مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۴، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۳

ساکل موضعی $C(X)$

سمیه سلطانپور[۱] و مهرداد نامداری

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۶/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۲/۶

چکیده: در این مقاله به معرفی و مطالعه‌ی $LC_F(X)$، ساکل موضعی $C(X)$، می‌پردازیم، که عبارت است از $LC_F(X)=\left\{f\in C(X):\overline{S_f}=X\right\}$ که در آن S_f برابر با اجتماع مجموعه‌های باز $U\subseteq X$ به طوری که $|U\setminus Z(f)|<\infty$. گیریم $C_F(X)$ نمایش ساکل $C(X)$ است، نشان می‌دهیم که $LC_F(X)$ یک z-ایدآل $C(X)$ شامل $C_F(X)$ است. شرایط برقراری تساوی در رابطه‌ی $C_F(X)\subseteq LC_F(X)\subseteq C(X)$ را بررسی می‌کنیم و در واقع نشان می‌دهیم که X یک فضای تقریباً گسسته است اگر و تنها اگر $C(X)=LC_F(X)$. توجه می‌کنیم که هرگاه X یک فضای نامتناهی باشد، $C(X)$ هرگز بر $C_F(X)$ منطبق نیست. همچنین ثابت می‌کنیم که $|I(X)|<\infty$ اگر و تنها اگر $C_F(X)=LC_F(X)$. به علاوه هرگاه $|I(X)|<\infty$ باشد، آن‌گاه $LC_F(X)$ در هیچ‌یک از زیرحلقه‌های $C(X)$ شامل آن اساسی نمی‌باشد. در حالی که می‌بینیم $LC_F(X)$ اشتراکی از ایدال‌های اساسی است. شرایطی را بیان می‌کنیم که $LC_F(X)$ در هیچ زیرحلقه‌ی $C(X)$ که شامل خودتوان‌های $C(X)$ است یک ایدال اول نمی‌باشد. همچنین اول بودن $LC_F(X)$ را در برخی از زیرحلقه‌های $C(X)$ مشخص می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ساکل، z-ایدآل، فضای تقریباً گسسته، ساکل موضعی، ایدآل اساسی.

رده‌بندی ریاضی: ۵۴C۳۰، ۵۴C۴۰.

۱-مقدمه

فرض کنید $C(X)$ حلقه‌ی توابع پیوسته‌ی حقیقی-مقدار روی فضای تیخونف X باشد. در مطالعه‌ی $C(X)$ به لحاظ برقراری پیوندهای بین جبر و توپولوژی، امکان برخورد با مفاهیم تازه‌ی جبری یا توپولوژیکی وجود دارد. بسیاری از فضاهای شناخته شده‌ی توپولوژیکی نخست با کمک ویژگی‌های جبری حلقه‌ی $C(X)$ به دست آمدند و بسیاری از مفاهیم جبری، ابتدا با کمک ویژگی‌های توپولوژیکی از $C(X)$ سرچشمه گرفته‌اند و سپس به حلقه‌های کلی‌تر نیز

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: s-soltanpour@phdstu.scu.ac.ir

نفوذ یافته‌اند. تحقیقات در زمینه‌ی $C(X)$ در سال‌های گذشته در ایران (اهواز) فعال بوده و کارهای با اهمیتی در این زمینه انجام گرفته است، که در آن‌ها، به جنبه‌های جبری عمیق‌تری از $C(X)$ پرداخته شده است، و مفاهیمی از قبیل ساکل، ایدآل‌های اساسی، مینیمال و یکنواخت، $\aleph_0$-انژکتیویتی، ue-حلقه‌ها، بعد گلدی، و z-ایدآل‌های حلقه‌های خارج قسمتی $C(X)$ مطالعه شده است، مقالات [۱، ۲، ۳، ۴] را ببینید. همچنین در نوشتار "پیشرفت‌های اخیر در توپولوژی" (مرجع [۶]) توسط ملوین هنریکسن[1] به این مطلب اشاره شده است. در [۷ و ۸]، $\mathbb{R}$-زیرجبر $C_c(X)$، متشکل از توابع پیوسته‌ی حقیقی-مقدار با برد شمارا شناسایی و مطالعه شده است، نکته حائز اهمیت این است که این زیرجبر بر خلاف دیگر زیرحلقه‌های $C(X)$ که تاکنون بررسی شده‌اند، لزوماً با $C(Y)$ برای هیچ فضای توپولوژی Y یکریخت نمی‌باشد. اخیراً به مفاهیم موضعی این نتایج نیز پرداخته شده است، به ویژه در [۹]، $\mathbb{R}$-زیرجبرهای $L_c(X)$، $L_F(X)$ و $L_1(X)$ از $C(X)$ معرفی و بررسی شده است. در مطالعه‌ی بعد گلدی حلقه‌های تعویض‌ناپذیر، مفهوم ساکل مطرح می‌شود. ساکل $C(X)$، که آن را با $C_F(X)$ نمایش می‌دهیم، برابر با مجموع مستقیمی از ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ است. در [۵]، ایدآل‌های مینیمال $C(X)$ و ساکل آن به ترتیب به صورت زیر شناسایی شده‌اند و نشان داده شده است که موجوداتی توپولوژیکی هستند.

