

شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک آنولی افقی با حرارت‌دهی گسسته با استفاده از روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه

عبدالرحمان دادوند*، احمدرضا حقیقی^۱** و حمیده حسینی قجلو**

*گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه

**گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه صنعتی ارومیه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۸/۱۳

چکیده: مطالعه حاضر به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک آنولی استوانه‌ای افقی با حرارت-دهی گسسته با استفاده از روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه می‌پردازد. روش لاتیس بولتزمن، به‌عنوان یک روش جایگزین روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی متداول برای شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده در آمده است. از مزایای مهم این روش، صریح بودن معادله حاکم، سادگی اعمال آن برای محاسبات موازی و نیز سادگی اعمال شرایط مرزی برای مرزهای منحنی‌وار است. با وجود قابلیت‌های خوب روش شبکه بولتزمن استاندارد برای شبکه‌های یکنواخت، نمی‌توان آن را به‌طور مستقیم برای هندسه‌های پیچیده و شبکه‌های غیریکنواخت بکار برد. یک روش مؤثر برای رفع این محدودیت، روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و روش کمترین توان‌های دوم (TLLBM) است. شکل نهایی فرمولاسیون این روش یک معادله جبری است و هیچ محدودیتی روی ساختار شبکه ندارد. همچنین این روش را می‌توان برای مدل‌های مختلف سرعت ذره به‌کار برد. در کار حاضر، از این روش با مدل شبکه D2Q9 برای شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک آنولی استوانه‌ای افقی با حرارت‌دهی گسسته استفاده می‌شود و تأثیر عدد رایلی و آرایش‌های مختلف دو جفت چشمه-چاه حرارتی روی نرخ انتقال حرارت بررسی می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: جابجایی آزاد، عدد رایلی، آنولی افقی، روش لاتیس بولتزمن بدون شبکه.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۸۰B۲۰، ۷۴A۲۵.

۱- مقدمه

پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد دارای کاربردهای مهندسی فراوانی است. انتقال حرارت در کلکتورهای خورشیدی، راکتورهای هسته‌ای، کابل‌های انتقال برق، تجهیزات خنک‌کننده‌ی وسایل الکترونیکی و انتقال حرارت در پنجره‌های دوجداره از جمله نمونه‌های کاربردی این پدیده است [۶-۱]. در چند دهه اخیر، مطالعات عددی، آزمایشگاهی و تحلیلی زیادی بر روی انتقال حرارت جابجایی آزاد انجام شده است. به عنوان نمونه، مطالعاتی توسط رفای و یوانویچ [۷]، نلسون و همکاران [۸]، هو و لین [۹]، اسان [۱۰]، کومار و دلال [۱۱] و شیخ زاده و همکاران [۱۲] در مورد انتقال حرارت جابجایی آزاد و تأثیر عدد رایلی و نسبت ظاهری بر روی میدان جریان و دما انجام شده است. در دهه اخیر، روش شبکه بولتزمن به عنوان روشی جایگزین برای روش‌های متداول دینامیک سیالات محاسباتی جهت حل جریان سیال و انتقال حرارت مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. دلایل بسیاری برای استفاده از روش شبکه بولتزمن موجود است که از بین آن‌ها می‌توان به محاسبات ساده، مناسب بودن برای محاسبات موازی و قابل استفاده بودن برای هندسه‌های پیچیده نام برد.

دیگسیت و بابو [۱۳] با استفاده از روش شبکه بولتزمن به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه بسته مربعی شکل در اعداد رایلی بزرگ پرداختند. آن‌ها از شبکه غیریکنواخت در حل عددی استفاده کرده و برای انتقال نتایج عددی از شبکه غیریکنواخت محاسباتی به شبکه یکنواخت بولتزمن، از درون‌یابی بهره بردند. محمد و همکاران [۱۴] با استفاده از روش شبکه بولتزمن، به بررسی انتقال حرارت جابجایی طبیعی در یک محفظه باز اقدام کردند. برارنیا و همکاران [۱۵] جابجایی آزاد در بین یک لوله مربعی و یک لوله بیضوی را با استفاده از روش شبکه بولتزمن مطالعه نمودند. آن‌ها تغییرات رفتار گرمایی و هیدرودینامیکی سیال را با تغییر در موقعیت لوله داخلی در عدد رایلی‌های مختلف (بین 10^3 و 10^6) بررسی نمودند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد که عدد رایلی و موقعیت لوله داخلی تأثیر قابل توجهی روی کانتورهای دما و جریان دارند. فتاحی و همکاران [۱۶] انتقال حرارت جابجایی ترکیبی در یک آنولی غیر هم‌مرکز را با روش شبکه بولتزمن شبیه‌سازی کردند و تأثیر فاصله مرکزها بر انتقال حرارت را در عدد رایلی 10^4 آزمایش کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که هنگامی که لوله داخلی به طرف پایین حرکت می‌کند، عدد ناسلت افزایش می‌یابد. شی و همکاران [۱۷] برای شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک آنولی هم‌مرکز افقی که توسط دو استوانه ساکن با دماهای متفاوت محصور شده بود از روش شبکه بولتزمن بر اساس روش اختلاف محدود استفاده کردند. روش آن‌ها کاملاً صریح بود و پایداری عددی خوبی را نمایش می‌داد. نظری و همکاران [۱۸] با استفاده از روش شبکه بولتزمن، جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه بسته دارای لایه متخلخل عمودی و افقی را با هم مقایسه کردند و مشاهده کردند که در حالتی

که لایه متخلخل میانی به صورت عمودی در محفظه قرار گیرد میزان انتقال حرارت در محفظه بالاتر است. در تحقیق دیگری، نظری و همکاران [۱۹]، انتقال حرارت جابجایی آزاد دو بعدی در یک محفظه بسته به شکل نیم بیضی را با روش شبکه بولتزمن مورد بررسی قرار دادند. نظری و رمضانی [۲۰] از روش شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک حفره مربعی با وجود مانع گرم استفاده کردند. آن‌ها نسبت‌های مختلف طول مانع به ابعاد حفره را برای اعداد گراشهف 10^3 تا 10^5 بکار بردند و مشاهده کردند که با کاهش نسبت ابعاد مانع به حفره، انتقال حرارت کاهش می‌یابد.

روش شبکه بولتزمن استاندارد وابسته به یکنواخت بودن شبکه می‌باشد. از طرفی اغلب هندسه‌های پیچیده نیاز به شبکه غیریکنواخت برای تسخیر لایه مرزی نازک دارند. بنابراین روش‌های مختلفی برای بهبود روش شبکه بولتزمن استاندارد پیشنهاد شده است. یکی از این روش‌ها بر اساس روش‌های تفاضلی است که در آن معادله دیفرانسیلی حاکم با استفاده از روش اختلاف محدود [۲۱] یا حجم محدود [۲۲] حل می‌شود. نشان داده شده است که هر دو روش برای شبیه‌سازی میدان‌های مختلف سیال در هندسه‌های پیچیده موفق بوده‌اند. با این حال، روش‌های تفاضلی شبکه بولتزمن نیز ایراداتی داشتند که روش درون-یابی الحاقی که توسط هی و همکاران [۲۳] پیشنهاد شد توانست بر این ایرادت غلبه کند. برای بهبود روش شبکه بولتزمن استاندارد، روش شبکه بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و روش کمترین توان‌های دوم (TLLBM) توسط شو و همکاران [۲۴] توسعه داده شد. فرم نهایی فرمولاسیون این روش جبری است و نشان داده شده است که برای مسائل جریان سیال و انتقال گرما در هندسه‌های پیچیده نتایج دقیقی فراهم می‌آورد. شو و همکاران [۲۵] برای شبیه‌سازی عددی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک آنولی هم‌مرکز افقی مابین یک لوله مربعی (بیرونی) و یک لوله دایروی (داخلی) از روش TLLBM استفاده کردند. آن‌ها نتایج عددی برای اعداد رایلی 10^4 تا 10^6 و نسبت ظاهری $1/67$ تا 5 را ارائه دادند.

