مدلی جدید برای تعیین نقاط اتکا در تحلیل پوششی داده‌ها

فرانک حسین‌زاده‌سلجوقی[1] و زهرا الهی‌مقدم

گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

تاریخ دریافت: ۹۲/۱۲/۲۶ تاریخ پذیرش: ۹۳/۷/۲

چکیده: تحلیل پوششی داده‌ها روشی برای ارزیابی عملکرد سازمان‌ها و واحدهای تصمیم‌گیری است. این روش واحدها را به چهار دسته شامل: ناکارا، کارای ضعیف، کارای غیر راسی و کارای راسی تقسیم می‌کند. در این مقاله دسته جدیدی از واحدهای تصمیم‌گیری کارا به نام نقاط اتکا را معرفی می‌کنیم که نقش مهمی در شکل مجموعه امکان تولید دارند. یک نقطه اتکا روی اشتراک بین مرز کارایی و قسمت آزاد مرز قرار دارد. در واقع یک نقطه اتکا، کارای راسی است که مرز کارایی ضعیف را می‌سازد. حذف نقاط اتکا مرز کارایی را تغییر می‌دهد و باعث حذف ناحیه‌ای از مجموعه امکان تولید می‌شود، همچنین تغییر در ورودی یا خروجی آن نیز مرز کارایی را تغییر می‌دهد و با افزایش ورودی یا کاهش خروجی نقطه جدید همچنان روی مرز بوده و کارای راسی است. ویژگی‌های یک نقطه اتکا اهمیت آن را آشکار می‌سازد. با توجه به اهمیت این نقاط، در این مقاله مدلی جدید برای تشخیص نقاط اتکا، با سرعت محاسبه بالاتر معرفی می‌شود. ابتدا الگوریتم‌های بیان‌شده را برای شناسایی این نقاط مطرح نموده، سپس با استفاده از خواص این نقاط مدل جدیدی از جمله روش ابرکارایی اصلاح‌شده را پیشنهاد می‌کنیم، این مدل با محاسبات کم‌تری، نقاط اتکا را شناسایی می‌کند. با حل مثال عددی به تشریح روش پیشنهادی و مقایسه نتایج آن با سایر روش‌ها می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، نقاط اتکا، مرز کارایی، ابرصفحه، ابرکارایی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰B۵۰، ۹۰B۶۰.

۱- مقدمه

برای سنجش کارایی در واحدهای تصمیم‌گیری[2] (DMU) از مدل‌های مختلف تحلیل پوششی داده‌ها[1] (DEA) مانند مدل BCC کمک می‌گیریم. مدل‌های DEA، واحدهای تصمیم

۱-آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: Saljooghi@math.usb.ac.ir

2- Decision making units

گیرنده را به انواع مختلف ناکارا، کارای ضعیف، کارای غیر راسی و کارای راسی تقسیم‌بندی می‌کنند. در این مقاله دسته‌ی جدیدی بنام نقاط اتکا را به این دسته‌بندی اضافه می‌کنیم. نقاط اتکا نقاطی هستند که روی اشتراک مرز کارایی و قسمت آزاد مرز قرار دارند و مرز کارایی ضعیف را می‌سازند. نقاط اتکا اولین بار توسط الن و تاناسولیس در [۱] شناسایی و نام‌گذاری شد و برای گسترش مرز کارایی به‌کار رفت. این نقاط اولین بار در مجموعه امکان تولید، pps ، با یک ورودی و چندین خروجی و بازده به‌مقیاس ثابت به‌کار رفتند. در سال ۲۰۰۹ دولا و بوگنول در [۲] آن را برای pps با بازده به‌مقیاس متغیر و برای هر تعداد ورودی و خروجی تعمیم دادند. در این مقاله الگوریتم‌ها و روش‌هایی ارائه‌شده‌اند که نقاط اتکا را شناسایی می‌کنند.

در بخش ۲ کارایی و سنجش آن را به‌وسیله DEA مطرح نموده، در بخش ۳ نقاط اتکا را معرفی می‌کنیم و با توجه به خواص آن الگوریتم‌هایی برای تشخیص این نقاط ارائه می‌دهیم. در بخش ۴ روشی جدید را برای شناسایی نقاط اتکا با استفاده از ابرصفحه‌های سازای فضا ارائه می‌دهیم. در بخش ۵ نیز روش جدید تشخیص نقاط اتکا را با استفاده از ابرکارایی پیشنهاد می‌کنیم که برتری آن نسبت به روش‌های قبلی این است که محاسبات کم‌تری دارد.

۲- اندازه‌گیری کارایی به‌وسیله تحلیل پوششی داده‌ها

یکی از مناسب‌ترین مقیاس‌های اندازه‌گیری عملکرد، استفاده از کارایی واحدهای تحت ارزیابی است. مدل تحلیل پوششی داده‌ها یک مدل ریاضی بر اساس برنامه‌ریزی خطی است که توانایی سنجش کارایی را به‌صورت مقایسه‌ای دارد [۳].

۲-۱- کارایی

کارایی نسبت بازده به منابع مصرف‌شده است. به‌عبارت‌دیگر بین واحدهای تصمیم‌گیرنده به واحدی کارا گفته می‌شود که در مقایسه با بقیه واحدها بالاترین سطح رضایت را برآورده کند. اگر برای اندازه‌گیری کارایی استانداردی نداشته باشیم از کارای نسبی استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱: کارایی نسبی: فرض کنیم واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_۱, DMU_۲, ..., DMU_n$ با مصرف ورودی $x_۱, x_۲, ..., x_n$، خروجی $y_۱, y_۲, ..., y_n$ را تولید کنند. کارایی نسبی برای واحد تصمیم‌گیری DMU_k که با RE_k نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

1- Data envelopment analysis

$$RE_k = (\frac{y_k}{x_k}) \Big/ (\max_{1\le j\le n} \frac{y_j}{x_j}) .$$

در واقع وقتی می‌گوییم DMU_k کارای نسبی است یعنی نسبت به دیگر DMUها سنجیده شده و کارایی DMU_k از دیگر DMUها بهتر است.

