y^2)$ هستند. بنابراین، یک برآوردگر برای $E(R)$، برابر است با:

$$\hat{r} = \bar{Y} + \frac{m_2}{2(\bar{X} - \bar{Y})}$$

که بنا بر قضیه اسلاتسکی و قضیه‌ی حد مرکزی یک برآوردگر سازگار قوی از $E(R)$ است و به‌طور تقریبی دارای توزیع نرمال می‌باشد. در ادامه برای سادگی از نماد r برای نشان دادن $E(R)$ استفاده می‌کنیم.

۳- تابع نفوذ

تابع نفوذ برای تقریب خطای استاندارد مورداستفاده قرار می‌گیرد. برای آشنایی با تابع نفوذ مطالبی در زیر ارائه می‌شود. ابتدا مشتق گته ایکس[1] را معرفی کرده و سپس تابع نفوذ و تابع

1- Gateaux derivative

نفوذ تجربی ارائه می‌شود. در انتهای این بخش نیز برخی از ویژگی‌های تابع نفوذ را ارائه می‌کنیم.

تعریف۱: مشتق گته‌ایکس $T(F)$ در جهت G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_F(G)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T((1-\varepsilon)F+\varepsilon G)-T(F)}{\varepsilon}.$$

اگر $G=\delta_x$ یک نقطه‌ی چگال در x باشد، بنابراین، می‌نویسیم $L_F(x)\equiv L_F(\delta_x)$ و آن را تابع نفوذ می‌نامیم. در این صورت:

$$L_F(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T((1-\varepsilon)F+\varepsilon\delta_x)-T(F)}{\varepsilon}.$$

تابع نفوذ تجربی نیز به‌صورت $\hat{L}(x)=L_{\hat{F}_n}(x)$ تعریف می‌شود و برابر است با:

$$\hat{L}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T((1-\varepsilon)\hat{F}_n+\varepsilon\delta_x)-T(\hat{F}_n)}{\varepsilon}.$$

در تمامی رابطه‌های بالا منظور از $T(F)$ هر تابعی از $F(x)$ است.

اکنون برای به دست آوردن یک بازه‌ی اطمینان به روش دلتای ناپارامتری اگر فرض کنید $T(F)=\int a(x)dF(x)$، $\tau^2=\int L_F^2(x)\,dF(x)=\int (a(x)-T(F))^2 dF(x)$ و $\hat{\tau}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{L}^2(x_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a(x_i)-T(\hat{F}_n))^2$ باشد، در این صورت

$$\sqrt{n}\left(T(F)-T(\hat{F}_n)\right)\to N(0,\tau^{?})$$

و

$$\hat{\tau}^2\xrightarrow{P}\tau^2,\quad \frac{\hat{Se}}{Se}\xrightarrow{P}1$$

که در آن $Se=\sqrt{Var(\hat{T}(F_n))}$ و $\hat{\mathrm{Se}}=\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}}$. بنابراین یک بازه‌ی اطمینان به روش دلتای ناپارامتری برای $T(F)$ برابر است با [۱۷]:

$$T(\hat{F}_n)\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\hat{Se}\right).$$

۴- تابع نفوذ، تابع نفوذ تجربی و برآورد بازه‌ای برای میانگین زمان پاسخ مدل صف‌بندی $M/G/1$

در این بخش با ارائه یک قضیه تابع نفوذ برای میانگین زمان پاسخ مدل صف‌بندی $M/G/1$ به دست آورده می‌شود. سپس با استفاده از روش دلتای ناپارامتری بازه‌ی اطمینان برای میانگین زمان پاسخ ارائه می‌شود.

قضیه ۱: اگر $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از X با تابع توزیع $F(.)$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از Y با تابع توزیع $H(.)$ باشد در این صورت تابع نفوذ X و Y برابر است با:

$$L(x,y)=\left[T(F)-E(y)\right]\ (a+b-c)$$

که در آن

$$a=\left\{\frac{2\left[E(x)-E(y)\right]}{E(y^2)}+\frac{1}{E(x)-E(y)}\right\}\ \left[y-E(y)\right]$$

$$b=\frac{y^2-E(y^2)}{E(y^2)}$$

$$c=\frac{x-E(x)}{E(x)-E(y)}.$$

اثبات: ابتدا $T(F)$ با استفاده از رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(F)=E(y)+\frac{E(y^2)}{2\left[E(x)-E(y)\right]}$$

به بیانی دیگر می‌توان نوشت:

$$T(F)=T_1(F)+\frac{T_2(F)}{2\left[(T_3(F)-T_1(F)\right]}$$

که در آن $T(F)$ تابعی از $T_1(F)$ و $T_2(F)$ و $T_3(F)$ است به این معنی که:

$$T(F)=a\left[T_1(F),T_2(F),T_3(F)\right]$$

و در آن

$$T_1(F)=\int y dF=\delta_1,\quad T_2(F)=\int y^2 dF=\delta_2,\quad T_3(F)=\int x\, dF=\delta_3$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای، تابع نفوذ به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$L(x)=\sum\frac{\partial a}{\partial t_i}L_i(x)$$

به‌طوری‌که

$$L_i(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\ \frac{T_i((1-\varepsilon)F+\varepsilon\delta_x)-T_i(F)}{\varepsilon}.$$

حال اگر $a(t_1,t_2,t_3)=t_1+\dfrac{t_2}{2(t_3-t_1)}$ باشد، در این صورت:

$$\frac{\partial a}{\partial t_1}=1+\frac{t_2}{2(t_3-t_1)^2},\quad L_1(y)=a(y)-T_1(F)=y-\int ydF \tag{۲}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t_2}=\frac{1}{2(t_3-t_1)},\quad L_2(y)=a(y)-T_2(F)=y^2-\int y^2dF \tag{۳}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t_3}=-\frac{t_2}{2(t_3-t_1)^2},\ L_3(x)=a(x)-T_3(F)=x-\int x\ dF \tag{۴}$$

سپس با جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) و (۴) در $L(x)$ داریم:

$$L(x,y)=(1+\frac{t_2}{2(t_3-t_1)^2})L_1(y)+\frac{1}{2(t_3-t_1)}L_2(y)-\frac{t_2}{2(t_3-t_1)^2}\ L_3(x)$$

که با قرار دادن t_1، t_2، t_3، $L_1(x)$، $L_2(y)$ و $L_3(y)$ از رابطه‌های به‌دست‌آمده، $L(x,y)$ به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$L(x,y)=\left\{1+\frac{E(y^2)}{2\left[E(x)-E(y)\right]^2}\right\}\left[y-E(y)\right]+\frac{1}{2\left[E(x)-E(y)\right]}\left[y^2-E(y^2)\right]$$
$$-\frac{E(y^2)}{2\left[E(x)-E(y)\right]^2}\ \left[x-E(x)\right]$$

حال پس از ساده کردن رابطه بالا تابع نفوذ برحسب تابعی از $T(F)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$L(x,y)=(T(F)-E(y))\left\{\left[\frac{2(E(x)-E(y))}{E(y^2)}+\frac{1}{[E(x)-E(y)]}\right)(y-E(y)\right]$$
$$+\frac{y^2-E(y^2)}{E(y^2)}-\frac{x-E(x)}{E(x)-E(y)}\right\}$$

و با توجه به تعریف a,b,c تابع نفوذ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$L(x,y)=[T(F)-E(y)]\ (a+b-c)$$

برای به دست آوردن بازه‌ی اطمینان میانگین زمان پاسخ به روش دلتای ناپارامتری، با استفاده از تابع نفوذ میانگین زمان پاسخ ، تابع نفوذ تجربی آن با استفاده از قضیه‌ی بالا به دست آورده می‌شود که برابر است با $\hat{L}(X_i,Y_i)=(T(\hat{F}_n)-\bar{Y})\left(A+B-C\right)$، که در آن:

$$A=\left(\frac{2(\bar{X}-\bar{Y})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}+\frac{1}{\bar{X}-\bar{Y}}\right)(Y_i-\bar{Y}),\quad B=\frac{Y_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2},\quad C=\frac{X_i-\bar{X}}{\bar{X}-\bar{Y}}$$