در تحقیق حاضر از روش TLLBM برای شبیه‌سازی پدیده انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک آنولی استوانه‌ای هم‌مرکز با حرارت دهی گسسته استفاده شده است. برای این منظور از یک شبکه نامنظم نوع O استفاده شده است. دو جفت چشمه-چاه حرارتی بر روی دیواره‌های داخلی و خارجی آنولی با چیدمان مختلف قرار گرفته و تأثیر چیدمان چشمه‌ها و چاه‌ها و نیز عدد رایلی روی عملکرد حرارتی آنولی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- روش لاتیس بولتزمن بر مبنای بسط سری تیلور و کمترین توان‌های دوم (TLLBM)

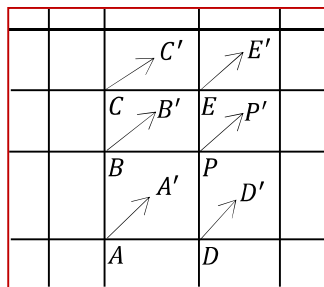
همان‌طور که اشاره شد در این تحقیق، با استفاده از روش TLLBM پدیده جابجایی آزاد در یک آنولی با حرارت‌دهی گسسته شبیه‌سازی می‌شود. از مزیت‌های این روش صریح بودن

معادله حاکم و سادگی اعمال شرایط مرزی برای مرزهای منحنی وار است. همچنین محدودیت روش شبکه‌ی بولتزمن استاندارد (یکنواخت بودن شبکه) نیز با استفاده از این روش رفع شده است. روش TLLBM را می‌توان برای هر مدل سرعت شبکه بکار برد. در کار حاضر از مدل D2Q9 استفاده شده است. همچنین این روش از نظر زمانی و مکانی دارای دقت مرتبه دو می‌باشد.

۲-۱- فرمولاسیون روش TLLBM [۲۵]

برای توضیح این روش فرض کنید یک ذره ابتدا در نقطه (x, y, t) از شبکه است که در جهت α به موقعیت $(x + e_{\alpha x} \delta t, y + e_{\alpha y} \delta t, t + \delta t)$ انتقال می‌یابد. اگر شبکه یکنواخت باشد، آنگاه $\delta x = e_{\alpha x} \delta t$ و $\delta y = e_{\alpha y} \delta t$ است؛ بنابراین نقطه $(x + e_{\alpha x} \delta t, y + e_{\alpha y} \delta t, t + \delta t)$ دقیقاً روی نقطه شبکه واقع است و با استفاده از معادله LBM استاندارد می‌توان تابع توزیع چگالی را به‌طور دقیق در نقاط شبکه به دست آورد. ولی برای شبکه غیریکنواخت، نقطه $(x + e_{\alpha x} \delta t, y + e_{\alpha y} \delta t, t + \delta t)$ دقیقاً روی نقطه شبکه $(x + \delta x, y + \delta y)$ واقع نیست. برای به دست آوردن تابع توزیع چگالی در نقطه $(x + e_{\alpha x} \delta t, y + e_{\alpha y} \delta t, t + \delta t)$ نیاز به به‌کارگیری بسط سری تیلور است [۲۶]. از آنجاکه سطح زمانی $t + \delta t$ برای مکان $(x + e_{\alpha x} \delta t, y + e_{\alpha y} \delta t, t + \delta t)$ و نقطه شبکه $(x + \delta x, y + \delta y)$ یکسان است، بسط در راستای زمان ضروری نیست.

حالت دو بعدی را در نظر بگیرید. برای سادگی فرض کنید در شکل ۱ نقطه A نقطه‌ای از شبکه در لحظه t با مختصات (x_A, y_A, t) ، نقطه P نقطه‌ای از شبکه در لحظه $t + \delta t$ با مختصات $(x_P, y_P, t + \delta t)$ و نقطه A' نقطه $(x_A + e_{\alpha x} \delta t, y_A + e_{\alpha y} \delta t, t + \delta t)$ را نشان می‌دهند به طوری که $x_P = x_A + \delta x$ و $y_P = y_A + \delta y$.



شکل ۱: فرآیند حرکت ذرات در جهت α

طبق LBM استاندارد داریم

$$f_{\alpha}(A', t + \delta t) = f_{\alpha}(A, t) + [f_{\alpha}^{eq}(A, t) - f_{\alpha}(A, t)] / \tau \quad (1)$$

ممکن است نقطه A بر نقطه P منطبق نباشد. در این صورت بسط سری تیلور تا جملات مرتبه اول را در نظر می‌گیریم. سپس مقدار $f_{\alpha}(A', t + \delta t)$ را با تابع متناظر و مشتقات آن در نقطه P تقریب می‌زنیم:

$$f_{\alpha}(A', t + \delta t) = f_{\alpha}(P, t + \delta t) + \Delta x_A \frac{\partial f_{\alpha}(P, t + \delta t)}{\partial x} + \Delta y_A \frac{\partial f_{\alpha}(P, t + \delta t)}{\partial y} + O\left[(\Delta x_A)^r, (\Delta y_A)^r\right] \quad (2)$$

که در آن

$$\Delta x_A = x_A + e_{\alpha x} \delta t - x_P, \quad \Delta y_A = y_A + e_{\alpha y} \delta t - y_P$$

با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۱) داریم:

$$f_{\alpha}(P, t + \delta t) + \Delta x_A \frac{\partial f_{\alpha}(P, t + \delta t)}{\partial x} + \Delta y_A \frac{\partial f_{\alpha}(P, t + \delta t)}{\partial y} = f_{\alpha}(A, t) + [f_{\alpha}^{eq}(A, t) - f_{\alpha}(A, t)] / \tau \quad (3)$$

در حالت دو بعدی این بسط شامل شش مجهول (یک تابع توزیع در مرحله زمانی $t + \delta t$ ، دو تا مشتق مرتبه اول و سه تا مشتق مرتبه دوم) است. برای حل این مجهول‌ها، یک دستگاه با شش معادله نیاز است. این کار را با به‌کارگیری بسط سری تیلور مرتبه دو در شش نقطه D, E, C, B, A, P انجام می‌دهیم. با بکار بردن بسط سری تیلور مرتبه دوم در موقعیت‌های جدید و در جملات تابع توزیع و مشتقات آن در نقطه P می‌توان دستگاه معادلات زیر را به دست آورد،

$$g_{\alpha i} = \{s_{\alpha i}\}^T \{V_{\alpha}\} = \sum_{j=1}^6 s_{\alpha i, j} V_{\alpha, j} \quad i = P, A, B, C, D, E \quad (4)$$

که در آن

$$g_{\alpha i} = f_{\alpha}(x, y, t) + (f_{\alpha}^{eq}(x, y, t) - f_{\alpha}(x, y, t)) / \tau$$

$$\{s_{\alpha i}\}^T = \left\{ 1, \Delta x_i, \Delta y_i, \frac{(\Delta x_i)^r}{\tau}, \frac{(\Delta y_i)^r}{\tau}, \Delta x_i \Delta y_i \right\}$$

$$\{V_\alpha\} = \left\{ f_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial y}, \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x \partial y} \right\}^T.$$

