

روشی بدون شبکه برای حل عددی مدل ریاضی از مرتبه مشتق کسری تشکیل مویرگ در تومور رگزایی

بهمن غضنفری^۱ و امین شاه کرمی

گروه ریاضی، دانشگاه لرستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۹/۱

چکیده: این مقاله به حل عددی مدل تومور رگزایی با مشتق زمانی از مرتبه کسری می‌پردازد. بعد از معرفی، مدل را به وسیله تغییر متغیری به مسئله اشترم-لیوویل تبدیل نموده و آن را توسط گسسته‌سازی زمانی مشتق کسری وزن دار دو سطر متوالی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی تقریب می‌زنیم. همچنین همگرایی و پایداری تقریب به دست آمده را به صورت ماتریسی تحلیل نموده و در آخر برخی حالت‌های عددی نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: روش بدون شبکه‌ای، تومور رگزایی، مشتق کسری، توابع پایه‌ای شعاعی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۲۶A۳۳، ۶۵N۰۶.

۱-مقدمه

علاقه روزافزون مطالعه معادلات دیفرانسیل کسری در میان علوم مهندسی، فیزیک، ریاضی و سایر علوم در حال گسترش است، زیرا به وسیله معادلات دیفرانسیل از مرتبه مشتق غیر صحیح، دینامیک رفتار پدیده‌ها به طور دقیق‌تر قابل بررسی است [۱-۳]. دلیل این امر را می‌توان چنین توصیف کرد که در این نوع معادلات مسائل جزئی‌تر از جمله تاریخچه رفتار دستگاه‌ها مدنظر قرار می‌گیرد، (رابطه (۴) را ملاحظه نمایید) که این ویژگی در معادلات مرتبه صحیح نادیده گرفته می‌شود [۴-۵]؛ بنابراین مدل‌سازی، رفتار پدیده‌ها با به کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه مشتق کسری بهتر با رفتار واقعی آن‌ها قابل توصیف است [۶-۱۱]. از این رو، در این مقاله از مدل با مشتق از مرتبه کسری تشکیل مویرگ در تومور رگزایی استفاده شده که بر اهمیت تاریخچه وجود بیماری در حین درمان دلالت دارد. از میان مشتقات کسری، می‌توان به

مشتق ریمان-لیوویل و مشتق جوماری^۱ [۱۲] اشاره کرد که مشتق جوماری بر اساس تفاضلات متناهی تعریف شده و در [۱۳] نشان داده شده که این نوع مشتق، یک تعمیم برای مشتق کسری ریمان-لیوویل است.

رگزایی یک پدیده طبیعی است که به معنی تشکیل مویرگ‌های جدید از عروق پیشین است و در فرایندهای مختلف فیزیولوژیک مانند رشد و نمو اندام، ترمیم زخم و تولیدمثل نقش مهمی دارد؛ اما بعضی مواقع شرایط درونی بدن باعث تکثیر بیش از حد این پدیده شده که باعث تشکیل تومور موضعی می‌شود. لوین [۱۴] در سال ۲۰۰۱، مدل ریاضی این تومور را برحسب یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{u}{f(x)} \right) \right), 0 < x < 1, 0 < t \leq \tau \quad (1)$$

همراه با شرایط آغازین و مرزی

$$u(x, 0) = 1, 0 < x < 1,$$

$$D_1 u \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{u}{f(x)} \right) \Big|_{x=0} = 0, 0 \leq t \leq \tau,$$

و

$$D_1 u \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{u}{f(x)} \right) \Big|_{x=1} = 0, 0 \leq t \leq \tau. \quad (2)$$

ارائه داد که در آن تابع احتمال انتقال $f(x)$ به صورت

$$f(x) = \left(\frac{a + Ax^s(1-x)^s}{b + Ax^s(1-x)^s} \right)^{\beta} \left(\frac{e + 1 - Bx^s(1-x)^s}{d + 1 - Bx^s(1-x)^s} \right)^{\beta \tau}$$

است؛ که در آن پارامترهای β, e, d, b, a, B, A و ثابت‌هایی دلخواه هستند. در مدل تعریف شده فوق، $u(x, t)$ غلظت سلول و D_1 ثابت پراکندگی سلول هستند. چندین روش مختلف عددی برای تجزیه و تحلیل مدل مذکور ارائه شده است، از جمله روش خطوط توسط پاموک [۱۵] و روش تاو توسط سعادت‌مندی [۱۶]. در روش اول، تقریب برای متغیرهای مکان و

زمان به صورت تفاضلات متناهی به کار رفته و در روش دوم یا تاو، ترکیبی خطی از چند جمله‌ای-های لژاندر انتقال یافته نسبت به متغیرهای مکان و زمان برای تقریب مدل در نظر گرفته شده است. در هر دو روش، به دلیل استفاده از چند جمله‌ای‌ها، جواب تقریبی حاصل، تشکیل یک شبکه می‌دهد. همچنین در هر دو روش، جواب‌های تقریبی حاصل، با پارامترهای یکسان برای $D_1 > 0.10025$ همگرا نمی‌شوند. اخیراً عباس‌بندی [۱۷] این مسئله را به روش بدون شبکه‌ای مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی حل نموده است که در آن از تقریب گسسته سازی زمانی وزن دار دو سطر متوالی استفاده شده است. در این روش، مبنای کار استفاده از توابع شعاعی است که بینهایت بار مشتق پذیر هستند [۱۸-۱۹]. از این رو، بنابر بسط تیلور توابع، تابع درون‌یاب را می‌توان یک چند جمله‌ای از درجه بینهایت تلقی کرد لذا جواب تقریبی حاصل، نسبت به متغیر مکان تشکیل شبکه نمی‌دهد.