بنابراین، بازه‌ی اطمینان میانگین زمان پاسخ برای مدل صف‌بندی $M/G/1$ بر اساس روش دلتای ناپارامتری برابر است با:

$$\left(\bar{Y}+\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}{2(\bar{X}-\bar{Y})}\right)\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\hat{L}^2(X_i,Y_i)}\ .$$

۵- روش خودگردان

این روش، یک روش نمونه‌گیری با جایگذاری است. در این روش، هدف تعیین برآوردی برای واریانس آماره‌ی موردنظر می‌باشد. به‌علاوه از این روش برای ساختن بازه‌های اطمینان نیز استفاده می‌شود. برای این منظور، فرض کنید $T_n=g(X_1,\dots,X_n)$ آماره‌ی موردنظر باشد. جهت محاسبه‌ی واریانس برآورد کننده‌ی $T_n=g(X_1,\dots,X_n)$، گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

۱. نمونه‌ی تصادفی $X_1^*,\dots,X_n^*$ را از تابع توزیع تجربی $\hat{F}_n$ انتخاب می‌کنیم،

۲. بر اساس نمونه‌ی $X_1^*,\ldots,X_n^*$، تابع $T_n^*=g(X_1^*,\ldots,X_n^*)$ محاسبه می‌شود،

۳. گام‌های ۱ و ۲، B بار تکرار می‌شوند و بر اساس تکرارها $T_{n,1}^*,\ldots,T_{n,B}^*$ نیز محاسبه می‌شوند.

توجه داشته باشید، ازآنجاکه $\hat{F}_n$ احتمال $\frac{1}{n}$ را به هر داده نسبت می‌دهد، لذا تولید نمونه‌ای تصادفی n تایی با جایگذاری از $\hat{F}_n$، با تولید نمونه‌ای تصادفی n تایی با جایگذاری از داده‌های اصلی یکسان است، پس می‌توان گام ۱را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

۱. نمونه‌ی $X_1^*,\ldots,X_n^*$ با جایگذاری از $X_1,\ldots,X_n$ انتخاب می‌شود،

۴. واریانس برآورد کننده‌ی آماره‌ی موردنظر، یعنی V_{boot}، به شیوه‌ی خودگردان به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{boot}=\frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}(T_{n,b}^*-\frac{1}{B}\sum_{r=1}^{B}T_{n,r}^*)^2.$$

۵-۱- برآورد خودگردان میانگین زمان پاسخ مدل صف $M/G/1$

فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$، نمونه‌ای از جامعه‌ای با توزیع $F(.)$، و همچنین $Y_1,\ldots,Y_n$ نیز نمونه‌ی دیگری از جامعه‌ای با توزیع $H(.)$ باشند. بر اساس روش خودگردان $X_1^*,\ldots,X_n^*$، یک نمونه‌ی خودگردان است که از تابع توزیع تجربی که بر اساس $X_1,\ldots,X_n$ محاسبه‌شده است، به دست آورده‌ایم و به طریق مشابه نمونه‌های خودگردان $Y_1^*,\ldots,Y_n^*$ نیز به دست آورده می‌شود. با توجه به مطالب فوق، برآورد میانگین زمان پاسخ بر اساس نمونه‌های خودگردان به‌صورت زیر است:

$$\hat{\mathrm{r}}^*=\bar{\mathrm{Y}}^*+\frac{\mathrm{m}_2^*}{2(\bar{\mathrm{X}}^*-\bar{\mathrm{Y}}^*)}.$$

در رابطه‌ی بالا $\bar{\mathrm{X}}^*$ و $\bar{\mathrm{Y}}^*$، به ترتیب میانگین‌های نمونه‌ای از $X_1^*,\ldots,X_n^*$ و $Y_1^*,\ldots,Y_n^*$ و m_2^* گشتاور دوم نمونه‌ای $Y_1^*,\ldots,Y_n^*$ هستند و $\hat{r}^*$ برآورد خودگردان $\hat{r}$ نامیده می‌شود. فرایند بازنمونه‌گیری بالا می‌تواند چندین بار تکرار شود. فرض کنید این فرایند B بار تکرار شده است. در این صورت، برآوردهای خودگردان $\hat{r}_1^*,\ldots,\hat{r}_B^*$، را نیز می‌توان از نمونه‌های به‌دست‌آمده از روش بازنمونه‌گیری محاسبه نمود. با محاسبه‌ی میانگین $\hat{r}_1^*,\ldots,\hat{r}_B^*$، داریم:

$$\hat{r}_B = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{r}_B^*$$

که برآورد خودگردان r (میانگین زمان پاسخ) است و خطای استاندارد $\hat{r}_B$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$se(\hat{r}_B) = \left\{\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}(\hat{r}_i^* - \hat{r}_B)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

۵-۲- برآورد خودگردان بازه‌ی اطمینان میانگین زمان پاسخ مدل صف $M/G/1$

در بخش‌های قبل، برای مدل صف‌بندی $M/G/1$، برآورد خودگردان میانگین زمان پاسخ را بررسی کردیم. حال بازه‌های اطمینان خودگردان برای میانگین زمان پاسخ را در مدل صف‌بندی $M/G/1$ با نظم ورودی $FCFS$، می‌سازیم. این بازه‌های اطمینان در ادامه آورده می‌شود.

۵-۲-۱- بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی نرمال

با توجه به قضیه‌ی حد مرکزی، $\hat{r}$ (برآورد میانگین زمان پاسخ) دارای توزیع تقریبی نرمال است. بنابراین یک بازه‌ی اطمینان خودگردان[1] (SB) به شیوه‌ی نرمال برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $M/G/1$ به‌صورت زیر است:

$$(\hat{r} - Z_{\frac{\alpha}{2}}.se(\hat{r}_B), \hat{r} + Z_{\frac{\alpha}{2}}.se(\hat{r}_B))$$

که در بازه‌ی اطمینان بالا $Z_{\frac{\alpha}{2}}$، چندک $\alpha/2$ام از توزیع نرمال استاندارد است.

۵-۲-۲- بازه‌ی اطمینان صدکی خودگردان

اگر $\hat{r}_1^*,\ldots,\hat{r}_B^*$ توزیع‌های خودگردان از $\hat{r}$ (برآورد میانگین زمان پاسخ) و $\hat{r}_{(1)}^*,\ldots,\hat{r}_{(B)}^*$ آماره‌های ترتیبی $\hat{r}_1^*,\ldots,\hat{r}_B^*$ باشند، در این صورت با استفاده از صدک‌های $\alpha/2$ از توزیع

1- Standard Bootstarp

خودگردان، یک بازه‌ی اطمینان صدکی خودگردان[1] (PB) بر مبنای صدک‌ها برای r برابر است با:

$$(\hat{r}^*_{[(\frac{\alpha}{2})B]}, \hat{r}^*_{[(1-\frac{\alpha}{2})B]})$$

که در آن $[x]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد x است.