هدف پیدا کردن مؤلفه‌ی اول بردار V_α یعنی $V_{\alpha 1} = f_\alpha(P, t + \delta t)$ است. دستگاه معادلات (۴) را می‌توان به صورت ماتریسی به فرم زیر نوشت:

$$[s_\alpha] \{V_\alpha\} = \{g_\alpha\} \quad (۵)$$

که در آن

$$\{g_\alpha\} = \{g_{\alpha:P}, g_{\alpha:A}, g_{\alpha:B}, g_{\alpha:C}, g_{\alpha:D}, g_{\alpha:E}\}^T$$

$$[S_\alpha] = [S_{\alpha i,j}] = \begin{bmatrix} \{s_{\alpha:P}\}^T \\ \{s_{\alpha:A}\}^T \\ \{s_{\alpha:B}\}^T \\ \{s_{\alpha:C}\}^T \\ \{s_{\alpha:D}\}^T \\ \{s_{\alpha:E}\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \backslash & \Delta x_P & \Delta y_P & (\Delta x_P)^2 / 2 & (\Delta y_P)^2 / 2 & \Delta x_P \Delta y_P \\ \backslash & \Delta x_A & \Delta y_A & (\Delta x_A)^2 / 2 & (\Delta y_A)^2 / 2 & \Delta x_A \Delta y_A \\ \backslash & \Delta x_B & \Delta y_B & (\Delta x_B)^2 / 2 & (\Delta y_B)^2 / 2 & \Delta x_B \Delta y_B \\ \backslash & \Delta x_C & \Delta y_C & (\Delta x_C)^2 / 2 & (\Delta y_C)^2 / 2 & \Delta x_C \Delta y_C \\ \backslash & \Delta x_D & \Delta y_D & (\Delta x_D)^2 / 2 & (\Delta y_D)^2 / 2 & \Delta x_D \Delta y_D \\ \backslash & \Delta x_E & \Delta y_E & (\Delta x_E)^2 / 2 & (\Delta y_E)^2 / 2 & \Delta x_E \Delta y_E \end{bmatrix}$$

$$\Delta x_B = x_B + e_{\alpha x} \delta t - x_P, \quad \Delta y_B = y_B + e_{\alpha y} \delta t - y_P$$

$$\Delta x_C = x_C + e_{\alpha x} \delta t - x_P, \quad \Delta y_C = y_C + e_{\alpha y} \delta t - y_P$$

$$\Delta x_D = x_D + e_{\alpha x} \delta t - x_P, \quad \Delta y_D = y_D + e_{\alpha y} \delta t - y_P$$

$$\Delta x_E = x_E + e_{\alpha x} \delta t - x_P, \quad \Delta y_E = y_E + e_{\alpha y} \delta t - y_P.$$

باید توجه داشت که ماتریس $[S_\alpha]$ فقط وابسته به مختصات نقاط شبکه است. برای اطمینان از نا منفرد بودن ماتریس $[S_\alpha]$ ، شو و همکاران [۲۶] از روش کمترین توان‌های دوم بهره گرفتند. مؤلفه‌های سرعت گسسته در مدل D۲Q۹ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{e}_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \\ \left(\cos \left[(\alpha - 1) \frac{\pi}{4} \right], \sin \left[(\alpha - 1) \frac{\pi}{4} \right] \right) & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \sqrt{2} \left(\cos \left[(\alpha - 5) \frac{\pi}{4} + \pi / 4 \right], \sin \left[(\alpha - 5) \frac{\pi}{4} + \pi / 4 \right] \right) & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

تابع توزیع احتمال f از رابطه زیر به دست می‌آید [۲۵]:

$$\bar{f}_\alpha(x_o, y_o, t + \delta t) = V_\alpha = \sum_{k=1}^{M+1} a_{\alpha,k} \bar{f}'_{k-1} \quad (۶)$$

که در آن

$$\bar{f}'_k = \bar{f}_\alpha(\bar{x}_\alpha, \bar{e}_\alpha, t) + \frac{\delta t}{\tau_v + 0.5\delta t} (f_\alpha^{eq}(\bar{x}_\alpha, \bar{e}_\alpha, t) - \bar{f}_\alpha(\bar{x}_\alpha, \bar{e}_\alpha, t)) + \frac{\tau_v F_\alpha \delta t}{\tau_v + 0.5\delta t}$$

در این مسئله برای ارضای شرایط، M برابر با ۸ در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین در هر نقطه از شبکه لازم است که نه تا ضریب $a_{\alpha,k}$ ذخیره شود. تابع توزیع تعادلی f_α^{eq} عبارت است از

$$f_\alpha^{eq} = \rho \omega_\alpha \left[1 + \frac{\bar{e}_\alpha \cdot \bar{u}}{c_s^2} + \frac{(\bar{e}_\alpha \cdot \bar{u})^2}{2c_s^4} - \frac{|\bar{u}|^2}{2c_s^2} \right]. \quad (۷)$$

در این رابطه ω_α ها توابع وزنی در مدل D2Q9 هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\omega_\alpha = \begin{cases} \frac{4}{9} & \alpha = 0 \\ \frac{1}{9} & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{1}{36} & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

همچنین، τ_v در رابطه بالا زمان آرامش است که رابطه آن با لزجت شبکه به شکل

$$v = \tau_v RT. \quad (۸)$$

می‌باشد. برای اینکه مقدار فیزیکی مثبتی برای پارامتر v به دست آید و همچنین با ملاحظه شرط پایداری روش، مقدار $\tau_v > 0.5$ انتخاب می‌شود. F_α معرف نیروی خارجی است و در مورد مسئله انتقال حرارت جابجایی آزاد به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_\alpha = \frac{\vec{G} \cdot (\bar{e}_\alpha - \bar{u})}{RT} f_\alpha^{eq} \quad (۹)$$

که در آن $\vec{G} = \beta g (T - T_m) \hat{j}$ در رابطه اخیر، g شتاب گرانش و β ضریب انبساط گرمایی و $T_m = \frac{T_c + T_h}{2}$ است. مقادیر ماکروسکوپی یک چگالی و سرعت به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\rho = \sum_{\alpha=0}^8 f_\alpha \quad (۱۰)$$

$$\rho \bar{u} = \sum_{\alpha=0}^{\Lambda} e_{\alpha x} \bar{f}_{\alpha} + \frac{\rho \bar{G} \delta t}{\gamma} \quad (11)$$

سرعت صوت در این مدل برابر است با $C_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$ و فشار در آن از معادله حالت زیر به دست می‌آید:

$$p = \rho c_s^2 \quad (12)$$

تابع توزیع احتمال استفاده شده برای بازیابی معادله انرژی به صورت زیر است [۲۵]:

$$\bar{g}_{\alpha}(x_0, y_0, t + \delta t) = H'_{\alpha} = \sum_{k=1}^{M+1} a_{\alpha, k} \bar{g}'_{k-1} \quad (13)$$

که در آن

$$\bar{g}'_k = \bar{g}_{\alpha}(\bar{x}_{\alpha}, \bar{e}_{\alpha}, t) + \frac{\delta t}{\tau_h + \gamma / \delta t} (g_{\alpha}^{eq}(\bar{x}_{\alpha}, \bar{e}_{\alpha}, t) - \bar{g}_{\alpha}(\bar{x}_{\alpha}, \bar{e}_{\alpha}, t)) - \frac{\tau_h f_{\alpha} q_{\alpha} \delta t}{\tau_h + \gamma / \delta t}$$

$$\{H'\} = \left\{ g_{\alpha}, \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x}, \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial y}, \frac{\partial^2 g_{\alpha}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 g_{\alpha}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 g_{\alpha}}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

$$q_{\alpha} = (\bar{e}_{\alpha} - \bar{u}) \cdot \left[\frac{1}{\rho} (-\nabla p + \nabla \cdot \Pi) + (\bar{e}_{\alpha} - \bar{u}) \cdot \nabla \bar{u} \right]$$

$$\Pi = \rho v (\nabla \bar{u} + \bar{u} \nabla).$$

تابع توزیع تعادلی g_{α}^{eq} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_{\alpha}^{eq} = \rho \varepsilon \left[1 + \frac{\bar{e}_{\alpha} \cdot \bar{u}}{c_s^2} + \frac{(\bar{e}_{\alpha} \cdot \bar{u})^2}{2c_s^2} - \frac{|\bar{u}|^2}{2c_s^2} \right] \quad (14)$$