مدل از مرتبه مشتق کسری شده زمانی (۱) به صورت

$$D_t^\alpha u = D_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{u}{f(x)} \right) \right), \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq \tau \quad (3)$$

است جایی که D_t^α نشان دهنده مشتق کسری جوماری که حالت تعمیم یافته مشتق ریمان-لیویل

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} (u(\xi) - u(0)) d\xi, \quad (4)$$

است [۱۲] که در آن $0 < \alpha \leq 1$ و $u(t)$ تابعی پیوسته (و نه لزوماً مشتق پذیر) است. برای حل معادله (۳)، شرایط آغازین و مرزی (۲) در نظر گرفته می‌شود. معادلات (۳) همراه با شرایط (۲) را می‌توان با تغییر متغیر $F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ به صورت زیر نوشت.

$$D_t^\alpha u = D_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial(uF)}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq \tau \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$D_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} - u(0, t) F(0) \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$D_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} - u(1, t) F(1) \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (6)$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$u(x, t) = w(x, t) g(x), \quad g(x) = \exp \left\{ \int_0^x F(\omega) d\omega \right\}$$

دستگاه (۵) و (۶) را به مسئله اشترم-لیوویل

$$D_t^\alpha w = D_1 \left(\frac{1}{g(x)} \frac{\partial}{\partial x} (g w_x) \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \tau$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{g(x)}, \quad 0 < x < 1,$$

$$D_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

9

$$D_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1} \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (7)$$

تبدیل می‌کند. در ادامه، گسسته‌سازی زمانی در بخش ۲، تحلیل پایداری در بخش ۳ و شبیه‌سازی کامپیوتری و نتایج عددی در بخش ۴ و در بخش ۵ نتیجه‌گیری بیان شده است. در این مقاله از روش بدون شبکه‌ای برای تقریب دستگاه (۷) با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی استفاده شده است.

۲- گسسته‌سازی زمانی و روش هم‌محلی RBF

در این بخش، گسسته‌سازی زمانی بر اساس روش تفاضلات متناهی کسری θ - وزن دار برای مشتق کسری نسبت به زمان در دو سطر متوالی n و $n+1$ را به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\frac{(w^{n+1} - w^n) \Gamma(\alpha + 1)}{(\delta t)^\alpha} = D_1 \theta (w_x^{n+1} F + w_{xx}^{n+1}) + D_1 (1 - \theta) (w_x^n F + w_{xx}^n)$$

بنابراین

$$w^{n+1} - D_1 \theta \hat{\delta} t (w_x^{n+1} F + w_{xx}^{n+1}) = w^n + D_1 (1 - \theta) \hat{\delta} t (w_x^n F + w_{xx}^n) \quad (8)$$

جایی که $\hat{\delta} t = \frac{(\delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$ و $\delta t = t^{n+1} - t^n$. روش هم‌محلی را با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی (RBF) برای به دست آوردن جواب تقریبی در سطح زمانی n بر اساس $w^n(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(r_j)$ بکار می‌بریم که در آن توابع پایه‌ای شعاعی و $r_j = \|x - x_j\|$ فاصله‌ی x ، x_j هستند. همچنین $\{\lambda_j^n\}_{j=1}^N$ مجموعه‌ی ضرایب مجهول در سطر n ام هستند. در این روش، با انتخاب N گره $(i = 1, \dots, N)$ در بازه $[0, 1]$ ، جایی که $x_1 = 0$ و $x_N = 1$ تابع w^n توسط

$$w^n(x_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}) \quad (9)$$

که در آن $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ درون‌یابی می‌شود. شکل ماتریسی (۹) به صورت $w^n = \Phi \lambda^n$ است که در آن $\Phi = (\phi(r_{ij}))_{i,j=1}^N$ ماتریس درون‌یابی، $w^n = (w_1^n, \dots, w_N^n)$ با تعریف $w_i^n = w^n(x_i)$ برای هر $(i = 1, \dots, N)$ بردار ضرایب معلوم $\lambda^n = (\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n)$ و بردار ضرایب مجهول هستند. مطابق تعریف، ماتریس درون‌یابی Φ متقارن است.