تعریف ۲: تابع تولید: تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها، ماکسیمم خروجی‌ها را می‌دهد.

با داشتن این تابع می‌توان به‌سادگی در مورد کارا بودن واحدهای تصمیم‌گیری قضاوت کرد. اما در اغلب موارد به‌دلیل پیچیدگی فرایند تولید تابع تولید در دست نیست و به همین خاطر با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، تقریبی از آن را به‌دست می‌آوریم [۳].

۲-۲- تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید تعداد n، DMU با بردارهای ورودی $x_j = \left(x_{1j},...,x_{mj}\right)$ و بردار خروجی $y_j = \left(y_{1j},...,y_{sj}\right),\ j = 1,...,n$ موجود باشد، در این صورت ورودی و خروجی مجازی برای DMU_j به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{ورودی مجازی} = \lambda_1 x_{1j} + ... + \lambda_n x_{nj} ,$$

$$\text{خروجی مجازی} = \lambda_1 y_{1j} + ... + \lambda_n y_{nj} .$$

تعریف ۳: فرض کنیم $DMU_j = \left(x_j, y_j\right)$ و $DMU_k = \left(x_k, y_k\right)$. گوییم DMU_j بر DMU_k غالب است و یا به‌عبارت دیگر گوییم DMU_k مغلوب DMU_j است هرگاه

$$\begin{cases} -x_j \ge -x_k \\ y_j \ge y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_j \\ y_j \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} -x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

و نامساوی اکید حداقل برای یک مؤلفه برقرار باشد.

تعریف ۴: DMU_k با بردار ورودی x_k و خروجی y_k را کارای نسبی گوییم هرگاه $\left(-x_k, y_k\right)$ به‌وسیله‌ی هیچ زوج مرتبی مانند $\left(-\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\right)$ مغلوب نگردد که در آن $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j\right)$، DMU مجازی است[۳].

۲-۳- مدل BCC

مجموعه T، مجموعه امکان تولید یا pps نامیده می‌شود:

$$T = \left\{ (x,y) \mid \text{ورودی } x \text{، خروجی } y \text{ را تولید کند} \right\}.$$

مرز مجموعه فوق به‌عنوان تقریبی از تابع تولید در نظر گرفته می‌شود. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس مجموعه امکان تولید ایجادشده و تفاوت آن‌ها بر اساس اصول موضوعه‌ای است که برای ساخت مجموعه امکان تولید در آن‌ها فرض می‌شود. مدل BCC یکی از مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها است که با پذیرفتن ۴ اصل موضوعه زیر ساخته می‌شود [۴].

۱. اصل شمول مشاهدات: تمامی مشاهدات در T قرار دارند. $\left(x_j, y_j\right) \in T, j = 1,\dots,n$

۲. اصل امکان‌پذیری

$$\left(x,y\right) \in T, \bar{x} \geq x \Rightarrow \left(\bar{x}, y\right) \in T$$
$$\left(x,y\right) \in T, \bar{y} \leq y \Rightarrow \left(x, \bar{y}\right) \in T .$$

۳. اصل تحدب:

$$\left(x,y\right) \in T, \left(x',y'\right) \in T \Rightarrow \left[\lambda\left(x,y\right) + \left(1-\lambda\right)\left(x',y'\right)\right] \in T, \quad \lambda \in \left[0,1\right]$$

۴.کوچک‌ترین مجموعه امکان تولید که در اصول فوق صدق کند عبارت است از:

$$T_v = \left\{ \left(x,y\right) \mid x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1,\dots,n \right\}.$$

مجموعه امکان تولید فوق، مدل BCC را مطابق با ۴ اصل موضوعه با بازده به‌مقیاس متغیر ایجاد می‌کند. بر اساس اصول موضوعه مدل BCC پوششی در ماهیت ورودی، عبارت است از:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \theta \\
& s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ik}, \quad i = 1,2,\dots,m \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk}, \quad r = 1,2,\dots,s \\
& \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \\
& \qquad \lambda_j \geq 0, s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \; j = 1,\dots,n, \; i = 1,2,\dots,m, \; r = 1,2,\dots,s.
\end{aligned} \tag{1}$$

مدل (۱) یک برنامه‌ریزی خطی است که دوگان آن به‌صورت مدل (۲) به‌دست می‌آید. به مدل (۲) مدل مضربی گفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \quad u_r^t y_{rk} + u_o \\
&s.t. \sum_{i=1}^{m} v_i^t x_{ik} = 1, \\
&\sum_{r=1}^{s} u_r^t y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i^t x_{ij} + u_o \le 0, \quad j = 1,\dots,n \\
&u_r \ge 0, v_i \ge 0, i = 1,\dots,m, r = 1,\dots,s, u_0.
\end{aligned} \tag{۲}$$

تعریف ۵: DMU_k کارای پاراتو است هرگاه در مدل (۱)، $\theta_k^* = 1$ و در همه جواب‌های بهین $s_i^- = s_r^+ = 0$. اگر بعضی از متغیرهای کمکی در جواب بهین مخالف صفر باشند، DMU_k کارای ضعیف است و اگر $\theta_k^* < 1$، آنگاه DMU_k ناکارا است [۳].

اگر در ارزیابی کارایی هر واحد تصمیم‌گیری در مدل (۱)، واحد تحت ارزیابی حذف شود، مدل ابرکارایی AP (اندرسون- پترسون) به‌دست می‌آید.

قضیه ۱: اگر هیچ‌یک از واحدهای تصمیم‌گیری دارای ورودی یا خروجی صفر نباشد، آنگاه مدل ابرکارایی AP (اندرسون- پترسون) همواره شدنی است [۵].