که در آن $\varepsilon = RT$. زمان آرامش حرارتی است که با ضریب پخش شبکه به صورت زیر مرتبط می‌باشد:

$$\alpha = 2\tau_h RT. \quad (15)$$

با استفاده از تابع توزیع احتمال معرفی شده، دما در هر نقطه از میدان محاسباتی به صورت زیر قابل محاسبه است [۲۵]:

$$\rho \varepsilon = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \bar{g}_{\alpha} - \frac{\delta t}{\tau} \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{\alpha} q_{\alpha} \quad (۱۶)$$

عدد ناسلت (Nu)، نسبت انتقال حرارت از طریق جابجایی به انتقال حرارت از طریق هدایت را نشان می‌دهد که با توجه به روابط تجربی موجود، عموماً تابعی از مشخصه‌های جریان و سیال می‌باشد.

$$Nu(\theta) = r_i^* \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) \left(\partial \tilde{T} / \partial r^* \right)_{r^*=r_i^*} \quad \text{عدد ناسلت محلی [۲۷]:}$$

که در آن $r^* = \frac{r}{r_o - r_i}$ می‌باشد.

$$\overline{Nu} = \frac{1}{S_s} \int_0^{2\pi} Nu(\theta) d\theta \quad \text{عدد ناسلت متوسط [۲۷]:}$$

در اینجا S_s طول چشمه حرارتی و \tilde{T} دمای بی‌بعد می‌باشد.

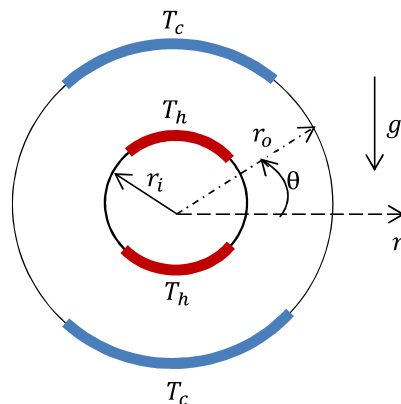
۲-۲- شرایط مرزی

اولین نوع شرط مرزی که بر روی دیواره‌های آنولی اعمال می‌شود، شرط عدم لغزش است. برای اعمال این شرط مرزی از روش انعکاس بین نقطه‌ای استفاده می‌شود. همچنین دو شرط مرزی دما ثابت و عایق روی لوله‌های بیرونی و درونی اعمال شده است که شرط‌های مرزی دما ثابت به ترتیب توسط چشمه‌های حرارتی با دمای ثابت T_h (روی لوله درونی) و چاه‌های حرارتی با دمای ثابت T_c (روی لوله بیرونی) اعمال شده است.

۲-۳- شبیه‌سازی انتقال حرارت جابجایی آزاد در آنولی

دو لوله استوانه‌ای هم‌مرکز به نسبت شعاعی $r_o / r_i = ۲ / ۶$ به صورت افقی قرار گرفته‌اند. شکل ۲ طرح‌واره هندسه و دستگاه مختصات مورد استفاده را نشان می‌دهد. انتقال حرارت جابجایی آزاد در فضای حلقوی بین استوانه‌ها در اعداد رایلی $۱۰^۲$ تا $۱۰^۵$ بررسی می‌شود. اگر استوانه داخلی گرم و استوانه خارجی سرد باشد ($T_h > T_c$)، سیال در امتداد استوانه‌های داخلی و خارجی، به ترتیب بالا و پایین می‌رود. اگر $T_c > T_h$ ، این جریان‌ها معکوس می‌شوند. سیال مورد نظر در فضای بین لوله‌ها، هوا ($Pr = ۰ / ۷۱$) در نظر گرفته شده است. آرایش‌های متفاوتی

با دو جفت چشمه و چاه حرارتی در نظر گرفته می‌شود (شکل ۳). قطاع تشکیل شده توسط کمان‌های چشمه و چاه، $\pi/3$ رادیان است.

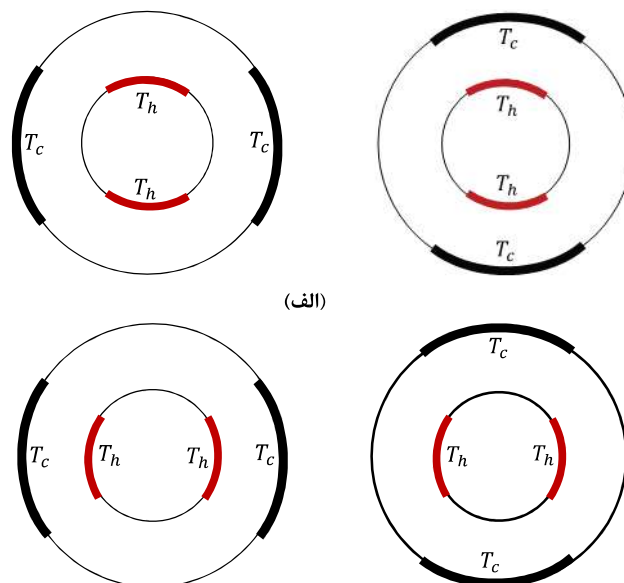


شکل ۲: طرح‌واره هندسه و دستگاه مختصات مورد استفاده

۳-۱- اعتبار سنجی نتایج عددی

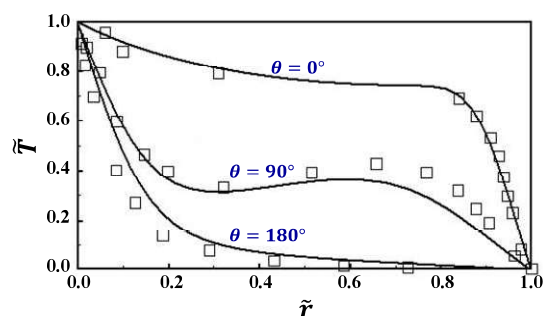
در این بخش نتایج مربوط به جابجایی آزاد در فضای بین دو استوانه دایروی افقی هم‌مرکز (با دیواره داخلی گرم و دیواره خارجی سرد) با نتایج تجربی کوهن و گلدشتاین [۲۸] مقایسه می‌شوند. شکل ۴ تغییرات دمای بی‌بعد \tilde{T} برحسب فاصله شعاعی بدون بعد (\tilde{r}) در زاویه‌های $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ را نشان می‌دهد. بایستی توجه شود که این نتایج برای عدد رایلی قابل قبول نتایج عددی حاضر را با نتایج تجربی [۲۸] نشان می‌دهد.

$$\tilde{T} = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad \tilde{r} = \frac{r - r_i}{r_o - r_i}$$



(الف)

شکل ۳: آرایش‌های مختلف دو جفت چشمه و چاه حرارتی



شکل ۴: مقایسه نتایج عددی (خطوط پر) با نتایج تجربی کوهن و گلدشتاین [۲۸]

(علامت‌های مربعی توخالی)

