

حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر دلخواه با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم یافته

ناظم باوندپوری گیلان^{*}، مهدی مظاهری^{*۱}، مرتضی فتوحی فیروزآبادی^{**}

^{**}گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس

^{**}گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۸/۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۴/۴

چکیده: انتقال آلودگی در رودخانه به وسیله معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی جابه‌جایی-پراکنده‌گی-واکنش^۲ (ADRE) بیان می‌شود. راه‌حل‌های تحلیلی از جمله تبدیل‌های انتگرالی ابزارهای بسیار قدرتمند و مفیدی در حل معادله ADRE هستند. در پژوهش حاضر، معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی در رودخانه با ضرایب وابسته به مکان با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته^۳ (GITT)، در دامنه‌ای با طول محدود حل شده است. در تکنیک GITT تبدیل‌های مستقیم و معکوسی تعریف می‌شود که استفاده از آن‌ها در حل مسئله منجر به تولید دستگاهی از معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان و بنابراین ساده شدن حل معادله حاکم بر پدیده می‌گردد. صحت‌سنجی پاسخ تحلیلی ارائه شده با استفاده از مقایسه نتایج به‌دست آمده از مدل ریاضی با حل‌های تحلیلی موجود در منابع و نیز روش عددی مبتنی بر تفاضل‌های محدود انجام شد. مقایسه نتایج GITT و حل‌های تحلیلی استفاده شده در صحت‌سنجی و حل عددی به همراه شاخص‌های آماری، نشان از دقت بسیار بالای راه‌حل ارائه شده دارد. همچنین برای نشان دادن اهمیت به‌کارگیری ضرایب متغیر در معادله انتقال آلاینده در رودخانه، نتایج حل معادله با ضرایب ثابت و حل معادله با ضرایب متغیر مقایسه شد. محاسبه شاخص‌های آماری در این حالت بیانگر عدم دقت کافی نتایج معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت است.

واژه‌های کلیدی: حل تحلیلی، انتقال آلودگی، تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، ضرایب متغیر.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۴۷F۰۵، ۶۵R۱۰.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m.mazaheri@modares.ac.ir

۲- Advection-Dispersion-Reaction Equation

۳- Generalized Integral Transform Technique

۱- مقدمه

بیش از ۷۰ درصد از سطح زمین پوشیده از آب است. آب بدون شک ارزشمندترین منبع طبیعی در سیاره زمین است. افزایش جمعیت، توسعه شهرنشینی، پیشرفت صنعت، فاضلاب‌های صنعتی و پساب حاصل از عملیات کشاورزی از مهم‌ترین دلایل سرازیر شدن عوامل میکروبی، شیمیایی و رادیواکتیو به آب‌های کره زمین می‌باشند. بیان ریاضی انتقال آلودگی در رودخانه به‌وسیله معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی جابه‌جائی-پراکندگی-واکنش انجام می‌شود. پاسخ برخی معادلات دیفرانسیل را می‌توان به روش‌های تحلیلی به‌دست‌آمده آورد، ولی بعضی دیگر از معادلات را باید به روش‌های عددی حل کرد. پاسخی از یک معادله دیفرانسیل که می‌توان آن را با هر درجه مطلوب از دقت، در هر مکان و زمان دلخواه، بدون تغییر در ساختار پاسخ مسئله تعیین کرد، حل تحلیلی گفته می‌شود [۱]. تقریباً تمامی معادلات دیفرانسیل را می‌توان با استفاده از روش‌های عددی حل کرد و این یک مزیت حل عددی نسبت به حل تحلیلی به‌حساب می‌آید، این برتری حل عددی نسبت به حل تحلیلی گاهی اوقات بسیار هزینه‌بر و وقت‌گیر است و نیز باوجود نتایج عددی به‌دست‌آمده توسط نرم‌افزار، درک ماهیت مسئله مشکل می‌شود. راه‌حل‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل موردتوجه بسیاری از زمینه‌های مهندسی از جمله انتقال جرم، انتقال حرارت و نیز پراکندگی آلاینده‌ها در هوا، خاک و آب است. در روش‌های تحلیلی برخلاف روش‌های عددی، محدودیت‌هایی همچون انتخاب گام زمانی و مکانی مناسب و شرط همگرایی وجود ندارد، علاوه بر آن روش‌های عددی همواره دارای خطا هستند، درحالی‌که روش‌های تحلیلی دقیق بوده و یک معیار ارزشمند در صحت‌سنجی پاسخ عددی معادلات دیفرانسیل می‌باشند [۲].

در زمینه حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده با ضرایب متغیر می‌توان به تحقیقات بیتس [۳]، هوانگ و همکاران [۴]، چن و همکاران [۵]، گوررو و اسکاگز [۶]، لیو و همکاران [۷-۸] و کومار و همکاران [۹-۱۰] اشاره کرد که با استفاده از تبدیل‌های انتگرالی به حل معادله مذکور در محیط متخلخل پرداخته‌اند. شرایط اولیه و مرزی در حل‌های تحلیلی اشاره شده عمدتاً ساده فرض شده‌اند. لازم به ذکر است که در محیط رودخانه به‌دلایل مختلف از قبیل تغییرات در سرعت و پراکندگی آلاینده و همچنین هندسه غیریکنواخت، شرایط بستر و وجود موانع در مسیر، به‌کارگیری ضرایب ثابت در معادله دیفرانسیل حاکم بر پدیده چندان قابل توجیه نیست. بیتس [۳] با استفاده از تبدیل لاپلاس یک حل تحلیلی برای معادله دیفرانسیل ADRE یک‌بعدی با ضرایب متغیر با فرض زوال مرتبه اول در محیط متخلخل ناهمگن نیمه‌متناهی ارائه کرده است که در آن ضریب پراکندگی آلاینده به‌طور خطی با مکان تغییر می‌کند. در تحقیق انجام شده از

تغییر متغیر و تبدیل لاپلاس به منظور حل معادله استفاده و پاسخ مسئله برحسب توابع بسط استخراج شده است. نتایج به دست آمده با حل تحلیلی استهفست [۱۱] صحت سنجی و بر همدیگر منطبق می‌باشند. هوانگ و همکاران [۴] یک راه حل تحلیلی برای معادله یک‌بعدی انتقال املاح در محیط ناهمگن با پراکندگی وابسته به مکان با استفاده از تبدیل لاپلاس به دست آورده‌اند. چن و همکاران [۵] معادله جابه‌جایی-پراکندگی یک‌بعدی با ضرایب متغیر را در محیط متخلخل با طول محدود با استفاده از روش ترکیبی تبدیل لاپلاس و سری توانی فروبنیوس حل کرده‌اند که در آن پراکندگی آلاینده به صورت تابع هموگرافیک با مکان تغییر می‌کند. صحت سنجی راه حل به دست آمده با استفاده از یک مدل عددی بررسی و همچنین نتایج با مدل‌هایی که در آن‌ها پراکندگی ثابت است مقایسه شده است. روش عددی مورد استفاده در صحت سنجی پاسخ به دست آمده ترکیبی از تبدیل لاپلاس و روش عددی تفاضل محدود است که LTFD نامیده شده است. گوررو و اسکاگز [۶] یک جواب تحلیلی برای معادله ADRE یک‌بعدی با ضرایب متغیر با استفاده از تکنیک GITT ارائه داده‌اند. استخراج جواب تحلیلی فوق در سه مرحله انجام شده است: همگن کردن شرایط مرزی با استفاده از روش تابع فیلتر، تبدیل عملگر دیفرانسیلی غیر خودالحاقی معادله به عملگر دیفرانسیلی خودالحاقی با استخراج یک عامل انتگرال ساز با استفاده از ضرایب معادله حاکم و سرانجام حل معادله با اعمال تبدیل‌های مستقیم و معکوس بر آن. در پژوهش اشاره شده پراکندگی به صورت خطی با مکان افزایش پیدا می‌کند. نتایج با حل‌های تحلیلی موجود مقایسه و با آن‌ها مطابقت دارد. لیو و همکاران [۷] پاسخ معادله ADRE یک‌بعدی با ضرایب متغیر را در محیط متخلخل لایه‌ای تحت جریان ماندگار با استفاده از تکنیک GITT به دست آورده‌اند. در پژوهش مذکور فرض شده است غلظت در ورودی تابعی دلخواه از زمان است، غلظت و شار جرم در مرزهای داخلی در امتداد لایه‌ها پیوسته است [۷] و همچنین غلظت اولیه در محدوده لایه‌ها تابع مکان است. در تحقیق اشاره شده، [۷]، ضریب تأخیر، سرعت جریان و ضریب پراکندگی در بازه‌های در نظر گرفته شده ثابت ولی دارای مقادیر متفاوت هستند (توابع پله‌ای). صحت سنجی پاسخ تحلیلی ارائه شده با مقایسه نتایج حاصل و حل‌های تحلیلی فیک و ون‌گناختن، [۱۲]، و ال-نیامی و راشتون، [۱۳]، انجام شده است. کومار و همکاران [۹-۱۰] معادله ADRE یک‌بعدی با ضرایب متغیر (سرعت و ضریب پراکندگی) را در محیط متخلخل نیمه‌متناهی با استفاده از تبدیل لاپلاس در دو حالت (۱) ضریب پراکندگی تابع زمان و سرعت ثابت و (۲) ضریب پراکندگی و سرعت هر دو تابع مکان حل کرده‌اند. در هر دو حالت چندین تغییر متغیر متوالی به منظور تبدیل معادله ADRE با ضرایب متغیر به معادله با ضرایب ثابت و ساده شدن مراحل حل مسئله

استفاده شده است. در حالت اول ضریب پراکندگی الگوهای کسری و نمایی داشته در حالت دوم سرعت تابع خطی و ضریب پراکندگی تابع درجه دوم با متغیر مکان است.