$$m_x = \{f \in C(X) : X \setminus Z(f) \subseteq \{x\}\}$$

$$C_F(X) = \{f \in C(X) : |X \setminus Z(f)| < \infty\}$$

که در آن $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ می‌باشد و آن را صفر-مجموعه‌ی f می‌نامیم. ایدال I از $C(X)$ را یک z-ایدال گوییم، هرگاه $Z^{-1}[Z[I]] = I$، یعنی؛ هرگاه $Z(f) \subseteq Z(g)$، $f \in I$ و $g \in C(X)$ باشد، آن‌گاه $g \in I$. همچنین ایدآل E را در حلقه‌ی R اساسی گوییم، اگر هر ایدآل غیرصفر حلقه‌ی R را به طور نابدیهی قطع نماید و زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژی X را هیچ‌جا چگال گوییم، هرگاه $\operatorname{int}_X(cl_X A) = \varnothing$. در [۱] معادل‌های توپولوژیکی اساسی بودن یک ایدآل در $C(X)$ مشخص شده‌اند، به ویژه نشان داده شده است که ایدآل E در $C(X)$ اساسی است اگر وتنها اگر $\bigcap Z[E] = \bigcap_{f \in E} Z(f)$ هیچ‌جا چگال باشد. همچنین می‌بینیم که $\bigcap Z[C_F(X)] = \bigcap_{f \in C_F(X)} Z(f)$ متشکل از نقاط نامنفرد X است و ثابت شده است که $C_F(X)$ اساسی است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی نقاط منفرد X در X چگال باشد، [۱ و ۴] را ببینید. نقش $C_F(X)$ در پیوند میان خواص توپولوژیکی فضای X و خواص جبری حلقه‌ی $C(X)$ در مقالات [۳، ۴، ۵، ۸، ۹، ۱۰]، این انگیزه را ایجاد کرد که در این

1- Melvin Henriksen.

مقاله ساکل موضعی حلقه‌ی $C(X)$ که آن را با $LC_F(X)$ نمایش می‌دهیم، معرفی و مطالعه کنیم. در بخش دوم نشان می‌دهیم که $LC_F(X)$ یک z−ایدآل $C(X)$ می‌باشد که $C_F(X)$ را شامل است. نشان می‌دهیم که اگر X همبند باشد، آن‌گاه $C_F(X) = LC_F(X) = (\circ)$.

در بخش سوم، به بررسی تساوی در رابطه‌ی $C_F(X) \subseteq LC_F(X) \subseteq C(X)$ می‌پردازیم. توجه می‌کنیم که ساکل کلاسیک در مبحث $C(X)$ دارای این نقطه ضعف است که در صورتی که X یک فضای نامتناهی باشد همواره $C_F(X) \subsetneq \mathrm{C}(X)$، اما در مورد ساکل موضعی می‌توان فضاهایی را مشخص نمود که تساوی برقرار باشد. فضای توپولوژی X را تقریباً گسسته می‌نامیم، هرگاه مجموعه‌ی نقاط منفرد X، در آن چگال باشد؛ یعنی، $\overline{I(X)} = X$. در واقع ثابت می‌کنیم که X یک فضای تقریباً گسسته است اگر و تنها اگر $LC_F(X) = C(X)$. همچنین نشان می‌دهیم که $|I(X)| < \infty$ اگر و تنها اگر $C_F(X) = LC_F(X)$. در [۳ و ۴] نشان داده شده است که $C_F(X)$ هرگز یک ایدآل اول $\mathrm{C}(X)$ نیست. در بخش چهارم، ما سعی داریم که اول بودن $LC_F(X)$ در $C(X)$ را مشخص نماییم. ابتدا شرایطی را بیان می‌کنیم که $\mathrm{LC}_F(X)$ در زیرحلقه‌ی R از $C(X)$ که شامل خودتوان‌های $C(X)$ باشد، یک ایدآل اول نیست. همچنین ثابت می‌کنیم که هرگاه تعداد مؤلفه‌های همبندی X متناهی باشد و حداقل دو تا از آن‌ها نامتناهی باشد، آن‌گاه $LC_F(X)$ در زیرحلقه‌ی R از $C(X)$ که شامل خودتوان‌های $C(X)$ می‌باشد، اول نیست. شرایط اول بودن $LC_F(X)$ را در برخی از زیرحلقه‌های $C(X)$ نیز مشخص می‌کنیم. در ادامه می‌بینیم که $LC_F(X)$ اشتراکی از ایدآل‌های اساسی است و ثابت می‌کنیم که هرگاه $|I(X)| < \infty$ باشد، آن‌گاه $LC_F(X)$ در هیچ‌یک از زیرحلقه‌های $C(X)$ که $LC_F(X)$ را در بر می‌گیرد، اساسی نمی‌باشد.

