بررسی وجود جواب‌های دسته‌ای از معادلات شرودینگر شبه خطی

یعقوب جلیلیان[1] و ایرج دهساری

گروه ریاضی، دانشگاه رازی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۱۲/۱۳

چکیده. در این مقاله به بررسی وجود یک جواب ضعیف نابدیهی برای دسته‌ای از معادلات شرودینگر شبه خطی در فضای سوبولف $H^{1}(\mathbb{R}^N)$ می‌پردازیم. ابتدا از یک تغییر متغیر برای به دست آوردن یک تابعک انرژی خوش‌تعریف روی $H^{1}(\mathbb{R}^N)$ استفاده می‌کنیم. سپس از یک منیفلد C^{1} به‌عنوان یک قید طبیعی استفاده کرده و ثابت می‌کنیم تحدید تابعک انرژی به این منیفلد اینفیمم خود را اختیار می‌کند. سرانجام ثابت می‌کنیم این نقطه‌ی اینفیمم یک جواب ضعیف نابدیهی برای معادله است.

واژه‌های کلیدی: معادله شرودینگر شبه خطی، قید طبیعی، منیفلد نهاری، جواب ضعیف.

رده‌بندی ریاضی: ۳۵D۳۰، ۳۵A۱۵.

۱- مقدمه

در این مقاله معادلات شرودینگر شبه خطی از نوع

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^{2})u = g(x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

را در نظر می‌گیریم که در اینجا V تابعی حقیقی، پیوسته، نامنفی و g به‌صورت زیر است

$$g(x,u) = k(x)|u|^{p-2}u + h(x)|u|^{q-2}u. \tag{2}$$

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله:y.jalilian@razi.ac.ir

همچنین $N \geq ۳$، $۴ < p < q < ۲۲^*$، $۲^* = \frac{۲N}{N-۲}$، h تابعی نامنفی و k تابعی معین است که ممکن است تغییر علامت دهد. معادله (۱) یکی از معادلات مهم در مکانیک کوانتوم است. معادله (۱) با معادله شرودینگر شبه خطی زیر مرتبط است

$$i\partial_t z = -\Delta z + w(x)z - f(x,z) - c\Delta l(|z|^۲)l'(|z|^۲)z, \qquad (۳)$$

که در آن c یک ثابت حقیقی، l و f توابعی حقیقی مقدار و معین هستند. معادله (۳) برای حالت $l(s) = s^{۸}$ در فیزیک پلاسما و مکانیک کوانتم ظاهر می‌شود. سیر تکامل زمانی تابع موج انقباضی در غشاهای ابررسانا بر اساس یک معادله شرودینگر از نوع (۳) با پتانسیل واندروالس موردمطالعه قرار می‌گیرد. کوری‌هارا در [۱] به مدل‌سازی تابع موج یک غشای ابررسانا که به یک لایه جامد چسبیده شده، پرداخته و به شکل خاصی از معادله شرودینگر (۳) در حالت $l(s) = s$ و

$$f(x,z) = -\mu - \frac{A}{(a+|z|^۲)^۳},$$

رسیده است. در این مدل‌سازی a چگالی لایه جامد، μ ضریبی در پتانسیل شیمیایی و A یک عدد ثابت ظاهر شده در چگالی لاگرانژ است. همچنین اگر d ضخامت غشا باشد آنگاه رابطه d با تابع موج به‌صورت $n_\circ d = a + |z|^۲$ در معادله ظاهر می‌شود که در اینجا $n_\circ$ چگالی اتم‌های هلیم می‌باشد. کوری‌هارا با محاسبه چگالی لاگرانژ و با استفاده از اصل تغییراتی به مدل‌سازی پدیده ذکر شده به فرم معادله شرودینگر اشاره شده رسیده است. اگر در معادله (۳) قرار دهیم $l(s) = s$ و $z(t,x) = \exp(-iEt)u(x)$ که در اینجا $E \in \mathbb{R}$ و $u(x)$ تابعی حقیقی مقدار است، آنگاه به یک معادله بیضوی متناظر، به شکل (۱) می‌رسیم؛ بنابراین برای یافتن جواب‌های به شکل موج منزوی معادله (۳) کافی است جواب‌های معادله (۱) را بررسی کنیم. نتیجه عملی این مقاله اثبات وجود جواب‌های موج منزوی معادله شرودینگر (۳) می‌باشد. بعلاوه معادله شرودینگر شبه خطی از نوع (۳) کاربردهای فراوانی در مکانیک سیالات و مکانیک کوانتم دارد برای دیدن برخی از این کاربردها به منابع [۲,۳] رجوع شود.