پژوهش حاضر با ارائه راه حل تحلیلی معادله ADRE با ضرایب متغیر در رودخانه، علاوه بر محاسبه مقدار غلظت آلاینده در نقاط مختلف در زمان‌های دلخواه، می‌تواند تأثیر بسزایی در نزدیک کردن نتایج به واقعیت داشته باشد. توانایی حل معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی (PDE) با ضرایب متغیر با هرگونه الگوی دلخواه، توانایی حل مسائل دو و سه بعدی، قابلیت استفاده از شرایط اولیه و مرزی متغیر با الگوهای متنوع و نیز توانایی کنترل خطا با به کارگیری هر تعداد جمله لازم از پاسخ (به شکل سری) مهم‌ترین نوآوری و نقاط قوت تکنیک استفاده شده در این تحقیق است. بر اساس جستجوهای مؤلفین پژوهش حاضر حل تحلیلی ارائه شده تا به حال کامل‌ترین حل تحلیلی معادله ADRE در رودخانه است. در جدول ۱ به چند حل تحلیلی موجود، شرایط اولیه و مرزی و نیز ضرایب معادله اشاره شده است.

جدول (۱): شرایط اولیه و مرزی و ضرایب معادله ADRE در برخی حل‌های تحلیلی موجود

| محقق | ضرایب | شرط مرزی | | شرط اولیه |
|-----------------------|-------|----------|-----------|-----------|
| | | بالادست | پایین دست | |
| فیک و همکاران [۱۴] | ثابت | ثابت | ثابت | ثابت |
| آدریان و همکاران [۱۵] | ثابت | متغیر | ثابت | ثابت |
| کوزادا و همکاران [۱۶] | ثابت | ثابت | ثابت | ثابت |
| وانگ و همکاران [۱۷] | ثابت | ثابت | ثابت | ثابت |
| سیمپسون و الری [۱۸] | ثابت | ثابت | ثابت | متغیر |
| لیو و همکاران [۷] | متغیر | متغیر | ثابت | متغیر |

معادله انتقال جرم یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی است که در علوم مهندسی آب، خاک، نفت، محیط‌زیست و... بسیار کاربرد دارد. معادله مذکور یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی سهموی است که نسبت به زمان و مکان به ترتیب مرتبه اول و دوم است. این معادله در جریان غیرماندگار و غیریکنواخت در حالت یک‌بعدی در راستای محور طول به شکل زیر نوشته می‌شود [۱۹].

$$\frac{\partial (AC)}{\partial t} = -\frac{\partial (QC)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[AD \frac{\partial C}{\partial x} \right] - kAC \pm AS \quad (1)$$

که در آن x فاصله هر نقطه دلخواه از ابتدای رودخانه، t زمان، $C=C(x,t)$ غلظت در هر مکان و زمان، A ، Q و D به ترتیب سطح مقطع، دبی رودخانه و ضریب پراکندگی، k ضریب زوال آلاینده

و S عبارت منبع^۶ است که اگر باعث خروج جرم از محیط شود با علامت منفی و در غیر این صورت با علامت مثبت نشان داده می‌شود. در صورتی که جریان ماندگار و سرعت و پراکندگی توابعی از مکان باشند، معادله فوق با استفاده از مشتق گیری زنجیره‌ای و توجه به رابطه پیوستگی به شکل زیر تغییر خواهد کرد:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = w(x) \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} + D(x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC(x,t) \pm S(x,t) \quad (2)$$

$$w(x) = \frac{D(x)}{A(x)} \frac{dA(x)}{dx} + \frac{dD(x)}{dx} - v(x)$$

که در آن $v(x)$ سرعت جریان در فاصله x از ابتدای رودخانه است. رابطه (۲) معادله دیفرانسیل یک‌بعدی با ضرایب متغیر انتقال آلاینده در رودخانه است که در این پژوهش به صورت تحلیلی با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی عام با استفاده از تکنیک GITT در یک دامنه محدود حل خواهد شد.

۲- مبانی تئوری

تکنیک‌های تبدیل انتگرالی از جمله تبدیل لاپلاس و فوریه یک عملگر ریاضی ایجاد می‌کنند که با استفاده از آن یک تابع جدید از طریق انتگرال گیری از حاصل ضرب یک تابع موجود در هسته تبدیل در حدود مناسب تولید می‌شود. هسته یک تبدیل انتگرالی همراه با حدود موجود در آن، آن تبدیل را از سایر تبدیل‌های انتگرالی متمایز می‌سازد. استفاده از تبدیل‌های انتگرالی در حل معادلات دیفرانسیل از جمله معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی ADRE بسیار کارگشا است. این تکنیک بر استفاده از توابع ویژه استوار بوده و توانایی حل معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه و مرزی ساده و پیچیده را داراست. به منظور حل معادله انتقال آلاینده (رابطه ۲) با استفاده از تکنیک GITT مراحل زیر انجام می‌شود [۲].

- همگن کردن شرط مرزی بالادست
- طرح یک مسئله مقادیر ویژه-توابع ویژه کمکی
- استخراج تبدیل‌های مستقیم و معکوس، خاصیت تعامد توابع ویژه و نرم
- اعمال تبدیل‌های مستقیم و معکوس بر معادله دیفرانسیل به دست آمده از مرحله اول. در اثر اعمال این تبدیل‌ها یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نسبت به زمان ایجاد می‌شود.
- تعیین پاسخ مسئله اصلی با استفاده از تغییر متغیر به کاررفته در مرحله اول

۲-۱- حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه

همان طور که اشاره شد هدف از این پژوهش ارائه راه حل تحلیلی معادله دیفرانسیل یک بعدی با مشتق های جزئی انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم یافته است. معادله مورد بحث و شرایط اولیه و مرزی در نظر گرفته شده به صورت زیر است:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = w(x) \frac{\partial C}{\partial x} + D(x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC(x,t) \pm S(x,t)$$

$$\begin{cases} C(x,0) = F(x) \\ C(0,t) = g(t) \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

همان طور که بیان شد لازم است شرط مرزی بالادست همگن شود. با توجه به اینکه تابع $g(t)$ در شرط مرزی بالادست موجود بوده و شرط مرزی پایین دست وابسته به زمان نیست، بنابراین استفاده از تغییر متغیر زیر باعث همگن شدن شرط مرزی در بالادست می شود:

$$C(x,t) = g(t) + U(x,t) \quad (4)$$

جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۳)، معادله (۵) را بر حسب متغیر جدید مسئله (U) نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = w(x) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + D(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - kU(x,t) - kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \quad (5)$$

$$\begin{cases} U(x,0) = F(x) - g(0) \\ U(0,t) = 0 \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

در استفاده از تکنیک GITT لازم است از یک مسئله توابع ویژه-مقادیر ویژه استفاده نمود. در حالت کلی این مسئله از مساوی صفر قرار دادن سمت راست معادله حاکم بر پدیده تعیین می شود ولی از هر مسئله توابع ویژه-مقادیر ویژه دیگری نیز می توان بهره گرفت. در صورتی که سمت راست معادله حاکم بر پدیده به عنوان مسئله مقادیر ویژه-توابع ویژه استفاده شود، چالش حل تحلیلی این مسئله نیز به حل مسئله اصلی اضافه خواهد شد. در این پژوهش مسئله مقادیر ویژه اشتورم-لیوویل زیر به کار می رود:

$$\frac{d^r \varphi_n(x)}{dx^r} + \beta_n^r \varphi_n(x) = 0, n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$\begin{cases} \varphi_n(0) = 0 \\ \left. \frac{d\varphi_n}{dx} \right|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

که در آن β_n و φ_n به ترتیب مقدار ویژه n -ام و تابع ویژه متناظر آن است. پاسخ مسئله کمکی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = \sin(\beta_n x), n = 1, 2, 3, \dots, \infty \\ \beta_n = \frac{\gamma n - 1}{2L} \pi \end{cases} \quad (7)$$