۵-۲-۳-بازه‌ی اطمینان تی خودگران (روش BT[12])

در این حالت به‌منظور برآورد خطای استاندارد $\hat{r}$ (برآورد میانگین زمان پاسخ)، بایستی ۲۵ نمونه‌ی دیگر خودگردان $(\tilde{X}_1^s, \tilde{Y}_1^s),...,(\tilde{X}_{25}^s, \tilde{Y}_{25}^s)$، از نمونه‌های اصلی $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (X_1,..., X_n;\ Y_1,..., Y_n)$ انتخاب شوند و سپس مطابق با هر ۲۵ نمونه‌ی خودگردان مقدارهای زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{r}_j^s = \bar{Y}_j^s + \frac{m_{2j}^s}{2(\bar{X}_j^s - \bar{Y}_j^s)}, \qquad j = 1,...,25$$

$$\hat{r}^s = \frac{1}{25}\sum_{j=1}^{25} \hat{r}_j^s$$

$$\hat{s} = \left\{\frac{1}{25}\sum_{j=1}^{25} (\hat{r}_j^s - \hat{r}^s)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

که در رابطه‌های بالا، $\bar{X}_j^s$ میانگین نمونه‌ای از $\tilde{X}_j^s$ها و $\bar{Y}_j^s$ میانگین نمونه‌ای از $\tilde{Y}_j^s$ها است. حال اگر $z_i^* = (\hat{r}_i^* - \hat{r})/\hat{s}$ برای $i = 1,...,B$ در این صورت $z_1^*,...,z_B^*$، نمونه‌ی تصادفی از توزیع تقریبی t باشند (افرون و تیبشیرانی، ۱۹۸۶)، بنابراین با به‌کارگیری صدک‌های نمونه‌های $z_1^*,...,z_B^*$، بازه‌ی اطمینان تی خودگردان[2](BT) با میزان اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای میانگین زمان پاسخ به‌صورت زیر است:

$$(\hat{r} - \hat{t}_{(1-\frac{\alpha}{2})}.se(\hat{r}_B), \hat{r} - \hat{t}_{(\frac{\alpha}{2})}.se(\hat{r}_B))$$

1- Percentile Bootstrap
2- Bootstrap-t

که در آن $\hat{t}_{(\frac{\alpha}{2})}$ صدک $\alpha/2$ام از نمونه‌های تصادفی $z_1^*,...,z_B^*$ است.

۵-۲-۴-بازه‌ی اطمینان خودگردان تصحیح اریبی شتابیده (روش BCa[1])

توزیع خودگردان $\hat{r}_1^*,...,\hat{r}_B^*$ ممکن است اریب باشد. بنابراین روش چهارم بر اساس این اریبی و همگرایی سریع توزیع خودگردان طراحی‌شده است. قرار می‌دهیم

$$p_{\circ} = \sum_{i=1}^{B} \frac{I(\hat{r}_i^* < \hat{r})}{B}$$

که در آن $I(.)$ یک تابع نشان‌گر است. تعریف می‌کنیم $\hat{z}_{\circ} = \Phi^{-1}(p_{\circ})$ باشد که در آن Φ^{-1} نشان‌دهنده‌ی تابع معکوس توزیع نرمال استاندارد Φ است. همچنین، چنانچه $\tilde{X}(i)$ و $\tilde{Y}(i)$ نمونه‌هایی باشند که در آن‌ها iامین مشاهده‌ی x_i و y_i حذف شده‌اند و $\hat{r}(i)$ برآوردگر r محاسبه‌شده با استفاده از نمونه‌های $\tilde{X}(i)$ و $\tilde{Y}(i)$ است. تعریف می‌کنیم

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{r}_c - \hat{r}(i))^3}{\left\{ 6 \left[\sum_{i=1}^{n} (\hat{r}_c - \hat{r}(i))^2 \right]^{3/2} \right\}},$$

$$\hat{r}_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{r}(i)}{n}$$

که $\hat{z}_{\circ}$ و $\hat{a}$ به ترتیب تصحیح اریبی و شتاب اریبی نامیده می‌شوند. در این صورت بازه‌ی اطمینان خودگردان تصحیح و شتاب اریبی[1] $100(1-\alpha)\%$ برای میانگین زمان پاسخ برابر است با:

$$(\hat{r}^*([\alpha_1, B]), \hat{r}^*([\alpha_2, B]))$$

که در آن

1- Bias-corrected and accelerated

$$\alpha_1 = \Phi\left(\hat{z}_\circ + (\hat{z}_\circ + z_{1-\alpha/2})\Big/\left[1-\hat{a}(\hat{z}_\circ + z_{1-\alpha/2})\right]\right)$$
$$\alpha_2 = \Phi\left(\hat{z}_\circ + (\hat{z}_\circ + z_{\alpha/2})\Big/\left[1-\hat{a}(\hat{z}_\circ + z_{\alpha/2})\right]\right).$$

۵-۲-۵- بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی کمیت محوری

فرض کنید $\theta = T(F)$ (هر تابعی از توزیع F) و $\hat{\theta}_n = T(\hat{F}_n)$ برآورد پارامتر θ باشد. کمیت محوری را به‌صورت $R_n = \hat{\theta}_n - \theta$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید $H(\theta)$ نشان‌دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی این کمیت محوری به صورت زیر باشد:

$$H(\theta) = P_F(R_n \le \theta)$$

همچنین فرض کنید $C_n^* = (c,d)$ یک بازه‌ی اطمینان برای θ باشد که در آن $c = \hat{\theta}_n - H^{-1}(1-\alpha/2)$ و $d = \hat{\theta}_n - H^{-1}(\alpha/2)$ هستند. اما c,d به توزیع H وابسته است و این توزیع نامعلوم می‌باشد. پس لازم است توزیع H نیز به روش خودگردان برآورد شود. این برآورد به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\hat{H}(\theta) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B} I(R_{n,b}^* \le \theta)$$

در رابطه‌ی بالا $R_{n,b}^* = \hat{\theta}_{n,b}^* - \hat{\theta}_n$ است. حال فرض کنید R_β^*، نشان‌دهنده‌ی چندک نمونه‌ای βام از $R_{n,1}^*,\ldots,R_{n,B}^*$ و همچنین θ_β^*، نشان‌دهنده‌ی چندک نمونه‌ای βام از $\theta_{n,1}^*,\ldots,\theta_{n,B}^*$ باشند و $R_\beta^* = \theta_\beta^* - \hat{\theta}_n$. درنتیجه $C_n = (\hat{c},\hat{d})$ یک بازه‌ی اطمینان تقریبی $100(1-\alpha)\%$ است، که در آن $\hat{c}$ و $\hat{d}$ به‌صورت زیر هستند:

$$\hat{c} = \hat{\theta}_n - \hat{H}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}) = \hat{\theta}_n - R_{1-\frac{\alpha}{2}}^* = 2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$$
$$\hat{d} = \hat{\theta}_n - \hat{H}^{-1}(\frac{\alpha}{2}) = \hat{\theta}_n - R_{\frac{\alpha}{2}}^* = 2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}}^*$$

به‌طور خلاصه، بازه‌ی اطمینان $100(1-\alpha)\%$ به شیوه‌ی کمیت محوری برای میانگین زمان پاسخ را می‌توان به‌صورت زیر ارائه کرد:

$$C_n = (2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{(1-\frac{\alpha}{2})B}^*, 2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{(\frac{\alpha}{2})B}^*).$$

۶- مطالعه‌ی شبیه‌سازی

یکی از هدف‌های اصلی روش خودگردان، ایجاد بازه‌های اطمینان خوب است. افرون و تیبشیرانی [۱۸] اشاره‌ای داشتند بر این‌که منظور از خوب بودن در مورد بازه‌های اطمینان این است که بازه‌ی اطمینان خودگردان باید عملکرد نسبتاً دقیقی در پوشش‌دهی و به دنبال آن کوتاه شدن متوسط طول بازه در همه‌ی موقعیت‌ها داشته باشد. برای بررسی عملکرد پنج روش خودگردان و روش دلتای ناپارامتری بحث شده در بخش قبل، درصد پوشش‌دهی (نسبت دفعاتی که بازه‌های اطمینان تولیدشده میانگین واقعی زمان پاسخ را پوشش می‌دهند) و متوسط طول این بازه‌های اطمینان در یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی موردبررسی قرار می‌گیرد.