با توجه به کاربردهای معادلات از نوع (۱) در علوم مختلف، محققان زیادی این‌گونه معادلات را مطالعه کرده‌اند. به‌عنوان مثال در [۴] وجود جواب برای دسته‌ای از معادلات شرودینگر از نوع (۱) با پتانسیل متغیر بررسی شده است. در [۵]، لیو و وانگ معادله (۱) را به‌صورت یک مسئله تغییراتی فرمول‌بندی کرده‌اند و به اثبات وجود جواب‌های با تغییر علامت و دارای مینیمم انرژی می‌پردازند. همچنین لیو و همکارانش در [۶] معادله (۱) را در حالتی که قسمت غیرخطی معادله دارای رشد شبه بحرانی است، بررسی می‌کنند. آن‌ها وجود جواب‌های مثبت و با تغییر علامت را

با استفاده از روش منیفلد نهاری اثبات می‌کنند. در منبع [۷] نویسندگان با استفاده از روش منیفلد نهاری معادله (۱) را با شرایط تناوبی در نظر گرفته و علاوه بر اثبات وجود جوابی با مینیمم انرژی، وجود بی‌نهایت جواب که به‌طور هندسی متمایز هستند را نیز اثبات می‌کنند. همچنین مقالات [۱۴-۸] وجود جواب‌های معادله (۱) را در حالتی که قسمت غیرخطی شامل نمای بحرانی سوبولف است، را بررسی کرده‌اند.

هدف این مقاله اثبات وجود یک جواب ضعیف نابدیهی برای معادله (۱) در فضای سوبولف $H^1(\mathbb{R}^N)$ می‌باشد. بحث وجود جواب معادله (۱) در حالتی که قسمت غیرخطی دارای وزن با تغییر علامت است، در هیچ‌یک از کارهای ذکر شده بررسی نشده است. با توجه به اینکه تابعک انرژی مربوط به معادله (۱) در $H^1(\mathbb{R}^N)$ خوش‌تعریف نیست، بررسی وجود جواب این معادله با روش‌های تغییراتی با مشکل مواجه می‌شود. برای برطرف کردن این مشکل از یک تغییر متغیر مناسب [۵] استفاده کرده، سپس وجود جواب را روی منیفلد نهاری تعمیم‌یافته بررسی می‌کنیم. در این مقاله معادله (۱) را تحت شرایط زیر مطالعه می‌کنیم:

الف) تابع $V:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ پیوسته است و ثابت‌های مثبت V_0 و V_1 موجودند به‌طوری‌که $V_1 \geq V(x) \geq V_0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^N$؛

ب) توابع k و h به ترتیب در فضاهای $L^r(\mathbb{R}^N)$ و $L^s(\mathbb{R}^N)$ قرار دارند که در اینجا

$$1 < \frac{r}{r-1} < \frac{2 2^*}{p} \text{ و } 1 < \frac{s}{s-1} < \frac{2 2^*}{p}؛$$

پ) تابع h نامنفی است و مجموعه $\{x : h(x) > 0\}$ دارای درون ناتهی است.

نتیجه اصلی این مقاله به‌صورت زیر است:

قضیه ۱. تحت شرایط الف)-پ) معادله (۱) دارای یک جواب ضعیف نابدیهی با کمترین انرژی در فضای سوبولف $H^1(\mathbb{R}^N)$ می‌باشد.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ تعاریف و قضایای مورد نیاز در مقاله بیان می‌شود و در بخش ۳ ابتدا چند لم کمکی را بیان و اثبات می‌کنیم، سپس به اثبات نتیجه اصلی مقاله یعنی قضیه ۱ می‌پردازیم.

۲- تعاریف و قضایای کمکی

در این بخش چند مفهوم را تعریف کرده و قضایای مورد نیاز در بخش بعدی بیان می‌کنیم. ابتدا چند نماد را معرفی می‌کنیم.

فضای سوبولف $X := H^1(\mathbb{R}^N)$ را با نرم

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

در نظر می‌گیریم که با توجه به فرض الف) با نرم استاندارد در فضای سوبولف X معادل است. تابعک انرژی معادله (۱) به‌صورت زیر است:

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left((1+2u^2)|\nabla u|^2 + V(x)u^2\right) - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} k(x)|u|^p - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} h(x)|u|^q.$$

تابعک I برای هر $u \in X$ قابل‌تعریف نیست برای برطرف کردن این مشکل از تغییر متغیر $u = f^{-1}(v)$ استفاده می‌کنیم که در اینجا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2f^2(t)}}, & t \in [0, +\infty), \\ f(t) = -f(-t), & t \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

در لم بعد برخی خواص تابع f را بیان می‌کنیم. اثبات این لم را می‌توان در منابع [۱۰، ۱۵، ۱۶ و ۱۷] یافت.

لم ۲. تابع f در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) تابع f به‌طور یکتا تعریف می‌شود، C^∞ و معکوس‌پذیر است؛

۲) برای هر $t \in \mathbb{R}$، $|f'(t)| \le 1$؛

۳) برای هر $t \in \mathbb{R}$، $|f(t)| \le |t|$؛

۴) $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 1$؛

۵) $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} = \sqrt[4]{2}$ ؛

۶) برای هر $t > 0$، $\frac{f(t)}{2} \le tf'(t) \le f(t)$؛

۷) برای هر $t \in \mathbb{R}$، $|f(t)| \le \sqrt[4]{2}|t|^{\frac{1}{2}}$؛

۸) ثابت مثبت C موجود است به‌طوری‌که $|f(t)|\geq C|t|$ برای $|t|\leq ۱$ و $|f(t)|\geq C|t|^{\frac{۱}{۲}}$ برای $|t|\geq ۱$.