انواع متعددی از توابع شعاعی وجود دارد که برخی از آن‌ها در جدول ۱ بیان شده است. به دلیل هموار بودن تابع چند مربعی تحت پارامتر شکلی c ، آن را به‌عنوان توابع پایه‌ای انتخاب می‌کنیم. همچنین تابع چند مربعی، به‌قدر کافی هموار بوده و دارای همگرایی خطا با نرخ نمایی $O(e^{ac} \lambda^{a/h})$ است که در آن $(0 \leq \lambda \leq 1)$ ، h ماکزیمم اندازه فاصله بین نقاط دامنه، c پارامتر شکلی و a ثابتی مثبت می‌باشند [۱۹]. نا منفرد بودن ماتریس درون‌یابی با استفاده از تابع چند مربعی در [۲۰] به اثبات رسیده است. با جایگذاری (۹) در (۸) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi(r_{ij}) - D_1 \theta \hat{\delta} t \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi''(r_{ij}) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \phi'(r_{ij}) F(x_i) \right) \\ & = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}) D_1 (1 - \theta) \hat{\delta} t \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi''(r_{ij}) + \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi'(x_i) F(r_{ij}) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

جدول ۱: برخی از توابع شعاعی

| | |
|---|-----------------------------|
| $\varphi(r_j) = (r_j^x + c^x)^{\frac{1}{x}}$ | Multiquadric (MQ) |
| $\varphi(r_j) = (r_j^x + c^x)^{-\frac{1}{x}}$ | Inverse multiquadrics (IMQ) |
| $\varphi(r_j) = (r_j^x + c^x)^{-1}$ | Inverse quadrics (IQ) |
| $\varphi(r_j) = \exp(-cr_j^x)$ | Gaussian (GA) |

برای $i = 1, N - 1 \leq i \leq N - 2$. همچنین برای شرایط مرزی $(i = 1, N)$ داریم

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi'(r_{ij}) = 0 \quad (11)$$

اکنون اگر تعریف کنیم

$$\Phi_d = \{\varphi(r_{ij}) : 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N, \text{else } 0\}$$

$$\tilde{\Phi} = \{\varphi(r_{ij}) : i = 1, N, 1 \leq j \leq N, \text{else } 0\}$$

$$A = \{\varphi''(r_{ij}) : 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N, \text{else } 0\}$$

$$B = \{\varphi'(r_{ij})F(x_i) : 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N, \text{else } 0\}.$$

آنگاه دستگاه (۱۰) و (۱۱) به صورت ماتریسی زیر نوشته می شود.

$$\left[\Phi_d + \tilde{\Phi} - D, \theta \hat{\delta} t (A + B) \right] \lambda^{n+1} = \left[\Phi_d + D, (1 - \theta) \hat{\delta} t (A + B) \right] \lambda^n. \quad (12)$$

با توجه به رابطه $w^n = \Phi \lambda^n$ برای هر n داریم $w^{n+1} = P w^n = P^n w^0$ که در آن

$$P = \Phi \left[\Phi_d + \tilde{\Phi} - D, \theta \hat{\delta} t (A + B) \right]^{-1} \left[\Phi_d + D, (1 - \theta) \hat{\delta} t (A + B) \right] \Phi^{-1}.$$

اما چون $u(x, t) = w(x, t)g(x)$ پس $u^n(x_i) = w^n(x_i)g(x_i)$ برای $i = 1, \dots, n$ و با قرار دادن $G = (g(x_1), \dots, g(x_N))$ به $u^n = w^n \otimes G$ می رسیم که در آن \otimes نشان دهنده ضرب مؤلفه به مؤلفه ماتریسی است. از این رو

$$u^{n+1} = w^{n+1} \otimes G = P w^n \otimes G = P^n w^0 \otimes G \quad (13)$$

۳- آنالیز پایداری

در این بخش، نشان می‌دهیم که خطای گسسته‌سازی تعریف‌شده توسط $e^n = u^{*n} - u^n$ که در آن u^n و u^{*n} به ترتیب جواب دقیق و تقریبی مدل در سطح زمانی n هستند، با افزایش سطح زمانی n به صفر همگراست. با استفاده از روش تکراری، داریم

$$e^n = u^{*n} - u^n = Pw^{*n} \otimes G - Pw^n \otimes G = (Pw^{*n} - Pw^n) \otimes G = (P^n e^0) \otimes G \quad (14)$$

جایی که $w^0 = w^{*0} - w^0$. آنگاه نرم دو (نرم ماتریسی) از طرفین رابطه‌ی (۱۴) عبارت است از:

$$\|e^n\|_r \leq \|G\|_r \|P\|_r^n \|e^0\|_r \quad (15)$$

بنابراین برای همگرایی روش، باید شرط $\|P\|_r \leq 1$ برقرار شود. اما این شرط با شرط $|\lambda| \leq 1$ معادل است که در آن λ مقدار ویژه ماتریس P است [۲۱]. از این رو، با قرار دادن $E = [\Phi_d + D_\lambda(1-\theta)\hat{\delta}t(A+B)]\Phi^{-1}$ و $F = \Phi[\Phi_d + \tilde{\Phi} - D_\lambda\theta\hat{\delta}t(A+B)]$ داریم $P = F^{-1}E$. حال اگر u یک بردار ویژه P متناظر با مقدار ویژه λ باشد، آنگاه $Pu = \lambda u \Leftrightarrow F^{-1}Eu = \lambda u \Leftrightarrow Eu = \lambda Fu$ (از چپ) در u^* (ترانهاده مزدوج u) رابطه $u^*Eu = \lambda u^*Fu$ حاصل می‌شود؛ بنابراین (اگر $u^*Fu \neq 0$) از طرفی $\lambda = \frac{u^*Eu}{u^*Fu}$. لذا برای همگرایی روش، $\lambda \leq 1$ معادل است با شرط $|u^*Eu| \leq |u^*Fu|$. چون همگرایی روش به‌طور قوی، به پارامتر شکلی c وابسته است، این پارامتر باید در بازه‌ای انتخاب شود که شرط $|u^*Eu| \leq |u^*Fu|$ برآورده شود.