برای این منظور فرض برآن است که توزیع زمان بین دو ورود، نمایی با میانگین $1/\lambda$ و زمان سرویس دارای توزیع پیوسته‌ای با میانگین $E(Y)$ است. سپس مقدارهای (۱و۰/۱)، (۱و۰/۳)، (۱و۰/۵) و (۱و۰/۷)، (۱و۰/۹) را برای زوج $(\lambda, E(Y))$ در نظر گرفته و برای هر زوج، نمونه‌های تصادفی به اندازه‌های $n=20,50,80$ تولید می‌شود و برای هراندازه‌ی نمونه‌ی انتخاب‌شده، تعداد نمونه‌های خودگردان، $B=10000$ در نظر گرفته می‌شود و با پنج روش خودگردان و روش دلتای ناپارامتری بازه‌های اطمینان خودگردان در سطح اطمینان ۹۰ درصد برای میانگین زمان پاسخ به دست آورده می‌شود. برای تولید بازه‌ی اطمینان تی خودگردان نیز، ۲۵ نمونه‌ی خودگردان دیگر به‌اندازه‌ی n از نمونه‌ی اصلی برای محاسبه‌ی خطای استاندارد برآورد شده‌ی $\hat{r}$ انتخاب‌شده است. فرایند شبیه‌سازی $N=1000$ مرتبه تکرار می‌شود و درصد پوشش و متوسط طول‌ها و انحراف استاندارد برای هر پنج بازه‌ی اطمینان خودگردان و روش دلتای ناپارامتری، محاسبه می‌شود. تمامی شبیه‌سازی‌ها در این بخش با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌نویسی R انجام‌شده است. در حقیقت در این مطالعه‌ی شبیه‌سازی، سه نوع توزیع پیوسته‌ی مختلف با میانگین $E(Y)=1$ برای زمان سرویس در نظر گرفته‌شده است که عبارت‌اند از: توزیع نمایی که با نماد M نشان داده‌شده است، توزیع فوق نمایی چهار مرحله‌ای و توزیع ارلانگ چهار مرحله‌ای. جدول (۱) تابع چگالی هر سه توزیع را ارائه می‌دهد.

جدول ۱: سه توزیع مختلف زمان سرویس

مدل‌های صف‌بندی	تابع چگالی زمان سرویس
$M/M/1$	$h(y)=\mu e^{-\mu y}$
$M/H_4/1$	$h(y)=3/8\,\mu_1 e^{-\mu_1 y}+1/8\,\mu_2 e^{-\mu_2 y}+2/8\,\mu_3 e^{-\mu_3 y}+2/8\,\mu_4 e^{-\mu_4 y}$
$M/E_4/1$	$h(y)=\mu^4 y^3 e^{-\mu y}/3!$

جدول‌های ۲ و ۳ درصد پوشش‌دهی و متوسط طول بازه‌های اطمینان هر شش روش برای میانگین زمان پاسخ در هر سه مدل صف‌بندی ارائه‌شده در جدول ۱ را نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۲ می‌توان دریافت که با افزایش اندازه‌ی نمونه درصد پوشش‌دهی روش تصحیح اریبی شتابیده نیز افزایش می‌یابد و زمانی که $\lambda = 0/9$ است، درصد پوشش‌دهی روش تصحیح اریبی شتابیده، کمیت محوری و تابع نفوذ به‌طور معنی‌داری کم‌تر از سطح در نظر گرفته‌شده‌ی ۰/۹ است. درهرحال با توجه به نتایج شبیه‌سازی بهترین عملکرد ازنظر درصد پوشش‌دهی مربوط به روش صدک‌ها است.

جدول ۳ نیز متوسط طول بازه‌های اطمینان روش‌های خودگردان و روش دلتا بر مبنای تابع نفوذ و انحراف معیار بازه‌های اطمینان را نشان می‌دهد. با توجه به این نتایج زمانی که اندازه‌ی نمونه برابر با ۲۰ و $\lambda \le 0/3$ است کم‌ترین طول بازه‌های اطمینان مربوط به روش دلتا می‌باشد. اما زمانی که اندازه‌ی نمونه ۲۰ و $\lambda \ge 0/5$ در نظر گرفته شود کم‌ترین طول بازه‌ی اطمینان مربوط به روش کمیت محوری است.زمانی که اندازه‌ی نمونه از ۲۰ به ۸۰ افزایش می‌یابد، تحت $\lambda \le 0/5$ کم‌ترین طول بازه‌ی اطمینان مربوط به روش دلتا است و تحت $\lambda \ge 0/7$ کم‌ترین طول بازه‌ی اطمینان مربوط به روش کمیت محوری می‌باشد.

در تمامی وضعیت‌ها روش صدک‌ها و کمیت محوری دارای بازه‌های اطمینان کوتاهی هستند. همچنین طول بازه‌های اطمینان در روش صدک‌ها درصورتی‌که $\lambda \le 0/5$ نزدیک طول بازه‌های اطمینان روش دلتا و درصورتی‌که $\lambda \ge 0/7$ نزدیک به طول بازه‌های اطمینان در روش کمیت محوری می‌باشد. در تمامی وضعیت‌ها روش‌های نرمال استاندارد، کمیت محوری توزیع t و تصحیح اریبی شتابیده دارای عملکرد ضعیف‌تری نسبت به روش دلتا و کمیت محوری ازنظر طول بازه‌ی اطمینان هستند. با مقایسه‌ی طول بازه‌های اطمینان در روش دلتای ناپارامتری برای نرخ ورودهای مختلف می‌توان دریافت که در نرخ‌های ورود $\lambda = 0/7, 0/9$ طول بازه‌ها به‌شدت افزایش‌یافته است، به‌طوری‌که در مواردی این افزایش چندین برابر طول بازه‌های اطمینان در روش‌های دیگر است.

جدول ۴ نسبت درصد پوشش‌دهی در محدوده‌ی اطمینان ۹۹ درصد برای هریک از ۶ روش بیان‌شده را ارائه می‌دهد. ازآنجاکه فراوانی درصد پوشش‌دهی برای یک بازه‌ی اطمینان دقیق دارای توزیع دوجمله‌ای با $N = 1000$ و $p = 0/9$ است بنابراین یک محدوده‌ی اطمینان ۹۹ درصد برای احتمال پوشش برابر است با:

$$0/9 \pm 2/576\sqrt{0/90 \times 0/10/1000} = 0/9 \pm 0/0244 = (0/876, 0/924)\ .$$

