

آزمون خودگردان برای فرض تقارن بر اساس آنتروپی تجمعی

ولی زاردشت^۱

گروه آمار، دانشگاه محقق اردبیلی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۹/۱۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۶/۳۰

چکیده: فرض متقارن بودن توزیع احتمالی متغیر مورد مطالعه، از فرضیات محوری در روش های استنباط آماری بخصوص در روش های ناپارامتری است. بر اساس معیارهای گوناگون انحراف از تقارن، آماره های آزمون مختلفی برای آزمون این فرض ارائه شده است. در این مقاله بر اساس آنتروپی تجمعی معیار جدیدی برای چولگی معرفی شده و بر مبنای آن آزمونی برای فرض تقارن ارائه می شود که در آن p - مقدار آزمون با استفاده از روش خودگردان محاسبه می گردد. از شبیه سازی کامپیوتری برای ارزیابی عملکرد آماره آزمون ارائه شده و مقایسه توان آن با توان آزمون های رقیب استفاده شده است.

واژه های کلیدی: اندازه عدم دقت؛ تقارن؛ معیارهای آنتروپی؛ معیار چولگی؛ خودگردان.

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲G۰۹، ۶۲G۱۰

۱- مقدمه

آزمون فرض تقارن به خاطر نقش محوری آن در استنباط های آماری ناپارامتری همواره مورد توجه پژوهشگران بوده است. همچنان که در [۱، ص ۲۴۸] اشاره شده است؛ این مسئله بخصوص وقتی نقطه تقارن نامعلوم باشد، مسئله ای مشکل خواهد بود. چرا که در صورت معلوم بودن نقطه تقارن، به طور مثال آزمون علامت می تواند برای این منظور به کار گرفته شود. متغیر تصادفی با تابع توزیع F دارای توزیع احتمالی متقارن حول نقطه c است هرگاه $X - c$ با $c - X$ هم توزیع باشد یا به طور معادل برای هر x حقیقی؛

$$F(c+x) = 1 - F(c-x).$$

می‌توان نشان داد که اگر توزیع X متقارن باشد در این صورت نقطه تقارن برابر میانگین (در صورت وجود)، میانه و نمای (در صورت یکتا بودن) توزیع خواهد بود. تعریف و ویژگی‌های فوق، مبنای ارائه معیارهای انحراف از فرض تقارن و مبنای آزمون‌های آماری فرض تقارن قرار گرفته است. برای نمونه، مراجع [۵-۲] و منابع مذکور در آن‌ها را ملاحظه کنید.

از زمانی که شانون [۶] معیار آنتروپی خود را معرفی کرد؛ معیارهای جایگزین متفاوتی موردپژوهش قرار گرفته است. برای متغیر تصادفی پیوسته نامنفی با تابع بقای $\bar{F} = 1 - F$ ، رائو [۷] آنتروپی باقیمانده تجمعی X را به صورت زیر معرفی کرده است:

$$\mathcal{E}(X) = - \int_0^{\infty} \bar{F}(x) \log \bar{F}(x) dx.$$

برای مطالعه خواص و ویژگی‌های آنتروپی‌های تجمعی و نتایج مرتبط، خواننده علاقه‌مند را به [۹-۱۱] ارجاع می‌دهیم. برای متغیرهای تصادفی با مقادیر حقیقی نامحدود که لزوماً نامنفی نیستند؛ درسی و همکاران [۱۲] آنتروپی باقیمانده تجمعی تعمیم‌یافته را به صورت زیر معرفی کرده‌اند:

$$\mathcal{E}^*(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x) \log \bar{F}(x) dx. \quad (۱)$$

معیارهای فاصله و تمایز (مانند فاصله کولیک- لایبلر) همواره از موضوعات مرتبط با معیارهای اطلاع و آنتروپی هستند که از زمان معرفی آنتروپی شانون، تعریف‌ها و تعمیم‌های متنوعی از آن‌ها نیز ارائه شده است. یکی از این معیارها که کاربردهایی در استنباط آماری، برآوردیابی و نظریه کدگذاری دارد، اندازه عدم دقت کریج [۱۳] است که برای متغیرهای تصادفی نامنفی X و Y با توابع چگالی f و g تعریف می‌شود. اگر $f(x)$ چگالی واقعی مشاهدات و $g(x)$ چگالی اعمال شده توسط آزمایشگر باشد؛ در این صورت اندازه عدم دقت X و Y با رابطه

$$H(X, Y) = - \int_0^{\infty} f(x) \log g(x) dx,$$

بیان می‌شود. اگر $\bar{F}$ و $\bar{G}$ به ترتیب توابع بقای X و Y باشند؛ متناظر با آنتروپی تجمعی، اندازه عدم دقت تجمعی به صورت زیر تعریف می‌شود ([۱۴ و ۱۵] را ببینید):

$$\mathcal{CE}(X, Y) = - \int_0^{\infty} \bar{F}(x) \log \bar{G}(x) dx.$$

واضح است که اگر $F = G$ آنگاه $\mathcal{CE}(X, Y) = \mathcal{E}(X)$. در حقیقت، $\mathcal{CE}(X, Y)$ میزان اطلاع درباره احتمال پیشامدهای یک آزمایش است وقتی که در اثر از دست دادن یا غیر صحیح بودن اطلاعات و دریافتهای توزیع G را به جای توزیع واقعی F به کار می گیریم. تعمیم معیار فوق برای متغیرهای تصادفی با مقادیر حقیقی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mathcal{CE}^*(X, Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(x) \log \bar{G}(x) dx.$$