با تغییر متغیر $v=f^{-۱}(u)$ تابعک I به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$J(v)=\frac{۱}{۲}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v|^۲+V(x)f^۲(v)\right)-\frac{۱}{p}\int_{\mathbb{R}^N}k(x)|f(v)|^p-\frac{۱}{q}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|f(v)|^q$$

با توجه به خواص تابع f، تابعک J روی X خوش‌تعریف است و برای $v,w\in X$ داریم:

$$\begin{aligned}\left\langle J'(v),w\right\rangle&=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\nabla v\nabla w+V(x)f(v)f'(v)w\right)\\&-\int_{\mathbb{R}^N}k(x)|f(v)|^{p-۲}f(v)f'(v)w\\&-\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|f(v)|^{q-۲}f(v)f'(v)w,\end{aligned}\tag{۴}$$

که در اینجا $\langle .,.\rangle$ زوج دوگان بین X^* (دوگان X) و X می‌باشد. با توجه به رابطه (۴) نقاط بحرانی تابعک J جواب‌های ضعیف معادله

$$\begin{aligned}-\Delta v+V(x)f(v)f'(v)&=k(x)|f(v)|^{p-۲}f(v)f'(v)\\&+h(x)|f(v)|^{q-۲}f(v)f'(v),\end{aligned}$$

می‌باشد. در منبع [۵] ثابت شده است که اگر $v\in X$ یک نقاط بحرانی تابعک J باشد آنگاه $u=f(v)$ نقطه بحرانی تابعک I می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه $۴<p<q<۲۲^*$ و f تابعی C^∞، تحت شرایط الف) و ب)، تابعک J از رده‌ی $C^۲$ است. حال قرار دهید

$$\mathfrak{A}=\left\{v\in X\setminus\{۰\}:\left\langle J'(v),v\right\rangle=۰\right\}.$$

مجموعه $\mathfrak{A}$ را منیفلد نهاری مربوط به تابعک J گوییم. با توجه به اینکه نمی‌توان معین کرد که منیفلد نهاری از رده‌ی $C^۱$ است، ما از منیفلد نهاری تعمیم‌یافته زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathfrak{M}=\left\{v\in X\setminus\{۰\}:\left\langle J'(v),\frac{f(v)}{f'(v)}\right\rangle=۰\right\}.$$

نکته: برای $v\in X$ با توجه به خواص f و با محاسبه داریم:

$$\nabla\left(\frac{f(v)}{f'(v)}\right)=\left(۱+\frac{۲f^۲(v)}{۱+۲f^۲(v)}\right)\nabla v.$$

درنتیجه با استفاده از خواص ۲) و ۳) در لم ۲، $\frac{f(v)}{f'(v)} \in X$.

تعریف: گوییم تابعک $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ در شرط پالیس-اسمیل در سطح $c \in \mathbb{R}$ صدق می‌کند اگر هر دنباله $\{u_n\} \subset X$ به‌طوری‌که

$$I(u_n) \to c, \qquad I'(u_n) \to 0,$$

دارای یک زیر دنباله همگرا باشد. هر دنباله‌ای که در حدهای فوق صدق کند را یک دنباله پالیس-اسمیل در سطح c گوییم.

نمادگذاری: در این مقاله از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

- نمادهای C, C_0, C_1, ... بیانگر اعداد ثابت هستند؛
- برای $1 \le m \le \infty$ نماد $\|u\|_m$ نرم استاندارد فضای $L^m(\mathbb{R}^N)$ را نمایش می‌دهد؛
- نماد $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ فضای توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر با محمل فشرده را نشان می‌دهد.

۳- اثبات قضیه ۱

در این بخش به اثبات نتیجه اصلی این مقاله می‌پردازیم. ابتدا چند لم کمکی را بیان و اثبات می‌کنیم.

عملگرهای $K,H : X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$K(v) := \int_{\mathbb{R}^N} k(x)|f(v)|^p,$$
$$H(v) := \int_{\mathbb{R}^N} h(x)|f(v)|^q.$$

لم ۳. فرض کنید شرایط الف) و ب) برقرار باشند، آنگاه برای هر $v \in X$، اگر $H(v) > 0$، آنگاه $t > 0$ موجود است به‌طوری‌که $tv \in \mathfrak{M}$.