تعریف ۶: در ارزیابی DMU_k در مدل پوششی BCC مجموعه مرجع، مجموعه تمام DMUهایی است که در یکی از جواب‌های بهین مدل (۱)، λ^* متناظر با آن مخالف صفر باشد. به‌عبارت دیگر اگر E_k مجموعه مرجع DMU_k باشد :

$$E_k = \{DMU_j \,|\, \text{متناظر } DMU_k \text{ درحداقل یکی از جواب‌های بهین مدل(۱) مثبت باشد } \lambda^*\}.$$

هر واحد تصمیم‌گیری دارای واحد مرجع است، به‌همین دلیل مجموعه مرجع همواره غیر تهی است. مرجع واحد کارا، می‌تواند خودواحد باشد. همچنین تمامی DMUهای مرجع، کارا هستند و روی مرز کارایی قرار دارند. DMUهای کارا به دسته کارای راسی، کارای غیر راسی، کارای ضعیف و نقاط اتکا تقسیم می‌شوند. هر DMU که کارای پاراتو باشد و مجموعه مرجع آن تنها خودش باشد کارای راسی است و متناظر با یک رأس روی مرز کارایی است. تنها حذف DMUهای کارای راسی شکل مرز کارایی را تغییر می‌دهد. DMU_k کارای غیر راسی است اگر و فقط اگر به مفهوم پاراتو کارا بوده و مجموعه مرجع آن حداقل دو عضو داشته باشد. DMUهای کارای غیر راسی شکل مرز کارایی را تعیین نمی‌کنند، هرچند که روی مرز کارایی قرار گرفته‌اند. زیرا DMUهای کارای غیر راسی نیز، رئوس مرز کارایی نیستند. DMU_k را کارای ضعیف می‌نامند هرگاه روی مرز کارایی قرار داشته باشد اما دارای متغیر کمبود (s_i^-, s_r^+) غیر صفر باشد و در واقع روی قسمت آزاد مرز کارایی قرار داشته باشد، DMU_k را ناکارا می‌گوییم هرگاه روی مرز کارایی قرار نداشته باشد و DMU مرجع نباشد[۴].

۳- نقاط اتکا و الگوریتم تشخیص آن

نقاط اتکا، دسته‌ای از واحدهای کارای راسی هستند که مرز کارایی، ضعیف را می‌سازند. در واقع در این نقاط می‌توان ورودی را افزایش و خروجی را کاهش دهیم؛ به‌طوری‌که واحد موردنظر کارا باقی بماند. با استفاده از تعریف نقاط اتکا الگوریتم‌هایی برای تشخیص نقاط اتکا بیان‌شده است [۲ و ۶]. الگوریتم بوگنول و دولا یکی از این الگوریتم‌ها است [۲].

تعریف ۷: مجموعه $\left\{(x,y)\,|\,u^*y+v^*x=u_o^*\right\}$ را ابرصفحه تکیه‌کننده می‌نامیم و آن را با $H\left(u^*,v^*,u_o^*\right)$ نشان می‌دهیم که در آن u^*، v^* و u_o^* از حل مدل (۲) به‌دست می‌آیند[۳].

تعریف ۸: واحد کارای راسی DMU_k یک نقطه اتکا است هرگاه به رویه‌ی بی‌کران از T_v (مجموعه امکان تولید مدل BCC) متعلق باشد [۲].

با توجه به تعریف (۸)، خواص زیر برای نقاط اتکا، نتیجه می‌شوند:

- واحد کارای راسی DMU_k یک نقطه اتکا است اگر و فقط اگر به ابرصفحه $H\left(u^*,v^*,u_o^*\right)$ متعلق باشد به‌طوری‌که $\left(u^*,v^*\right)$ یافت شود که حداقل یکی از آن‌ها صفر باشد [۲].

- با حذف iامین مؤلفه از T_v (که می‌تواند ورودی یا خروجی سیستم باشد) تصویر ساده آن به‌دست می‌آید و با نماد T_v^i نشان داده می‌شود. واحد کارای راسی DMU_k یک نقطه اتکا است اگر و فقط اگر به مرز حداقل یک تصویر ساده، T_v^i متعلق باشد.

بوگنول و دولا الگوریتم زیر را برای تشخیص نقاط اتکا ارائه دادند [۲]:

۳-۱- الگوریتم تشخیص نقاط اتکا

فرض کنیم $A=\left\{DMU_j\,|\,j=1,\dots,n\right\}$ مجموعه داده‌ها باشد:

مرحله ۱) مدل (۱) را برای $DMU_j,\ \ j=1,\dots,n$ حل می‌کنیم و مجموعه واحدهای کارای راسی A، E را می‌یابیم.

گام اول) برای $DMU_j\in E$، E_i' را برای $i=1,\dots,m$ می‌یابیم که E_i' زیرمجموعه‌ای از نقاط کارای راسی A است که در تصویر ساده iام، کارای راسی هستند.

گام دوم) $E'=\bigcup_{i=1}^{m}E_i'$ را می‌یابیم، اگر $DMU_j\in E'$، آنگاه DMU_j یک نقطه اتکا است.

گام سوم) اگر $DMU_j \in E \setminus E'$ و DMU_j روی مرز هر یک از m تصویر ساده باشد، آنگاه یک نقطه اتکا است، در غیر این صورت نقطه اتکا نیست.

۴- شناسایی نقاط اتکا با استفاده از ابرصفحه‌های سازای فضا

با توجه به این‌که، در الگوریتم‌هایی که بیان‌شده، محاسبات زیادی را برای شناسایی نقاط اتکا باید انجام دهیم، الگوریتم دیگری را برای تشخیص نقاط اتکا پیشنهاد می‌کنیم. در این الگوریتم از خواص نقاط اتکا کمک گرفته‌شده است. با توجه به این‌که یک نقطه اتکا روی اشتراک مرز کارایی و قسمت آزاد مرز قرار دارد، یک روش برای تشخیص نقاط اتکا ارائه می‌دهیم.

تعریف ۹: نقطه شدنی $\bar{x}$ در فضای $S \subseteq E^n$ راسی است اگر و فقط اگر تلاقی n ابرصفحه مستقل خطی باشد [۷].

قضیه ۲: نقطه کارای راسی یک نقطه اتکا است اگر و فقط اگر در ابرصفحه‌های سازای آن حداقل یک ابرصفحه ضعیف وجود داشته باشد.