همچون سایر تبدیل‌های انتگرالی از قبیل تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه، تبدیل GITT نیز دارای تبدیل‌های مستقیم و معکوس است که عبارتند از [۹-۱۰]:

$$\begin{cases} U(x, t) = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{N_n}} \varphi_n(x) T_n(t) dx, n = 1, 2, 3, \dots, \infty, \text{ Forward} \\ T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \varphi_n(x) U(x, t), n = 1, 2, 3, \dots, \infty, \text{ Inverse} \end{cases} \quad (8)$$

که در آن N_n نرم بوده و بنابر تعریف عبارت است از:

$$N_n = \int_0^L \varphi_n^r(x) dx = \frac{L}{\gamma}, n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (9)$$

توابع ویژه از اصل تعامد که به صورت رابطه (۱۰) بیان می شود، پیروی می کنند:

$$\int_0^L \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = N_n \delta_{nm}, n, m = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (10)$$

که در آن δ_{nm} تابع دلتای کرانیکر بوده و عبارت است از:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \quad (11)$$

در تکنیک GITT با اعمال عملگر این تبدیل بر معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و یا جبری نسبت به متغیر زمان به دست می آید. برای

استخراج این دستگاه، از جایگذاری تبدیل‌های مستقیم و معکوس در معادله (۷) به شرح زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \varphi_n(x) T_n(t) &= w(x) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \varphi_n(x) T_n(t) + \\ D(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \varphi_n(x) T_n(t) &- k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{N_n}} \varphi_n(x) T_n(t) \\ -kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \end{aligned} \quad (12)$$

حاصل رابطه فوق مساوی است با:

$$\begin{aligned} \frac{dT_n(t)}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} &= w(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x)}{\sqrt{N_n}} T_n(t) + D(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n''(x)}{\sqrt{N_n}} T_n(t) \\ -k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} T_n(t) &- kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \end{aligned} \quad (13)$$

با ضرب معادله (۱۳) در عضوی دیگر از مجموعه توابع ویژه نرمال همچون $\frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}}$ نتیجه زیر

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{dT_n(t)}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} &= w(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n'(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} T_n(t) + \\ D(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n''(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} T_n(t) &- k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} T_n(t) \\ + \left[-kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \right] \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} \end{aligned} \quad (14)$$

با اعمال عملگر تبدیل معکوس یعنی $\int_0^L (\) dx$ بر طرفین رابطه (۱۴)، این رابطه به شکل

زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \int_0^L \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} dx = & \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \int_0^L w(x) \frac{\varphi_n'(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} dx & \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^\nu T_n(t) \int_0^L D(x) \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} dx & \quad (15) \\ - k \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \int_0^L \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} dx & \\ + \int_0^L \left(-kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \right) \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} dx & \end{aligned}$$

به ازاء مقادیر مختلف m رابطه فوق ساده‌سازی می‌شود. به ازاء $m-1$ سمت چپ تساوی برابر است با:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \int_0^L \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx = T_1'(t) \int_0^L \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx & \quad (16) \\ + T_\nu'(t) \int_0^L \frac{\varphi_\nu(x)}{\sqrt{N_\nu}} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx + T_\tau'(t) \int_0^L \frac{\varphi_\tau(x)}{\sqrt{N_\tau}} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx + \dots & \end{aligned}$$

با توجه به اصل تعامد رابطه (۱۶) مساوی است با $T_1(t)$ ، بنابراین به ازاء $m-1$ رابطه (۱۵) برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} T_1'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left\{ \int_0^L w(x) \frac{\varphi_n'(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx - \beta_n^\nu \int_0^L D(x) \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx \right. & \quad (17) \\ \left. - k \int_0^L \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{N_n}} \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx \right\} + \int_0^L \left[-kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \right] \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{N_1}} dx & \end{aligned}$$

با توجه به اینکه مسئله مقادیر ویژه-توابع ویژه بی‌نهایت جواب دارد و n و m شمارنده آن‌ها بوده و جمع کردن بی‌نهایت جمله از سری غیرعملی است، بنابراین M جمله از سری مذکور در نظر گرفته می‌شود [۹-۱۰]. به ازاء $m=M$ معادله دیفرانسیل معمولی نسبت به زمان عبارت خواهد بود از:

$$T'_M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \left\{ \int_0^L w(x) \frac{\varphi_n'(x) \varphi_M(x)}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_M}} dx - \beta_n \int_0^L D(x) \frac{\varphi_n(x) \varphi_M(x)}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_M}} dx \right. \\ \left. - k \int_0^L \frac{\varphi_n(x) \varphi_M(x)}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_M}} dx \right\} + \int_0^L \left[-kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \right] \frac{\varphi_M(x)}{\sqrt{N_M}} dx \quad (18)$$

بدین ترتیب M معادله دیفرانسیل معمولی نسبت به زمان حاصل را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$A_{nm} T'_n(t) + \sum_{m=1}^M B_{nm} T_n(t) = G_m(t), \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, M$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_{nm} &= \int_0^L \frac{\varphi_n(x) \varphi_m(x)}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_m}} dx; \quad n, m = 1, 2, 3, \dots, M \\ B_{nm} &= \beta_n \int_0^L D(x) \frac{\varphi_n(x) \varphi_m(x)}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_m}} dx - \int_0^L w(x) \frac{\varphi_n'(x) \varphi_m(x)}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_m}} dx \\ &\quad + k \int_0^L \frac{\varphi_n(x) \varphi_m(x)}{\sqrt{N_n} \sqrt{N_m}} dx \\ G_m(t) &= \int_0^L \left[-kg(t) - \frac{dg(t)}{dt} \pm S(x,t) \right] \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} dx; \quad m = 1, 2, 3, \dots, M \end{aligned} \right. \quad (19)$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل را می توان به شکل ماتریسی زیر نیز بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \dots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM-1} & A_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T'_1(t) \\ T'_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ T'_M(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & \dots & B_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{M1} & B_{M2} & \dots & \dots & B_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ G_M(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

مشابه سایر تبدیل های انتگرالی در تبدیل GITT نیز عملگر تبدیل باید بر شرط اولیه مسئله اعمال شود:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} T_1(\circ) \\ T_2(\circ) \\ \vdots \\ \vdots \\ T_M(\circ) \end{bmatrix} = \int_0^L \frac{\varphi_m(x)}{\sqrt{N_m}} [F(x) - g(\circ)] dx \quad (21)$$

پاسخ دستگاه معادلات (۲۰) عبارت است از [۹-۱۰]:

$$\mathbf{T}(t) = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ \vdots \\ T_M(t) \end{bmatrix} = \exp(-A^{-1}Bt)T_0 + \int_0^t \exp[-(t-\tau)A^{-1}B] A^{-1}G(\tau) d\tau \quad (22)$$

با مشخص شدن توابع ویژه و نیز پاسخ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نسبت به زمان، پاسخ معادله ADRE در رودخانه با ضرایب متغیر، رابطه (۳)، با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$C(x,t) = g(t) + \sum_{n=1}^M \sqrt{\frac{\gamma}{L}} \sin\left(\frac{\gamma n - 1}{\gamma L} \pi x\right) T_n(t) \quad (23)$$

۲-۲- صحت‌سنجی مدل ریاضی ارائه شده

به‌منظور صحت‌سنجی راه‌حل ارائه شده معادله ADRE با ضرایب متغیر در رودخانه، رابطه (۳)، نتایج به‌دست آمده با سه حل تحلیلی موجود در منابع و یک حل عددی مقایسه شد. تمامی پژوهش‌های مربوط به حل تحلیلی، در صورت وجود، صحت‌سنجی حل خود را با حل‌های تحلیلی موجود در منابع انجام می‌دهند [۳، ۶، ۷، ۱۵ و ۱۷]، [۶]. ابتدا نتایج حاصل از حل معادله مذکور با استفاده از تکنیک GITT در حالت ضرایب ثابت با حل تحلیلی بومر [۲۰] و حل تحلیلی ون‌گناختن و آلوز [۲۱] و سپس در حالت ضرایب متغیر با حل تحلیلی کومار [۱۰] و نتایج حاصل از حل عددی مقایسه می‌شود. نتایج و بحث

۲-۳- ضرایب ثابت: صحت‌سنجی با حل تحلیلی بومر [۲۰]

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x}; \quad 0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq x < L$$

$$\begin{cases} C(x, 0) = c_i \\ C(0, t) = \begin{cases} c_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

بومر [۲۰]، حل تحلیلی معادله ADRE با ضرایب ثابت به ازاء شرط اولیه ثابت، شرط مرزی نوع اول در بالادست و شرط مرزی Zero Gradient در پایین دست (رابطه ۲۴) را به شکل زیر ارائه داده است:

$$C(x,t) = \begin{cases} \frac{c_0}{\tau} \left[e^{\frac{vx}{\tau E}(1-\Gamma)} A(x,t) + e^{\frac{vx}{\tau E}(1+\Gamma)} B(x,t) \right], & 0 \leq t \leq \tau \\ \frac{c_0}{\tau} \left[e^{\frac{vx}{\tau E}(1-\Gamma)} \{A(x,t) + A(x,t-\tau)\} + e^{\frac{vx}{\tau E}(1+\Gamma)} \{B(x,t) + B(x,t-\tau)\} \right], & t > \tau \end{cases} \quad (25)$$

$$A(x,t) = \frac{x-vt}{\tau\sqrt{Dt}}, \quad B(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{\tau\sqrt{Dt}}\right), \quad \Gamma = \sqrt{1 + \frac{4kD}{v^2}}$$

نتایج GITT و حل تحلیلی مرجع با در نظر گرفتن پارامترهای موجود در جدول ۲ مقایسه گردید. همچنین تأثیر پارامترهای دخیل در مسئله (سرعت، ضریب پراکندگی و ضریب زوال) بر انتقال آلودگی در رودخانه (به ترتیب به ازاء مقادیر جدول های ۳، ۴ و ۵) به طور جداگانه بررسی شد.