اثبات. فرض کنید $v \in X$ به‌طوری‌که $H(v) > 0$. نگاشت

$$\eta_v(t) := \left\langle J'(tv), \frac{f(tv)}{f'(tv)} \right\rangle, \qquad t \in (0,+\infty),$$

را در نظر بگیرید به‌وضوح $tv \in \mathfrak{M}$ اگر و تنها اگر $\eta_v(t) = 0$. از طرفی

$$\eta_v(t)=t^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)f^2(tv)$$
$$+t^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2\frac{2f^2(tv)}{1+2f^2(tv)}-K(tv)-H(tv).$$

طبق قسمت‌های ۳)، ۷) و ۸) از لم ۲، برای tهای بزرگ داریم:

$$H(tv)=\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|f(tv)|^q\geq Ct^{\frac{q}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|v|^{\frac{q}{2}}$$
$$|K(tv)|\leq\int_{\mathbb{R}^N}|k(x)||f(tv)|^p\leq 2^{\frac{1}{4}}t^{\frac{p}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|k(x)||v|^{\frac{p}{2}}$$

درنتیجه

$$\eta_v(t)\leq 2t^2\|v\|^2+2^{\frac{1}{4}}t^{\frac{p}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}|k(x)||v|^{\frac{p}{2}}-Ct^{\frac{q}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|v|^{\frac{q}{2}}$$

طبق نامساوی فوق و با توجه به فرض $4<p<q$، $t>0$ موجود است به‌طوری‌که $\eta_v(t)<0$.
همچنین با استفاده از لم ۲، قسمت‌های ۷) و ۸) برای tهای به‌اندازه کافی کوچک نامساوی زیر را داریم:

$$\eta_v(t)\geq Ct^2\|v\|^2-\frac{2^{\frac{1}{4}}t^{\frac{p}{2}}}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|k(x)||v|^{\frac{p}{2}}-\frac{2^{\frac{1}{4}}}{q}t^{\frac{q}{2}}\int_{\mathbb{R}^N}h(x)|v|^{\frac{q}{2}}.$$

بنابراین برای tهای به‌اندازه کافی کوچک $\eta_v(t)>0$. درنتیجه $t_0>0$ موجود است به‌طوری‌که $\eta_v(t_0)=0$. $\square$

نکته: از لم فوق و فرض پ) می‌توان نتیجه گرفت $\mathfrak{M}\neq\varnothing$.

لم ۴: عملگرهای $K',H':X\to X^*$ کاملاً پیوسته هستند. همچنین تابعک‌های $K,H:X\to\mathbb{R}$ پیوسته ضعیف می‌باشند.

اثبات. ایده‌ی اثبات این لم مشابه اثبات لم ۳٫۱ در [۱۸] است. لم را برای عملگرهای K و K' اثبات می‌کنیم. برای H و H' حکم به‌طور مشابه اثبات می‌شود.

دنباله $\{v_n\}\subset X$ را که به‌طور ضعیف به $v\in X$ همگراست، در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه رلیک-کاندراکوف، زیر دنباله‌ای از $\{v_n\}$ که مجدداً آن را با $\{v_n\}$ نمایش می‌دهیم، موجوداست به‌طوری‌که

$$v_n \to v, \tag{۵}$$

در $L^d_{loc}(\mathbb{R}^N)$ برای $۲ \le d < ۲^*$ و

$$v_n(x) \to v(x), \tag{۶}$$

تقریباً همه‌جا برای $x \in \mathbb{R}^N$. درنتیجه با توجه به پیوستگی f', f داریم:

$$\begin{aligned} f(v_n) &\to f(v), \\ f'(v_n) &\to f'(v), \end{aligned} \tag{۷}$$

تقریباً همه‌جا در $\mathbb{R}^N$؛ بنابراین اگر قرار دهیم

$$w_n := |f(v_n)|^{p-۲} f(v_n) f'(v_n) - |f(v)|^{p-۲} f(v) f'(v),$$

آنگاه $w_n \to ۰$ تقریباً همه‌جا در $\mathbb{R}^N$. از طرفی با استفاده از فرض ب)، قسمت‌های ۲) و ۳) در لم ۲ و نامساوی سوبولوف داریم:

$$\begin{aligned} |w_n|^{\frac{p}{p-۱}} &\le C_۰ \left(|f(v_n)|^{p-۱} + |f(v)|^{p-۱}\right)^{\frac{p}{p-۱}} \\ &\le C_۱ (|v_n|^{\frac{p}{۲}} + |v|^{\frac{p}{۲}}) \in L^{r'}(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

از آنجایی که دنباله $\{v_n\}$ در $L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ کران‌دار است، طبق نامساوی فوق دنباله $\{w_n\}$ نیز در $L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ کران‌دار می‌باشد؛ بنابراین دارای زیر دنباله‌ای است (که مجدداً آن را با $\{w_n\}$ نمایش می‌دهیم)، به‌طوری‌که $w_n \to ۰$ به‌طور ضعیف در $L^{r'}(\mathbb{R}^N)$.