توجه می کنیم که متقارن بودن توزیع متغیر تصادفی X حول نقطه c معادل با این است که متغیرهای X و $c - X$ هم توزیع باشند. حال اندازه عدم دقت تجمعی برای متغیرهای X و $c - X$ را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{CE}^*(X, c - X) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(c - x) \log \bar{F}(x) dx, \quad (2)$$

که در آن $F(c - x)$ تابع بقای متغیر $c - X$ است. اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع متقارن باشد آنگاه $\bar{F}(x) = F(c - x)$ و در نتیجه خواهیم داشت $\mathcal{CE}^*(X, c - X) = \mathcal{E}^*(X)$. همچنین اگر توزیع X چوله به راست (چوله به چپ) باشد آنگاه $\bar{F}(x) \geq (\leq) F(c - x)$ و در نتیجه

$$\mathcal{E}^*(X) \geq (\leq) \mathcal{CE}^*(X, c - X).$$

بنابراین معیار چولگی بر مبنای آنتروپی و اندازه عدم دقت تجمعی به صورت زیر معرفی می شود:

$$D = \frac{\mathcal{E}^*(X)}{\mathcal{CE}^*(X, c - X)} - 1 \quad (3)$$

که آن را می توان به عنوان معیار انحراف از فرض تقارن در نظر گرفت. به طوری که اگر توزیع X متقارن باشد؛ آنگاه $D = 0$ و در صورتی که توزیع مورد نظر چوله به راست (چوله به چپ) باشد $D > (<) 0$ خواهد بود. جدول ۱ میزان چولگی برخی توزیع ها را بر اساس معیار جدید نشان می دهد.

در این مقاله، D را به عنوان آماره آزمونی برای آزمون فرض تقارن در نظر می گیریم و عملکرد آن را بررسی می کنیم. ادامه مطالب مقاله به صورت زیر تنظیم شده است: در بخش دوم آماره آزمون مورد اشاره معرفی می شود. بخش سوم به نحوه اجرای آزمون با استفاده از روش خودگردان و الگوریتم مربوطه می پردازد. بخش چهارم به شبیه سازی کامپیوتری برای مقایسه توان آزمون

معرفی شده با توان آزمون‌های رقیب اختصاص دارد. در نهایت نتیجه‌گیری و خلاصه نتایج حاصل در بخش پنجم بیان می‌شود.

جدول (۱): معیار چولگی D برای برخی توزیع‌ها

D	توزیع	D	توزیع
۲/۰۸	$Exp(۱)$	-۰/۲۵	$Beta(۴, ۲)$
۲/۲۴	$F(۸, ۹)$	۰/۳۹	$Beta(۲, ۴)$
۴/۱۳	$LN(۰, ۱)$	۰/۶۲	$G(۵, ۷)$
۴/۲۸	$۰/۶N(-۶, ۱) + ۰/۴N(۶, ۴)$	۰/۸۶	$G(۳, ۵)$

۲- آماره آزمون

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از جامعه متغیر تصادفی X با تابع توزیع نامعلوم F باشد و $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ را آماره‌های ترتیبی متناظر نمونه در نظر بگیرید. در این صورت تابع توزیع تجربی برابر است با

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 1 & X_{(n)} \leq x \end{cases}$$

جایگزین کردن تابع توزیع در آنتروپی‌های (۱) و (۲) با تابع توزیع تجربی فوق، برآورد معیار D در رابطه (۳) را به صورت زیر نتیجه خواهد داد:

$$D_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \log \left(1 - \frac{i}{n}\right) [X_{(i+1)} - X_{(i)}]}{\sum_{i=1}^{n-1} F_n(\hat{c} - X_{(i)}) \log \left(1 - \frac{i}{n}\right) [X_{(i+1)} - X_{(i)}]} - 1.$$

که در آن $\hat{c}$ برآوردگر سازگار نقطه تقارن مانند میانه داده‌ها است. در این صورت به ازای مقادیر بزرگ $|D_n|$ فرض $H_0: F(c+x) = 1 - F(c-x)$ را در مقابل فرض $H_1: F(c+x) \neq 1 - F(c-x)$ رد می‌کنیم. روشن است که تعیین توزیع نمونه‌ای آماره آزمون D_n تحت فرض تقارن به آسانی میسر نیست؛ بنابراین، به منظور تصمیم‌گیری در خصوص رد یا قبول فرض صفر از روش بازنمونه‌گیری خودگردان استفاده خواهیم کرد که در بخش بعدی ارائه می‌شود.