در این مقاله فضای توپولوژی X را نامتناهی، کاملاً منظم و هاسدورف در نظر می‌گیریم، مگر این‌که خلاف آن ذکر شود. مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژی X را با $\mathrm{O}(X)$ نمایش می‌دهیم، همچنین برای سهولت مجموعه‌های بسته و باز را بستباز می‌نامیم. برای اطلاعات بیشتر در زمینه‌ی فضاهای توپولوژی و حلقه توابع پیوسته به [۱۱ و ۱۲]، مراجعه شود.

۲ – ساکل موضعی

در این بخش ابتدا به معرفی ساکل موضعی پرداخته و نشان می‌دهیم که ساکل موضعی یک z−ایدآل شامل $C_F(X)$ است.

تعریف ۱: فرض کنیم $f \in \mathrm{C}(X)$ و S_f برابر با اجتماع مجموعه‌های باز $U \subseteq X$ به طوری که $|U \setminus Z(f)| < \infty$ باشد. ساکل موضعی $\mathrm{C}(X)$ را با $LC_F(X)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را مجموعه‌ی همه‌ی توابع $\mathrm{f} \in \mathrm{C(X)}$ که S_f در X چگال باشد، تعریف می‌کنیم. یعنی،

$$S_f = \bigcup_{\substack{U \in \mathrm{O}(X) \\ |U \setminus Z(f)| < \infty}} U$$

$$LC_F(X) = \left\{ f \in C(X) : \overline{S_f} = X \right\}$$

لم ۱: $\overline{S_f} = X$ اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی باز $G \subseteq X$، مجموعه‌ی باز $U \subseteq X$ موجود باشد به طوری‌که $|U \setminus Z(f)| < \infty$ و $U \cap G \neq \varnothing$ اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی باز $G \subseteq X$، مجموعه‌ی باز $U \subseteq X$ موجود باشد به طوری که $|U \setminus Z(f)| < \infty$ و $U \subseteq G$.

هرگاه U یک مجموعه‌ی باز ناتهی متناهی در فضای هاسدورف X و $x \in U$ باشد، آن‌گاه x منفرد است. زیرا $\{x\} = U \setminus (U \setminus \{x\})$ و واضح است که $\overline{\bigcup_{\substack{U \in \mathrm{O}(X) \\ |U| < \infty}} U} = X$ اگر و تنها اگر $\overline{I(X)} = X$.

گزاره ۱: برای هر $f \in C(X)$، $S_f = \bigcup_{\substack{U \in \mathrm{O}(X) \\ |U \setminus Z(f)| \leq ۱}} U$.

اثبات: بدیهی است $\bigcup_{\substack{V \in O(X) \\ |V \setminus Z(f)| \leq 1}} V \subseteq \bigcup_{\substack{U \in \mathrm{O}(X) \\ |U \setminus Z(f)| < \infty}} U = S_f$. فرض کنیم $U \setminus Z(f) = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$. تعریف می‌کنیم $V_i = U \setminus \{x_۱, x_۲, \ldots, x_{i-۱}, x_{i+۱}, \ldots, x_n\}$ آشکار است که V_i در X باز است و $V_i \setminus \mathrm{Z(f)} = \{x_i\}$. اکنون قرار می‌دهیم $U = \bigcup_{i=۱}^{n} V_i$ و اثبات تمام است. ■

لم ۲: هرگاه $f, g \in C(X)$ باشند، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار هستند.

الف) $S_{f+g} \supseteq S_f \cap S_g$.

ب) $S_{fg} \supseteq S_f \cup S_g$.

پ) $S_{|f|} = S_f$.

ت) اگر $f,g \in LC_F(X)$ باشند، آن‌گاه $\overline{S_f \cap S_g} = X$.

اثبات: واضح است که

$$S_f \cap S_g = \bigcup_{\substack{U,V \in O(X) \\ |U \setminus Z(f)| < \infty \\ |V \setminus Z(g)| < \infty}} (U \cap V) \subseteq \bigcup_{\substack{U,V \in O(X) \\ |(U \cap V) \setminus Z(f)| < \infty \\ |(U \cap V) \setminus Z(g)| < \infty}} (U \cap V)$$

$$= \bigcup_{\substack{W \in O(X) \\ |W \setminus Z(f)| < \infty \\ |W \setminus Z(g)| < \infty}} W \subseteq \bigcup_{\substack{W \in O(X) \\ |W \setminus Z(f+g)| < \infty}} W = S_{f+g}$$

در این صورت با توجه به این که همواره داریم،

$$U \setminus Z(f+g) \subseteq (U \setminus Z(f)) \cup (U \setminus Z(g))$$

و

$$U \setminus Z(fg) = (U \setminus Z(f)) \cap (U \setminus Z(g))$$

اثبات قسمت‌های (الف) و (ب) واضح است. اثبات قسمت (پ) از $U \setminus Z(|f|) = U \setminus Z(f)$ به دست می‌آید. برای اثبات قسمت (ت) یادآوری می‌کنیم که هرگاه $\overline{Y} = X$ و $G \subseteq X$ باز باشد، آن‌گاه $\overline{G \cap Y} = \overline{G}$. چون S_f در X باز و چگال است و $\overline{S_f \cap S_g} = \overline{S_f} = \overline{S_g} = X$. ■

با توجه به قسمت (پ) در لم قبل در مطالعه‌ی $LC_F(X)$ می‌توان با توابع نامنفی کار کرد.