جدول ۲: درصد پوشش‌دهی برای بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان	نرخ ورود λ در یک سیستم صف‌بندی				
			۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
$M/M/1$	۲۰	نرمال استاندارد	۰/۸۴۲	۰/۸۵۳	۰/۹۱۴[a]	۰/۹۵۹	۰/۹۷۵
		صدک‌ها	۰/۸۴۴	۰/۸۵۴	۰/۸۸۳[a]	۰/۹۰۷[a]	۰/۷۵۸
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۲۷	۰/۸۱۱	۰/۸۵۴	۰/۸۶۱	۰/۷۹۶
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۵۱	۰/۸۶۲	۰/۸۲۹	۰/۶۳۲	۰/۴۵۸
		کمیت محوری	۰/۸۳۳	۰/۸۰۱	۰/۷۳۳	۰/۶۵۸	۰/۴۸۲
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۴	۰/۸۳۴	۰/۷۹۳	۰/۷۷۴	۰/۴۸۵
	۵۰	نرمال استاندارد	۰/۸۸۷[a]	۰/۸۷۵	۰/۸۶۸	۰/۹۶۸	۰/۹۸۱
		صدک‌ها	۰/۸۸۶[a]	۰/۸۶۶	۰/۸۹۷[a]	۰/۹۴۴	۰/۸۷۹[a]
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۸۶[a]	۰/۸۴۲	۰/۷۹۸	۰/۸۸۳[a]	۰/۸۰۶
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۸۲[a]	۰/۸۷۷[a]	۰/۸۹۶[a]	۰/۷۹	۰/۴۸۶
		کمیت محوری	۰/۸۸۳[a]	۰/۸۳۶	۰/۷۸	۰/۷۳	۰/۶۱۳
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۸۳[a]	۰/۸۵۹	۰/۸۲۶	۰/۸۴۳	۰/۶۰۲
	۸۰	نرمال استاندارد	۰/۸۸۹[a]	۰/۸۹۷[a]	۰/۸۹۵[a]	۰/۹۲۹	۰/۹۵۶۰
		صدک‌ها	۰/۸۸۲[a]	۰/۸۸۰[a]	۰/۸۹۸[a]	۰/۹۴۵	۰/۹۱۵[a]
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۸۵[a]	۰/۸۶۹	۰/۸۳۲	۰/۸۵۷	۰/۷۹۲
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۸۲[a]	۰/۸۸۵[a]	۰/۸۹۶[a]	۰/۸۶۱	۰/۵۶۶
		کمیت محوری	۰/۸۸۹[a]	۰/۸۶۸	۰/۸۳۹	۰/۷۵۷	۰/۶۳۳
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۸۵[a]	۰/۸۹۲[a]	۰/۸۶۴	۰/۸۵۶	۰/۷۰۲
$M/E_4/1$	۲۰	نرمال استاندارد	۰/۸۸۳[a]	۰/۹۲۲[a]	۰/۹۴۲	۰/۹۵۴	۰/۹۴۴
		صدک‌ها	۰/۸۷۹[a]	۰/۸۷۰	۰/۹۳۹	۰/۹۵۸	۰/۸۴۲
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۸۳[a]	۰/۸۷۷[a]	۰/۸۹۰[a]	۰/۸۶۸	۰/۷۸۱
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۸۶[a]	۰/۸۸۱[a]	۰/۸۹۱[a]	۰/۷۰۳	۰/۴۵۳
		کمیت محوری	۰/۸۹۵[a]	۰/۸۸۸[a]	۰/۸۴۵	۰/۶۹۹	۰/۶۱۷
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۸۱[a]	۰/۸۹۲[a]	۰/۸۸۷[a]	۰/۸۳۲	۰/۵۶۵
	۵۰	نرمال استاندارد	۰/۸۹۲[a]	۰/۹۰۲[a]	۰/۹۴۱	۰/۹۴۵	۰/۹۶۱
		صدک‌ها	۰/۸۹۳[a]	۰/۸۹۲[a]	۰/۸۸۶[a]	۰/۹۴۶	۰/۹۰۷[a]
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۸۲[a]	۰/۸۷۸[a]	۰/۸۷۸[a]	۰/۸۵۵	۰/۸۳۲
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۸۲[a]	۰/۸۹۵[a]	۰/۹۰۳[a]	۰/۸۴۳	۰/۵۶۴
		کمیت محوری	۰/۸۸۸[a]	۰/۸۸۶[a]	۰/۸۸۹[a]	۰/۷۸۸	۰/۶۳۸
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۹۱[a]	۰/۸۸۱[a]	۰/۹۱۶[a]	۰/۸۹۲[a]	۰/۶۸۸
	۸۰	نرمال استاندارد	۰/۹۱۵[a]	۰/۹۴۱	۰/۹۳۹	۰/۹۳۸	۰/۹۶۹
		صدک‌ها	۰/۹۱۳[a]	۰/۹۰۵[a]	۰/۸۸۶[a]	۰/۹۵۸	۰/۹۴۱
		کمیت محوری توزیع t	۰/۹۰۳[a]	۰/۹۰۲[a]	۰/۸۹۸[a]	۰/۸۹۲[a]	۰/۸۴۴
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۹۱۳[a]	۰/۹۱۱[a]	۰/۹۱۴[a]	۰/۹۰۵[a]	۰/۶۰۶
		کمیت محوری	۰/۹۱۶[a]	۰/۹۱۴[a]	۰/۸۹۱[a]	۰/۸۵۳	۰/۶۳۱
		دلتای ناپارامتری	۰/۹۱۱[a]	۰/۹۲۱[a]	۰/۹۰۱[a]	۰/۹۱۹[a]	۰/۷۱۵

[a] نشان‌دهنده‌ی نسبت معنی‌داری ($\alpha = 0/01$) در مقدار مورد انتظار ۰/۹

جدول ۲ (ادامه): درصد پوشش‌دهی برای بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان	نرخ ورود λ در یک سیستم صف‌بندی				
			۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
$M/H_4/1$	۲۰	نرمال استاندارد	۰/۸۷۵	۰/۹۱۸[a]	۰/۹۱۱[a]	۰/۹۵۸	۰/۹۴۹
		صدک‌ها	۰/۸۶۴	۰/۸۹۶[a]	۰/۹۰۰[a]	۰/۹۴۴	۰/۸۳۱
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۶۴	۰/۸۸۱[a]	۰/۸۴۵	۰/۸۷۵	۰/۷۶۷
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۶۷	۰/۸۹۶[a]	۰/۸۷۰	۰/۷۴۳	۰/۴۴۵
		کمیت محوری	۰/۸۷۳	۰/۸۷۱	۰/۸۱۴	۰/۷۳۲	۰/۵۷۸
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۷۳	۰/۸۸۵[a]	۰/۸۸۴[a]	۰/۸۷۹[a]	۰/۵۹۸
	۵۰	نرمال استاندارد	۰/۸۹۲[a]	۰/۹۱۳[a]	۰/۹۰۶[a]	۰/۹۳۸	۰/۹۶۸
		صدک‌ها	۰/۸۹۸[a]	۰/۸۶۵	۰/۸۹۶[a]	۰/۹۳۴	۰/۹۴۳
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۷۴	۰/۸۸۲[a]	۰/۸۶۴	۰/۸۵۴	۰/۸۲۴
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۹۱[a]	۰/۸۶۵	۰/۸۹۴[a]	۰/۸۶۵	۰/۵۶۷
		کمیت محوری	۰/۸۶۴	۰/۸۸۳[a]	۰/۸۶۷	۰/۷۷۸	۰/۶۶۵
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۸۸[a]	۰/۸۸۹[a]	۰/۸۹۴[a]	۰/۸۶۷	۰/۶۷۸
	۸۰	نرمال استاندارد	۰/۸۸۹[a]	۰/۹۱۸[a]	۰/۹۰۲[a]	۰/۹۳۴	۰/۹۸۱
		صدک‌ها	۰/۸۸۴[a]	۰/۸۹۷[a]	۰/۸۹۸[a]	۰/۹۴۵	۰/۹۴۴
		کمیت محوری توزیع t	۰/۸۹۲[a]	۰/۹۱۳[a]	۰/۸۷۱	۰/۸۲۳	۰/۸۲۲
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۸۹۳[a]	۰/۸۹۸[a]	۰/۸۹۷[a]	۰/۹۱۴[a]	۰/۵۷۷
		کمیت محوری	۰/۸۹۵[a]	۰/۹۲۱[a]	۰/۸۶۵	۰/۷۹۵	۰/۶۵۵
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۹۸[a]	۰/۹۲۳[a]	۰/۸۹۸[a]	۰/۸۶۵	۰/۷۹۸