۳- آزمون خودگردان

حتی اگر توزیع مجانبی آماره آزمون معلوم باشد؛ معمولاً در اندازه نمونه‌های کوچک این گونه آزمون‌ها عملکرد چندان مطلوبی ندارند. نتایج پژوهش‌های موجود نشان می‌دهد که استفاده از روش خودگردان در چنین مواردی بسیار راهگشاست. برای نتیجه‌گیری در خصوص رد یا قبول فرض H_0 ، کافی است p -مقدار آزمون را به روش خودگردان محاسبه کنیم. بدین منظور بایستی از معادل متقارن تابع توزیع تجربی یا به عبارت دیگر از نزدیک‌ترین تابع توزیع متقارن به تابع توزیع تجربی نمونه‌گیری کنیم. مدرس [۱۶] نشان داده است که برآوردگر ماکسیمم درست نمائی ناپارامتری تابع توزیع تحت فرض تقارن برابر است با

$$F_n^s(x) = \frac{1}{2} [F_n(x) + 1 - F_n(2c - x)],$$

که در حقیقت متقارن شده‌ی تابع توزیع تجربی F_n است؛ بنابراین، نمونه‌های روش خودگردان را از توزیع F_n^s انتخاب می‌کنیم. نقطه تقارن نامعلوم c را می‌توان با برآوردگر مناسب آن مانند میانه داده‌ها جایگزین کرد. بر اساس یک نمونه تصادفی n تایی، الگوریتم زیر چگونگی تصمیم‌گیری در خصوص رد یا قبول فرض H_0 بر مبنای آماره آزمون D_n و به روش خودگردان را بیان می‌کند.

- (۱) برای نمونه اصلی، مقدار مشاهده شده D_n را محاسبه کنید.
- (۲) $B = 1000$ نمونه تصادفی به حجم n از توزیع F_n^s تولید کنید.
- (۳) برای هر نمونه خودگردان مرحله (۲)، D_n را محاسبه کنید.
- (۴) درصد نمونه‌های خودگردان که مقدار D_n آن‌ها از مقدار D_n نمونه اصلی بیشتر است را محاسبه کنید (p -مقدار خودگردان).
- (۵) اگر این درصد از $\alpha = 0.05$ بیشتر بود فرض H_0 را قبول و در غیر این صورت آن را رد کنید.

در بخش بعد نتایج حاصل از ارزیابی عملکرد آماره آزمون D_n به روش شبیه‌سازی آورده می‌شود.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد آماره آزمون D_n را از نقطه نظر نزدیکی اندازه آن به اندازه اسمی آزمون ($\alpha = 0.05$) مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. همچنین توان این آزمون را با توان آزمون‌های رقیب مقایسه می‌کنیم. اکثر آزمون‌های تقارن موجود بر توزیع مجانبی متکی هستند و p -مقدار آزمون‌ها با توزیع مجانبی نرمال محاسبه می‌شوند. ژنگ و گشتویث [۱۷] در یک مطالعه

شبیه‌سازی وسیع روی تعدادی از آزمون‌های تقارن مانند آزمون‌های میائو و همکاران [۳]، کابیلیو و ماسارو [۴] و میرا [۵]، ضمن مقایسه توان این آزمون‌ها با توان آزمون‌های خودگردان متناظر آن‌ها به این نتیجه رسیده‌اند که آزمون خودگردان میائو و همکاران [۳] از لحاظ حفظ سطح اسمی آزمون و توان در مقایسه با آزمون‌های دیگر عملکرد خوب و قابل قبولی دارد. آماره آزمون

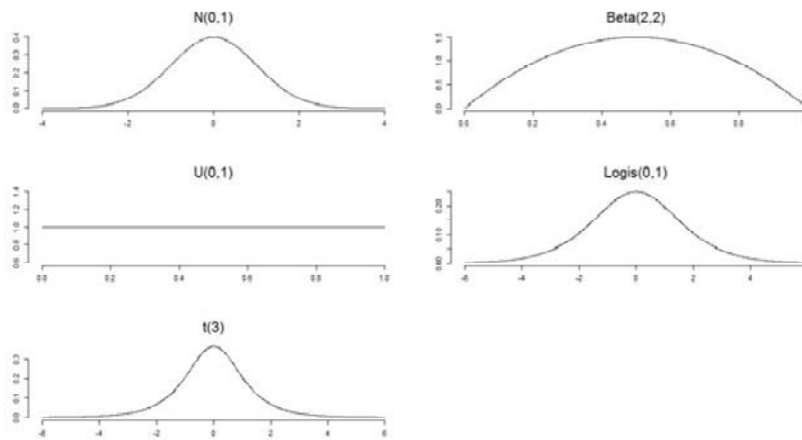
میائو و همکاران [۳] برابر است با $T = \frac{\bar{X} - M}{J}$ که در آن $\bar{X}$ و M به ترتیب میانگین و

میانه نمونه و $J = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - M|$ برآورد نیرومند (ایستار) انحراف معیار توزیع است.