۳- نتایج و بحث

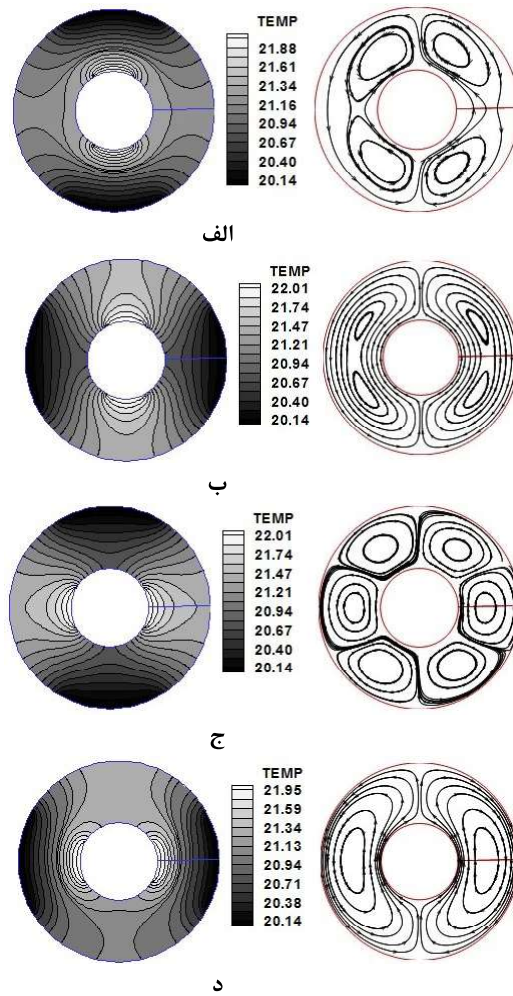
به‌منظور اطمینان از درستی نتایج عددی کار حاضر ابتدا در بخش ۱-۳ نتایج مربوط به جابجایی آزاد در داخل فضای بین دو استوانه دایروی افقی هم‌مرکز (که دیواره داخلی به‌صورت کامل گرم و دیواره خارجی به‌صورت کامل سرد شده است) با نتایج تجربی کوهن و گلدشتاین

[۲۸] مقایسه و اعتبارسنجی می‌شوند. سپس در بخش ۳-۲ نتایج مربوط به حرارت‌دهی گسسته ارائه می‌گردد.

۳-۲- نتایج عددی مربوط به حرارت دهی گسسته

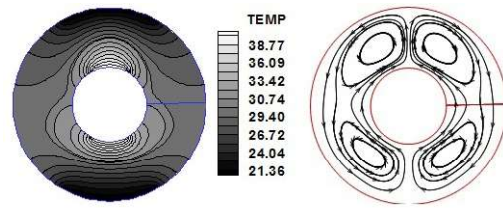
در این بخش، نتایج مربوط به حرارت دهی گسسته برای آرایش‌های مختلف دو جفت چشمه-چاه حرارتی (که در شکل ۳ نشان داده شده است) ارائه می‌گردد. میدان‌های دما و جریان در شکل‌های ۵ تا ۸ برای اعداد رایلی مختلف نشان داده شده‌اند. همان‌طور که از این شکل‌ها قابل مشاهده است، جریان در مجاورت چشمه حرارتی لوله داخلی، به طرف بالا حرکت می‌کند. وقتی جریان به لوله بیرونی می‌رسد، سردتر و چگال‌تر می‌شود و در مجاورت چاه حرارتی لوله بیرونی به طرف پایین حرکت می‌کند. این عمل منجر به تشکیل یک یا چند گردابه (سلول) می‌شود که به عدد رایلی و نحوه قرار گرفتن چشمه‌ها و چاه‌ها بستگی دارد.

به‌عنوان مثال در حالت (الف)، برای اعداد رایلی پایین دو گردابه یکسان تشکیل شده است. وقتی عدد رایلی افزایش می‌یابد، گردابه پایین ضعیف‌تر شده و به تدریج از بین می‌رود. این مشاهدات بیانگر این مطلب است که با افزایش عدد رایلی قدرت جابجایی جریان بیشتر و در نتیجه مکانیسم جابجایی حاکم می‌شود. وقتی عدد رایلی به 10^5 افزایش می‌یابد، جریان جابجایی قوی‌تر شده و باعث جدایی لایه مرزی گرمایی و تشکیل دو گردابه کوچک‌تر و مجزا در قسمت پایین محفظه می‌شود. در حالت (ب)، در $Ra = 10^2$ دو گردابه ضعیف وجود دارد که با افزایش عدد رایلی به 10^3 ، گردابه پایینی ناپدید می‌شود ولی این گردابه در $Ra = 10^4$ دوباره به صورت ضعیف ظاهر می‌شود. با افزایش عدد رایلی به 10^5 گردابه بالایی قوی‌تر می‌شود. در حالت (ج)، سه گردابه مجزا تشکیل شده است که با افزایش عدد رایلی گردابه بالایی قوی‌تر و گردابه‌های پایینی ضعیف‌تر می‌شوند. در حالت (د)، تنها یک گردابه تشکیل می‌شود که وقتی عدد رایلی به 10^5 افزایش می‌یابد، مرکز گردابه به سمت بالا حرکت می‌کند. در شکل‌های ۵ تا ۸، در $Ra = 10^2$ ، خطوط همدمما که به صورت منحنی‌های موازی در مجاور چشمه دیده می‌شوند بیانگر غلبه انتقال حرارت هدایتی هستند. در حقیقت، در این حالت سرعت جریان خیلی ضعیف است و کانتورهای خطوط همدمما منحنی‌های تقریباً هموار هستند. با افزایش عدد رایلی به تدریج انحراف خطوط همدمما از حالت موازی افزایش می‌یابد.

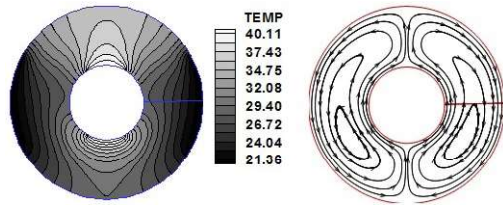


شکل ۵: کانتورهای دما (چپ) و جریان (راست) برای آرایش‌های متفاوت دو جفت چشمه-چاه در

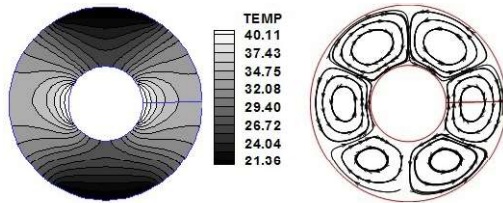
$$Ra = 10^7$$



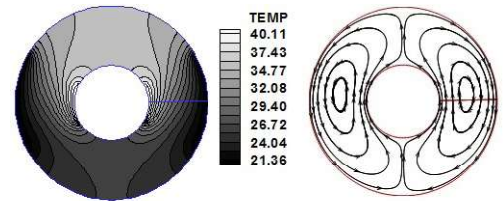
الف



ب



ج

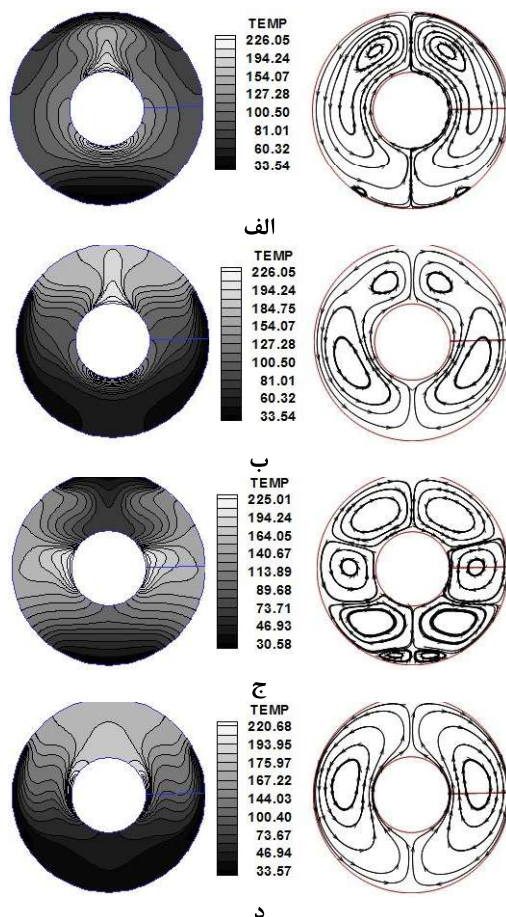


د

شکل ۶: کانتورهای دما (چپ) و جریان (راست) برای آرایش‌های متفاوت دو جفت چشمه-چاه در