جدول (۲): مقادیر پارامترهای موردنیاز در صحت‌سنجی نتایج GITT و حل مرجع

| T(s) | k (1/s) | τ(s) | c ₀ (gr/lit) | L (km) | D(m ² /s) | v(m/s) | پارامتر |
|------|---------|------|-------------------------|--------|----------------------|--------|---------|
| ۹۰۰۰ | ۰ | ۱۸۰۰ | ۲۰ | ۱۰ | ۳۰ | ۰/۸ | مقدار |

جدول (۳): مقادیر پارامترهای موردنیاز در بررسی تأثیر سرعت بر انتقال آلودگی

| T(s) | k (1/s) | τ(s) | c ₀ (gr/lit) | L (km) | D(m ² /s) | t (s) | پارامتر |
|------|---------|------|-------------------------|--------|----------------------|-------|---------|
| ۹۰۰۰ | ۰ | ۱۸۰۰ | ۲۰ | ۱۰ | ۳۰ | ۴۰۰۰ | مقدار |

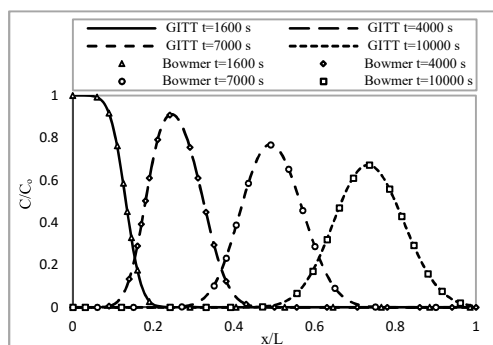
جدول (۴): مقادیر پارامترهای موردنیاز در بررسی تأثیر ضریب پراکندگی بر انتقال آلودگی

| T(s) | v(m/s) | τ(s) | c ₀ (gr/lit) | L (km) | k (1/s) | t (s) | پارامتر |
|------|--------|------|-------------------------|--------|---------|-------|---------|
| ۹۰۰۰ | ۰/۸ | ۱۸۰۰ | ۲۰ | ۱۰ | ۰/۰۰۰۰۸ | ۴۰۰۰ | مقدار |

جدول (۵): مقادیر پارامترهای موردنیاز در بررسی تأثیر زوال بر انتقال آلودگی

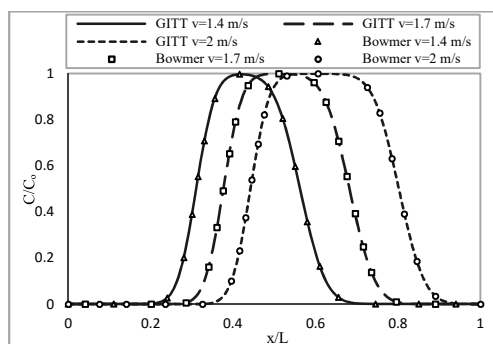
| T(s) | v(m/s) | τ(s) | c ₀ (gr/lit) | L (km) | D(m ² /s) | t (s) | پارامتر |
|------|--------|------|-------------------------|--------|----------------------|-------|---------|
| ۹۰۰۰ | ۰/۸ | ۱۸۰۰ | ۲۰ | ۱۰ | ۳۰ | ۴۰۰۰ | مقدار |

شکل‌های ۱ تا ۴ به ترتیب مقایسه نتایج تکنیک GITT و حل تحلیلی مرجع، بررسی تأثیر سرعت، بررسی تأثیر پراکندگی و بررسی تأثیر زوال آلاینده بر انتقال آلودگی در رودخانه را نشان می‌دهد.

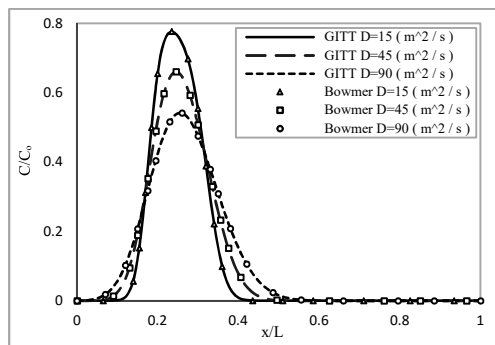


شکل (۱): مقایسه نتایج GITT و حل تحلیلی بومر

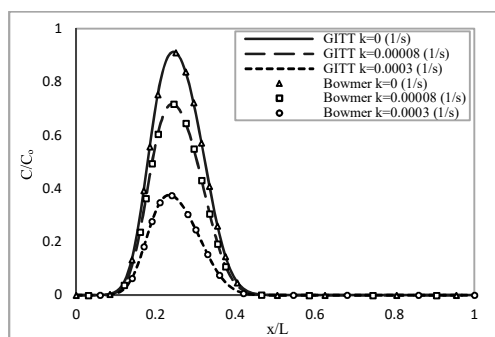
شکل ۱ پروفیل‌های غلظت را در ۱۶۰۰، ۴۰۰۰، ۷۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ ثانیه پس از مبدأ زمان نشان می‌دهد. انطباق کامل نتایج حاصل از روش GITT و حل مرجع نشان‌دهنده صحت پاسخ ارائه شده است. با دقت در شکل می‌توان گفت با افزایش زمان اوج نمودارها دچار کاهش شده است که این نشان‌دهنده تأثیر پراکندگی بر مسئله است. همچنین با افزایش زمان، علاوه بر کاهش اوج نمودارها، دامنه پروفیل‌های غلظت وسیع‌تر می‌شود که نشان‌دهنده تأثیر پدیده جابه‌جایی بر پخش آلودگی در طول رودخانه است.



شکل (۲): بررسی تأثیر سرعت جریان بر انتقال آلودگی



شکل (۳): بررسی تأثیر پراکندگی آلاینده بر انتقال آلودگی



شکل (۴): بررسی تأثیر ضریب زوال آلاینده بر انتقال آلودگی

تأثیر تغییرات سرعت بر انتقال آلودگی در شکل ۲ به خوبی مشخص است. با توجه به شکل می توان گفت با افزایش سرعت، پروفیل های غلظت ضمن انتقال به پایین دست، دامنه بیشتری از طول رودخانه را در برمی گیرند. همچنین باید دقت داشت که تغییر در مقدار سرعت هیچ تأثیری بر نقطه اوج پروفیل ها ندارد، به عبارت دیگر تغییرات سرعت فقط در جابه جایی غلظت به پایین دست نقش دارد. انطباق کامل نمودارهای حاصل از تکنیک GITT و حل مرجع تأییدی بر صحت راه حل ارائه شده است. با توجه به شکل ۳ واضح است که با افزایش ضریب پراکندگی از بیشترین مقدار غلظت کاسته شده و دامنه بیشتری از طول رودخانه تحت تأثیر آلودگی قرار می گیرد. علت این امر این است که با افزایش ضریب پراکندگی، آلودگی با نرخ بیشتری پخش شده و از غلظت آن کم می شود. همچنین با افزایش مقدار پراکندگی نقطه اوج نمودار به سمت پایین دست جابه جا شده است. در این مورد نیز انطباق کامل نتایج تکنیک GITT با حل مرجع نشان دهنده صحت روابط به دست آمده است.

تأثیر ضریب زوال آلاینده بر انتقال آلودگی در رودخانه در شکل ۴ بررسی شده است. همان‌طور که از شکل پیدا است، با افزایش ضریب زوال آلاینده از مقدار اوج پروفیل‌های غلظت کاسته می‌شود. علت کاهش مقدار غلظت با افزایش ضریب زوال آلاینده این است که با افزایش پارامتر مذکور، آلاینده در رودخانه فرصت زوال بیشتری یافته و بدین ترتیب از مقدار آن در طول رودخانه کم خواهد شد. همچنین تغییر ضریب زوال آلاینده تأثیری بر انتقال آلودگی به پایین‌دست رودخانه ندارد.