اثبات: $\Rightarrow$) به برهان خلف فرض می‌کنیم تلاقی ابرصفحه‌ها که حداقل یکی از آن‌ها ضعیف است نقطه اتکا نباشد و یک DMU مشاهده‌شده باشد. دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول) تلاقی ابرصفحه‌ها یک DMU کارای راسی غیر اتکا باشد. چون حداقل یکی از ابرصفحه‌ها ضعیف است، پس امکان افزایش ورودی و یا کاهش خروجی در DMU را توسط ابرصفحه ضعیف داریم درحالی‌که DMU کارا باقی می‌ماند که با فرض غیر اتکا بودن این DMU تناقض دارد.

حالت دوم) تلاقی ابرصفحه‌ها یک DMU کارای ضعیف غیر اتکا باشد. این حالت با تعریف ۹ در تناقض است؛ زیرا تلاقی ابرصفحه‌های سازای فضا یک نقطه کارای راسی است.
$\Leftarrow$) چون DMU نقطه اتکا است، پس امکان افزایش ورودی یا کاهش خروجی را در DMU به نحوی که کارا باقی بماند، داریم. امکان افزایش ورودی یا کاهش خروجی در صورتی وجود دارد که در مدل مضربی حداقل یکی از مضارب (متغیرها) صفر باشد به عبارت دیگر $v_i = 0$ یا $u_i = 0$ پس یک ابرصفحه ضعیف متناظر با $v_i = 0$ یا $u_i = 0$ وجود دارد.
بنابراین با استفاده از ابرصفحه‌های سازای فضا می‌توان نقاط اتکا را به‌دست آورد. در این روش برای شناسایی نقاط اتکا، باید ابتدا تمامی ابرصفحه‌های قوی و ضعیف مجموعه امکان تولید را به‌دست آورد [۸ و ۹]. سپس با تلاقی ابرصفحه‌ی ضعیف با دیگر ابرصفحه‌ها، می‌توان نقاط اتکا را به‌دست آورد. بنابراین برای یافتن نقاط اتکا باید محاسبات زیادی را انجام داد که یکی از معایب این روش است.

۵- تشخیص نقاط اتکا با استفاده از مدل جدید ابرکارایی اصلاح‌شده

در این بخش روش جدیدی را برای تشخیص نقاط اتکا پیشنهاد می‌دهیم که نسبت به روش‌های ذکرشده ما را سریع‌تر به جواب می‌رساند و برای شناسایی نقاط اتکا نیاز به حل تعدادی زیادی مسئله ندارد. در این بخش نیز با توجه به دیگر خواص نقاط اتکا روش جدیدی را برای تشخیص نقاط اتکا پیشنهاد می‌کنیم.

با توجه به این‌که نقاط اتکا، واحدهای کارای راسی هستند که ورودی این نقاط را می‌توان افزایش و خروجی را کاهش داد درحالی‌که نقطه جدید هنوز کارا بماند و روی مرز کارایی قرار داشته باشد. در این صورت اگر $DMU_k = (x_k, y_k)$ یک نقطه اتکا باشد و ∂T مرز کارایی در مدل BCC، $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ و $\delta' = (\delta'_1, \delta'_2, ..., \delta'_n)$ باشد، آنگاه

$$(x_k, y_k) \in \partial T : \exists\, \delta, \delta' > 0 \;\; s.t \;\; (x_k + \delta, y_k - \delta') \in \partial T .$$

بنابراین برای تشخیص نقاط اتکا باید ویژگی $\theta^* = 1$ و $(s^{*+}, s^{*-}) = (0,0)$ در واحدهای کارای راسی وجود داشته باشد. به‌همین جهت مدل زیر را برای تشخیص نقاط اتکا حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\max \;\; \{\delta, \delta'\} \\ &s.t. \; \sum\nolimits_{j\in E, j\neq k} \lambda_j x_j + (x_k + \delta)\lambda_k = x_k + \delta \\ &\qquad \sum\nolimits_{j\in E, j\neq k} \lambda_j y_j + (y_k - \delta')\lambda_k = y_k - \delta' \\ &\qquad \sum\nolimits_{j\in E} \lambda_j = 1 \\ &\qquad \lambda_j \geq 0,\; \delta > 0,\; \delta' > 0. \end{aligned} \tag{۳}$$

مدل (۳) یک مدل غیرخطی است. برای خطی سازی مدل تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &z = \max\{\delta, \delta'\}, \;\; \eta = \delta\lambda_k, \;\; \beta = \delta'\lambda_k \\ &\lambda_k \leq 1 \Rightarrow \delta\lambda_k \leq \delta \Rightarrow \eta \leq \delta \\ &\lambda_k \leq 1 \Rightarrow \delta'\lambda_k \leq \delta' \Rightarrow \beta \leq \delta'. \end{aligned}$$

با جایگذاری در مدل (۳)، مدل خطی (۴) به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\max \ z \\
&s.t. \ \sum_{j\in E}\lambda_j x_j+\eta=x_k+\delta \\
&\quad \sum_{j\in E}\lambda_j y_j-\beta=y_k-\delta' \\
&\quad \sum_{j\in E}\lambda_j=۱ \\
&\quad \eta\le\delta \\
&\quad \beta\le\delta' \\
&\quad \delta\le z \\
&\quad \delta'\le z \\
&\quad \lambda_j\ge ۰,\ \delta>۰,\ \delta'>۰,\ \eta\ge ۰,\ \beta\ge ۰,\ z\ge ۰.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

با در نظر گرفتن ابرکارایی برای مدل (۴) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\max \ z \\
&s.t. \ \sum_{j\in E,j\ne k}\lambda_j x_j+\eta=x_k+\delta \\
&\quad \sum_{j\in E,j\ne k}\lambda_j y_j-\beta=y_k-\delta' \\
&\quad \sum_{j\in E,j\ne k}\lambda_j=۱ \\
&\quad \eta\le\delta \\
&\quad \beta\le\delta' \\
&\quad \delta\le z \\
&\quad \delta'\le z \\
&\quad \lambda_j\ge ۰,\ \delta>۰,\ \delta'>۰,\ \eta\ge ۰,\ \beta\ge ۰,\ z\ge ۰.
\end{aligned} \tag{۵}
$$

مدل (۵) را مدل ابرکارایی اصلاح‌شده می‌نامیم.