تعریف ۲: فرض کنیم که X یک فضای توپولوژی و C_f^F اجتماع مجموعه‌های باز $U \subseteq X$ باشد به طوری که $|f(U)| < \infty$. زیرجبر به طور موضعی متناهی $C(X)$ را با $L_F(X)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$L_F(X) = \left\{ f \in C(X) : \overline{C_f^F} = X \right\}$$

گزاره ۲: $LC_F(X) \subseteq L_F(X)$.

اثبات: فرض کنیم $f \in LC_F(X)$ و $G \subseteq X$ یک مجموعه‌ی باز دلخواه ناتهی باشد، پس مجموعه‌ی باز $U \subseteq X$ موجود است که $|U \setminus Z(f)| < \infty$ و $U \cap G \neq \emptyset$. اما از این‌که $|U \setminus Z(f)| < \infty$ نتیجه می‌شود که $|f(U)| < \infty$؛ یعنی، $f \in L_F(X)$. ■

گزاره ۳: $LC_F(X)$ یک ایدآل $C(X)$ است.

اثبات: فرض کنیم $f,g\in LC_F(X)$، نشان می‌دهیم که $f+g\in LC_F(X)$. طبق لم قبل $S_{f+g}\supseteq S_f\cap S_g$، پس $\overline{S_{f+g}}\supseteq\overline{S_f\cap S_g}=\overline{S_f}=\overline{S_g}=X$، بنابراین $f+g\in LC_F(X)$.
اکنون فرض کنیم $f\in LC_F(X)$ و $g\in C(X)$، نشان می‌دهیم که $fg\in LC_F(X)$. طبق لم قبل $S_{fg}\supseteq S_f\cup S_g$، پس $\overline{S_{fg}}\supseteq\overline{S_f\cup S_g}=\overline{S_f}\cup\overline{S_g}=X$. بنابراین $LC_F(X)$ یک ایدآل است. ■

گزاره ۴: $LC_F(X)$ یک z–ایدآل است.

اثبات: فرض کنیم $f\in LC_F(X)$ و $Z(f)\subseteq Z(g)$، نشان می‌دهیم که $g\in LC_F(X)$. برای هر مجموعه‌ی باز $U\subseteq S_f$، داریم $U\setminus Z(g)\subseteq U\setminus Z(f)$، پس $S_f\subseteq S_g$. بنابراین $X=\overline{S_f}\subseteq\overline{S_g}$؛ یعنی، $g\in LC_F(X)$. ■

از آن‌جا که هر z–ایدآل مطلقاً محدب است، پس $LC_F(X)$ یک ایدآل مطلقاً محدب می‌باشد.

گزاره ۵: هرگاه X یک فضای همبند باشد، آن‌گاه $C_F(X)=LC_F(X)=(0)$.

اثبات: فرض کنیم $f\in LC_F(X)$ و $U\in O(X)$ به قسمی باشد که $|U\setminus Z(f)|<\infty$. بنابراین $U\setminus Z(f)$ یک زیرمجموعه‌ی بستباز X می‌باشد. از آن‌جا که X همبند است، پس $U\setminus Z(f)=\varnothing$ یا $U\setminus Z(f)=X$. اگر $U\setminus Z(f)=\varnothing$، آن‌گاه $U\subseteq Z(f)$، پس $f(U)=0$. اگر $U\setminus Z(f)=X$، پس X متناهی است که با فرض تناقض دارد. بنابراین $f(S_f)=0$ و چون $\overline{S_f}=X$، پس $f=0$. ■

۳- بررسی تساوی در رابطه‌ی $C_F(X)\subseteq LC_F(X)\subseteq C(X)$

در این بخش شرایطی را بیان می‌کنیم که در آن ساکل موضعی با ساکل کلاسیک و همچنین با حلقه‌ی $C(X)$ منطبق است.

گزاره ۶: $C_F(X)\subseteq LC_F(X)$.

اثبات: گیریم $f\in C_F(X)$، پس $|X\setminus Z(f)|<\infty$. بنابراین $S_f=X$، در نتیجه $f\in LC_F(X)$. ■

تساوی در رابطه‌ی $C_F(X) \subseteq LC_F(X)$ لزوماً برقرار نیست. برای مثال هرگاه X یک فضای گسسته ناشمارا باشد، آن‌گاه $C_F(X) \subsetneq LC_F(X) = \mathrm{C}(X)$. از طرفی اگر X همبند باشد، $(\circ) = LC_F(X) \subsetneq \mathrm{C}(X)$.

در قضیه‌ی بعد شرایط معادل تساوی ساکل کلاسیک و ساکل موضعی را به دست می‌آوریم که در حقیقت معادل متناهی بودن تعداد نقاط منفرد یک فضای توپولوژی است.

قضیه ۱: $|I(X)| < \infty$ اگر و تنها اگر $C_F(X) = LC_F(X)$.