۲-۴- ضرایب ثابت: صحت‌سنجی با حل تحلیلی ون‌گناختن و آلوز [۲۱]

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x}; \quad 0 \leq t < \infty, \quad 0 \leq x < \infty$$

$$\begin{cases} C(x, 0) = c_1 + c_2 e^{-\alpha x} \\ C(0, t) = \begin{cases} c_0 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases} \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

ون‌گناختن و آلوز، [۲۱]، پاسخ معادله ADRE با ضرایب ثابت با شرایط اولیه و مرزی مشخص، رابطه (۲۶)، را با استفاده از تبدیل لاپلاس به شکل زیر ارائه داده‌اند:

$$C(x, t) = \begin{cases} c_1 + (c_0 - c_1)A(x, t) + c_2 B(x, t) & t_1 \leq t \leq t_2 \\ c_1 + (c_0 - c_1)A(x, t) + c_2 B(x, t) - c_0 B(x, t - t_1) & t > t_2 \end{cases} \quad (27)$$

که در آن:

$$A(x, t) = \frac{1}{\nu} \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \nu t}{\sqrt{2Dt}}\right) + \frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{\nu x}{D}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + \nu t}{\sqrt{2Dt}}\right),$$

$$B(x, t) = \exp(\alpha^2 Dt + \alpha \nu t - \alpha x) - \frac{1}{\nu} \exp(\alpha^2 Dt + \alpha \nu t - \alpha x) \operatorname{erfc}\left(\frac{x - (\nu + \nu \alpha D)t}{\sqrt{2Dt}}\right) \quad (28)$$

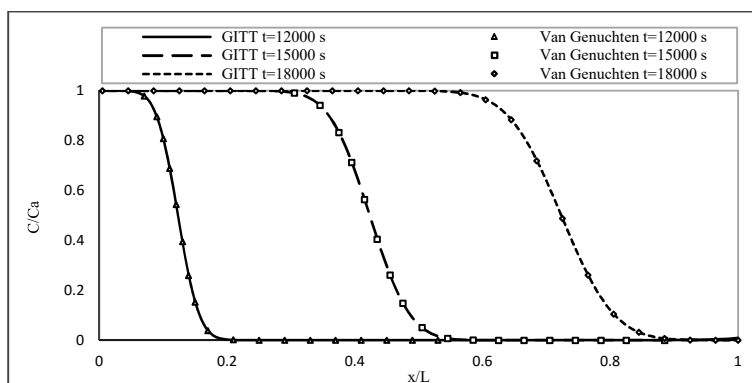
$$- \frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{\nu x}{D} + \nu \alpha x\right) \exp(\alpha^2 Dt + \alpha \nu t - \alpha x) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + (\nu + \nu \alpha D)t}{\sqrt{2Dt}}\right).$$

رودخانه‌ای فرضی به طول ۱۰ km و بدون زوال آلاینده برای صحت‌سنجی مدنظر است. مقادیر سایر پارامترهای لازم در صحت‌سنجی نتایج GITT و حل تحلیلی مرجع [۲۱]، در جدول ۶ ارائه شده است.

جدول (۶): مقادیر پارامترهای موردنیاز در صحت‌سنجی نتایج GITT و حل تحلیلی ون‌گناختن و آلوز

| پارامتر | v (m/s) | D (m ² /s) | c_1 (gr/lit) | c_2 (gr/lit) | t_1 (s) | t_2 (s) | T (s) |
|---------|-----------|-------------------------|----------------|----------------|-----------|-----------|---------|
| مقدار | ۱ | ۳۰ | ۱۰ | ۵ | ۳۶۰۰ | ۷۲۰۰ | ۱۸۰۰۰ |

شکل ۵ پروفیل‌های غلظت به‌دست آمده از روش GITT و حل تحلیلی ون‌گناختن و آلوز را نشان می‌دهد.



شکل (۵): مقایسه پروفیل‌های غلظت به روش GITT و حل تحلیلی مرجع

شکل ۵ مقایسه نتایج حل تحلیلی معادله ADRE با ضرایب ثابت در ۱۲۰۰۰، ۱۵۰۰۰ و ۱۸۰۰۰ ثانیه را پس از مبدأ زمان با استفاده از تبدیل GITT و حل تحلیلی ون‌گناختن و آلوز به‌ازاء مقادیر پارامترهای موجود در جدول ۶ نشان می‌دهد. تطابق کامل نتایج نشان از صحت راه‌حل ارائه شده دارد. با توجه به شکل واضح است که در یک مکان ثابت با افزایش زمان بر مقدار غلظت آلاینده افزوده می‌شود.

۲-۵- ضرایب متغیر: صحت‌سنجی با حل تحلیلی کومار

به‌منظور صحت‌سنجی راه‌حل به‌دست آمده با استفاده از روش GITT نتایج با حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده با ضرایب متغیر (سرعت و ضریب پراکندگی) مقایسه می‌شود. معادله مذکور و شرایط اولیه و مرزی به‌صورت زیر در نظر است [۱۰]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = u(x) \frac{\partial C}{\partial x} + D(x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty$$

$$\begin{cases} C(x, 0) = 0 \\ C(0, t) = C_0 \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=\infty} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

که در آن توابع سرعت و ضریب پراکندگی با روابط زیر بیان شده‌اند:

$$\begin{cases} u(x) = u_0(1+ax) & a > 0 \\ D(x) = D_0(1+ax)^2 \end{cases} \quad (30)$$

که در آن u_0 و D_0 به ترتیب سرعت و پراکندگی در ابتدای رودخانه ($x=0$) و a پارامتر ناهمگنی^{۱۸} است. با استفاده از تغییرمتغیر $1+ax = e^z$ ، معادله (۲۹) به معادله ADRE با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود که حل آن بسیار ساده‌تر است. پاسخ مسئله با استفاده از تبدیل لاپلاس به شکل زیر است [۱۰]:

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[\operatorname{erfc} \left\{ \frac{\ln(1+ax) - \bar{u}}{\sqrt{2\bar{D}t}} \right\} + \exp \left(\frac{\bar{u} \ln(1+ax)}{\bar{D}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\ln(1+ax) + \bar{u}}{\sqrt{2\bar{D}t}} \right\} \right] \quad (31)$$

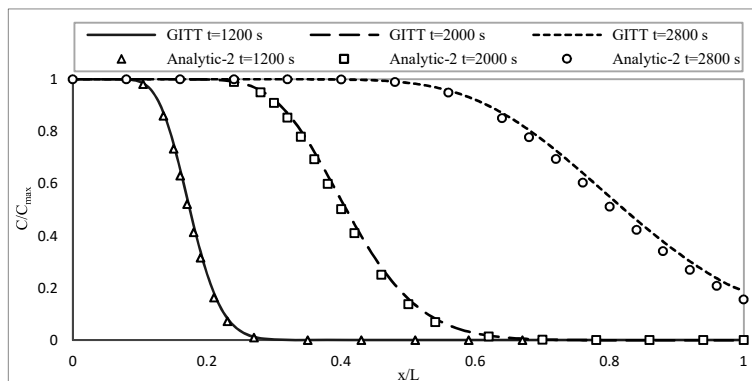
$$\begin{cases} \bar{D} = a^2 D_0 \\ \bar{u} = a u_0 - a^2 D_0 \end{cases}$$

حل تحلیلی کومار در دامنه نیمه بی‌نهایت ارائه شده و الگوی در نظر گرفته شده برای ضرایب متغیر (سرعت و پراکندگی) عام نیست. نتایج به‌ازاء مقادیر موجود در جدول ۷ مقایسه شده است.

جدول (۷): پارامترهای موردنیاز در مقایسه نتایج GITT و حل تحلیلی کومار

| پارامتر | $L(\text{km})$ | $a(l/m)$ | $u_0(m/s)$ | $D_0(m^2/s)$ | $c_0(\text{gr/lit})$ |
|---------|----------------|----------|------------|--------------|----------------------|
| مقدار | ۱۰ | ۰/۰۰۱۲ | ۰/۷ | ۵ | ۲۰ |

شکل ۶ مقایسه نتایج دو حل تحلیلی GITT و کومار (Analytic-2) را نشان می‌دهد.



شکل (۶): مقایسه پروفیل‌های غلظت به روش GITT و حل تحلیلی کومار

شکل ۶ نمودار تغییرات مقدار غلظت آلاینده در زمان‌های ۱۲۰۰، ۲۰۰۰ و ۲۸۰۰ ثانیه در کل طول رودخانه را نشان می‌دهد. انطباق نتایج حاصل از دو روش، تأییدی بر صحت راه‌حل ارائه شده با استفاده از تکنیک GITT است. با دقت در شکل دیده می‌شود که در یک مکان ثابت، با افزایش زمان، مقدار غلظت دچار افزایش شده است. همچنین با افزایش فاصله از بالادست رودخانه مقداری اختلاف بین نتایج GITT و حل تحلیلی کومار ایجاد می‌شود، دلیل اختلاف فوق این است که حل تحلیلی GITT مربوط به یک دامنه با طول محدود است، درحالی‌که حل تحلیلی کومار در دامنه نیمه‌محدود استخراج شده است. نتایج تکنیک GITT در این مورد قابل اطمینان است، چون حل تحلیلی کومار در دامنه نیمه‌متناهی بوده و این دامنه در واقعیت وجود ندارد. به‌منظور بررسی دقت نتایج روش GITT در پروفیل‌های رسم شده در شکل ۶، از محاسبه شاخص‌های آماری مجذور ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربعات خطا (RMSE)، شاخص میانگین خطای مطلق (MAE) و شاخص میانگین خطای نسبی (MRE) استفاده می‌شود. در جدول ۸ مقادیر شاخص‌های مذکور ارائه شده است.