حال فرض کنید $z \in X$ با $\|z\| \le ۱$. با استفاده از نامساوی‌های هولدر و سوبولف داریم:

$$\begin{aligned} |\langle K'(v_n) - K'(v), z \rangle| &\le p \int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| |w_n| |z| \\ &\le p \left(\int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| |z|^p \right)^{\frac{۱}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| |w_n|^{\frac{p}{p-۱}} \right)^{\frac{p-۱}{p}} \\ &\le C \|k\|_r^{\frac{۱}{p}} \|z\| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| |w_n|^{\frac{p}{p-۱}} \right)^{\frac{p-۱}{p}} \\ &\le C \|k\|_r^{\frac{۱}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |k(x)| |w_n|^{\frac{p}{p-۱}} \right)^{\frac{p-۱}{p}}. \end{aligned}$$

اما $w_n \to 0$ به‌طور ضعیف در $L^{r'}(\mathbb{R}^N)$ و $k \in L^r(\mathbb{R}^N)$. پس سمت راست آخرین نامساوی بالا به‌طور یکنواخت نسبت به z به صفر میل می‌کند؛ بنابراین K' کاملاً پیوسته می‌باشد. از طرفی می‌توان K را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$K(v) = \frac{1}{p}\left\langle K'(v), \frac{f(v)}{f'(v)} \right\rangle.$$

با توجه به اینکه f' پیوسته است اگر $v_n \to v$ به‌طور ضعیف در X آنگاه $\frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \to \frac{f(v)}{f'(v)}$ به‌طور ضعیف و درنتیجه

$$K(v_n) - K(v) = \frac{1}{p}\left\langle K'(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)} \right\rangle - \frac{1}{p}\left\langle K'(v), \frac{f(v)}{f'(v)} \right\rangle \to 0.$$

بنابراین K به‌طور ضعیف روی X پیوسته است. □

در ادامه به بررسی خواص مجموعه $\mathfrak{M}$ می‌پردازیم.

لم ۵: فرض کنید شرایط الف) تا پ) برقرار باشند، آنگاه $\mathfrak{M}$ منیفلدی بسته، از رده‌ی C^1 و دور از صفر کران‌دار است.

اثبات. فرض کنید $v \in X$ با $\|v\| \le 1$، آنگاه $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \le 1$. با توجه به فرض الف)، قسمت ۸) از لم ۲ و نامساوی سوبولف-گاگیلاردو-نیرنبرگ به نامساوی‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} V(x) v^2 &= \int_{\{x:|v|\ge 1\}} V(x) v^2 + \int_{\{x:|v|\le 1\}} V(x) v^2 \\
&\le C_0 \left(\int_{\{x:|v|\ge 1\}} v^{2^*} + \int_{\{x:|v|\le 1\}} V(x) f^2(v) \right) \\
&\le C_1 \left[\left(\int_{\{x:|v|\ge 1\}} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{2^*}{2}} + \int_{\{x:|v|\le 1\}} V(x) f^2(v) \right] \\
&\le C_1 \left(\int_{\{x:|v|\ge 1\}} |\nabla v|^2 + \int_{\{x:|v|\le 1\}} V(x) f^2(v) \right).
\end{aligned} \qquad (8)$$

حال فرض کنید $v \in \mathfrak{M}$ و $\|v\| \leq ۱$ با توجه به تعریف مجموعه $\mathfrak{M}$ تساوی زیر را داریم:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^۲ + V(x) f^۲(v)\right) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^۲ \frac{۲f^۲(v)}{۱+۲f^۲(v)} = K(v) + H(v). \qquad (۹)$$

از روابط (۸)، (۹) و نامساوی‌های هولدر و سوبولف داریم:

$$\begin{aligned} \|v\|^۲ &\leq C_۳ \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^۲ + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^۲(v) \right) \\ &\leq C_۳ \left(K(v) + H(v) \right) \\ &\leq C_۳ \left(\|k\|_r \|v\|^{\frac{p}{۲}}_{\frac{r'p}{۲}} + \|k\|_s \|v\|^{\frac{q}{۲}}_{\frac{s'q}{۲}} \right) \\ &\leq C_۴ \left(\|v\|^{\frac{p}{۲}} + \|v\|^{\frac{q}{۲}} \right) \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

نامساوی (۱۰) و فرض $۴ < p < q$ نتیجه می‌دهد که $\mathfrak{M}$ دور از صفر است. حال تابعک $\Psi : X \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \Psi(v) &= \left\langle J'(v), \frac{f(v)}{f'(v)} \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^۲ + V(x) f^۲(v)\right) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^۲ \frac{۲f^۲(v)}{۱+۲f^۲(v)} - K(v) - H(v). \end{aligned}$$