آن‌ها نشان دادند $\sqrt{n}T$ دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین صفر و واریانس تقریبی 0.5708 است. با توجه به نتیجه بررسی ژنگ و گشت‌ویرث [۱۷]، در این بخش اندازه و توان آزمون آماره D_n را با اندازه و توان آزمون آماره T در حالت مجانبی (T^{NA}) و خودگردان (T^B) آن مقایسه

می‌کنیم. همچنین، قوش [۱۸] معیار چولگی $\tau = \int_0^1 F \left(\frac{F^{-1}(p) + F^{-1}(1-p)}{2} \right) dp$ را معرفی

کرده و بر اساس آن آزمون مجانبی برای فرض تقارن ارائه کرده است. در این بخش حالت خودگردان (τ^B) این آزمون را در مقایسه توان‌ها به کار می‌بریم.



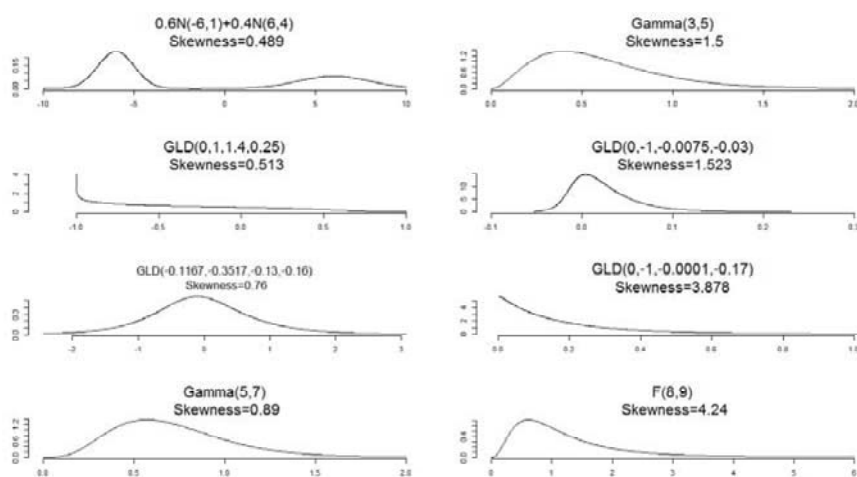
شکل (۱): نمودار تابع چگالی توزیع‌های متقارن

برای ارزیابی اندازه آزمون آماره‌ها، پنج توزیع متقارن نرمال استاندارد، t -استیودنت، لجستیک استاندارد، توزیع بتا با پارامترهای (۲،۲) و توزیع یکنواخت (۰،۱) را در نظر می‌گیریم. شکل ۱ نمودار تابع چگالی این توزیع‌ها را نشان می‌دهد.

برای مقایسه توان آزمون‌ها، هشت توزیع نامتقارن با درجات مختلف عدم تقارن را در نظر می‌گیریم. توزیع اول آمیخته‌ای از دو توزیع نرمال است. چهار توزیع هم از خانواده توزیع‌های لاندای تعمیم‌یافته انتخاب می‌کنیم. این خانواده که با نماد $GLD(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ نمایش می‌دهیم؛ دارای معکوس تابع توزیع به صورت زیر است:

$$F^{-1}(u) = \lambda_1 + \frac{[u^{\lambda_4} - (1-u)^{\lambda_4}]}{\lambda_4}.$$

خانواده توزیع‌های لاندا روش آسانی برای تولید نمونه تصادفی از طیف گسترده توزیع‌ها فراهم می‌کند. توزیع‌های فوق همان توزیع‌هایی هستند که در ژنگ و گشت‌ویرث [۱۶] استفاده شده‌اند. در اینجا توزیع‌های گاما با پارامترهای (۳,۵) و (۵,۷) و توزیع فیشر با پارامترهای (۸,۹) نیز به مقایسه اضافه کرده‌ایم. در شکل ۲ نمودار تابع چگالی این توزیع‌ها به همراه معیار چولگی $\gamma = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3}$ نشان داده شده است. مقایسه بر اساس اندازه نمونه‌های مختلف ۳۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۳۰۰ انجام می‌شود و به ازای هر توزیع و اندازه نمونه، ۱۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی شده است. نتیجه بررسی اندازه و توان آزمون‌ها به ترتیب در جدول ۲ و ۳ آمده است.