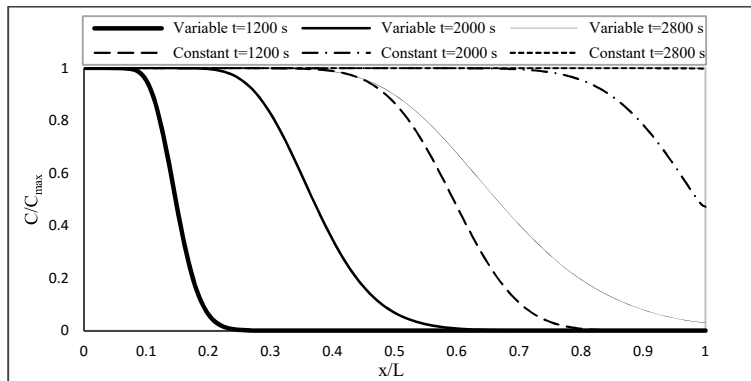
جدول (۸): شاخص‌های آماری در مقایسه نتایج GITT و حل تحلیلی کومار

| زمان (ثانیه) | R^2 (%) | RMSE | MAE | MRE (%) |
|--------------|-----------|--------|--------|---------|
| ۱۲۰۰ | ۹۹ | ۰/۰۰۶۴ | ۰/۰۰۲۳ | ۱/۳۵ |
| ۲۰۰۰ | ۹۹ | ۰/۰۱ | ۰/۰۰۶۹ | ۲/۰۲ |
| ۲۸۰۰ | ۹۹ | ۰/۰۲ | ۰/۰۱ | ۲/۸۹ |

با توجه به اینکه شاخص آماری R^2 هم‌روندی نتایج به دست آمده از حل تحلیلی GITT و حل مرجع را نشان می‌دهد، مقدار بالای این ضریب در سه پروفیل ارائه شده حاکی از هم‌روندی بودن خروجی‌های GITT و حل تحلیلی مرجع است. نظر به اینکه بیشترین مقدار غلظت در پروفیل‌های ترسیم شده برابر واحد است، مقادیر ناچیز شاخص‌های MAE و RMSE نشان از دقت مطلوب راه‌حل تحلیلی ارائه شده دارد. همچنین مقدار کم شاخص MRE در پروفیل‌ها نیز تأییدی دیگر بر دقت بالای نتایج است.

۲-۵-۱- اهمیت به‌کارگیری ضرایب متغیر در ADRE

به منظور بررسی اهمیت کاربرد ضرایب متغیر در حل ADRE نتایج به دست آمده از حل آن با ضرایب متغیر و ضرایب ثابت، به‌ازاء پارامترهای موجود در جدول ۷ در شکل ۷ رسم شده است. ضرایب معادله (سرعت و پراکندگی) در حالت ثابت، میانگین این ضرایب در حالت متغیر در نظر گرفته شد.



شکل (۷): مقایسه نتایج حل تحلیلی ADRE در رودخانه با ضرایب ثابت و متغیر

در شکل ۷ تأثیر ضرایب متغیر در حل ADRE در رودخانه به وضوح دیده می‌شود. منحنی‌های ممتد و خط‌چین به ترتیب نشان‌دهنده پروفیل‌های غلظت در حالت ضرایب متغیر و ضرایب ثابت است. با توجه به شکل ثابت در نظر گرفتن ضرایب چندان قابل‌اعتماد نیست، چرا که اختلاف زیادی بین نتایج ضرایب ثابت و ضرایب متغیر وجود دارد. جدول ۹ شاخص‌های آماری مربوط به نتایج را نشان می‌دهد. پایین بودن ضریب همبستگی و قابل‌توجه بودن مقدار شاخص‌های MAE و RMSE نشان‌دهنده دقت کم و عدم توانایی کافی معادله ADRE با ضرایب ثابت در محاسبه نتایج و اهمیت کاربرد ضرایب متغیر در معادله مذکور است. بنابراین مدلی نیاز است که

توانایی حل مسئله ADRE با ضرایب متغیر با الگوهای دلخواه را دارا باشد. مدل ریاضی ارائه شده در این تحقیق این نیاز را مرتفع می‌کند.

جدول (۹): شاخص‌های آماری در مقایسه نتایج حل ADRE با ضرایب ثابت و متغیر

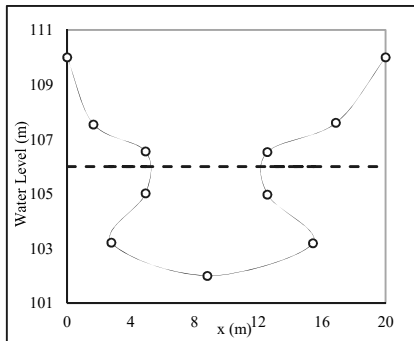
| زمان (ثانیه) | R ² (%) | RMSE | MAE |
|--------------|--------------------|------|------|
| ۱۲۰۰ | ۱۷ | ۰/۶۱ | ۰/۴۴ |
| ۲۰۰۰ | ۱۳ | ۰/۷۰ | ۰/۵۷ |
| ۲۸۰۰ | ۲۴ | ۰/۴۹ | ۰/۳۲ |

۲-۶- کاربرد حل تحلیلی ارائه شده در تغییرات پیچیده ضرایب معادله ADRE

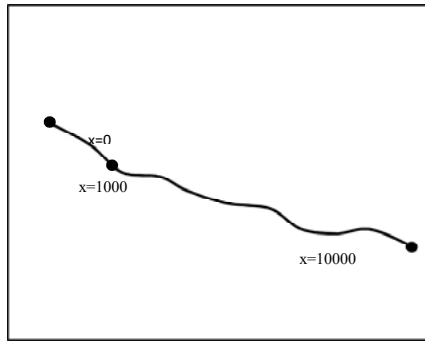
به دلیل هندسه پیچیده حاکم بر رودخانه، پارامترهای سرعت و ضریب پراکندگی به شدت متغیر بوده و توابع ساده توانایی بیان دقیق این تغییرات را ندارند. به علاوه حل تحلیلی معادله ADRE در رودخانه در این حالت وجود ندارد. بنابراین نتایج GITT با نتایج حاصل از حل عددی معادله مربوطه، رابطه ۳، به روش عددی تفاضل‌های محدود با الگوی ضمنی در زمان و پس‌رو در مکان مقایسه می‌شود. بدین منظور یک رودخانه فرضی به طول ۱۰ کیلومتر، جریان ماندگار ۵۰ مترمکعب در ثانیه، عرض کف ۲۰ متر، شیب کف ۰/۰۰۰۱ و ضریب زبری مانینگ ۰/۰۳ فرض شد. مقاطع به گونه‌ای طراحی شد که سرعت و نیز سطح مقطع در طول رودخانه دارای تغییرات کافی باشد، طوری که بتوان معادله ADRE با ضرایب متغیر را به کار برد. همچنین ضریب پراکندگی معرفی شده به مدل دارای تغییرات مناسب در طول رودخانه است. با استخراج سطح مقطع و محاسبه سرعت جریان (با استفاده از رابطه پیوستگی) پارامترهای معادله ADRE با ضرایب متغیر، تولید و معادله مورد بحث حل شد. در جدول ۱۰ مدت زمان شبیه‌سازی و بیشترین مقدار پارامترهای ضریب پراکندگی، سطح مقطع، سرعت و شرط مرزی بالادست ارائه شده است. شکل‌های ۸ تا ۱۱ پروفیل طولی رودخانه، سطح مقطع جریان در مبدأ، ۱۰۰۰ متری از مبدأ و انتهای بازه شبیه‌سازی، شکل‌های ۱۲ تا ۱۵ ضریب پراکندگی، مقدار سطح مقطع جریان، سرعت و شرط مرزی بالادست و شکل‌های ۱۶ تا ۱۹ مقایسه نتایج حل تحلیلی GITT و حل عددی در زمان‌های مختلف را نشان می‌دهد. نتایج روش عددی با فرض گام مکانی ۵۰ متر و گام زمانی ۲۰ ثانیه به دست آمده است.