با استفاده از قضیه ۳ می‌توان نقاط اتکا را شناسایی کرد.

قضیه ۳: مجموعه E شامل DMUهای کارای قوی را در نظر بگیریم. DMU_k یک نقطه اتکا است اگر و فقط اگر برای $k\in E$ مدل ابرکارایی اصلاح‌شده، نشدنی باشد.

اثبات: $\Leftarrow$) فرض کنیم DMU_k یک نقطه اتکا باشد. به فرض خلاف که مدل ابرکارایی اصلاح‌شده، شدنی باشد. در این صورت بنا به قیود مدل ابرکارایی اصلاح‌شده، خواهیم داشت:

$$\exists \left(\hat{\lambda},\bar{\delta}\right) \ s.t. \ \sum_{j\in E, j\neq k} \hat{\lambda}_j x_j + \bar{\delta}\left(\hat{\lambda}_k - ۱\right) = x_k$$
$$\Rightarrow \qquad \sum_{j\in E, j\neq k} \hat{\lambda}_j x_j = x_k + \bar{\delta}\left(۱ - \hat{\lambda}_k\right)$$
$$\hat{\lambda}_k < ۱,\ \bar{\delta} > ۰ \ \Rightarrow \bar{\delta}\left(۱ - \hat{\lambda}_k\right) \geq ۰.$$

با تعریف $\hat{\delta} = \bar{\delta}\left(۱ - \hat{\lambda}_k\right)$ به نحوی که $\hat{\delta} > ۰$، خواهیم داشت:

$$\sum_{j\in E, j\neq k} \hat{\lambda}_j x_j = x_k + \hat{\delta}\ .$$

در این صورت $x_k + \hat{\delta}$ ورودی یک نقطه غیر راسی است؛ زیرا از ترکیب محدب ورودی سایر DMUها به‌وجود آمده است، که این با نقطه اتکا بودن DMU_k در تناقض است.

حال اگر $\hat{\lambda}_k = ۱$ در این صورت $\bar{\delta}\left(۱ - \hat{\lambda}_k\right) = ۰$، در نتیجه $\sum_{j\in E, j\neq k} \hat{\lambda}_j x_j = x_k$. بنابراین x_k ورودی یک نقطه غیر راسی است؛ زیرا از ترکیب محدب ورودی سایر DMUها به‌وجود آمده است، که این با نقطه اتکا و راسی بودن DMU_k در تناقض است.

برای اثبات $\Leftarrow$)، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم DMU_k راسی غیر اتکا باشد، ثابت می‌کنیم در این صورت مدل ابرکارایی اصلاح‌شده، شدنی است. چون DMU_k غیر اتکا است با حذف این واحد و قرار دادن واحد $DMU_{k'} = \left(x_k + \delta, y_k - \delta'\right)$ به‌جای آن، دیگر این واحد به‌عنوان کارای راسی نخواهد بود و نسبت به مرز قبلی روی مرز کارایی نخواهد بود. البته باید توجه داشت که δ و δ' به‌گونه‌ای انتخاب شوند که واحد $DMU_{k'}$ جدید، خارج از ناحیه پایداری واحد کارای راسی DMU_k باشد.

با در نظر گرفتن مدل BCC برای سنجش کارایی $DMU_{k'}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\sum_{j\neq k} \lambda_j x_j + \lambda'_k x'_k + s_i^- = x_k + \delta \\ &\sum_{j\neq k} \lambda_j y_j + \lambda'_k y'_k - s_r^+ = y_k - \delta' \\ &\sum_{j\neq k} \lambda_j = ۱. \end{aligned} \tag{۶}$$

حالت اول) اگر $DMU_{k'}$ واحد ناکارا باشد، در این صورت نمی‌تواند به‌عنوان واحد مرجع خود باشد و در نتیجه $\lambda'_k = ۰$. پس در مدل (۶) داریم:

$$\begin{aligned}&\sum_{j\neq k}\lambda_j x_j + s_i^- = x_k + \delta\\&\sum_{j\neq k}\lambda_j y_j - s_r^+ = y_k - \delta'\\&\sum_{j\neq k}\lambda_j = 1.\end{aligned} \tag{۷}$$

در نظر می‌گیریم $s_i^- = \eta = \delta\lambda_k$ و $s_r^+ = \beta = \delta'\lambda_k$.

چون همیشه واحدهای کارای قوی به‌عنوان مرجع انتخاب می‌شوند، پس به ازای واحدهای کارای قوی (مجموعه E) $j \in E, \lambda_j > 0$. پس مدل (۷) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in E, j\neq k}\lambda_j x_j + \eta = x_k + \delta\\&\sum_{j\in E, j\neq k}\lambda_j y_j - \beta = y_k - \delta'\\&\sum_{j\in E, j\neq k}\lambda_j = 1.\end{aligned} \tag{۸}$$

با توجه به این‌که مدل ابرکارایی AP (اندرسون- پترسون) به ازای واحد ناکارا شدنی است، مدل (۸) که یک مدل ابرکارایی AP است، همواره شدنی است. مشاهده می‌شود مدل (۸) همان مدل ابرکارایی اصلاح‌شده است که یک جواب شدنی $\left(\lambda_j, \eta = s_i^-, \beta = s_r^+, \delta, \delta'\right)$ دارد. پس مدل ابرکارایی اصلاح‌شده، شدنی است.