شکل (۲): نمودار تابع چگالی توزیع‌های نامتقارن

همان‌طور که جدول ۲ نشان می‌دهد عملکرد آماره D_n از نقطه نظر نزدیکی اندازه آن به سطح اسمی آزمون یعنی $\alpha = 0.05$ قابل قبول است. به‌طور ویژه در توزیع دم‌سنگین $t(3)$ خیلی بهتر از سه آزمون دیگر عمل کرده است. اندازه آزمون آماره τ^B تقریباً در تمامی موارد بخصوص برای

حجم نمونه‌های کم و متوسط، کمتر از سطح اسمی است. سایر آزمون‌ها در توزیع یکنواخت دارای اندازه آزمون بیشتر از سطح اسمی هستند. آزمون T^B در توزیع دم‌سنگین $t(3)$ و توزیع یکنواخت بهتر از آزمون مجانبی متناظر خود، T^{NA} ، سطح اسمی آزمون را حفظ کرده است که نشان می‌دهد برای حجم نمونه‌های متعارف، روش بوت‌استرپ نسبت به توزیع مجانبی متناظر، توزیع نمونه‌ای دقیق‌تری برای آماره‌های آزمون تقارن مبتنی بر تفاضل بین میانگین و میانه نمونه فراهم می‌کند.

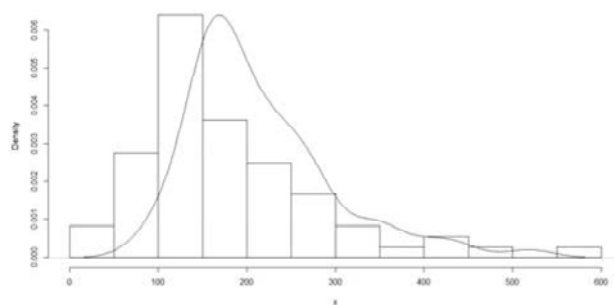
با توجه به جدول ۳ که نتایج مربوط به توزیع‌های نامتقارن و توان آزمون‌ها را نشان می‌دهد؛ توان آماره D_n به‌جز در حالت توزیع آمیخته نرمال که توزیع دو-مدی است؛ از توان آماره آزمون میائو و همکاران [۳] و آماره آزمون قوش [۱۸] بیشتر است. اگرچه در تمامی موارد توان آماره T^{NA} قدری بیشتر از توان T^B است اما در حالت کلی این دو آزمون از نقطه‌نظر توان عملکرد نسبتاً مشابه و نزدیک به هم دارند. همچنین در تمامی موارد موردبررسی، آزمون τ^B نسبت به سایر آزمون‌ها به‌خصوص در حجم نمونه‌های کوچک، ضعیف‌ترین عملکرد را داشته است. سخت‌ترین آشکارسازی عدم تقارن مربوط به توزیع $GLD(-0/1167, -0/3517, -0/13, -0/16)$ است که در آن هیچ‌یک از آزمون‌ها به توانی بالاتر از ۰/۲۷ دست نیافته‌اند و البته خیلی دور از انتظار نیست به این دلیل که شکل توزیع آن به توزیع متقارن نرمال نزدیک است. مقایسه توان‌ها نشان می‌دهد که اگر چنانچه در تحلیل داده‌های واقعی آزمون‌های فوق استفاده شوند و نتیجه متفاوتی در رد یا قبول فرض تقارن حاصل گردد؛ طبیعتاً نتیجه آماره معرفی‌شده در این مقاله به خاطر عملکرد بهتر قابل‌انکاست.

۵- مثال عددی

در این بخش برای توضیح بیشتر درباره آماره آزمون معرفی‌شده و به‌کارگیری آن در تحلیل داده‌ها، مجموعه داده‌های استفاده‌شده در [۱۸] را در نظر می‌گیریم. جدول ۴ این داده‌ها که طول عمر خوکچه‌های حامل باکتری سل (برحسب روز) هستند؛ را نشان می‌دهد. نموداری از توزیع فراوانی این داده‌ها و برآورد هموار تابع چگالی متناظر در شکل ۳ ارائه‌شده است. با توجه به نمودار، فراوانی مقادیر کوچک داده‌ها نسبتاً زیاد بوده و مقداری انحراف از تقارن و چولگی از راست در توزیع فراوانی داده‌ها مشاهده می‌شود. برای نتیجه‌گیری دقیق‌تر، فرض تقارن توزیع این داده‌ها را با آماره‌های بخش قبل آزمون می‌کنیم. جدول ۵، p -مقدار متناظر آماره‌ها را نشان می‌دهد. طبق این نتایج همه آماره‌ها فرض تقارن توزیع داده‌ها را در سطح ۰/۰۵ رد کرده و انحراف توزیع فراوانی داده‌ها از تقارن معنادار است؛ بنابراین هر چهار آماره بررسی‌شده در بخش قبل چولگی مثبت توزیع داده‌ها را تأیید می‌کنند.