اثبات: فرض کنیم $C_F(X) = LC_F(X)$. اگر $|I(X)| < \infty$ نباشد، پس X دارای یک زیرمجموعه‌ی شمارای نامتناهی مثل $A = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots\}$ است. تابع f را به طوری که برای هر $x_n \in A$، $f(x_n) = \frac{1}{n}$ و در غیر این صورت $f(x) = \circ$ باشد، تعریف می‌کنیم. در این صورت هرگاه $\varepsilon > \circ$ باشد، $k \in \mathbb{R}$ موجود است به طوری که برای هر $n \geq k$ داریم $\frac{1}{n} < \varepsilon$. اکنون برای زیرمجموعه‌ی بستباز $G = X \setminus \{x_۱, x_۲, \ldots, x_k\}$ و برای هر $x \in G$ داریم، $|f(x)| < \varepsilon$، پس $f \in C(X)$ و $X \setminus Z(f) \supseteq A$ نامتناهی است، یعنی؛ $f \notin C_F(X)$. نشان می‌دهیم که $f \in LC_F(X)$. گیریم $G \subseteq X$ یک مجموعه باز ناتهی دلخواه باشد، باید مجموعه باز $U \subseteq X$ موجود باشد که $|U \cap Coz(f)| < \infty$ و $U \subseteq G$. برای این منظور دو حالت در نظر می‌گیریم، اگر $x \in G \cap I(X) \neq \varnothing$، آن‌گاه کافی است قرار دهیم $U = \{x\}$. اگر $G \cap I(X) = \varnothing$، آن‌گاه $G \subseteq X \setminus I(X) \subseteq X \setminus \mathrm{A}$ خواهد بود. بنابراین $G \cap Coz(f) = G \cap A \subseteq (X \setminus A) \cap A = \varnothing$، کافی است قرار دهیم $U = G$. پس $f \in LC_F(X) \setminus C_F(X)$ که تناقض است. برعکس، گیریم $|I(X)| < \infty$. می‌خواهیم نشان دهیم که $C_F(X) = LC_F(X)$. گیریم $f \in LC_F(X)$، پس $\overline{S_f} = X$، از طرفی بنابر گزاره۱ داریم، $S_f = \bigcup_{\substack{U \in O(X) \\ |U \setminus Z(f)| \leq 1}} U$. بنابراین

$$X \setminus Z(f) = \overline{S_f} \setminus \overline{Z(f)} \subseteq \overline{S_f \setminus Z(f)} = \overline{(\bigcup U) \setminus Z(f)} = \overline{\bigcup (U \setminus Z(f))} \subseteq \overline{I(X)} = I(X)$$

پس طبق تعریف توپولوژیکی ساکل $C(X)$ در [۳]، نتیجه می‌گیریم $f \in C_F(X)$. ■

از آن‌جا که فضای همبند فاقد نقطه‌ی منفرد است، با استفاده از گزاره قبل هم می‌توان نتیجه گرفت که هرگاه X یک فضای همبند باشد، آن‌گاه $C_F(X) = LC_F(X) = (\circ)$.

گزاره ۷: هرگاه X یک فضای گسسته باشد، آن‌گاه $LC_F(X) = C(X)$.

اثبات: اگر $f \in C(X)$، آن‌گاه $S_f \supseteq \bigcup_{x\in X} \{x\} = X$. پس $f \in LC_F(X)$. ■

یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژی X را تقریباً گسسته می‌نامیم، هرگاه مجموعه‌ی نقاط منفرد X، $I(X)$ در آن چگال باشد؛ یعنی، $\overline{I(X)} = X$. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم که این ویژگی معادل است با این‌که $C(X)$ و $LC_F(X)$ برهم منطبق باشند.

قضیه ۲: X فضای تقریباً گسسته است اگر و تنها اگر $LC_F(X) = C(X)$.

اثبات: فرض کنیم X یک فضای تقریباً گسسته و $I(X)$ مجموعه‌ی نقاط منفرد X و $f \in C(X)$ باشد. در این صورت $S_f \supseteq \bigcup_{x\in I(x)} \{x\} = I(X)$، پس $\overline{S_f} = X$؛ یعنی، $f \in LC_F(X)$. برعکس، فرض کنیم $0 \neq r \in \mathbb{R}$، بنابراین $0 \neq r \in LC_F(X)$ و $Z(r) = \varnothing$، پس $\overline{S_r} = X$. گیریم G یک زیرمجموعه‌ی باز X باشد، باید نشان دهیم که $G \cap I(X) \neq \varnothing$. چون $\overline{S_r} = X$ و $Z(r) = \varnothing$، زیر مجموعه باز U_r در X موجود است به طوری که $U_r \cap G \neq \varnothing$ و $|U_r \setminus Z(r)| < \infty$. اما $Z(r) = \varnothing$ و U_r یک زیر مجموعه‌ی باز متناهی از X می‌باشد. بنابراین $U_r \subseteq I(X)$، پس $\varnothing \neq U_r \cap G \subseteq I(X) \cap G$. از این‌رو $\overline{I(X)} = X$؛ یعنی، X تقریباً گسسته است. ■

فضای توپولوژی X را پراکنده می‌نامیم، هرگاه هر زیرفضای X دارای نقطه‌ی منفرد باشد. خاطر نشان می‌سازیم که هر فضای پراکنده تقریباً گسسته است. زیرا فرض کنیم که $I(X)$ نقاط منفرد X و U_x یک همسایگی $x \in X$ باشد. چون X پراکنده است، U_x دارای یک نقطه‌ی منفرد x_0 است. از طرفی U_x باز است، پس x_0 نقطه‌ی منفرد X نیز می‌باشد. بنابراین $x_0 \in U_x \cap I(X) \neq \varnothing$. پس $\overline{I(X)} = X$.