حالت دوم) اگر $DMU_{k'}$ واحد کارای غیر راسی باشد، آنگاه برای واحدهای مرجع آن جواب دگرین وجود دارد. می‌توان از بین جواب‌های دگرین، جوابی را در نظر گرفت که در آن $\hat{\lambda}'_k = 0$. چنین جوابی حتماً وجود خواهد داشت؛ زیرا می‌توان فقط واحدهای کارای راسی را به‌عنوان مرجع در نظر گرفت. پس مدل (۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}&\sum_{j\neq k}\hat{\lambda}_j x_j + \hat{s}_i^- = x_k + \delta\\&\sum_{j\neq k}\hat{\lambda}_j y_j - \hat{s}_r^+ = y_k - \delta'\\&\sum_{j\neq k}\hat{\lambda}_j = 1.\end{aligned} \tag{۹}$$

چون جوابی که در آن $\hat{\lambda}'_k = 0$ و بقیه واحدهای کارای راسی به‌عنوان مرجع انتخاب شده‌اند، در نظر گرفته‌ایم، پس مدل (۹) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j\in E, j\neq k} \hat{\lambda}_j x_j + \hat{\eta} = x_k + \delta \\
&\sum_{j\in E, j\neq k} \hat{\lambda}_j y_j - \hat{\beta} = y_k - \delta' \qquad (۱۰)\\
&\sum_{j\in E, j\neq k} \hat{\lambda}_j = ۱.
\end{aligned}
$$

مدل (۱۰) مدل ابرکارایی AP است که به ازای واحد کارای غیر راسی، شدنی است و نیز برای مدل‌بالا جواب شدنی $\hat{\lambda}_j, \hat{\eta} = \hat{s}_i^-$ و $\hat{\beta} = \hat{s}_r^+, \delta, \delta'$ وجود دارد که یک جواب شدنی برای ابرکارایی اصلاح‌شده است. بنابراین این مدل شدنی است.

با توجه به قضیه ۳ می‌توان نتیجه گرفت DMU_k یک نقطه غیر اتکا است اگر و فقط اگر برای $k \in E$ مدل ابرکارایی اصلاح‌شده، شدنی باشد.

تذکر: مدل ابرکارایی اصلاح‌شده در صورت شدنی بودن، نامحدود است.

مثال عددی: تعداد ۹ واحد تصمیم‌گیری (DMU) با دو ورودی و یک خروجی را مطابق جدول ۱ در نظر بگیرید. با استفاده از مدل BCC، کارایی DMU را تعیین نموده، نتایج نشان می‌دهد $DMU_j, j = ۱,۲,۳,۷$ کارای قوی هستند. برای تعیین نقاط اتکا، همان‌گونه که در جدول ۲ آمده است جواب بهین مدل ابرکارایی اصلاح‌شده به ازای واحدهای کارای قوی ۲ و ۷ بینهایت و به ازای واحدهای ۱ و ۳ نشدنی است که نشان می‌دهد این دو واحد نقطه اتکا می‌باشند. به‌علاوه با استفاده از روش‌های ذکرشده $DMU_۱$ و $DMU_۳$ نقاط اتکا شناخته شده‌اند.

جدول۱: داده‌های ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیری

DMU	ورودی ۱	ورودی۲	خروجی	DMU	ورودی ۱	ورودی۲	خروجی
۱	۱	۴	۱	۶	۶	۱	۱
۲	۲	۲	۱	۷	۱/۵	۳	۱
۳	۵	۱	۱	۸	۳	۳	۱
۴	۶	۵	۱	۹	۶	۳	۱
۵	۱	۵	۱				

جدول۲: دسته‌بندی واحدها

DMU	جواب بهین مدل ابرکارایی اصلاح‌شده	نوع DMU
۱	نشدنی	نقطه اتکا
۲	بینهایت (شدنی)	راسی
۳	نشدنی	نقطه اتکا
۴	-	ناکارا
۵	-	کارای ضعیف
۶	-	کارای ضعیف
۷	بینهایت (شدنی)	کارای غیر راسی
۸	-	ناکارا
۹	-	ناکارا

۶- شناسایی نقاط اتکا با استفاده از بازه کارایی

می‌توان برای تشخیص نقاط اتکا از بازه کارایی و ناکارایی نیز کمک گرفت زیرا طبق بررسی انجام‌شده نقاط اتکا واحدهای کارای راسی هستند که کمترین بازه کارایی را در بین واحدهای کارای راسی دارند. برای این کار ابتدا یک بازه کارایی برای هر DMU پیشنهاد می‌کنیم که شامل همه مقادیر ممکن برای نسبت خروجی وزن‌دار شده به ورودی است که به‌عنوان کارایی محسوب می‌شود. در این صورت یک بازه کارایی به‌دست می‌آید. کران بالای کارایی از دیدگاه خوش‌بین و کران پایین کارایی از دیدگاه بدبین به‌دست می‌آید. انتانی و همکارانش در [۱۰] با ماکسیمم سازی مدل CCR، کران بالایی کارایی را به‌دست آوردند و با مینیمم‌سازی تابع هدف و با دیدگاه بدبین کران پایین کارایی را به‌دست آوردند. از معایب روش انتانی برای به-دست آوردن بازه کارایی این است که این روش قادر به تفکیک واحدهای کارای ضعیف از کارای راسی نیست و در نتیجه در تشخیص نقاط اتکا به مشکل برمی‌خوریم. به همین خاطر برای رفع این مشکل از مدل غیر شعاعی RAM استفاده می‌کنیم.