در این صورت $\Psi \in C^۱(X, \mathbb{R})$ و $\mathfrak{M} = \Psi^{-۱}(\circ) \setminus \{\circ\}$. با توجه به اینکه $\mathfrak{M}$ دور از صفر است، پس $\mathfrak{M}$ بسته است. حال نشان می‌دهیم هر نقطه $\mathfrak{M}$ یک نقطه منظم برای Ψ است. فرض کنید $v \in \mathfrak{M}$، آنگاه v در (۹) صدق می‌کند. درنتیجه

$$\left\langle \Psi'(v), \frac{f(v)}{f'(v)} \right\rangle = ۲\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^۲ + V(x) f^۲(v) \right)$$
$$+ ۶\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^۲ \frac{۲f^۲(v)}{۱+۲f^۲(v)} - pK(v) - qH(v)$$
$$= (۲-p)\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^۲ + V(x) f^۲(v) \right)$$
$$+ (۶-p)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^۲ \frac{۲f^۲(v)}{۱+۲f^۲(v)} + (p-q)H(v)$$
$$\leq \begin{cases} (۸-۲p)\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^۲ + V(x) f^۲(v) \right) \\ +(p-q)H(v) < ۰, \qquad ۴ < p < ۶, \\ (۲-p)\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^۲ + V(x) f^۲(v) \right) \\ +(p-q)H(v) < ۰, \qquad ۶ \leq p < ۲۲^*. \end{cases}$$

طبق رابطه فوق هر نقطه $\mathfrak{M}$ یک نقطه منظم برای Ψ. پس $\mathfrak{M}$ یک منیفلد $C^۱$ است. □

لم ۶: فرض کنید شرایط الف) تا پ) برقرار باشند، آنگاه $v \neq ۰$ نقطه بحرانی $J|_{\mathfrak{M}}$ است اگر و تنها اگر v یک نقطه بحرانی J روی X باشد. بعلاوه $\{v_n\} \subset \mathfrak{M}$ یک دنباله پالیس-اسمیل برای J در سطح c است اگر و تنها اگر یک دنباله پالیس-اسمیل برای $J|_{\mathfrak{M}}$ در سطح c باشد.

اثبات. به‌وضوح اگر $v \neq ۰$ یک نقطه بحرانی J روی X باشد آنگاه v نقطه بحرانی $J|_{\mathfrak{M}}$ نیز هست. همچنین اگر $\{v_n\} \subset \mathfrak{M}$ یک دنباله پالیس-اسمیل برای J باشد آنگاه این دنباله برای $J|_{\mathfrak{M}}$ نیز در شرط پالیس-اسمیل صدق می‌کند. حال فرض کنید $v \in \mathfrak{M}$ نقطه بحرانی $J|_{\mathfrak{M}}$ است. طبق اثبات لم قبل،

$$\left\langle \Psi'(v), \frac{f(v)}{f'(v)} \right\rangle < ۰,$$

بنابراین، اگر قرار دهیم $W_v = \mathbb{R}\dfrac{f(v)}{f'(v)}$ آنگاه $X = T_v\mathfrak{M} \oplus W_v$. با توجه به اینکه $J'|_{W_v} = ۰$، حکم از تجزیه اخیر X نتیجه می‌شود. □

لم ۷: هر دنباله پالیس-اسمیل در سطح $c \in \mathbb{R}$ برای $J\big|_{\mathfrak{M}}$ کران‌دار است. بعلاوه J روی $\mathfrak{M}$ از پایین کران‌دار است.

اثبات. فرض کنید $\{v_n\} \subset \mathfrak{M}$ دنباله‌ای پالیس-اسمیل در سطح $c \in \mathbb{R}$ روی $\mathfrak{M}$ باشد، آنگاه برای nهای بزرگ داریم:

$$\begin{aligned}
1+c &\geq J(v_n) - \frac{1}{p}\left\langle J'(v_n), \frac{f(v_n)}{f'(v_n)}\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\right) \\
&\quad -\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2 \frac{2f^2(v_n)}{1+2f^2(v_n)} + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)H(v_n) \qquad (11)\\
&\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)\right) + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)H(v_n) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

با استفاده از (۱۱) و با توجه به اینکه $H(v_n) \geq 0$، نتیجه می‌گیریم $\left\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v_n|^2\right\}$ و $\left\{\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n)\right\}$ کران‌دار هستند. از طرفی مشابه رابطه (۸) داریم:

$$\begin{aligned}
\int_{\{x:|v|\geq 1\}} V(x) v_n^2 &\leq \int_{\{x:|v|\geq 1\}} v_n^{2^*} \leq C_0\left(\int_{\{x:|v|\geq 1\}}|\nabla v_n|^2\right)^{\frac{2^*}{2}}, \\
\int_{\{x:|v|\leq 1\}} V(x) v_n^2 &\leq C \int_{\{x:|v|\leq 1\}} V(x) f^2(v_n).
\end{aligned}$$

درنتیجه $\|v_n\|^2$ کران‌دار است و به‌این‌ترتیب اثبات قسمت اول لم ۷ کامل می‌شود برای اثبات کران‌داری از پایین J روی $\mathfrak{M}$ فرض کنید $v \in \mathfrak{M}$. مشابه نامساوی (۱۱) به نامساوی زیر می‌رسیم:

$$J(v) \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\left(|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)\right) + \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)H(v) \geq 0.$$