جدول (۲): مقایسه اندازه آزمون‌ها

n					توزیع
۳۰۰	۱۰۰	۵۰	۳۰	آماره آزمون	
۰/۰۶۲	۰/۰۴۴	۰/۰۶۷	۰/۰۵۳	D_n	$N(0,1)$
۰/۰۴۷	۰/۰۲۸	۰/۰۳۳	۰/۰۱۶	τ^B	
۰/۰۶۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۶	۰/۰۴۶	T^B	
۰/۰۶۳	۰/۰۴۵	۰/۰۴۶	۰/۰۴۱	T^{AN}	
۰/۰۳۸	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۶۱	D_n	$Logis(0,1)$
۰/۰۲۳	۰/۰۳۱	۰/۰۱۶	۰/۰۱۹	τ^B	
۰/۰۳۵	۰/۰۵۲	۰/۰۳۸	۰/۰۳۸	T^B	
۰/۰۳۷	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴	T^{AN}	
۰/۰۴۴	۰/۰۶۵	۰/۰۵۶	۰/۰۵۶	D_n	$t(3)$
۰/۰۳۴	۰/۰۴۲	۰/۰۲۶	۰/۰۲	τ^B	
۰/۰۴۳	۰/۰۴۰	۰/۰۴۱	۰/۰۲۸	T^B	
۰/۱۲۲	۰/۱۳۶	۰/۱۰۴	۰/۰۸۲	T^{AN}	
۰/۰۶۹	۰/۰۷۱	۰/۰۶۲	۰/۰۵۲	D_n	$Beta(2,2)$
۰/۰۵۷	۰/۰۴۶	۰/۰۳۲	۰/۰۲۵	τ^B	
۰/۰۵۸	۰/۰۶۸	۰/۰۶۲	۰/۰۵۰	T^B	
۰/۰۷۵	۰/۰۶۵	۰/۰۴۳	۰/۰۴۰	T^{AN}	
۰/۰۵۵	۰/۰۷۶	۰/۰۶۹	۰/۰۶۹	D_n	$U(0,1)$
۰/۰۵۷	۰/۰۷۱	۰/۰۴۷	۰/۰۴۲	τ^B	
۰/۰۷۴	۰/۰۸۲	۰/۰۸۰	۰/۰۹۰	T^B	
۰/۱۱۲	۰/۱۰۵	۰/۰۹۵	۰/۰۷۶	T^{AN}	



شکل (۳): بافت نگار و چگالی برآورد شده داده‌های طول عمر

جدول (۳): مقایسه توان آزمون‌ها

n				آماره آزمون	توزیع
۳۰۰	۱۰۰	۵۰	۳۰		
۱	۰/۹۸۶	۰/۹۰۸	۰/۶۵۶	D_n	$\cdot / \epsilon N (-۶, ۱) + \cdot / ۴ N (۶, ۴)$
۰/۹۴۹	۰/۳۵۹	۰/۱۳۱	۰/۰۹۴	τ^B	
۱	۰/۹۸۸	۰/۹۴۴	۰/۹۰۰	T^B	
۱	۰/۹۹۵	۰/۹۶۱	۰/۹۱۴	T^{AN}	
۰/۹۱۷	۰/۵۷۰	۰/۳۸۹	۰/۳۲۶	D_n	$GLD(۰, ۱, ۱/۴, ۰/۲۵)$
۰/۸۷۵	۰/۴۷۹	۰/۲۳۵	۰/۱۲۴	τ^B	
۰/۸۲۴	۰/۴۴۶	۰/۲۶۷	۰/۲۳۰	T^B	
۰/۹۱۴	۰/۵۵۹	۰/۳۱۹	۰/۲۶۰	T^{AN}	
۰/۲۲۵	۰/۱۳۷	۰/۰۹۹	۰/۰۹۴	D_n	$GLD(-۰/۱۱۶۷, -۰/۳۵۱۷, -۰/۱۳, -۰/۱۶)$
۰/۱۹۹	۰/۰۹۶	۰/۰۴۱	۰/۰۲۹	τ^B	
۰/۲۰۰	۰/۰۹۴	۰/۰۵۰	۰/۰۵۵	T^B	
۰/۲۶۰	۰/۱۴۰	۰/۰۸۶	۰/۰۹۰	T^{AN}	
۰/۹۶۸	۰/۶۳۲	۰/۳۸۴	۰/۲۶۳	D_n	$G(۵, ۷)$
۰/۹۲۶	۰/۴۷۵	۰/۲۱۱	۰/۰۷۵	τ^B	
۰/۸۸۷	۰/۴۶۹	۰/۲۴۲	۰/۱۴۲	T^B	
۰/۹۱۵	۰/۵۲۸	۰/۲۷۹	۰/۱۶۵	T^{AN}	
۰/۹۹۷	۰/۸۱۹	۰/۵۳۹	۰/۴۳۷	D_n	$G(۳, ۵)$
۰/۹۹۲	۰/۶۷۴	۰/۳۲۷	۰/۱۴۸	τ^B	
۰/۹۸۵	۰/۶۶۳	۰/۳۵۸	۰/۲۲۸	T^B	
۰/۹۸۹	۰/۷۳۰	۰/۴۲۴	۰/۳۱۰	T^{AN}	
۰/۹۹۹	۰/۸۸۷	۰/۶۱۵	۰/۴۴۶	D_n	$GLD(۰, -۱, -۰/۰۰۷۵, -۰/۰۳)$
۰/۹۹۹	۰/۷۷۹	۰/۳۶۷	۰/۱۷۳	τ^B	
۰/۹۹۹	۰/۷۶۳	۰/۴۱۲	۰/۲۵۳	T^B	
۰/۹۹۹	۰/۸۳۱	۰/۵۲۱	۰/۳۳۸	T^{AN}	
۱	۱	۰/۹۷۶	۰/۸۷۴	D_n	$GLD(۰, -۱, -۰/۰۰۰۱, -۰/۱۷)$
۱	۰/۹۹۸	۰/۸۷۶	۰/۵۰۷	τ^B	
۱	۰/۹۹۸	۰/۸۹۶	۰/۶۶۴	T^B	
۱	۰/۹۹۹	۰/۹۶۵	۰/۸۴۶	T^{AN}	
۱	۰/۹۹۹	۰/۹۰۰	۰/۷۲۷	D_n	$F(۸, ۹)$
۱	۰/۹۸۹	۰/۷۰۸	۰/۳۷۶	τ^B	
۱	۰/۰۹۸۶	۰/۷۵۰	۰/۴۶۳	T^B	
۱	۰/۹۹۷	۰/۸۶۴	۰/۶۶۸	T^{AN}	