جدول (۱۰): پارامترهای مورد نیاز در مقایسه نتایج GITT و حل عددی

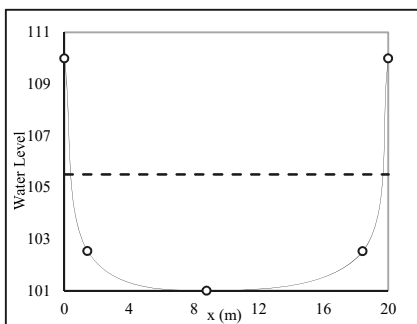
| پارامتر | D _{max} (m ^۲ /s) | v _{max} (m/s) | A _{max} (m ^۲) | C _{in-max} (ppm) | T(s) |
|---------|--------------------------------------|------------------------|------------------------------------|---------------------------|-------|
| مقدار | ۵۰ | ۲/۳۷ | ۱۱۱/۱ | ۴۰ | ۲۱۶۰۰ |



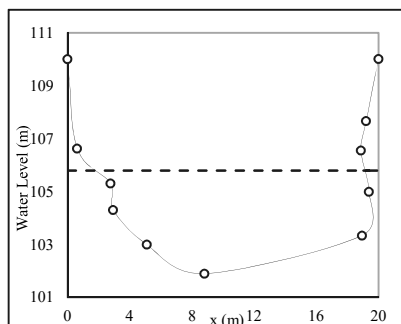
شکل (۹): مقطع عرضی رودخانه در مبدأ $x = 0$



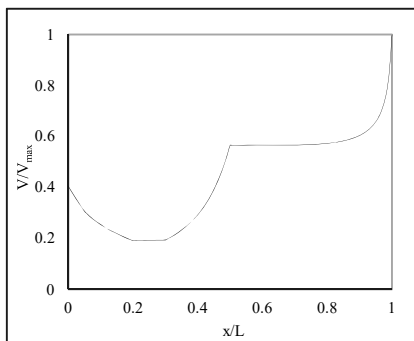
شکل (۸): مقطع طولی رودخانه



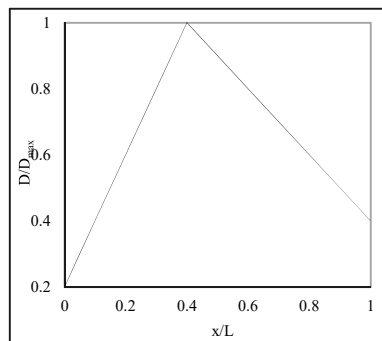
شکل (۱۱): مقطع عرضی رودخانه در انتهای بازه شبیه‌سازی ($X=10000$ m)



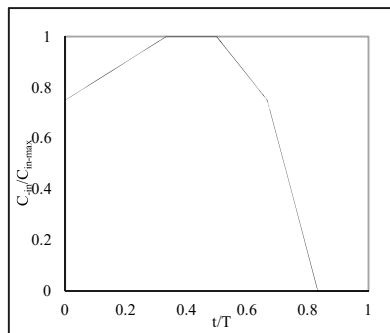
شکل (۱۰): مقطع عرضی رودخانه در m $X=1000$



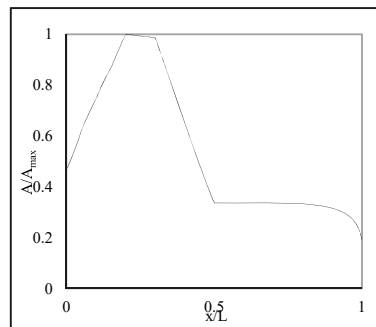
شکل (۱۳): تغییرات سرعت جریان در مقایسه نتایج Gitt و حل عددی



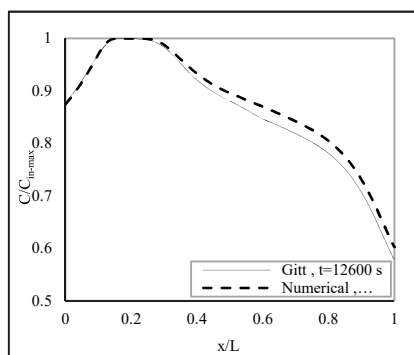
شکل (۱۲): تغییرات ضریب پراکندگی در مقایسه نتایج Gitt و حل عددی



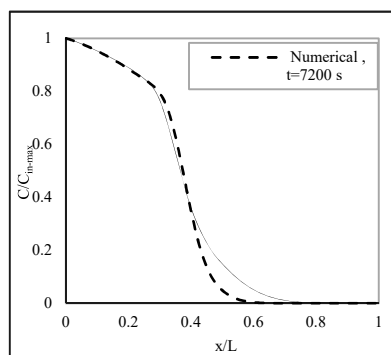
شکل (۱۵): شرط مرزی بالادست در مقایسه نتایج Gitt و حل عددی



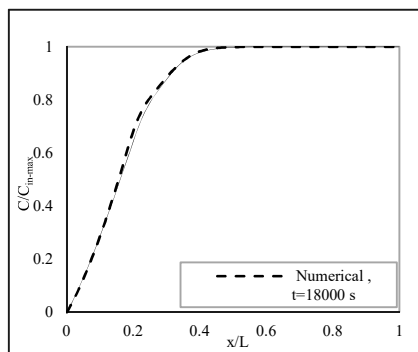
شکل (۱۴): تغییرات سطح مقطع در مقایسه نتایج Gitt و حل عددی



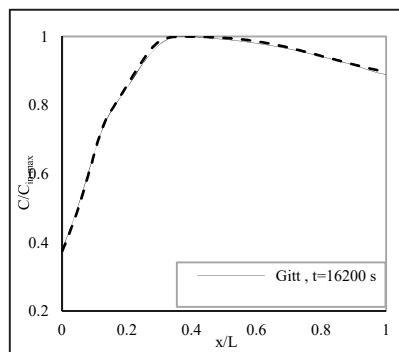
شکل (۱۷): مقایسه پروفیل غلظت Gitt و حل عددی در زمان ۱۲۶۰۰ S



شکل (۱۶): مقایسه پروفیل غلظت Gitt و حل عددی در زمان ۷۲۰۰ S



شکل (۱۹): مقایسه پروفیل غلظت Gitt و حل عددی در زمان ۱۸۰۰۰ S



شکل (۱۸): مقایسه پروفیل غلظت Gitt و حل عددی در زمان ۱۶۲۰۰ S

نتایج ارائه شده در این حالت کامل ترین مورد برای صحت‌سنجی حل تحلیلی ارائه شده با استفاده از تکنیک GITT است. همان‌گونه که در شکل‌های ۱۶ تا ۱۹ دیده می‌شود، نتایج تکنیک GITT در این مورد نیز قابل اطمینان است. مقداری اختلاف بین نتایج حل تحلیلی GITT و حل عددی وجود دارد که ناشی از گسسته‌سازی و بروز پراکندگی عددی در حل عددی است. دقت نتایج استخراج شده به کمک محاسبه شاخص‌های آماری ارائه شده در جدول ۱۰ بررسی شده است.

مقدار بالای شاخص هم‌روندی داده‌ها، نشان‌دهنده تغییرات هم‌جهت غلظت محاسبه شده به روش GITT و حل عددی است. همچنین پایین بودن مقدار شاخص‌های خطا بیان‌کننده دقت مناسب نتایج است. با توجه به حداکثر مقدار مربوط به محور غلظت در نمودارهای فوق (محور عمودی)، مقادیر ناچیز شاخص‌های خطا نشان‌دهنده دقت مطلوب محاسبات در تکنیک GITT است. توانایی بسیار بالای تکنیک GITT در ارائه راه‌حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر، این تکنیک را از سایر روش‌های حل معادلات دیفرانسیل متمایز می‌سازد.

جدول (۱۰): شاخص‌های آماری در مقایسه نتایج حل GITT و حل عددی

| زمان (ثانیه) | R^2 (%) | RMSE | MAE | MRE (%) |
|--------------|-----------|--------|--------|---------|
| ۷۲۰۰ | ۹۹ | ۰/۰۳۷ | ۰/۰۱۹ | ۲/۵۵ |
| ۱۲۶۰۰ | ۹۹ | ۰/۰۲۲ | ۰/۰۰۹ | ۱/۹۶ |
| ۱۶۲۰۰ | ۹۹ | ۰/۰۰۵۵ | ۰/۰۰۴۷ | ۰/۵۵ |
| ۱۸۰۰۰ | ۹۹ | ۰/۰۱ | ۰/۰۰۵۱ | ۰/۶۲ |

مقدار بالای شاخص هم‌روندی داده‌ها، نشان‌دهنده تغییرات هم‌جهت غلظت محاسبه شده به روش GITT و حل عددی است. همچنین پایین بودن مقدار شاخص‌های خطا بیان‌کننده دقت مناسب نتایج است. با توجه به حداکثر مقدار مربوط به محور غلظت در نمودارهای فوق (محور عمودی)، مقادیر ناچیز شاخص‌های خطا نشان‌دهنده دقت مطلوب محاسبات در تکنیک GITT است. توانایی بسیار بالای تکنیک GITT در ارائه راه‌حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در رودخانه با ضرایب متغیر، این تکنیک را از سایر روش‌های حل معادلات دیفرانسیل متمایز می‌سازد.