۴- نتایج عددی

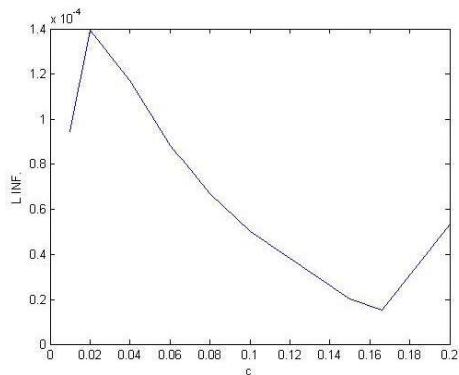
در این بخش، حالات مختلفی از رفتار مدل را به‌صورت عددی مشاهده خواهیم کرد. در هر حالت، تأثیر پارامتر شکلی و سایر پارامترها را خواهیم دید. همانند منبع [۱۷] قرار می‌دهیم $a=0.1$ ، $b=2$ ، $e=10$ ، $\beta_1 = \beta_r = 1$ ، $A=28 \times 10^7$ و $B=22 \times 10^4$. چون جواب دقیق مدل در دسترس نیست، برای ارزیابی دقت جواب عددی، از خطای نقطه‌به‌نقطه نسبی که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد، استفاده می‌کنیم:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (u^{\tilde{N}}(x_j, t^n) - u^N(x_j, t^n))^2}{\sum_{j=1}^N (u^{\tilde{N}}(x_j, t^n))^2}}$$

که در آن $t^n \in [0, \tau]$ و $\tilde{N} = 2N, 4N$. هاردی [۲۲] مقدار بهینه را برای پارامتر شکلی c مقدار $\lambda d / 8$ معرفی کرد که در آن، d میانگین فاصله بین دو نزدیکترین نقطه به هم می‌باشد. از این رو، برای پایداری روش، باید بازه انتخاب شده، شامل این مقدار نیز باشد. توجه کنید که در تمام حالت‌های زیر، تابع پایه‌ای شعاعی، تابع چند مربعی (MQ) است.

جدول ۲: $\|u^{n+1} - u^n\|_\infty$ و $\rho(P)$ به ازای مقادیر مختلفی از c در سطر زمانی $n = 375$ ، $t = 375$ و $N = 8$.

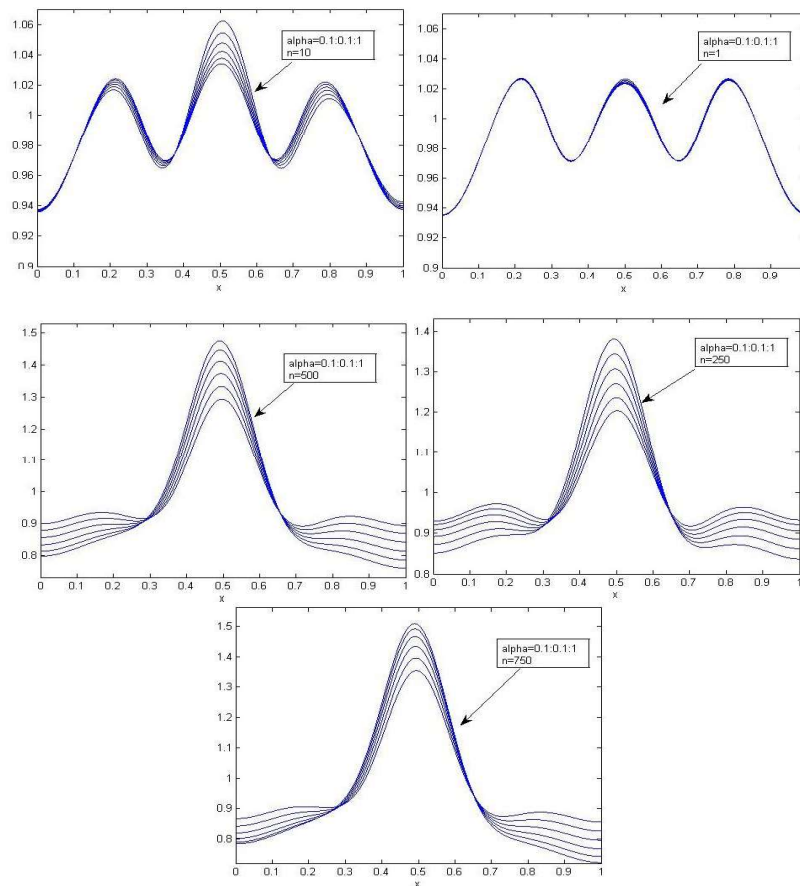
| c | $\ u^{n+1} - u^n\ _\infty$ | $\rho(P)$ |
|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 2×10^{-2} | $393439425211 \times 10^{-4}$ | $9/99714935775 \times 10^{-1}$ |
| 4×10^{-2} | $1/1739468455 \times 10^{-4}$ | $9/99860967062 \times 10^{-1}$ |
| 6×10^{-2} | $8/8805233429 \times 10^{-5}$ | $9/99911819108 \times 10^{-1}$ |
| 8×10^{-2} | $6/6896869699 \times 10^{-5}$ | $9/99939194142 \times 10^{-1}$ |
| 1×10^{-1} | $5/0155697832 \times 10^{-5}$ | $9/99957527443 \times 10^{-1}$ |
| $1/5 \times 10^{-1}$ | $2/0458699819 \times 10^{-5}$ | $9/99989790472 \times 10^{-1}$ |
| $1/66 \times 10^{-1}$ | $1/5394468647 \times 10^{-5}$ | $9/9999931388 \times 10^{-1}$ |
| 2×10^{-1} | $32390361498 \times 5/10^{-5}$ | $1/00002687762$ |