جدول (۴): داده‌های طول عمر مثال

۱۰, ۳۳, ۴۴, ۵۶, ۵۹, ۷۲, ۷۴, ۷۷, ۹۲, ۹۳, ۹۶, ۱۰۰, ۱۰۰, ۱۰۲, ۱۰۵, ۱۰۷, ۱۰۷, ۱۰۸, ۱۰۸,
۱۰۸, ۱۰۹, ۱۱۲, ۱۱۳, ۱۱۵, ۱۱۶, ۱۲۰, ۱۲۱, ۱۲۲, ۱۲۲, ۱۲۴, ۱۳۰, ۱۳۴, ۱۳۶, ۱۳۹, ۱۴۴,
۱۴۶, ۱۵۳, ۱۵۹, ۱۶۰, ۱۶۳, ۱۶۳, ۱۶۸, ۱۷۱, ۱۷۲, ۱۷۶, ۱۸۳, ۱۹۵, ۱۹۶, ۱۹۷, ۲۰۲, ۲۱۳,
۲۱۵, ۲۱۶, ۲۲۲, ۲۳۰, ۲۳۱, ۲۴۰, ۲۴۵, ۲۵۱, ۲۵۳, ۲۵۴, ۲۵۴, ۲۷۸, ۲۹۳, ۳۲۷, ۳۴۲, ۳۴۷,
۳۵۱, ۴۰۲, ۴۳۲, ۴۵۸, ۵۵۵

جدول (۵): p -مقدار آزمون‌ها

آماره آزمون	D_n	τ^B	T^B	T^{AN}
p -مقدار	۰/۰۰۲	۰/۰۱۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۱

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از نسبت آنتروپی باقیمانده تجمعی و اندازه عدم دقت تجمعی معیار جدیدی برای محاسبه میزان چولگی توزیع فراوانی متغیرهای تصادفی معرفی شد. همچنین آماره آزمون آزاد- توزیع برای آزمون فرض تقارن بر مبنای این نسبت ارائه گردید که p -مقدار آن به روش بازنمونه‌گیری خودگردان و با نمونه‌گیری از تابع توزیع تجربی متقارن شده محاسبه می‌شود. توان این آماره آزمون با توان آماره آزمون قوش [۱۸] و آماره آزمون میائو و همکاران [۳] که از جمله آزمون‌های با توان قابل قبول است؛ به روش شبیه‌سازی مقایسه گردید. طبق نتایج به دست آمده آماره آزمون معرفی شده D_n دارای اندازه آزمون نزدیک به سطح اسمی آزمون است. بخصوص اینکه در توزیع دم‌سنگین متقارن $t(3)$ که در آن آماره‌های مبتنی بر میانگین نمونه (مانند آماره آزمون میائو و همکاران [۳]) با مشکل مواجه می‌شوند؛ آماره D_n عملکرد خوبی نشان داد. همچنین، عملکرد این آماره آزمون از لحاظ توان نسبت به آماره آزمون میائو و همکاران [۳] و آماره آزمون قوش [۱۸] از برتری قابل توجهی برخوردار است. قوش [۱۸] اشاره کرده است که مقادیر بحرانی آماره خود را بر اساس فرض توزیع نرمال به دست آورده است و این آماره با مقادیر بحرانی مجانبی و آزاد- توزیع متناظر و به‌ویژه برای حجم نمونه‌های کوچک، عملکرد ضعیفی داشته است که دلیل آن را کم بودن سرعت همگرایی به توزیع حدی ذکر کرده‌اند. با توجه به این که طبق نتایج پژوهش‌های موجود، در چنین مواقعی روش بوت‌استرپ بهترین جایگزین است؛ در مقایسه شبیه‌سازی این مقاله معادل بوت‌استرپ آماره قوش [۱۸] استفاده شد. طبق نتایج به‌دست‌آمده، این آماره در حالتی که مقادیر بحرانی آن با بوت‌استرپ محاسبه می‌شود؛ نیز در بین توزیع‌های موردبررسی، عملکرد ضعیفی به نمایش گذاشت.