$$Ra = 10^3$$

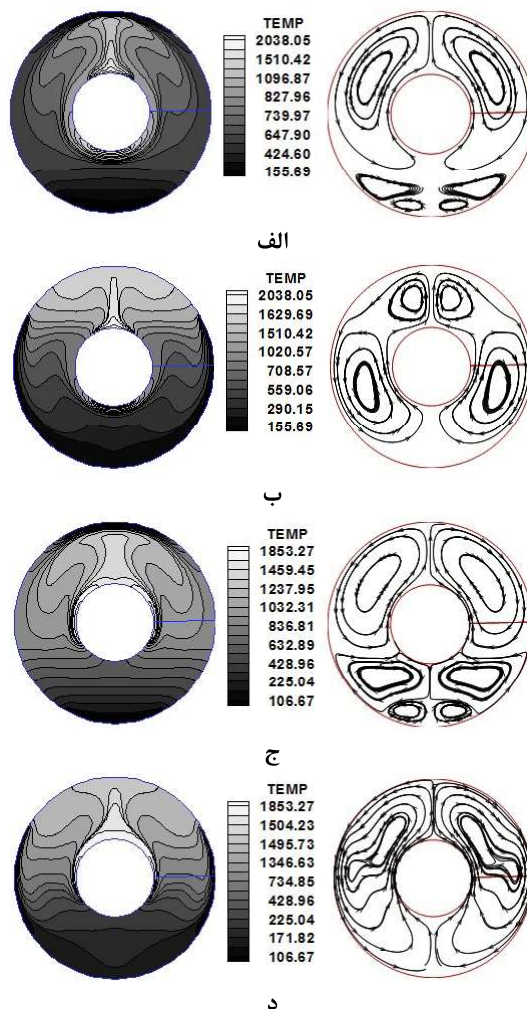
در $Ra = 10^3$ ، دو مکانیسم انتقال حرارت جابجایی و هدایتی توأمان وجود دارند و تقریباً هرکدام سهم یکسانی از کل انتقال حرارت در محفظه را در برمی‌گیرند. در واقع، با افزایش عدد رایلی، نیروی شناوری به چرخش جریان سیال شتاب می‌دهد. غلبه نیروی شناوری منجر به تشکیل گردابه‌های قوی‌تر شده و نیز باعث تغییر مکان هسته گردابه می‌شود که در نتیجه جابجایی آزاد به‌طور معنی‌دار افزایش می‌یابد. با افزایش بیشتر عدد رایلی، لایه‌بندی دمایی و نیز اعوجاج خطوط هم‌دما اتفاق می‌افتد و مکانیسم انتقال حرارت جابجایی حاکم می‌شود.



شکل ۷: کانتورهای دما (چپ) و جریان (راست) برای آرایش‌های متفاوت دو جفت چشمه و چاه در

$$Ra = 10^4$$

وقتی عدد رایلی به 10^4 افزایش می‌یابد، لایه مرزی گرمایی در نزدیکی چشمه و چاه حرارتی توسعه می‌یابد. افزایش بیشتر عدد رایلی منجر به کاهش ضخامت این لایه و در نتیجه انتقال حرارت بیشتر می‌شود. افزایش عدد رایلی به 10^5 ، باعث می‌شود که خطوط همدمای نزدیک به چشمه و چاه منقبض شوند که به نوبه خود گردابه‌های چرخشی را تقویت می‌کنند و در نتیجه انتقال حرارت جابجایی تشدید می‌شود.



شکل ۸: کانتورهای دما (چپ) و جریان (راست) برای آرایش‌های متفاوت دو جفت چشمه-چاه در

$$Ra = 10^5$$

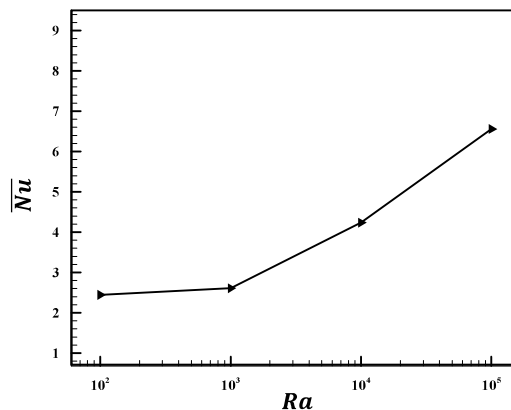
وقتی عدد رایلی به 10^4 افزایش می‌یابد، لایه مرزی گرمایی در نزدیکی چشمه و چاه حرارتی توسعه می‌یابد. افزایش بیشتر عدد رایلی منجر به کاهش ضخامت این لایه و در نتیجه انتقال حرارت بیشتر می‌شود. افزایش عدد رایلی به 10^5 ، باعث می‌شود که خطوط همدمای نزدیک به چشمه و چاه منقبض شوند که به نوبه خود گردهای چرخشی را تقویت می‌کنند و در نتیجه انتقال حرارت جابجایی تشدید می‌شود.

در انتقال حرارت جابجایی آزاد، میدان‌های دما و سرعت (هیدرودینامیک) بر روی یکدیگر تأثیر دارند. گرادیان دما در داخل محفظه گردهایی تولید و جهت چرخش آن‌ها را تعیین می‌کند. دوام و تحکیم این گردها را می‌توان با آرایش خاص چشمه و چاه حرارتی در دیواره‌های محفظه کنترل کرد. معمولاً، نرخ انتقال حرارت در محفظه را می‌توان با دو روش افزایش داد: یکی با افزایش سرعت در مجاورت مرز که در آن انتقال حرارت رخ می‌دهد و دیگری با تقویت اختلاط ناحیه‌های گرم و سرد که به دنبال آن چرخش تشدید می‌شود. هر دو روش منجر به کاهش ضخامت لایه مرزی می‌شوند و در نتیجه افزایش انتقال حرارت روی می‌دهد.

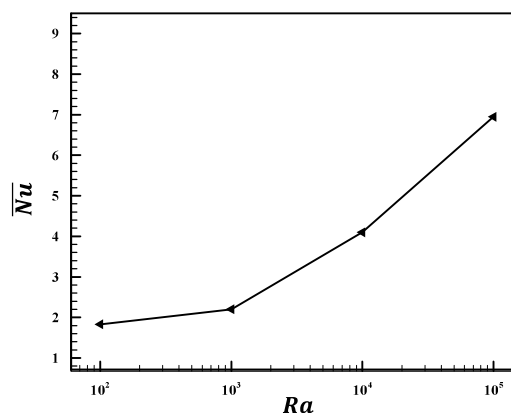
شکل‌های ۹ تا ۱۳ تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر افزایش عدد رایلی را برای چیدمان‌های مختلف دو جفت چشمه-چاه نشان می‌دهند. عدد ناسلت متوسط، در حقیقت نشان دهنده بزرگی نرخ انتقال حرارت در سراسر محفظه است. از این شکل‌ها می‌توان دید که با افزایش مقدار Ra ، عدد ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد و در نتیجه افزایش انتقال حرارت رخ می‌دهد. شایان ذکر است که برای $Ra \leq 10^2$ عدد ناسلت متوسط به تدریج افزایش می‌یابد، در حالی که این افزایش برای $Ra > 10^3$ سریعتر است. این حاکی از این است که وقتی عدد رایلی افزایش می‌یابد هر دو مکانیزم انتقال حرارت جابجایی و هدایتی رخ می‌دهند و تبدیل انتقال حرارت هدایتی به انتقال حرارت جابجایی در $Ra = 10^3$ اتفاق می‌افتد.