نتیجه ۱: هرگاه X یک فضای پراکنده باشد، آن‌گاه $LC_F(X) = C(X)$.

عکس نتیجه‌ی بالا برقرار نیست. برای مثال فرض کنیم پایه‌های موضعی را برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ در نقاط گویا به صورت تک‌نقطه‌ای و در نقاط اصم به صورت همسایگی‌های معمولی در نظر بگیریم. در این صورت $\mathbb{R}$ با این توپولوژی پراکنده نیست، اما $LC_F(X) = C(X)$.

۴- بررسی اول بودن $LC_F(X)$ در برخی از زیرحلقه‌های $C(X)$

قضیه ۳: هرگاه تعداد مؤلفه‌های همبندی X متناهی باشد و حداقل دو تا از آن‌ها نامتناهی باشد، آن‌گاه $LC_F(X)$ در هیچ زیرحلقه‌ی A از $C(X)$ که شامل خودتوان‌های $C(X)$ می‌باشد، اول نیست.

اثبات: هرگاه تعداد مؤلفه‌های همبندی X متناهی باشد، آن‌گاه هر مؤلفه بستباز است. فرض کنیم $C=\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ مجموعه‌ی مؤلفه‌های همبندی X باشد و X_1 و X_2 نامتناهی باشند. تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} 1 , & x\in X\setminus X_1 \\ 0 , & x\in X_1 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases} 1 , & x\in X_1 \\ 0 , & x\in X\setminus X_1 \end{cases}$$

در این صورت $f,g\in C(X)$ و $fg=0\in LC_F(X)$، اما $f,g\notin LC_F(X)$. زیرا $X_2\subseteq X$ باز است و $|X_2|>\infty$ و $X_2\cap S_f=\varnothing$. توجه کنید که اگر $U\subseteq X_2$ باز باشد و $|U\cap Coz(f)|<\infty$ تناقض با همبندی X_2 می‌باشد. به همین ترتیب $X_1\cap S_g=\varnothing$. ■

قضیه ۴: هرگاه $|I(X)|<\infty$ و $X\setminus I(X)$ ناهمبند باشد، آن‌گاه $LC_F(X)$ در زیرحلقه‌ی R از $C(X)$ که شامل خودتوان‌های $C(X)$ می‌باشد، اول نیست.

اثبات: فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه‌ی بستباز $X\setminus I(X)$ باشند به طوری که $X\setminus I(X)=A\cup B$. تعریف می‌کنیم:

$$f(A\cup I(X))=1 ، f(B)=0 \quad \text{و} \quad g(B\cup I(X))=1 ، g(A)=0$$

در این صورت $f,g\in R\subseteq C(X)$ و $fg=0\in LC_F(X)$، اما $f,g\notin C_F(X)=LC_F(X)$. پس $LC_F(X)=C_F(X)$ در R اول نیست. ■

آشکار است که اگر Y یک زیرمجموعه‌ی X باشد به طوری که برای هر $f\in C(X)$، $f|_Y$ ثابت باشد، آن‌گاه Y باید تک‌نقطه‌ای باشد. زیرا هرگاه $y_1,y_2\in Y$ و $y_1\neq y_2$، آن‌گاه چون X کاملاً منظم است، تابع $f\in C(X)$ به طوری که $f(y_1)\neq f(y_2)$ وجود دارد. در این‌جا یک تعریف از [۹] به همراه نکاتی چند به جهت آشنایی بیشتر با این مفهوم می‌آوریم و در ادامه‌ی مباحث از آن استفاده خواهیم نمود.

تعریف ۳: هرگاه Y یک زیرمجموعه‌ی فضای توپولوژی X باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی همه‌ی توابع $f\in C(X)$ به طوری که $f|_Y$ ثابت باشد، یک زیرجبر $C(X)$ است که با $C_1(Y)$ نمایش داده می‌شود. به طور طبیعی Y را نسبت به زیرحلقه‌ی A از $C(X)$ ثابت گوییم، هرگاه $A\subseteq C_1(Y)$.

گزاره ۸: هرگاه X یک فضای توپولوژی و Y یک زیرمجموعه‌ی همبند X باشد، آن‌گاه $C_c(X)\subseteq C_1(Y)$. به ویژه، هرگاه $X\setminus Y$ شمارا باشد، آن‌گاه $A\subseteq C_1(Y)$ اگر و تنها اگر $A\subseteq C_c(X)$.