جدول ۳: متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان	نرخ ورود λ در یک سیستم صف‌بندی				
			۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
$M/M/1$	۲۰	نرمال استاندارد	۰/۸۹ (۰/۴۱)	۳۵۰/۵ (۶۸۴۳/۱۲)	۵۴۲/۳۵ (۳۰۳۲/۹۴)	۵۷۳۸/۱۵ (۱۰۰۴۱۷/۱)	۱۸,۸۴/۵۹ (۸۹۹۴/۸)
		صدک‌ها	۰/۸۸ (۰/۳۷)	۲/۵ (۴/۷)	۱۱/۹۲ (۱۶/۹۵)	۲۸/۴۹ (۲۱/۸۵)	۳۲/۸۱ (۱۸/۸)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۹۱ (۰/۴۳)	۳۰۶/۸ (۶۳۷۰/۶۲)	۳۷۷/۵۸ (۱۶۰۷/۲)	۳۷۱۸/۳۱ (۷۶۹۴۳/۸۳)	۱۴۹۳/۴ (۷۴۹۶/۴)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۹۵ (۰/۴۷)	۵/۲۹ (۵۴/۲۵)	۴۱۵۴/۲ (۸۳۸/۴۵)	۱۸۵۶/۹۷ (۷۱۴۵/۰۷)	۷۹۷۸/۶۳ (۱۲۱۴۵۳/۹)
		کمیت محوری	۰/۸۸ (۰/۳۷)	۲/۴ (۴/۷)	۱۱/۸۲[a] (۱۶/۸)	۲۸/۴[a] (۲۱/۷)	۳۲/۷[a] (۱۸/۷۵)
		دلتای ناپارامتری	۰/۸۷[a] (۰/۳۶)	۱/۷۳[a] (۲/۱)	۱۱۰۴/۴ (۳۳۷۶۷/۸)	۱۱۴۲/۶۲ (۱۲۷۷۹/۴۴)	۲۱۶۳۷/۰۴ (۵۰۸۶۵/۸)

[a] نشان‌دهنده‌ی کوتاه‌ترین متوسط طول بازه‌های اطمینان

جدول (ادامه) ۳: متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان	نرخ ورود λ در یک سیستم صف‌بندی ۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
	۵۰	نرمال استاندارد	۰/۵۷ (۰/۱۴)	۱/۱۸ (۱/۷)	۲۳۳/۸ (۲۱۱۰/۰۸)	۶۲۶۹/۰۴۸ (۱۳۶۶۵۰/۷)	۴۵۵۳ /۹۷۶ (۲۷۸۷۳ /۳۸)
		صدک‌ها	۰/۵۷ (۰/۱۴)	۱/۰۲ (۰/۴۵)	¾ (۸/۹)	۳۱/۵ (۳۱/۱)	۵۲/۶۸ (۲۹/۴)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۵۹ (۰/۱۹)	۱/۲ (۲/۳)	۱۸۷/۷۸ (۱۴۰۱/۵)	۶۹۴۲/۲۳ (۱۷۳۹/۱۳)	۳۴۱۸ /۲۹ (۲۰۳۲۲ /۹۷)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۵۹ (۰/۱۶)	۱/۰۹ (۰/۵۳)	۸/۹ (۵۶/۳)	۱۵۷۴/۳ (۱۳۹۶۷)	۴۳۰۰/۲ (۲۸۱۰۰/۷۲)
		کمیت محوری	۰/۵۷ (۰/۱۴)	۱/۰۲ (۰/۴۵)	¾ (۸/۸)	۳۱/۴[a] (۳۱/۱)	۵۲/۵[a] (۲۹/۳)
		دلتای ناپارامتری	۰/۵۶[a] (۰/۱۴)	۰/۹۶[a] (۰/۳۸)	۲/۶[a] (۴/۹)	۱۵۹۰/۳ (۲۰۷۰۱/۹)	۶۹۷۲/۱۷ (۱۳۶۲۷۸)
	۸۰	نرمال استاندارد	۰/۴۵[a] (۰/۰۹)	۱/۱۱ (۱/۵۵)	۱۸۰/۹ (۱۵۴۶/۵۹)	۴۱۲۳/۱۶ (۱۱۴۹۱/۱۴)	۴۴۰۹/۴ (۵۵۱۲۷/۸)
		صدک‌ها	۰/۴۵[a] (۰/۰۹)	۰/۸۶ (۰/۳۵)	۳/۱۹ (۶/۵۷)	۲۵/۳۱ (۳۱/۵۲)	۶۴/۲۸ (۳۴/۵۷)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۴۶ (۰/۱۱)	۰/۷۲ (۰/۲۸)	۱۲۳/۳۳ (۱۲۳۱/۳۵)	۳۲۱۱/۲۱ (۱۳۹۲/۴۱)	۴۰۳۹/۲۹ (۷۷۴۸/۱۶)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۴۷ (۰/۱۲)	۰/۷۱ (۰/۲۳)	۳/۱۳ (۲۲/۳۷)	۹۸۳/۲۲ (۷۵۶۴/۲)	۳۱۰۵/۲۴ (۲۳۳۴۶/۲۲)
		کمیت محوری	۰/۴۵[a] (۰/۰۹)	۰/۶۹ (۰/۲۲)	۲/۱۹ (۳/۶۱)	۲۳/۴۸[a] (۳۱/۵۱)	۶۳/۴۶[a] (۳۲/۲۵)
$M/E_4/1$	۲۰	نرمال استاندارد	۰/۴۱ (۰/۰۹)	۱۰/۸۶ (۸۵/۵۴)	۸۸۰/۹۳ (۶۹۱۳/۸۴)	۹۶۷/۵۱ (۴۴۹۳/۱۷)	۱۳۵۱/۴۶ (۹۱۳۶/۲۳)
		صدک‌ها	۰/۴۱[a] (۰/۰۹)	۰/۸۷ (۱/۱)	۵/۶ (۹/۳۲)	۱۸/۷۹ (۱۵/۹۳)	۲۶/۸۵ (۱۴/۱۳)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۴۲ (۰/۱۱)	۷/۵۴ (۵۳/۴۱)	۵۹۳/۶۲ (۵۱۴۶/۱۳)	۳۹۳/۸ (۱۸۵۲/۶۳)	۹۱۳/۴۱ (۴۹۴۹/۵۲)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۴۲ (۰/۱)	۰/۸۷ (۱/۳)	۱۳۷/۱۱ (۲۵۳۷/۳۹)	۵۲۲/۴۱ (۴۳۸۶/۴۸)	۱۳۴۵/۴ (۱۴۳۴۹/۰۷)
		کمیت محوری	۰/۴۱[a] (۰/۰۹)	۰/۸۷ (۱/۱۶)	۵/۵۱[a] (۹/۳۶)	۱۸/۵۶[a] (۱۶/۴۲)	۲۵/۵۴[a] (۱۴/۷۶)
		دلتای ناپارامتری	۰/۴۱[a] (۰/۰۹)	۰/۶۸[a] (۰/۳۳)	۳۹۹/۵۲ (۱۱۴۰۲/۹۱)	۸۷۹/۳۴ (۱۶۰۴۵/۲۳)	۳۲۴۲/۴۲ (۴۹۹۷۵/۳۶)