مطابق شکل ۱۳، برای همه عدد رایلی‌های در نظر گرفته شده در این تحقیق، حالت‌های (د) و (ج) به ترتیب بیشینه و کمینه میزان انتقال حرارت را نسبت به سایر موقعیت‌های دیگر دارند. این موضوع را می‌توان با توجه به رابطه عدد ناسلت با ساختار میدان جریان توضیح داد.

مقدار عدد ناسلت برای حالت‌هایی که در آن چشمه‌ها و چاه‌های حرارتی در امتداد یک خط قرار دارند، نسبت به سایر حالت‌ها بیشتر است که ممکن است به علت تشکیل دو گرده چرخشی ساعت‌گرد در قسمت بالا و پایین محفظه باشد. در این حالت، شدت جابجایی سیال بیشتر و در نتیجه نرخ انتقال حرارت افزایش می‌یابد. از بین دو آرایش (الف) و (د) که در آن‌ها چشمه‌ها و چاه‌های حرارتی در امتداد یک خط قرار دارند، حالت (د) دارای مقدار عدد ناسلت متوسط بیشتری است. از این‌رو، در تمام اعداد رایلی مورد بررسی، حالت (د) دارای بیشترین میزان انتقال حرارت است.



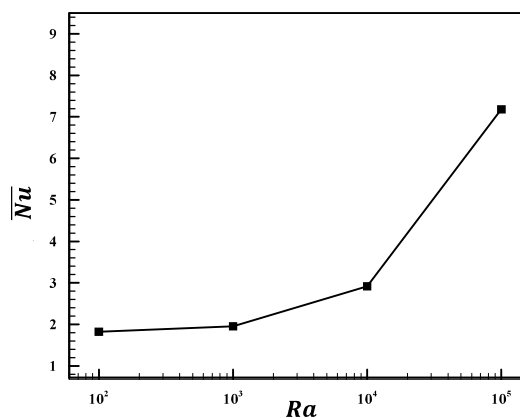
شکل ۹: تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر عدد رایلی برای آرایش (الف)



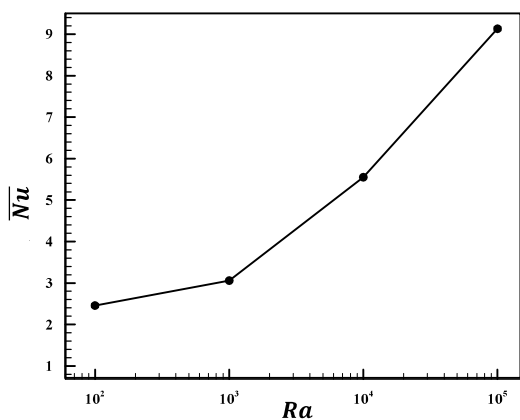
شکل ۱۰: تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر عدد رایلی برای آرایش (ب)

حالت (الف) در مقایسه با حالت (د) نرخ انتقال حرارت کمتری دارد. زیرا در این حالت قرارگیری چشمه بالای چاه منجر به کاهش قدرت جابجایی آزاد می‌شود. ولی حالت (الف) نسبت به سایر حالت‌ها، نرخ انتقال نسبتاً بیشتری دارد. علت این اتفاق ممکن است به دلیل تشکیل دو گردابه چرخشی ساعت‌گرد در مجاورت قسمت‌های بالایی و پایینی محفظه باشد که به علت آرایش خطی که دارند جابجایی سیال در آن شدیدتر بوده و در نتیجه انتقال حرارت بیشتری اتفاق می‌افتد. هرچند گردابه پایینی در حالت (الف) در $Ra = 10^4$ ناپدید می‌شود، ولی هنگامی که عدد رایلی به 10^5 افزایش می‌یابد، دوباره دو گردابه کوچک در مجاورت چشمه

حرارتی پایینی تشکیل می‌شود. در حالت (ج) سه گردابه جدا از هم در جهت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد تشکیل می‌شوند.

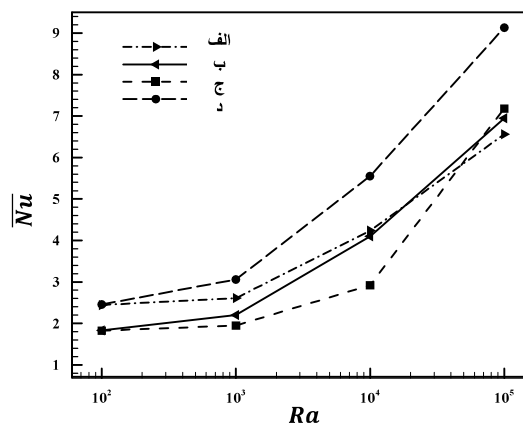


شکل ۱۱: تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر عدد رایلی برای آرایش (ج)



شکل ۱۲: تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر عدد رایلی برای آرایش (د)

از شکل ۱۳ قابل مشاهده است که در $Ra < 10^3$ ، عدد ناسلت متوسط برای حالت‌های (الف) و (د) از سایر موارد بزرگ‌تر است. این به خاطر این حقیقت است که برای اعداد رایلی کوچک مکانیسم انتقال حرارت، هدایتی است. به علاوه، رابطه‌ای بین قدرت هدایت و فاصله بین چشمه و چاه وجود دارد به طوری که برای مواردی که در آن‌ها چشمه و چاه در راستای یک خط راست قرار دارند، قدرت هدایت حرارتی خیلی ضعیف است.



شکل ۱۳: تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر عدد رایلی برای آرایش‌های مختلف دو زوج چشمه-چاه حرارتی

۴- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، از روش لاتیس بولتزمان بر مبنای بسط سری تیلور و کمترین توان‌های دوم با مدل شبکه D2Q9 برای شبیه‌سازی جریان و نیز انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک آنولی افقی استفاده شده است. تأثیر عدد رایلی و آرایش‌های مختلف دو زوج چشمه-چاه حرارتی روی نرخ انتقال حرارت جابجایی آزاد بررسی شده است. دیده شد که نرخ انتقال حرارت در محفظه به مقدار عدد رایلی و چیدمان چشمه‌ها و چاه‌ها بستگی دارد. در تمام اعداد رایلی مورد بررسی، چیدمان افقی چشمه‌ها و چاه‌ها (حالت د) مقدار عدد ناسلت متوسط بیشتری را نسبت به سایر حالت‌ها نتیجه می‌دهد. از این رو، در تمام اعداد رایلی مورد بررسی، حالت (د) دارای بیشترین میزان انتقال حرارت است. همچنین با افزایش عدد رایلی، لایه مرزی نازک‌تر شده و انتقال حرارت افزایش می‌یابد.