درنتیجه حکم به اثبات می‌رسد. □

اثبات قضیه ۱. با توجه به لم ۵، $\mathfrak{M}$ یک منیفلد از رده‌ی $C^{۲}$ و بسته است. همچنین J روی $\mathfrak{M}$ از پایین کران‌دار است. طبق اصل تغییراتی اکلند دنباله‌ای چون $\{v_n\} \subset \mathfrak{M}$ موجود است به‌طوری‌که

$$f(v_n) \to c := \inf_{v \in \mathfrak{M}} f(v), \quad f'(v_n) \to ۰.$$

بنا بر لم ۷، $\{v_n\}$ کران‌دار است. درنتیجه زیر دنباله‌ای از آن موجود است (که مجدداً آن را با $\{v_n\}$ نمایش می‌دهیم) به‌طوری‌که

ت) $v_n \to v$ به‌طور ضعیف در X؛

ج) $v_n \to v$ تقریباهمه‌جا در $\mathbb{R}^N$؛

چ) $v_n \to v$ در $L^d_{loc}(\mathbb{R}^N)$ برای $۲ \le d < ۲^*$.

حال نشان می‌دهیم v یک نقطه بحرانی J است. عضو دلخواه $\varphi \in C_۰^\infty(\mathbb{R}^N)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از لم ۲، کران‌داری $\{v_n\}$، ج) و چ) در بالا، نتیجه می‌گیریم که $\{f(v_n)f'(v_n)\}$ دنباله‌ای کران‌دار در X است و

$$f(v_n)f'(v_n) \to f(v)f'(v),$$

تقریباهمه‌جا در $\mathbb{R}^N$؛ بنابراین زیر دنباله‌ای از آن موجود است به‌طوری‌که $f(v_n)f'(v_n) \to f(v)f'(v)$، به‌طور ضعیف در X و $f(v_n)f'(v_n) \to f(v)f'(v)$، در $L^d_{loc}(\mathbb{R}^N)$ برای $۲ \le d < ۲^*$. درنتیجه طبق نامساوی هولدر داریم:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} V(x)\,|f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)||\varphi| \\ &\le V_۱\left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)|^۲|\varphi|\right)^{\frac{۱}{۲}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\varphi|\right)^{\frac{۱}{۲}} \to ۰. \end{aligned} \tag{۱۲}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \langle J'(v_n),\varphi\rangle - \langle J'(v),\varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(v_n - v)\nabla\varphi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)\big(f(v_n)f'(v_n) - f(v)f'(v)\big)\varphi \\ &- \langle K'(v_n) - K'(v),\varphi\rangle - \langle H'(v_n) - H'(v),\varphi\rangle. \end{aligned}$$

با توجه به لم ۴، رابطه (۱۲) و کران‌داری تابعک خطی

$$L_u : X \to \mathbb{R}$$
$$L_u(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla u,$$

برای هر $u \in X$، داریم:

$$\langle J'(v_n), \varphi \rangle - \langle J'(v), \varphi \rangle \to \circ.$$

چگال بودن $C_\circ^\infty(\mathbb{R}^N)$ در X و رابطه فوق نتیجه می‌دهد $J'(v) = \circ$. برای کامل کردن اثبات کافی است نشان دهیم $v \neq \circ$. فرض کنید چنین نباشد یعنی $v = \circ$، آنگاه از پیوستگی ضعیف K, H می‌توان نتیجه گرفت:

$$K(v_n) \to \circ, \qquad H(v_n) \to \circ. \tag{۱۳}$$

با در نظر گرفتن این نکته که $\{v_n\} \subset \mathfrak{M}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$ تساوی زیر برقرار است:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^۲ + V(x) f^۲(v_n) \right) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^۲ \frac{۲f^۲(v_n)}{۱ + ۲f^۲(v_n)} = K(v_n) + H(v_n).$$

با استفاده از (۱۳) داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^۲ + V(x) f^۲(v_n) \right) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^۲ \frac{۲f^۲(v_n)}{۱ + ۲f^۲(v_n)} \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(K(v_n) + H(v_n) \right) = \circ.$$

درنتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^۲ + V(x) f^۲(v_n) \right) = \circ. \tag{۱۴}$$

طبق ج) $v_n \to \circ$ تقریباهمه‌جا در $\mathbb{R}^N$. پس برای nهای بزرگ، $|v_n| \leq ۱$ تقریباهمه‌جا در $\mathbb{R}^N$ و طبق لم ۲ قسمت ۸)، ثابت C موجود است به‌طوری‌که

$$f^۲(v_n) \geq C |v_n|^۲$$

تقریباهمه‌جا؛ بنابراین با استفاده از رابطه (۱۴) به رابطه

$$\circ = \underline{\lim} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^۲ + V(x) f^۲(v_n) \right) \geq C \, \underline{\lim} \|v_n\|^۲, \tag{۱۵}$$