شکل ۱: تأثیر مقادیر مختلف c بر L_∞

۴-۱- حالت اول

در اولین حالت، مسئله (۳) را با $D_1 = 0.00025$ و $\tau = 750$ در نظر می‌گیریم. روش تقریبی را با $\delta t = 0.1$ ، $\alpha = 1$ و $\theta = 0.5$ (روش کرانک-نیکلسون) به صورت عددی مورد بررسی قرار داده‌ایم. جدول ۲ تأثیر پارامتر شکلی روی $L_\infty = \|u^{n+1} - u^n\|_\infty$ و $\rho(P)$ را نشان می‌دهد. شکل ۱ تغییرات $L_\infty = \|u^{n+1} - u^n\|_\infty$ تحت تغییرات پارامتر c را نشان می‌دهد. شکل ۲ همگرایی روش کسری به روش کلاسیک (به ازای مقادیر مختلف α) را به ازای نقطه پایانی همگرایی یعنی $c = 0.166$ بیان می‌کند. شکل ۳ جواب تقریبی در سطوح زمانی مختلف و همچنین جدول ۳ خطای نسبی برای دو مقدار متفاوت از c را نشان می‌دهد.



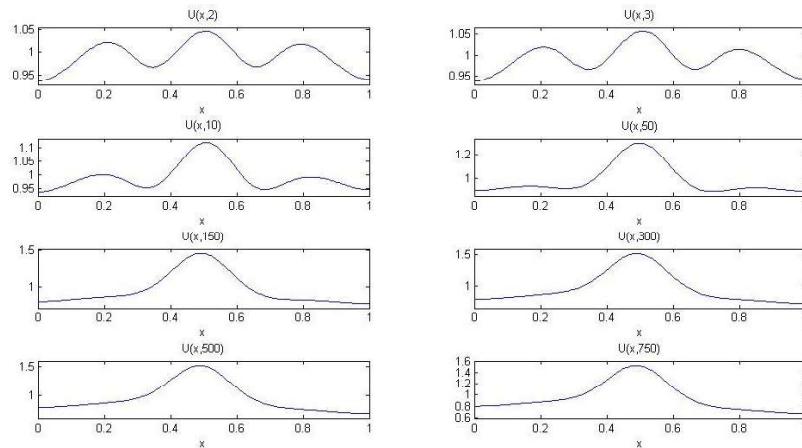
شکل ۲: همگرایی به ازای مقادیر مختلف α ، حالت اول

۴-۲- حالت دوم

در حالت دوم، قرار می‌دهیم $D_1 = 0.00025$ ، $\theta = 0.5$ ، $\delta t = 0.1$ و $\alpha = 0.5$. سایر پارامترها را مانند حالت قبل در نظر می‌گیریم. شکل ۴ نتایج این حالت را نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود مدل مذکور به ازای افزایش سطوح زمانی نیز همگراست.

۴-۳- حالت سوم

در مقدمه بیان کردیم که روش‌های خطوط و تاو به‌ازای $D_1 > 0.00025$ همگرا نیستند. در سومین حالت، پارامترهای $D_1 = 0.08$ و $\tau = 10$ را با سایر پارامترهای حالت اول در نظر می‌گیریم. با توجه به شکل ۵ همگرایی روش بدون شبکه‌ای برای پارامتر $D_1 > 0.00025$ را می‌توان مشاهده نمود. گسسته زمانی در این حالت تحت $\theta = 0.5$ ، $\alpha = 0.5$ و $\delta t = 0.001$ صورت گرفته است.