۵- علائم و نشانه‌ها

f^{eq}	تابع توزیع تعادلی چگالی	T	دما (K)
f	تابع توزیع چگالی	T_h	دمای لوله درونی (K)
g^{eq}	تابع توزیع تعادلی انرژی درونی	T_c	دمای لوله بیرونی (K)
g	تابع توزیع انرژی درونی	u	سرعت سیال (m/s)
Nu	عدد ناسلت محلی	α	ضریب نفوذپذیری شبکه بولتزمان

ضریب انبساط گرمایی ($1/K$)	β	عدد ناسلت متوسط	\overline{Nu}
لزجت سینماتیکی شبکه بولتزمان	ν	عدد پراتل	Pr
چگالی (kg / m^3)	ρ	عدد رایلی	Ra
زمان آرامش هیدرودینامیکی	τ_v	شعاع لوله درونی	r_i
زمان آرامش حرارتی	τ_h	شعاع لوله بیرونی	r_o
ضریب وزنی	ω	ثابت جهانی گاز	R

مراجع

- [1] Basak T., Roy, S., and Pop, I. (2009), Heat flow analysis for natural convection within trapezoidal enclosure based on heat line concept, *International Journal of Heat and Mas Transfer*, **52**(11), 3818-3828.
- [2] Deng, Q. (2008), Fluid flow and heat transfer characteristics of natural convection in square cavities due to discrete source-sink pairs, *International Journal of Heat and Mas Transfer*, **51**(25), 5949-5957.
- [3] Abu-Nada, E., Masoud, Z., Oztop, H.F. and Campo, A. (2010), Effect of nanofluid variable properties on natural convection in enclosures, *International Journal of Thermal Sciences*, **49**(3), 479-491.
- [4] Soleimani, S., Qajarjazi, A., Bararnia, H., Barari, A. and Domairry, G. (2011), Entropy generation due to natural convection in a partially heated cavity by local RBF-DQ method, *Meccanica*, **46**(5), 1023-1033.
- [5] Oztop, H. F., Abu-Nada, E., Varol, Y. and Chamkha, A. (2011), Natural convection in wavy enclosures with volumetric heat sources, *International Journal of Thermal Sciences*, **50**(4), 502-514.
- [6] Chen, S., Liu, Z., Bao, S. and Zheng, C. (2010), Natural convection and entropy generation in a vertically concentric annular space, *International Journal of Thermal Sciences*, **49**(12), 2439-2452.
- [7] Refai, A. G. and Yovanovich, M. M. (1991), Influence of discrete heat source location on natural convection heat transfer in a vertical square enclosure, *Journal of Electronic Packaging*, **113**(3), 268-274.
- [8] Nelson, E. B., Balakrishnan, A. R. and Murthy, S. S. (1999), Experiments on stratified chilled water tank, *Int. J. Refrig.*, **22**(3), 216-234.

- [9] Ho, C. J. and Lin, Y. H. (1989), A numerical study of natural convection in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli with mixed boundary conditions, *International Journal of heat and Fluid Flow*, **10**(1), 40-47.
- [10] Asan, H. (2000), Natural convection in an annulus between two isothermal concentric square ducts, *International Communication Heat Mass Transfer*, **27**(3), 367-376.
- [11] Kumar, De A. and Dalal, A. (2006), A numerical study of natural convection around a square, horizontal, heated cylinder placed in an enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **49**(23), 4608-4623.
- [12] Sheikhzadeh, G. A., Ehteram, H. and Aghaei, A. (2013), Numerical study of natural convection in a nanofluid filled enclosure with central heat source and presenting correlations for Nusselt number, *Modares Mechanical Engineering*, **13**(10), 62-74.
- [13] Dixit, H. N. and Babu, V. (2006), Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **49**(3), 727-739.
- [14] Mohamad, A. A., El-Ganaoui, M. and Bennacer, R. (2009), Lattice Boltzmann and simulation of natural convection in an open ended cavity, *International Journal of Thermal Sciences*, **48**(10), 1870-1875.
- [15] Bararnia, H., Soleimani, S. and Ganji, D. D. (2011), Lattice Boltzmann simulation of natural convection around a horizontal elliptic cylinder inside a square enclosure, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **38**(10), 1436-1442.
- [16] Fattahi, E., Farhadi, M. and Sedighi, K. (2011), Lattice Boltzmann simulation of mixed convection heat transfer in eccentric annulus, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **38**(8), 1135-1141.
- [17] Shi Y., Zhao T. S., Guo Z. L. (2006), Finite difference-based lattice Boltzmann simulation of natural convection heat transfer in a horizontal concentric annulus, *Computers and Fluids*, **35**(1), 1-15.
- [18] Nazari, M., Kayhani, M. H. and Bagheri A. A. H. (2013), Comparison of heat transfer in a cavity between vertical and horizontal porous layers using LBM, *Modares Mechanical Engineering*, **13**(8), 93-107.

- [19] Nazari, M. and Shokri, H. (2011), Natural convection in semi-ellipse cavities with variable aspect ratios using lattice Boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, **13**(10), 1-13.
- [20] Nazari, M. and Ramazani, S. (2013), Natural convection in a square cavity with a heated obstacle using lattice Boltzmann method, *Modares Mechanical Engineering*, **11**(2), 119-133.
- [21] Cao, N., Chen, S., Jin, S. and Martinez, D. (1997), Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method, *Phys. Rev. E*, **55**(1), R21.
- [22] Succi, S., Amati, G. and Benzi, R. (1995), Challenges in lattice Boltzmann computing, *J. Stat. Phys.* **81**(1-2), 5-16.
- [23] He, X., Luo, L. S. and Dembo, M. (1996), Some progress in Lattice Boltzmann method: part I. nonuniform mesh grids, *Journal of Computational Physics*, **129**(2), 357-363.
- [24] Shu, C., Chew, Y. T. and Niu X. D. (2001), Least-Squares-Based Lattice Boltzmann Method: A meshless approach for simulation of flows with complex geometry, *Phys. Rev. E*, **64**(4), 045701.
- [25] Peng, Y., Chew, Y. T. and Shu, C. (2003), Numerical simulation of natural convection in a concentric annulus between a square outer cylinder and a circular inner cylinder using the Taylor-series-expansion and least squares-based lattice Boltzmann method, *Phys. Rev. E*, **67**(2), 026701.
- [26] Niu, X., Chew, Y. T. and Shu C. (2003), Simulation of flow around an impulsively started circular cylinder by Taylor series expansion and least squares-based lattice Boltzmann method, *Journal of Computational Physics*, **188**(1), 176-193.
- [27] Teamah, M. A. (2007), Numerical simulation of double diffusive laminar mixed convection in a horizontal annulus with hot, solutal and rotating inner cylinder, *International journal of thermal sciences*, **46**(7), 637-648.
- [28] Kuehn, T. H. and Goldstein, R. J. (1976), An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, **74**(04), 695-719.

Numerical simulation of natural convection heat transfer in a horizontal annulus with discrete heating using mesh-free lattice-Boltzmann method

Abdolrahman Dadvand^{*}, Ahmad Reza Haghghi^{**} and Hamideh Hoseini Ghejlo^{**}

^{*}Department of Mechanical Engineering, Urmia University of technology, Urmia, Iran

^{**}Department of Mathematics, Urmia University of technology, Urmia, Iran

Abstract

This study investigates the natural convection heat transfer in a horizontal annulus with discrete heating using a mesh-free lattice Boltzmann method. The lattice Boltzmann method has become an alternative to the conventional computational fluid dynamics methods for simulation of complex fluid flows. The major advantages of the lattice Boltzmann method are the explicit feature of the governing equation, easy for parallel computation, and simple implementation of boundary conditions on curved boundaries. Despite well viability of standard LBM for the uniform mesh, it cannot be directly applied to problems with complex geometry and non-uniform mesh. An efficient method for removing this limitation is to use Taylor series expansion and least squares-based LBM (TLLBM). The final form of the TLLBM is an algebraic formulation with no limitation on the mesh structure. This method can also be applied to any lattice velocity model. In the present work, the TLLBM with D2Q9 lattice model is used to simulate natural convection heat transfer in a horizontal annulus with discrete heating. The effects of Rayleigh number and different arrangement of two heat source-sink pairs on the fluid flow and heat transfer characteristics are investigated.

Keywords: Natural convection, Discrete heating, Rayleigh number, Horizontal annulus, Mesh-free lattice-Boltzmann method.

Mathematics Subject Classification (2010): 80B20, 74A25.