[a] نشان‌دهنده‌ی کوتاه‌ترین متوسط طول بازه‌های اطمینان

جدول ۳ (ادامه): متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان	نرخ ورود λ در یک سیستم صف‌بندی				
			۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
	۵۰	نرمال استاندارد	۰/۱۶[a] (۰/۰۲)	۰/۵۸ (۰/۴۴)	۲۴/۵۹ (۱۷۸/۶)	۴۶۷/۷۶ (۲۴۷۲/۶۹)	۱۳۵۶/۳۶ (۷۱۵۴/۴۳)
		صدک‌ها	۰/۱۶[a] (۰/۰۲)	۰/۴۴ (۰/۱۴)	۲/۴۴ (۱/۵۶)	۱۴/۴۴ (۲۲/۴۳)	۴۴/۴۵ (۲۵/۴۷)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۲۸ (۰/۰۷)	۰/۴۵ (۰/۴۳)	۲۲/۳ (۲۱۶/۳۵)	۳۴۰/۱۴ (۲۱۱۲/۳۶)	۱۱۱۱/۴۴ (۵۹۵۱/۴۳)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۱۶[a] (۰/۰۱)	۰/۴۴ (۰/۱۱)	۲/۴۳ (۳/۳۱)	۲۵۷/۵ (۳۰۵۰/۷)	۱۸۵۹/۳ (۱۳۱۴۸/۸)
		کمیت محوری	۰/۱۶[a] (۰/۰۳)	۰/۴۲ (۰/۲۲)	۲/۴۶ (۱/۷۸)	۱۴/۵۵[a] (۱۵/۰۲)	۳۹/۲۷[a] (۲۵/۲)
		دلتای ناپارامتری	۰/۱۶[a] (۰/۰۲)	۰/۳۳[a] (۰/۱۱)	۱/۷۵[a] (۰/۸)	۶۴۵۲/۷ (۱۸۷۸۹/۹۴)	۳۵۷۵۷/۶۴ (۷۶۵۲۸۷/۴۶)
	۸۰	نرمال استاندارد	۰/۱۱[a] (۰/۱۲)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۳/۵۵ (۴۶/۱۳)	۷۸۸/۸۲ (۱۳۵۳۰/۱)	۱۵۴۱/۸۹ (۵۴۵۱/۲۳)
		صدک‌ها	۰/۱۱[a] (۰/۱۲)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۰/۸۲ (۰/۴۶)	۱۱/۳۲ (۱۵/۲۲)	۴۵/۶ (۲۹/۵۴)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۲۴ (۰/۱۴)	۰/۳۳ (۰/۰۷)	۳/۸۱ (۳۶/۷۹)	۷۱۳/۴۲ (۹۳۸۵/۶۳)	۱۵۴۴/۳۲ (۷۴۵۶/۹۹)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۱۱[a] (۰/۱۲)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۰/۹۹ (۰/۷۱)	۵۸/۱۲ (۴۱۸/۳۶)	۱۶۶۴/۴۳ (۱۲۷۸۲/۷۱)
		کمیت محوری	۰/۱۱[a] (۰/۱۲)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۰/۹۲ (۰/۵۸)	۹/۲۶[a] (۱۴/۱۸)	۴۳/۴۹[a] (۲۵/۵)
		دلتای ناپارامتری	۰/۱۱[a] (۰/۱۲)	۰/۳۳[a] (۰/۰۵)	۰/۷۷[a] (۰/۳۸)	۲۳۳/۲۳ (۶۳۴۲/۳۲)	۴۷۴۴۲/۳۲ (۱۳۴۷۶۸۴)
$M/H_4/1$	۲۰	نرمال استاندارد	۰/۴۸ (۰/۱۳)	۹/۹۷ (۸۴/۵)	۳/۶۵۴ (۶۶۳۴/۳۴)	۱۸۳۴/۳۱ (۲۷۲۱۲/۷۲)	۹۶۹/۱۷ (۳۳۴۵/۵۳)
		صدک‌ها	۰/۴۸ (۰/۱۳)	۱/۱۴ (۱/۳۲)	۵/۶۱ (۸/۵۹)	۱۸/۴۱ (۱۴/۵۵)	۲۷/۶۷ (۱۴/۶)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۵۴ (۰/۱۹)	۵/۳۸ (۳۶/۴۶)	۱۶۴/۵ (۱۸۱۲/۴۵)	۱۰۲۳/۸۳ (۱۲۴۳۸/۵)	۶۴۴/۸۹ (۳۰۵۲/۳۸)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۵۳ (۰/۱۷)	۱/۴۷ (۱۰/۵۵)	۴۴/۲ (۵۱۰/۳۴)	۹۳۲/۶۸ (۷۵۲۳/۵۸)	۱۲۴۱/۳۶ (۹۹۸۴/۲۱)
		کمیت محوری	۰/۴۸ (۰/۱۳)	۱/۱۴ (۱/۳۱)	۴/۵۸[a] (۷/۵۲)	۱۸/۲۵[a] (۱۵/۴۳)	۲۷/۱۲[a] (۱۴/۲۶)
		دلتای ناپارامتری	۰/۴۵[a] (۰/۱۲)	۰/۷۴[a] (۰/۵۷)	۲۳/۸۱ (۳۸۴/۰۱)	۸۶۳۴/۹۸ (۲۵۲۴۴۳/۸)	۳۲۴۵۰/۱۶ (۸۵۳۴۵۰/۴)

[a] نشان‌دهنده‌ی کوتاه‌ترین متوسط طول بازه‌های اطمینان

جدول ۳ (ادامه): متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان	نرخ ورود λ در یک سیستم صف‌بندی				
			۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹
	۵۰	نرمال استاندارد	۰/۵۶ (۰/۱۳)	۰/۵۳ (۰/۱۵)	۳۳/۳۷ (۳۵۰/۷۷)	۶۳۳/۳۳ (۴۲۲۰/۳)	۲۹۸۸/۵ (۱۳۵۹۴/۴۱)
		صدک‌ها	۰/۵۴[a] (۰/۱۲)	۰/۵۴ (۰/۱۶)	۱/۷۲ (۲/۷۸)	۱۴/۵۴ (۱۷/۶۷)	۴۲/۴۵ (۲۶/۷۶)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۵۸ (۰/۲۹)	۰/۵۷ (۰/۳۱)	۱۷/۵۶ (۱۴۲/۲۵)	۵۱۱/۳۲ (۳۸۷۹/۸۷)	۱۴۲۰/۷۶ (۶۳۲۷/۷۷)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۵۸ (۰/۱۶)	۰/۵۸ (۰/۲۸)	۲/۵۴ (۲۹/۰۶)	۱۷۲/۳۴ (۲۸۵۳/۴۹)	۱۳۴۵/۹۸ (۵۴۲۷/۵۱)
		کمیت محوری	۰/۵۴[a] (۰/۱۱)	۰/۵۲ (۰/۱۷)	۱/۶۵ (۲/۴۴)	۱۳/۵[a] (۱۷/۸۴)	۴۱/۸۴[a] (۲۵/۶۵)
		دلتای ناپارامتری	۰/۵۴[a] (۰/۵)	۰/۵۰[a] (۰/۱۱)	۱/۳۱[a] (۵/۹۱)	۴۳۳/۹۸ (۱۶۵۴/۲۱)	۴۷۸۵/۳۷ (۷۶۵۷۸/۴۴)
	۸۰	نرمال استاندارد	۰/۱۴[a] (۰/۰۱)	۰/۴۵ (۰/۱۵)	۲/۲۲ (۱۸/۳۴)	۳۹۴/۹۸ (۲۸۷۸/۲۴)	۱۹۴۴/۵ (۸۵۴۵/۵۲)
		صدک‌ها	۰/۱۴[a] (۰/۰۱)	۰/۴۵ (۰/۱۳)	۱/۲۱ (۰/۷۸)	۹/۱۵ (۱۴/۴۳)	۵۵/۴۲ (۲۶/۴۵)
		کمیت محوری توزیع t	۰/۲۲ (۰/۰۴)	۰/۴۵ (۰/۱۳)	۲/۲۹ (۱۸/۳۴)	۲۷۵/۷۸ (۲۶۴۲/۲۶)	۱۷۴۵/۱۸ (۱۳۳۴۷/۲۸)
		تصحیح اریبی شتابیده	۰/۱۴[a] (۰/۰۱)	۰/۴۷ (۰/۱۸)	۱/۳۴ (۰/۸۷)	۶۳/۳۵ (۹۲۵/۷۸)	۱۸۴۵/۴۵ (۷۶۵۴/۶۷)
		کمیت محوری	۰/۱۴[a] (۰/۰۱)	۰/۴۶ (۰/۱۶)	۱/۴۳ (۰/۵۸)	۸/۰۳[a] (۱۲/۵۴)	۴۹/۷۶[a] (۲۵/۹۷)
		دلتای ناپارامتری	۰/۱۴[a] (۰/۰۱)	۰/۴۱[a] (۰/۱)	۰/۷۸[a] (۰/۳)	۳۲/۴۳ (۷۳۱/۵۵)	۱۵۴۲۳/۷۸ (۳۷۳۵۱۲/۱)