اثبات: آشکارا هر تابع $f \in C_c(X)$ روی زیرمجموعه‌ی همبند $Y \subseteq X$ ثابت است، پس $C_c(X) \subseteq C_1(Y)$. هرگاه $X \setminus Y$ شمارا و $f \in A \subseteq C_1(Y)$ باشد، آن‌گاه $|f(X)| \leq \aleph_0$. ■

در این‌جا، نتیجه‌ای که بر اساس کاملاً منظم بودن X به آسانی ثابت می‌شود، بیان می‌کنیم.

نتیجه ۲: برای یک زیرفضای Y از X، داریم $\mathbb{R} \subseteq C_1(Y) \subseteq \mathrm{C}(X)$. به علاوه $\mathbb{R} = C_1(Y)$ اگر و تنها اگر Y در X چگال باشد.

اثبات: برای اثبات قسمت آخر توجه داریم که اگر $x \in X \setminus \overline{Y}$، آن‌گاه $f \in C(X)$ وجود دارد که $f(x) = 0$ و $f(\overline{Y}) = 1$. یعنی، $\mathbb{R} \subsetneq C_1(Y)$. این نتیجه می‌دهد که $\overline{Y} = X$. برعکس، هرگاه $\overline{Y} = X$ و $f \in C_1(Y)$، آن‌گاه $f(Y) = c$ که در آن $c \in \mathbb{R}$. درنتیجه $f = c$ و اثبات تمام است. ■

قضیه ۴: هرگاه $|I(X)| < \infty$ و $R \subseteq C(X)$ و $R \subseteq C_1(X \setminus I(X))$، آن‌گاه $LC_F(X)$ در R اول است.

اثبات: فرض کنیم $fg = 0 \in LC_F(X)$ و $f, g \in R$، در این صورت $f(X \setminus I(X)) = 0$ یا $g(X \setminus I(X)) = 0$، زیرا $R \subseteq C_1(X \setminus I(X))$. پس $S_f = X$ یا $S_g = X$. بنابراین $f \in LC_F(X)$ یا $g \in LC_F(X)$؛ یعنی، $LC_F(X) = C_F(X)$ در R اول است. ■

در [۷]، زیرحلقه‌های

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : |f(X)| \leq \aleph_0\} \quad \text{و} \quad C^F(X) = \{f \in C(X) : |f(X)| < \infty\}$$

معرفی و مطالعه شده‌اند.

نتیجه ۳: هرگاه $|I(X)| < \infty$ و $X \setminus I(X)$ همبند باشد، آن‌گاه $LC_F(X)$ در $C_c(X)$ و $C^F(X)$ اول می‌باشد.

اثبات: زیرا $C_c(X), C^F(X) \subseteq C_1(X \setminus I(X))$. ■

مثال بعد نشان می‌دهد که نتیجه‌ی قبل برای $C(X)$ درست نیست. در واقع هرگاه $|I(X)| < \infty$ متناهی باشد، ساکل موضعی بر ساکل کلاسیک منطبق است و هرگز در $C(X)$ اول نخواهد بود. طبق قضیه‌ی ۳، در مثال بعد، $LC_F(X)$ در دیگر زیرحلقه‌های $C(X)$ که شامل خودتوان‌های $C(X)$ هستند، نیز اول نمی‌باشد.

مثال ۱: فرض کنیم $X = [-3,-2] \cup [-1,0] \cup \{1,2,\ldots,n\}$ یک زیرفضای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی و

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & , \quad x\in[-۳,-۲] \\ ۰ & , \quad x\notin[-۳,-۲] \end{cases} \quad و \quad g(x)=\begin{cases} ۱ & , \quad x\in[-۱,۰] \\ ۰ & , \quad x\notin[-۱,۰] \end{cases}$$

باشد. در این صورت $fg=0\in LC_F(X)$، اما $f,g\notin LC_F(X)$. پس $LC_F(X)$ یک $z-$ ایدآل اول در زیرحلقه‌های $C(X)$ که خودتوان‌های $C(X)$ را شامل می‌باشند، نیست. می‌دانیم که به طور کلی هرگاه زیرمدولی شامل ساکل مدول باشد، آن‌گاه اشتراکی از زیرمدول‌های اساسی است؛ به ویژه، هر ایدال شامل ساکل، اشتراکی از ایدآل‌های اساسی است، [۱۳] را ببینید. اما با توجه به این‌که اثبات جبری آن ساده نیست و در این‌جا ابزار قوی‌تر توابع را داریم، در ادامه با استفاده از نتایجی در زمینه‌ی $C(X)$ مبادرت به اثبات ساده‌تری برای آن می‌کنیم.

گزاره ۹: $LC_F(X)$ اشتراکی از ایدآل‌های اساسی است.

اثبات: چون $LC_F(X)$ یک z-ایدآل است، پس به صورت اشتراکی از ایدآل‌های اول است، بنابر قضیه‌ای در [۳]، هر ایدال اول شامل $C_F(X)$ در $C(X)$ اساسی است. بنابراین $LC_F(X)$ به صورت اشتراکی از ایدآل‌های اساسی است. ■

در ادامه اساسی بودن ساکل موضعی و همچنین ساکل کلاسیک را وقتی تعداد نقاط منفرد فضا متناهی باشد، بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱۰: هرگاه $|I(X)|<\infty$، آن‌گاه $LC_F(X)$ در هیچ‌یک از زیرحلقه‌های $C(X)$ شامل آن اساسی نمی‌باشد.