۶-۱- بازه کارایی با استفاده از مدل RAM

مدل RAM یک مدل غیر شعاعی در DEA است [۱۱]. با توجه به این‌که مدل‌های شعاعی قادر به تفکیک DMU کارای راسی و کارایی ضعیف نیست، برای به‌دست آوردن بازه کارایی و ناکارایی از مدل غیر شعاعی RAM استفاده می‌کنیم. مدل (۱۱)، مدل RAM است:

$$\begin{aligned}
\max\ & \sum\nolimits_{i=1}^{m} w_i s_i^- + \sum\nolimits_{r=1}^{s} w_r s_r^+ \\
s.t.\ & \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io},\ \ i = 1,2,\dots,m \\
& \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro},\ \ r = 1,2,\dots,s \\
& s_i^- \geq 0,\ s_r^+ \geq 0,\ \lambda_j \geq 0
\end{aligned} \tag{11}$$

که در آن w_i و w_r وزن‌های ورودی و خروجی می‌باشند و به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
w_i &= \frac{1}{R_i} \quad R_i = \max\left(x_{ij}\right) - \min\left(x_{ij}\right) \\
w_r &= \frac{1}{R_r} \quad R_r = \max\left(y_{rj}\right) - \min\left(y_{rj}\right).
\end{aligned}$$

با استفاده از مدل جمعی، کران بالای کارایی از مدل (۱۲) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\theta_o^{E^*} = \max\ & \sum\nolimits_{i=1}^{m} w_i s_i^- + \sum\nolimits_{r=1}^{s} w_r s_r^+ \\
s.t.\ & \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io},\ \ i = 1,2,\dots,m \\
& \sum\nolimits_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro},\ \ r = 1,2,\dots,s \\
& s_i^- \geq 0,\ s_r^+ \geq 0,\ \lambda_j \geq 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

برای محاسبه کران پایین کارایی نیز از مدل زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned}
\theta_{oj}^{E} = \max\ & \sum\nolimits_{i=1}^{m} w_i s_i^- + \sum\nolimits_{r=1}^{s} w_r s_r^+ \\
s.t.\ & \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io},\ \ i = 1,2,\dots,m \\
& \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro},\ \ r = 1,2,\dots,s \\
& s_i^- \geq 0,\ s_r^+ \geq 0,\ \lambda_j.
\end{aligned} \tag{13}$$

در واقع برای تمامی DMUها به‌جز DMU_o، مدل (۱۳) را حل نموده و کران پایین کارایی به‌صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\theta_{o^*}^{E} = 0.7 \min\nolimits_{j \neq o} \theta_{oj}^{E}\ . \tag{14}$$

۶-۲- بازه ناکارایی با استفاده از مدل RAM

بر اساس خواصی که در مدل شعاعی بیان شد، کران بالای ناکارایی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \theta_o^{IE^*} &= \max \ \sum_{i=1}^{m} w_i s_i^- + \sum_{r=1}^{s} w_r s_r^+ \\ s.t. \ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} - s_i^- = x_{io}, \ \ i = 1,2,\dots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} + s_r^+ = y_{ro}, \ \ r = 1,2,\dots,s \\ & s_i^- \geq 0, \ s_r^+ \geq 0, \ \lambda_j \geq 0. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

برای محاسبه کران پایین ناکارایی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \theta_{oj}^{IE} &= \max \ \sum_{i=1}^{m} w_i s_i^- + \sum_{r=1}^{s} w_r s_r^+ \\ s.t. \ & \lambda_j x_{ij} - s_i^- = x_{io}, \ \ i = 1,2,\dots,m \\ & \lambda_j y_{rj} + s_r^+ = y_{ro}, \ \ r = 1,2,\dots,s \\ & s_i^- \geq 0, \ s_r^+ \geq 0, \ \lambda_j. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

مدل (۱۶) برای تمامی DMUها به‌جز DMU_o حل می‌شود و کران پایین ناکارایی از عبارت (۱۷) به دست می‌آید:

$$\theta_{o_*}^{IE} = 0 \vee \min_{j \neq o} \theta_{oj}^{IE}. \tag{۱۷}$$

حال با استفاده از بازه کارایی می‌توان نقاط اتکا را مشخص کرد؛ به این صورت که ابتدا واحدهای کارای راسی را مشخص می‌کنیم. در مدل بازه کارایی واحدهایی کارای راسی هستند که کران بالای کارایی در مدل RAM برابر با صفر است. سپس نقاط اتکا را مشخص می‌کنیم؛ به این صورت که نقاط اتکا واحدهای کارای راسی هستند که کمترین بازه کارایی را دارا می‌باشند. این روش نیز دارای معایبی است زیرا به‌دست آوردن کران پایین واحدهای کارای راسی برای تشخیص نقاط اتکا، احتیاج به حل n مسئله دارد.

مثال عددی: داده‌های جدول ۱ را برای نه واحد تصمیم‌گیری (DMU) که هر یک دارای دو ورودی و یک خروجی هستند را در نظر بگیرید. بازه کارایی و ناکارایی با استفاده از مدل CCR و RAM در جدول ۳ داده‌شده است.

جدول ۳: بازه‌ی کارایی و ناکارایی

		کارایی BCC		کارایی مدل RAM	
DMU	نوع DMU	بازه کارایی	بازه ناکارایی	بازه کارایی	بازه ناکارایی
۱	نقطه اتکا	[۰/۲۵,۱]	[۰/۱۶,۰/۸]	[۰,۰/۲۵]	[۰,۱/۲۵]
۲	راسی	[۰/۵,۱]	[۰/۳۳,۰/۴]	[۰,۰/۴۵]	[۰,۱/۵۵]
۳	نقطه اتکا	[۰/۲,۱]	[۰/۲,۰/۸۳]	[۰,۰/۲۵]	[۰,۱/۲]
۴	ناکارا	[۰/۱۶,۰/۳۸]	[۱,۱]	[۰,۱/۵۵]	[۰,۰/۵]
۵	کارای ضعیف	[۰/۲,۱]	[۰/۱۶,۱]	[۰/۲۵,۱]	[۰/۲۵,۱]
۶	کارای ضعیف	[۰/۱۶,۱]	[۰/۲,۱]	[۰/۲,۰/۵]	[۰/۲,۱]
۷	کارای غیر راسی	[۰/۳۳,۱]	[۰/۲۵,۰/۶]	[۰,۰/۳]	[۰,۱/۴]
۸	ناکارا	[۰/۳۳,۰/۶۶]	[۰/۵,۰/۶]	[۰/۴۵,۰/۶]	[۰/۳,۱/۱]
۹	ناکارا	[۰/۱۶,۰/۵۳]	[۰/۶,۱]	[۰/۵,۱/۰۵]	[۰/۵,۰/۵]

همان‌گونه که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، در کارایی شعاعی DMU_5 و DMU_6 کارای ضعیف می‌باشند ولی دارای کران بالای مساوی با واحدهای کارای راسی DMU_1، DMU_2 و DMU_3 هستند و نیز در کارایی مدل RAM واحدهای کارای راسی DMU_1، DMU_2، DMU_3 و واحد کارای غیر راسی DMU_7 دارای کران پایین صفر هستند. همچنین نقاط اتکا DMU_1 و DMU_3 دارای کمترین بازه کارایی می‌باشند.