۳- نتیجه‌گیری

محاسبه مقدار غلظت آلاینده در رودخانه بسیار حائز اهمیت است، نیل به این مهم با حل معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی ADRE میسر خواهد شد. بدین‌منظور می‌توان از روش‌های تحلیلی و عددی موجود استفاده کرد. تکنیک GITT یکی از قوی‌ترین روش‌های تحلیلی موجود در حل معادلات دیفرانسیل است. در تحقیق حاضر معادله دیفرانسیل ADRE با ضرایب متغیر

(سرعت، سطح مقطع و ضریب پراکندگی) با شرایط اولیه و مرزی عام با استفاده از تکنیک GITT حل و نتایج ارائه گردید. مهم‌ترین نوآوری موجود در این تحقیق، به‌کارگیری ضرایب متغیر در معادله دیفرانسیل حاکم بر پدیده است که باعث افزایش پیچیدگی حل مسئله می‌گردد. همان‌طور که اشاره شد استفاده از ضرایب متغیر در معادله ADRE (به‌دلیل شرایط رودخانه و جریان) می‌تواند در نزدیک کردن نتایج به واقعیت بسیار مؤثر باشد. امکان به‌کارگیری توابع با الگوهای مختلف برای ضرایب موجود در معادله ADRE، قابلیت استفاده در حل مسائل دو و سه‌بعدی، تبدیل معادله دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی، امکان تعریف هر مسئله مقادیر ویژه-توابع ویژه، توانایی بسیار بالا در برخورد با مسائل با شرایط اولیه و مرزی با الگوهای متغیر، دقت مطلوب با توجه به مقادیر مربوط به شاخص‌های آماری و نیز امکان بررسی مسئله انتقال آلاینده با وجود هر تعداد عبارت منبع فعال در رودخانه نقاط قوت تکنیک GITT است. در کنار مزیت‌های اشاره شده، لزوم همگن کردن شرط مرزی بالادست در صورت متغیر بودن و پیچیدگی مراحل استخراج راه‌حل از نقاط ضعف این روش است. استفاده از تکنیک GITT در حل مسائل مربوط به انتقال آلودگی در رودخانه به‌دلیل دقت بسیار بالا در محاسبه مقدار غلظت در هر مکان و زمان دلخواه، ابزار دقیق در صحت‌سنجی حل‌های عددی، عدم وجود مشکلاتی مانند ایجاد پراکندگی عددی و لزوم برقراری شرط پایداری که در روش‌های عددی گریبان‌گیر مسئله است و نیز توانایی حل مسائل با شرایط اولیه و مرزی عام با الگوهای دلخواه، بسیار مفید و راهگشا است.

منابع

- [1] Craig, R.C. and Read, W.W. (2010). The Future of Analytical Solution Methods for Grounwater Flow and Transport Simulation, XVIII International Conference on Water Resources.
- [2] Guerrero, J.S.P. Pimentel, L.C.G. Skaggs, T.H. and Van Genuchten M.Th. (2009). Analytical solution of the advection-diffusion transport equation using a change of variable and integral transform technique, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **52**, 3297-3304.
- [3] Yates, S.R. (1990). An analytical solution for one-dimensional transport in heterogeneous porous media, *Water Resources*. **26**, 2331-2338.
- [4] Huang, K. Van Genuchten, M. Th., and Zhang, R. (1996). Exact solutions for one-dimensional transport with asymptotic scale-dependent dispersion, *Applied Mathematical Modeling*, **21**, 337-287.

- [5] Chen, J.S. Ni, C.F. Liang, C.P. and Chiang, C.C. (2008). Analytical power series solution for contaminant transport with hyperbolic asymptotic distance dependent dispersivity, *Journal of Hydrology*, **962**, 143-143.
- [6] Guerrero, J.S.P. and Skaggs, T.H. (2010). Analytical solution for one-dimensional advection dispersion transport equation with distance-dependent coefficients, *Journal of Hydrology*, **390**, 57-65.
- [7] Liu, C. Ball, W.P. and Ellis, J.H. (1998). An analytical solution to one dimensional solute advection–dispersion equation in multi-layer porous media, *Transport in Porous Media*, **30**, 25-43.
- [8] Liu, C. Szecsody, J.E. Zachara, J.M. and Ball, W.P. (2000). Use of the generalized integral transform method for solving equations of solute transport in porous media, *Water Resources*. **23**, 483-492.
- [9] Jaiswal, D.K. Kumar, A. Kumar, N. and Yadav, R.R. (2009). Analytical solutions for temporally and spatially dependent solute dispersion of pulse type input concentration in one-dimensional semi-infinite media, *Journal of Hydro-environment Research*, **2**, 254-263.
- [10] Kumar, A. Jaiswal, D.K. and Kumar, N. (2010). Analytical solutions to one-dimensional advection–diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media, *Journal of Hydrology*, **380**, 330-337.
- [11] Stehfest, H. (1970). Numerical inversion of Laplace transforms, *Commun. ACM*, **13**, 47-49.
- [12] Leij, F.J. and Van Genuchten, M.Th. (1995). Approximate analytical solutions for solute transport in two-layer porous media, *Transport in Porous Media*, **18**, 65–85.
- [13] Al-Niami, A.N.S. and Rushton, K.R. (1979). Dispersion in stratified porous media, *Water Resources*, **15**, 1044–1048.
- [14] Leij, F.J. Dane, J.H. and Van Genuchten, M.Th. (1991). Mathematical analysis of one dimensional solute transport in a layered soil profile, *Soil Sci. Soc. Am. J*, **55**, 944–953.
- [15] Adrian, D.D., Yu, F.X. and Barbe, D. (1994). Water quality modelling for a sinusoidally varying waste discharge concentration, *Water Res*, **28**, 1167–1174.
- [16] Quezada, C.R. Clement, T.P. and Lee K.K. (2004). Generalized solution to multi-dimensional multi-species transport equations coupled with a

- first-order reaction network involving distinct retardation factors, *Advances in Water Resources*, **27**, 507-520.
- [17] Wang, W. Dai, Z. Li, J. and Zhou, L. (2012). A hybrid Laplace transform finite analytic method for solving transport problems with large Peclet and Courant numbers, *Computers and Geosciences*, **49**, 182-189.
- [18] Simpson, M.J. and Ellery, A.J. (2014). Exact series solutions of reactive transport models with general initial Conditions, *Journal of Hydrology*, **513**, 7-12.
- [19] Taylor, G. (1954). The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe, *P. Roy. Soc. A*, **223**, 446-468, doi:10.1098/rspa.1954.0130, 1954.
- [20] Chapra, S.C. (1997). *Surface water quality modeling*, McGraw-Hill New York.
- [21] Van Genuchten M.Th. and Alves, W. (1982). Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation, *Technical Bulletin*.
- [22] Mikhailov, M.D. and Ozisik, M.N. (1984). *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, New York, John Wiley & Sons Inc.
- [23] Cotta, R.M. (1994). The integral transform method in computational heat and fluid flow, Pages 43-43. *Institution of Chemical Engineers Symposium series*, Hemisphere Publishing Corporation.
- [24] Danish Hydraulic Institute (DHI). (2007). *MIKE 11 FM-Users' manual*, Horsholm, Denmark.
- [25] Ozisik, M.N. (1993). *Heat Conduction*, John Wiley & Sons Inc, New York.
- [26] Polyanin, A.D. (2002). *Linear partial differential equations for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC.

Analytical Solution of Contaminant Transport Equation in River by Arbitrary Variable Coefficients Using Generalized Integral Transform Technique

Nazem Bavandpouri Gilan*, Mehdi Mazaheri*, Morteza Fotouhi Firozabadi**

*Department of Water Structures, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

**Faculty of Mathematics, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

Contamination transport in the river is expressed using advection-dispersion-reaction partial differential equation (ADRE). There are a variety of analytical and numerical methods for solving the aforementioned equation. Analytical solutions such integral transforms are very powerful and useful tools in solving ADRE. In the present study, one-dimensional ADRE with space-dependent coefficients in river has been solved using generalized integral transform technique (GITT). Forward and inverse transformations are defined in GITT technique which using them in problem solving leads to generating time-dependent system of ordinary differential equations. Analytical solution verification was accomplished using the comparison of the results of mathematical models with analytical solutions and also numerically model based on finite differences method. To inspect the accuracy of models' results, statistical indicators were calculated. Comparison of GITTs' result with analytical solutions that used in verification and numerical solution implied high accuracy of the proposed solution. Also to show the importance of the application of variable coefficients in ADRE in river, the results of solving equation with constant and variable coefficients were compared.

Keywords: Analytical solution, Contaminant transport, River, Generalized integral transform technique, Variable coefficient.

Mathematics Subject Classification (2010): 65R10, 47F05