اثبات: گیریم $I(X)=\{x_۱,x_۲,\ldots,x_n\}$، پس $C_F(X)=\sum_{i=۱}^{n}e_iC(X)$. لذا $LC_F(X)=C_F(X)=eC(X)$ که در آن $e\in C(X)$ یک خودتوان است که $Coz(e)=I(X)$. پس $C(X)=eC(X)\oplus(1-e)C(X)$. گیریم $C_F(X)\subseteq R$ یک زیرحلقه‌ی $C(X)$ باشد، در این صورت $R=(eC(X)\oplus(1-e)C(X))\cap R$. اکنون $E=(1-e)C(X)\cap R$ یک ایدآل در R است به طوری که $C_F(X)\cap I=\varnothing$. یعنی، $LC_F(X)=C_F(X)$ در R اساسی نیست. ■

تشکر و قدردانی

این مقاله برگرفته از پایان نامه دکتری نویسنده اول تحت راهنمایی جناب آقای دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده می‌باشد. نویسندگان از ایشان به خاطر معرفی این مفهوم و پیشنهادهای ارزنده ایشان کمال تشکر را دارند.

مراجع

[1] Azarpanah, F. (1997). Intersection of essential ideals in C(X), *Proc. Amer. Math. Soc*.**125**, 2149-2154.

[2] Azarpanah, F. and Karamzadeh, O. A. S. (2002). Algebraic characterization of some disconnected spaces, *Italian. J. Pure Appl. Math*. **12**, 155-168

[3] Azarpanah, F., Karamzadeh, O. A. S. and Rahmati, S. (2008). C(X) VS. C(X) modulo its socle, *Coll. math*. **3**, 315-336.

[4] Estaji, A. and Karamzadeh, O. A. S. (2003). On C(X) Modulo its socle, *Comm. Algebra* **31**, 1561-1571.

[5] Karamzadeh, O. A. S. and Rostami, M. (1985). On the intrinsic topology and some related ideals of C(X), *Proc. Amer. Math. Soc*. **93**, 179-184.

[6] Henriksen, M. (2002).Topology related to rings of real-valued continuous functions. Where it has been and where it might be going, Recent Progress In General Topology II, eds M. Husek and J. Van Mill, (Elsevier Science), pp: 553-556.

[7] Ghadermazi, M., Karamzadeh, O. A. S. and Namdari, M. (2013). On the functionally countable subalgebra of C(X), Rend. *Sem. Mat. Univ. Padova*, **129**, 47-69.

[8] Ghadermazi, M., Karamzadeh, O. A. S. and Namdari, M. (2014). C(X) versus its functionally countable subalgebra, submitted to Fundamenta Mathematicae.

[9] Karamzadeh, O. A. S., Namdari, M. and Soltanpour, S. (2015). On the locally functionally countable subalgebra of C(X), *Appl. Gen. Topol*., **16**, 183-207.

[10] Dube, T. (2010). Contracting the Socle in Rings of Continuous Functions, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova.* **123**, 37-53.

[11] Engelking, R. (1989). *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin.

[12] Gillman, L. and Jerison, M. (1976). *Rings of continuous functions*, Springer-Verlag.

[13] Goodearl, K. R. and Warfield R. B. (1989). An *introduction to noncommutative noetherian rings*, Cambridge University Press.

Locally Socle of C(X)

Somayeh Soltanpour, Mehrdad Namdari
Department of Mathematics, Shahid Chamran University, Ahvaz, Iran

Abstract

Let $C_F(X)$ be the socle of $C(X)$ and $LC_F(X)=\{f \in C(X): \overline{S_f}=X\}$, where S_f is the union of all open subsets U in X such that $|U \setminus Z(f)|<\infty$, $LC_F(X)$ is called the locally socle of $C(X)$ and it is a z-ideal of $C(X)$ containing $C_F(X)$. We characterize spaces X for which the equality in the relation $C_F(X) \subseteq LC_F(X) \subseteq C(X)$ is hold. In fact, we show that X is an almost discrete space if and only if $LC_F(X)=C(X)$. We note that if X is an infinite space, then $C_F(X) \subsetneq C(X)$. We also observe that $|I(X)|<\infty$ if and only if $C_F(X)=LC_F(X)$. Moreover, it is shown that if $|I(X)|<\infty$, then $LC_F(X)$ is never essential in any subring of $C(X)$, while $LC_F(X)$ is an intersection of essential ideals of $C(X)$ We determine the conditions such that $LC_F(X)$ is not prime in any subring of $C(X)$ which contains the idempotent of X. We investigate the primness of $LC_F(X)$ in some subrings of $C(X)$.

***Keywords**:* Socle, *z*-ideal, Almost discrete space, Locally socle, Essential ideal.

Mathematics Subject Classification (2010): 54C30, 54C40.