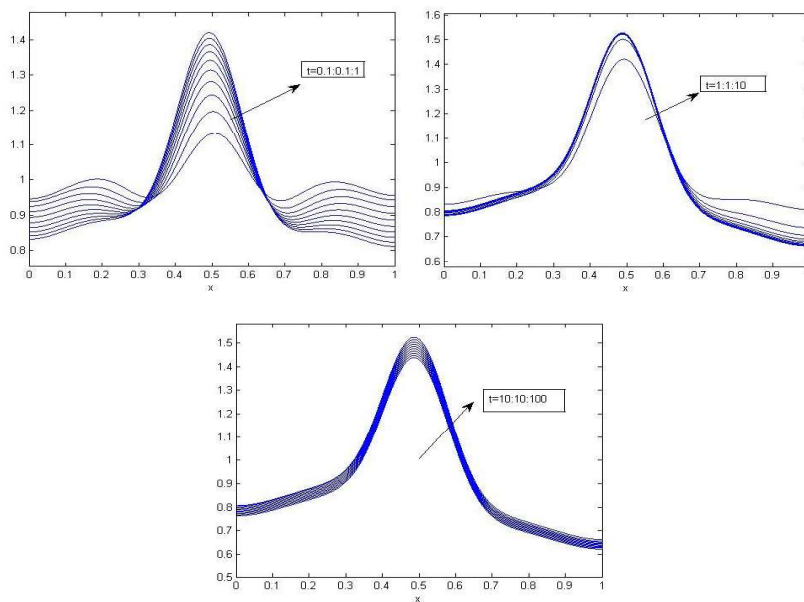
شکل ۳: جواب تقریبی در سطوح زمانی مختلف، حالت اول

۴-۴- حالت چهارم

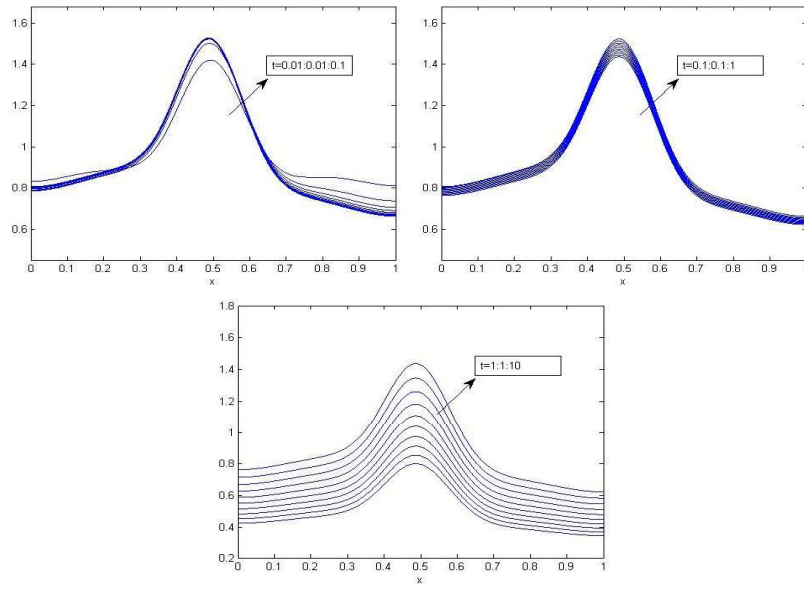
در این حالت، قرار می‌دهیم $D_1 = 0.3$ و $\tau = 2$ پارامترهای روش عددی را نیز در این حالت به صورت $\alpha = 0.7$ ، $\theta = \frac{2}{3}$ و $\delta t = 0.001$ در نظر می‌گیریم. شکل‌های ۶ و ۷ گویای نتایج این حالت هستند.

جدول ۳: خطای نسبی در سطوح زمانی مختلف، حالت اول

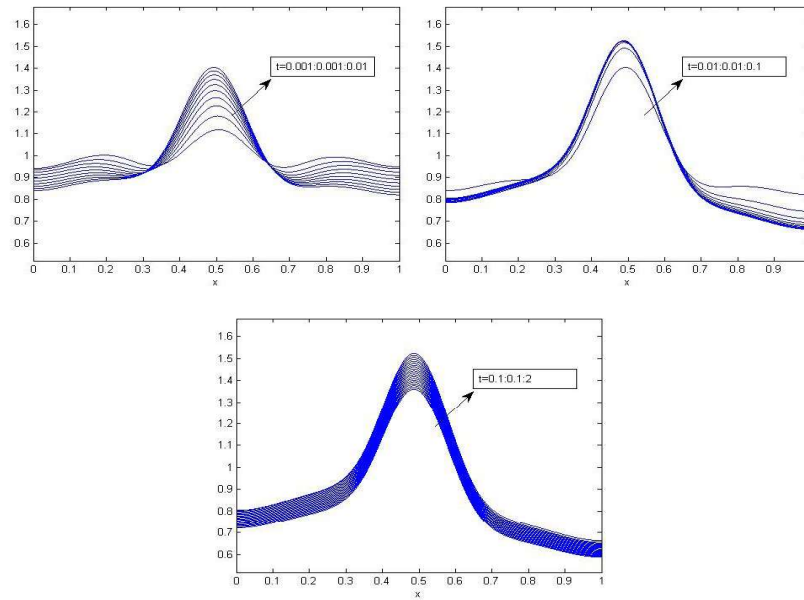
| خطای نسبی در $c = 0.07$ | خطای نسبی در $c = 0.166$ | t |
|--------------------------------|--------------------------------|-----|
| $2/69652797814 \times 10^{-2}$ | $8/25814497563 \times 10^{-2}$ | ۱ |
| $2/69915774082 \times 10^{-2}$ | $8/19074611227 \times 10^{-2}$ | ۲ |
| $3/33884296821 \times 10^{-2}$ | $7/70528511690 \times 10^{-2}$ | ۱۰ |
| $7/80836835648 \times 10^{-2}$ | $7/32959973433 \times 10^{-2}$ | ۵۰ |
| $1/11757482930 \times 10^{-1}$ | $1/19313324340 \times 10^{-2}$ | ۱۰۰ |
| $1/48126067339 \times 10^{-1}$ | $1/89475171970 \times 10^{-1}$ | ۲۰۰ |
| $1/89734525639 \times 10^{-1}$ | $2/39662577226 \times 10^{-1}$ | ۳۰۰ |
| $2/35714672973 \times 10^{-1}$ | $2/81699300135 \times 10^{-1}$ | ۵۰۰ |
| $2/67130749101 \times 10^{-1}$ | $3/11046714518 \times 10^{-1}$ | ۶۰۰ |
| $3/13100188391 \times 10^{-1}$ | $3/55944361318 \times 10^{-1}$ | ۷۵۰ |