جدول ۴: نسبت درصد پوشش‌دهی در محدوده‌ی اطمینان ۹۹ درصد

اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان					
	نرمال استاندارد	صدک‌ها	کمیت محوری توزیع t	تصحیح اریبی شتابیده	کمیت محوری	دلتای ناپارامتری
۲۰	۵/۱۵	۵/۱۵	۴/۱۵	۴/۱۵	۲/۱۵	۶/۱۵
۵۰	۶/۱۵	۹/۱۵	۶/۱۵	۸/۱۵	۵/۱۵	۸/۱۵
۸۰	۷/۱۵	۱۰/۱۵	۷/۱۵	۱۱/۱۵	۶/۱۵	۹/۱۵
متوسط	۰/۴	۰/۵۳	۰/۳۷	۰/۵۱	۰/۲۸	۰/۵۱

با توجه به این جدول روش دلتای ناپارامتری بهترین عملکرد را ازنظر درصد پوشش‌دهی زمانی که اندازه‌ی نمونه برابر با ۲۰ است دارند. اما زمانی که اندازه‌ی نمونه برابر با ۵۰ است تنها روش

صدک‌ها بهتر عمل کرده است و با افزایش اندازه‌ی نمونه به ۸۰ روش تصحیح اریبی شتابیده عملکرد بهتری نسبت به دیگر روش‌ها ازنظر درصد پوشش دارد. همچنین بهترین عملکرد ازنظر متوسط درصد پوشش دهی را روش صدک‌ها داشته و پس‌ازآن روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ، تصحیح اریبی شتابیده و نرمال استاندارد در رتبه‌های بعدی قرار دارند.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی برآورد ناپارامتری بازه‌های اطمینان میانگین زمان پاسخ مدل صف‌بندی $M/G/1$ پرداخته شد، به‌طوری‌که برای بازه‌های مذکور از پنج روش خودگردان نرمال استاندارد، صدک‌ها، کمیت محوری توزیع t، تصحیح اریبی شتابیده، کمیت محوری و روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ استفاده شد. ملاک موردنظر برای ارزیابی عملکرد این روش‌ها درصد پوشش‌دهی و طول بازه‌های اطمینان ایجادشده است. با بررسی نتایج شبیه‌سازی مشاهده شد که

۱. ازنظر میانگین درصد پوشش دهی، روش صدک‌ها بهترین عملکرد را داشته و روش دلتا عملکرد قابل قبولی بعد از روش صدک‌ها دارا است،

۲. با بررسی میانگین طول بازه‌های اطمینان درصورتی‌که $0/5 \le \lambda$، روش دلتا بهترین عملکرد را داشته و در حالت $\lambda \ge 0/7$ روش کمیت محوری بهتر عمل کرده است، و

۳. با در نظر گرفتن هر دو ملاک درصد پوشش دهی و طول بازه‌ی اطمینان تحت $0/5 \le \lambda$، روش دلتا بر مبنای تابع نفوذ بهترین بازه‌های اطمینان ناپارامتری را برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $M/G/1$ ایجاد می‌کند و با توجه به نزدیکی طول بازه‌های اطمینان روش‌های کمیت محوری و صدک‌ها در حالت $\lambda \ge 0/7$، روش صدک‌ها بهترین بازه‌های اطمینان ناپارامتری را برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $M/G/1$ ایجاد می‌کند.

این مقاله، نخستین مقاله‌ای است که در آن علاوه بر روش‌های خودگردان، از روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ برای ایجاد بازه‌های اطمینان ناپارامتری میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی $M/G/1$ استفاده شد و نتایج جالب‌توجهی نیز به دست آمد. همچنین اعتقاد بر این است که روش دلتا بر مبنای تابع نفوذ را می‌توان در مورد دیگر معیارهای مؤثر بودن در صف $M/G/1$ و یا دیگر مدل‌های صف‌بندی نیز به کاربرد.

سپاس‌گزاری

نویسندگان از داوران محترم به خاطر نظرات و پیشنهادهای ارزنده‌شان که موجب بهبود و غنای بیشتر مقاله گردید، کمال تشکر را دارند.

مراجع

[1] Clarke, A.B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue, *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 1036–1040.

[2] Lilliefors, H.W. (1966). Some confidence intervals for queues, *Opeartions Research*, **14**, 723–727.

[3] Basawa, I.V. and Prabhu, N.U. (1981). Estimation in single server queues, *Naval Research Logistics Quarterly*, **28**, 475–487.

[4] Dave, U. and Shah, Y.K. (1980). Maximum likelihood estimates in an M/M/2 queue with heterogeneous servers, *Journal of the Operational Research Society*, **31**.

[5] Jain, S. and Templeton, J.G.C. (1991). Confidence interval for M/M/2 queue with heterogeneous servers, *Operations Research Letters*, **10**, 99–101.

[6] Rubin, G. and Robson, D.S.A. (1990). single server queue with random rrrivals and balking: confidence interval estimation, *Queueing Systems Theory and Applications*, **7**, 283–306.

[7] Jain, S. (1991). Estimation in M/Ek/1 queueing systems, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **20**, 1871–1879.

[8] Abou-E1-Ata, M.O. and Hariri, A.M.A. (1995). Point estimation and confidence intervals of the M/M/2/N queue with balking and heterogeneity, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **15**, 35–55.

[9] Basawa, I.V., Bhat, U.N. and Lund, R. (1996). Maximum likelihood estimation for single server queues from waiting time data, *Queueing Systems-Theory and Applications*, **24**, 155–167.

[10] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife, *Annals of Statistics*, **7**, 1-26.

[11] Efron, B. (1982). *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*, SIAM Monograph, 38.

[12] Efron, B. and Gong, G.A. (1983). leisurely look at the bootstrap, the Jackknife and Cross-Validation, *American Statistician*, **37**, 36–48.

[13] Efron B. and Tibshirani, R.J. (1986). *Confidence intervals of mean response time for an M/G/1 queueing system: bootstrap simulation*, Revised edition, John Wiley, New York.

[14] Efron, B. (1987). Better bootstrap confidence intervals, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 171–200.

[15] Chu, K.Y. and Ke, C.J. (2006). Confidence intervals of mean response time for an M/G/1 queueing system: bootstrap simulation, *Applied Mathematics and Computation*, **180**, 255-263.

[16] Chu, K.Y. and Ke, C.J. (2007). Mean response time for a G/G/1 queueing system: simulated computation, *Applied Mathematics and Computation*, **186**, 772-779.

[17] Wasserman, L. (2005). *All of nonparametric statistics*, Springer Text in Statistics.

[18] Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1998). *An introduction to the bootstrap*, Chapman and Hall, New York.

Comparison of Confidence Interval Based on Bootstrap Method for the Mean Response Time in a Simulation Study

Hossein Kazemzadeh Garehchobogh, Bahman Tarvirdizade, Alireza Afshari Safavi

Department of Mathematics, Maku Branch, Islamic Azad University, Maku, Iran

Abstract

The mean response time plays an important role in the analyzing and optimizing the queuing system, which determines the number and type of giving service. In this paper, new confidence intervals of mean response time for an M/G/1 FCFS queuing system is contrasted based on the nonparametric delta method and five bootstrap methods. These methods include: nonparametric delta method confidence interval based on the influence function, standard bootstrap confidence interval, percentile bootstrap confidence interval, bootstrap-t confidence interval, bias corrected, acceleration bootstrap confidence interval, and bootstrap pivotal confidence interval. In a simulation study, these six methods are compared and evaluated the accuracy and performance of the confidence intervals for three different M/G/1 FCFS queuing systems based on the coverage percentage and the average length of confidence intervals.

Keywords**:** Queuing Theory, Nonparametric delta method, Bootstrap pivotal confidence interval, Influence function, Mean response time.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F40, 62G15.