سپاسگزاری

نویسنده از داوران محترم به خاطر پیشنهادات سازنده‌شان که زمینه ارائه هر چه بهتر مقاله را فراهم آوردند؛ کمال تشکر را دارد.

مراجع

- [1] Lehmann, E.L. and Romano, J.P. (2005). *Testing Statistical Hypotheses*, New York: Springer.
- [2] Yoshizawa, C.N. (1984). *Some Tests of Symmetry*, Department of Biostatistics University of North Carolina at Chapel Hill Institute of Statistics Mimeo Series No. 1460.
- [3] Miao, W., Gel, Y. R., and Gastwirth, J. L. (2006). A New Test of Symmetry about an Unknown Median. Random Walk, Sequential Analysis and Related Topics - A Festschrift in Honor of Yuan-Shih Chow. Eds.: Agnes Hsiung, Cun-Hui Zhang, and Zhiliang Ying, World Scientific Publisher, Singapore.
- [4] Cabilio P. and Masaro, J. (1996). A simple test of symmetry about an unknown median, *Canadian Journal of Statistics*, **24**, 349–361.
- [5] Mira A. (1999). Distribution-free test for symmetry based on Bonferroni's measure, *Journal of Applied Statistics*, **26**, 959–972.
- [6] Shannon, C.E. (1948). A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 279–423.
- [7] Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B.C. and Wang, F. (2004). Cumulative residual entropy: a new measure of information, *IEEE Transactions on Information Theory*, **50**, 1220–1228.
- [8] Di Crescenzo, A. and Longobardi, M. (2009). On cumulative entropies, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 4072-4087.
- [9] Rao, M. (2005). More on a new concept of entropy and information, *Journal of Theoretical Probability*, **18**, 967–981.
- [10] Asadi, M. and Zohrevand, Y. (2007). On the dynamic cumulative residual entropy, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 1931–1941.
- [11] Navarro, J., del Aguila, Y., and Asadi, M. (2010). Some new results on the cumulative residual entropy, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 310-322.

- [12] Drissi, N., Chonavel, T. and Boucher, J.M. (2008). Generalized Cumulative Residual Entropy for Distributions with Unrestricted Supports, *Hindawi Publishing Corporation* doi:10.1155/2008/790607.
- [13] Kerridge, D. F. (1961). Inaccuracy and inference, *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, **23**, 184-194.
- [14] Kundu, C., Di Crescenzo, A. and Longobardi, M. (2016). On cumulative residual (past) inaccuracy for truncated random variables, *Metrika*, **79(3)**, 335-356.
- [15] Taneja, H.C. and Kumar, V. (2012). On dynamic cumulative residual inaccuracy measure. In Ao S.I. et al. (eds.), *Proceedings of the World Congress on Engineering*, **1**, London, U.K., 153-156.
- [16] Modarres R. (2002). Efficient nonparametric estimation of a distribution function, *Computational Statistics and Data Analysis*, **39**, 75–95.
- [17] Zheng, T. and Gastwirth, J.L. (2010). On Bootstrap Tests of Symmetry About an Unknown Median, *Journal of Data Science*, **8**, 413–427.
- [18] Ghosh, K. A. (2011). New Nonparametric Test of Symmetry, *Advances in Directional and Linear Statistics*. Wells, M. T. and A. SenGupta (eds.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 69-83.

A Bootstrap Test for Symmetry based on Cumulative Entropy

Vali Zardasht

Department of Statistics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

Abstract

The symmetry assumption plays an important role in nonparametric statistical inference methods. Using different measure of asymmetry, various test statistics has proposed for testing the symmetry hypothesis. In this paper, we apply the cumulative residual entropy to introduce a new skewness measure and construct a distribution-free test for the hypothesis. Bootstrap re-sampling from a symmetric empirical distribution function is used to calculate the p-value of the test. The power of the new test statistic is compared with two existing tests in a simulation study. The results show that the proposed test preserves its level and it has reasonable power properties on the family of distribution evaluated.

Keywords: Symmetry; Entropy measures; Inaccuracy measure; Skewness measure; Bootstrap.

Mathematics Subject Classification (2010): 10G09, 62G62.