شکل ۴: جواب تقریبی در سطوح زمانی مختلف، حالت دوم



شکل ۵: جواب تقریبی در سطوح زمانی مختلف، حالت سوم



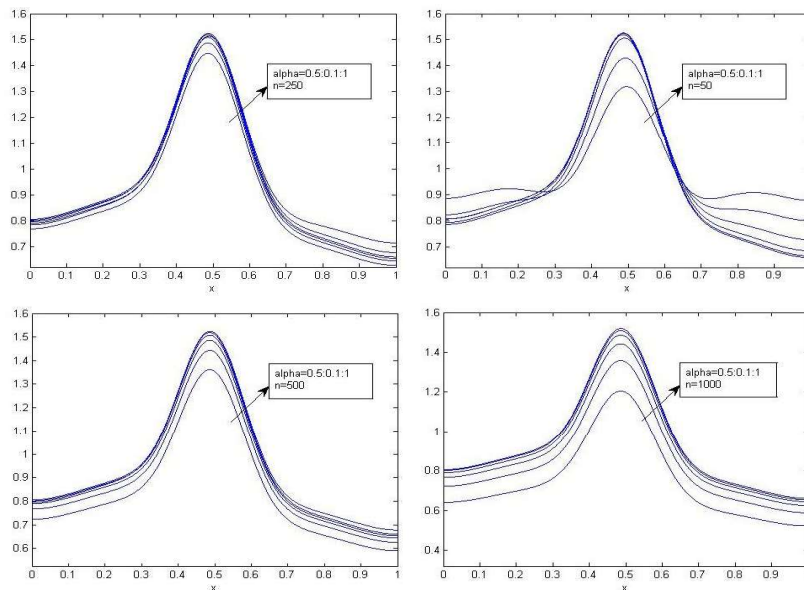
شکل ۶: جواب تقریبی در سطوح زمانی مختلف، حالت چهارم

۴-۵- حالت پنجم

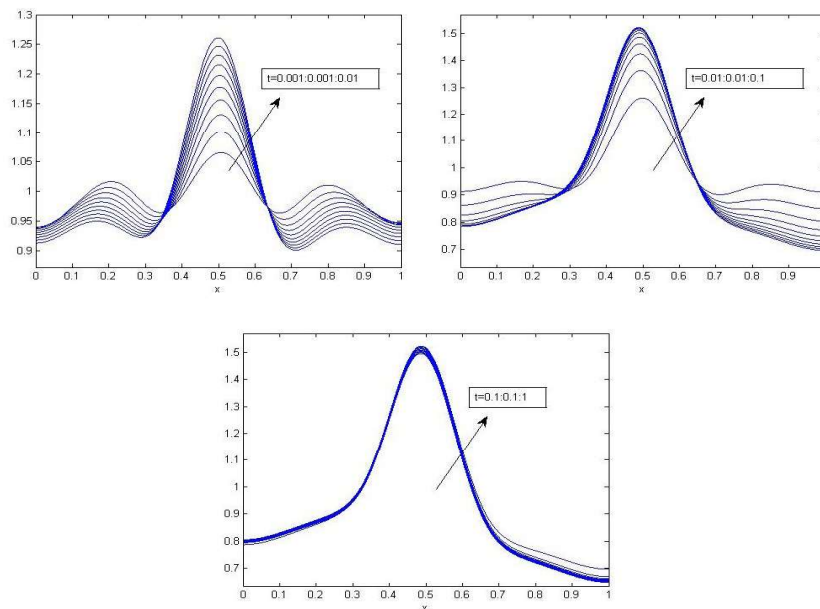
در این حالت، مسئله را با مقادیر $D_1=1$ و $\tau=1$ به عنوان پارامترهای مسئله و همچنین $\alpha=1$ ، $\theta=\frac{2}{3}$ و $\delta t=0.001$ به عنوان پارامترهای گسسته‌سازی در نظر می‌گیریم. شکل ۸ نتایج این حالت را نشان می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری

چون توابع شعاعی بی‌نهایت بار مشتق‌پذیرند، پس دارای بسط سری توانی هستند (قضیه تیلور) و با جایگذاری در معادلات متغیر مکان، دیگر نیاز به گسسته‌سازی ندارد. پس برای حل معادلات شبکه‌ای بین گره‌ها ایجاد نمی‌شود. از این رو روش بدون شبکه‌ای حاصل می‌گردد. عدم گسسته‌سازی مکان هر چند که ماتریس درون‌یاب را به ماتریسی چگالیده (ماتریسی که درایه‌های آن به‌ندرت صفر هستند) تبدیل می‌کند، باعث بهبود جواب تقریبی می‌شود. این فرایند و در اختیار داشتن یک پارامتر آزاد در توابع شعاعی، باعث می‌شود که برای اکثر معادلات جواب حاصل شود (توجه داریم که روش‌های خطوط و تاو در برخی مقادیر پارامتر D_1 مدل تشکیل مویرگ در تومور رگ‌زایی، همگرا نبود اما در این روش این محدودیت رفع شده است).



شکل ۷: همگرایی روش به ازای مقادیر مختلف α ، حالت چهارم



شکل ۸: جواب تقریبی حالت ۵ در چندین سطر زمانی، حالت پنجم

علاوه بر این، مدل کسری در نظر گرفته شده به ازای مقادیر مختلف α به مدل غیر کسری ($\alpha = 1$) همگراست که در هیچ یک از روش های قبلی به آن پرداخته نشده است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای سازنده شان که موجب ارتقای کیفی مقاله گردید، کمال تشکر را دارند.

مراجع

- [1] Kilbas, A.A., Strvastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier, Amsterdam.
- [2] Lakshmikantham, V. and Leela, J.D. (2009). *Theory of fractional dynamics systems*, Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, UK.

- [3] Podlubny, I., (2002). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **5**, 367-386.
- [4] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E. and Trujillo J.J. (2012). *Fractional calculus models and numerical methods*, World Scientific, Singapore.
- [5] Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations*, Academic Press, New York.
- [6] Hilfer, R. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*, Publishing Company Singapore, World scientific.
- [7] Carpinteri, A. and Mainardi, F. (1997). Fractional calculus: "Some basic problems in continuum and statistical mechanics", *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 291-348.
- [8] He, J.H., (1999). Some applications Of nonlinear fractional differential equations and their approximations, *Bull. Sci. Technol.* **15**, 86-90.
- [9] Luchko, A. and Gorenflo, R. (1998). *The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivative*, Preprint series A08-98.
- [10] Miller, K.S. and Ross, B. (1993). *An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [11] Caputo, M. (1969). *Elasticita e dissipazione*, Bologna, Italy, Zanichelli.
- [12] Jumarie, G. (2006). Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results, *Comput. Math. Appl.*, **51**, 1367–1376.
- [13] Momani, S. and Odibat, A. (2007). Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order, *Appl. Math. Comput.* **31**, 1248-1255.
- [14] Levine, H.A., Pamuk, S., Sleeman, B.D. and Nilsen-Hamilton, M (2001). Mathematical model of capillary formation and development in tumor angiogenesis: penetration into the stroma, *Bull. Math. Biol.*, **63**, 801-863.
- [15] Pamuk, S. and Endern, A. (2007). The method of lines for the numerical solution of a mathematical model for capillary formation: the role of endothelial cells in the capillary, *Appl. Math. Comput.* **186**, 831–835.

- [16] Saadatmandi, A. and Dehghan, M. (2008). Numerical solution of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis via the tau method, *Commun. Number. Math. Eng.* **24**, 1467–1474.
- [17] Abbasbandy, S., Roohani, H.G. and Hashim, I. (2012). Numerical analysis of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis using a mesh free method based on the radial basis function, *Engineering Analysis with Boundary Elements*: **36**, 1811-1818.
- [18] Buhmann, M.D. (2004). *Radial basis functions: theory and implementation*, Cambridge University Press.
- [19] Madych, W.R. (1992). Miscellaneous error bounds for multiquadric and related interpolators, *Comput. Math. Appl.*, **24**, 121-138.
- [20] Micchelli, C.A. (1986). *Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions*, *Constr. Approx.*
- [21] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2013). *Matrix Analysis*, second edition, Cambridge University Press.
- [22] Hardy, R.L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *J. Geophys. Res.*, **176**, 1905-1915.

A Meshfree Method for Solving Mathematical Fractional Order Model of Capillary Formation in Tumor Angiogenesis

Bahman Ghazanfari and Amin Shahkarami

Department of Mathematics, Lorestan University, Khorramabad, Iran

Abstract

This paper was devoted to the numerical solution of capillary formation in tumor angiogenesis with time fractional derivative. A time discretization approach based on the θ -weighted fractional finite difference scheme was employed for time fractional derivative and a meshfree process was applied by using radial basis functions (RBFs). Stability analysis of the method was also investigated and some numerical cases were studied.

Keywords: Meshfree method, Radial basis functions, Fractional derivative, Tumor angiogenesis.

Mathematics Subject Classification (2010): 26A33, 65N12.