می‌رسیم. با توجه به اینکه $\{v_n\} \subset \mathfrak{M}$، رابطه (۱۵) با دور از صفر بودن $\mathfrak{M}$ در تناقض است. به‌این‌ترتیب حکم ثابت می‌شود. □

۴- نتیجه‌گیری

یکی از مشکلات مربوط به معادلات شرودینگر شبه خطی، عدم خوش‌تعریفی تابعک انرژی در کل فضا می‌باشد. این مشکل در این مقاله با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب برطرف شده است. یکی از معایب استفاده از این تغییر متغیر این است که منیفلد نهاری مربوط به تابعک انرژی جدید نمی‌تواند نقش یک قید طبیعی برای بررسی نقاط بحرانی تابعک را ایفا کند. در این مقاله، ما با معرفی یک منیفلد نهاری تعمیم‌یافته، توانسته‌ایم یک قید طبیعی جدید بیابیم. سپس با بررسی نقاط بحرانی تابعک انرژی روی این قید طبیعی وجود جوابی با کمترین انرژی را اثبات نموده‌ایم.

مراجع

[1] Kurihara, S. (1981). Large amplitude quasi-solitons in superfluid films, *J. Phys. Soc. Jpn*., **50**, 3262-3267.

[2] Brizhik, L., Eremko, A., Piette, B. and Zakrzewski, W.J. (2003). Static solutions of a D-dimensional modified nonlinear Schrödinger equation, *Nonlinearity*, **16**, 1481-1497.

[3] Hass, R.W. (1980). A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equation, *Z. Phys*., **37**, 83-87.

[4] Aires, J.F.L. and Souto, M.A.S. (2014). Existence of solutions for quasilinear Schrödinger equation with vanishing potentials, *J. Math. Anal. Appl*., **416**, 924-946.

[5] Liu, J., Wang, Y. and Wang, Z. (2004). Solutions for quasilinear Schrödinger equations via the Nehari method, *Comm. Partial Differential Equations*, **29**, 879-901.

[6] Liu, X., Liu, J. and Wang, Z.Q. (2013). Ground states for quasilinear Schrödinger equations with critical growth, *Calc. Var*., **46**, 641-669.

[7] Fang, X.D. and Szulkin. (2013). A. Multiple solutions for a quasilinear Schrödinger equation, *J. Differential Equation*, **254**, 2015-2032.

[8] Bezerra do O, J.M., Miyagaki, O.H. and Soares, S.H.M. (2010). Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equation with Critical growth, *J. Differential Equation*, **248**, 722-744.

[9] Deng, Y., Penga, S. and Yanb, S. (2016). Critical exponents and solitary wave solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations, *J. Differential Equations,* **260**, 1228-1262.

[10] do Ó, J.M. and Severo, U. (2009). Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities, *Commun. Pure Appl. Anal*., **8**, 621–644.

[11] Selva, E.A.B. and Vieira, G.F. (2010). Quasilinear asymptotically periodic Schrödinger equations with critical growth, *Calc.Var.*, **39**, 1-33.

[12] Moameni, A. (2006). Existence of soliton solutions for a quasilinear Schrödinger equation involing critical exponent in R^N, *J. Differential Equations*, **229**, 570-587.

[13] Wang, Y. and Zou, W. (2012). Bound states to critical quasilinear Schrödinger equation, *N. Differential Equations.Appl*., **19**, 19-47.

[14] Yang, J., Wang, Y. and Abdelgadir, A.A. (2013). Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equation, *J. Math. Phys*., **54**, 071502.

[15] Colin, M. and Jeanjean, L. (2004), Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach, *Nonlinear Anal*., **56**, 213–226.

[16] do Ó, J.M. and Severo, U. (2010). Solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations in dimension two, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, **38**, 275–315.

[17] Wang, Y.J. and Zou, W.M. (2012). Bound states to critical quasilinear Schrödinger equations, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl*., **19**, 19–47.

[18] Jalilian, Y. and Szulikin, A. (2014). Infinitely many solutions for semilinear elliptic problems with sign-changing weight functions, *Applicable Analysis*, **93**, 756-770.

On the existence of solutions to a class of semilinear Schrödinger equations

Yaghoob Jalilian, Iraj Dehsari

Department of Mathematics, Razi University, Kermanshah, Iran

Abstract

In this paper, we investigate the existence of a nontrivial weak solution for a class of quasilinear Schrödinger equations in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^N)$. First, we use a change of variables to obtain a well defined energy functional on $H^1(\mathbb{R}^N)$. Then we find a C^1 manifold which is a natural constraint, and we prove that the restriction of the energy functional to this manifold attains its infimum. Finally, we show that this infimum point is a nontrivial weak solution for the equation.

***Keywords**:* Quasilinear Schrödinger equation, Natural constraint, Nehari manifold, Weak solution, Existence of solution.

Mathematics Subject Classification (2010): 35D30, 35A15.