۷- نتیجه‌گیری

واحدهای تصمیم‌گیری به دسته‌های ناکارا، کارای ضعیف، کارای غیر راسی و کارای غیر راسی تقسیم می‌شوند. در این مقاله دسته‌ی جدیدی از واحدها را به نام نقاط اتکا بیان می‌کنیم. نقاط اتکا واحدهای کارای راسی هستند که مرز کارایی ضعیف را می‌سازند. در واقع نقاط اتکا روی اشتراک مرز کارایی و قسمت آزاد مرز قرار دارند. بنابراین در ساخت مرز ضعیف کارایی نقش مهمی را ایفا می‌کنند. محل قرار گرفتن این نقاط در مرز کارایی خصوصیات ویژه‌ای را برای این نقاط به دنبال دارد. از جمله این‌که حذف نقاط اتکا باعث تغییر مجموعه امکان تولید می‌شود. یک نقطه اتکا این ویژگی را نیز دارا است که با تغییر در ورودی و خروجی آن، نقطه جدید هنوز روی مرز است؛ یعنی اگر به‌جای یک واحد بخواهیم واحدی بدتر یعنی ورودی بیشتر یا خروجی کمتر جایگزین کنیم، یک نقطه اتکا بهترین گزینه است؛ زیرا نقطه جدید

هنوز روی مرز کارایی است. با توجه به خواص ذکرشده برای نقاط اتکا روشی که با محاسبات کم‌تر این نقاط را تشخیص دهد اهمیت به‌سزایی دارد. در این مقاله الگوریتم‌ها و روش‌های مختلفی برای شناسایی نقاط اتکا بیان‌شده است که از نظر حجم محاسبات متفاوت است. چون در الگوریتم‌های بیان‌شده محاسبات برای رسیدن به نقاط اتکا زیاد است، روش‌هایی را برای تشخیص سریع‌تر این نقاط پیشنهاد می‌دهیم. از میان روش‌های ذکرشده، روش ابرکارایی اصلاح‌شده دارای محاسبات کمتری است و سریع‌تر این نقاط را شناسایی می‌کنیم.

مراجع

[1] Allen, R. and Thanassoulis, E. (2004). Improving envelopment in data envelopment analysis, *European Journal of Operational Research*, **154**(4), 363-379.

[2] Bognol, M.L. and Dula, J.H. (2009). Anchor points in DEA, *European Journal of Operational Research*. **192**, 668-676.

[3] Cooper, W.W., Seiford, L. and Tone, K. (2007). *Data envelopment analysis: A Comprehensive Text with Models, Reference and DEA-Solver Software*, Springer, New York.

[4] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiencies of DMUs, *European Journal of Operational Research*, **2**(6), 429-444.

[5] Anderson, P. and Petersen, N.C. (1993).A procedure for ranking efficient unite in data envelopment analysis, *Management Science*, **39**, 1261–1264.

[6] Hosseinzadeh Lotfi, F., Jahanshahloo, G.R., Moradi, F. and Jannati, F. (2010). An Alternative Algorithm for Detecting Anchorpoints, *Internathional Mathematical Forum*, **5**, 3371 - 3377

[7] Bazaraa, M.S., Jarvis, J. and Sherali, H.(1977). *Linear Programming and network flows.* John wiely& sons, NewYork

[8]Jahanshahloo, G.R., Hossinzadeh Lotfi, F. and Akbarian, D. (2010). Finding weak defining hyperplane of pps of the BCC modle, *Applied Mathemathical Modelling*, **34,** 3321-3332.

[9] Jahanshahloo, G.R., Shirzadi, A. and Mirdehghan, S.M. (2009). Finding strong defining hyperplanes of pps using multiplier form, *European Journal of Operational Research*, **194**, 933-938.

[10] Entani, T., Yutaka, M. and Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data, *European Journal of Operational Research*, **136**, 32-45.

[11] Cooper, W.W., Park, K.S. and Pastor, J.T. (1999). RAM, A rang adjusted measure of inefficiency for use with additive models and relations to other models and measure in DEA, *Journal of Productivity Analysis*, **11**, 5–42.

A New Model for Determining Anchor Points in Data Envelopment Analysis

Faranak Hosseinzadeh Saljooghi, Zahra Elahi Moghaddam

Department of Mathematics, Sistan and Baluchestan University, Zahedan, Iran

Abstract

Data envelopment analysis (*DEA*) is a method for evaluating performance of organizations and decision making units (*DMUs*). This method divide decision making units (*DMUs*) in four different categories: inefficient, weak efficient, extreme efficient and non-extreme efficient. In this paper, we investigate a new *DMU* category which called "anchor point". An anchor point places on common region between the efficiency frontier and free-disposability. Indeed, an anchor point is extreme efficient which makes weak efficiency frontier. Omission of the anchor points will change efficiency frontier and eliminate a region of generating possibility set. Anchor point also has another characteristic, changing its input or output will change efficiency frontier and by increasing input or decreasing output, the new point will be still on frontier and is extreme efficient. Therefore, the characteristics of the anchor point demonstrate its importance. As for its importance, we propose faster methods to identify these points. At first, we express identifying algorithms for these points and then by using their characteristics, we propose some methods like supper efficiency method which identifies anchor points by using less calculation than others. We will give a numerical example to explain proposed method and compare it with other methods.

***Keywords**:* Data Envelopment Analysis, Anchor Point, Efficiency Frontier, Hyperplane, Supper Efficiency.

Mathematics Subject Classification (2010): 90B50, 90B60.