مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۷، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۶

یک الگوریتم سه مرحله‌ای با دقت فوق‌بهینه برای حل معادلات برگرز-هاکسلی و برگرز-فیشر در حالت کلی

محمد قاسمی[۱]

گروه ریاضی، دانشگاه کردستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۴/۲۷

چکیده: در این مقاله یک روش جدید سه مرحله‌ای برای حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی موسوم به برگرز-هاکسلی و برگرز-فیشر در حالت کلی ایجاد خواهد شد. همان‌گونه که می‌دانیم حداکثر دقت روش اسپلاین مکعبی برای درونیابی برابر $O(h^4)$ است، اما این دقت هنگام حل معادلات دیفرانسیل به روش کلاسیک افت می‌کند. در اینجا با تعریف شرایط انتهایی مناسب برای اسپلاین مکعبی و با ساختن یک الگوریتم سه مرحله‌ای تصحیح- تصحیح، تقریب‌هایی با مرتب دقت $O(h^6)$ برای جواب مسائل از نوع برگرز-هاکسلیوبرگرز-فیشر ایجاد خواهیم نمود. همگرایی و کران خطای روش را با استفاده از مفهوم تابع گرین به تفصیل مورد بررسی قرار خواهیم داد. همچنین برای تایید کران‌های خطای به دست آمده، چند مثال عددی نیز ارائه خواهیم نمود. در نهایت سعی می‌کنیم با مقایسه نتایج عددی به‌دست آمده با نتایج ارائه شده در مراجع دیگر برتری و کارایی روش را به صورت عملی نمایش دهیم.

واژه‌های کلیدی: اسپلاین، تقریب‌های فوق‌بهینه، معادله برگرز-هاکسلی، معادله برگرز-فیشر، تابع گرین.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۵M۱۵، ۶۵M۰۶.

۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی در بسیاری از زمینه‌ها در علوم و مهندسی کاربرد دارند. مطالعه و بررسی رفتار جواب و همچنین یافتن تقریبی از جواب برای این مسائل از اهمیت

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m.ghasemi@uok.ac.ir

بالایی برخوردار است. روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی متنوعی برای حل معادلات غیرخطی در حالت‌های خاص ارائه شده‌اند. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش تعادل همگن [۱]، روش بسط تانژانت هایپربولیک [۲-۳]، روش تجزیه‌ی آدومیان[۴-۵] و روش سینوس-کسینوس [۶] اشاره نمود. از آنجا که حل تحلیلی این معادلات ممکن است گاهی اوقات ناممکن باشد، لذا نیاز داریم تکنیک‌های عددی را برای تقریب ساده‌تر و سریع‌تر جواب گسترش دهیم. هنگام تقریب جواب معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی باید در نظر داشت که روش عددی که به‌کار می‌گیریم باید ویژگیهای دستگاه را حفظ کند، به این معنی که روش باید حافظ انرژی کل سیستم در طول زمان باشد. بنابراین ما نیازمند ایجاد روشهایی هستیم که نه تنها جواب مسأله را تقریب بزند بلکه حافظ انرژی محلی و انرژی کل دستگاه باشد و میانگین کل انرژی دستگاه در طول زمان ثابت بماند. از جمله روش‌های عددی که برای حل مسائل غیرخطی به‌کار رفته‌اند می‌توان به روش تفاضل متناهی[۷]، روش عنصر متناهی [۸-۹]، روش‌های اسپلاین [۱۰-۱۲] و بسیاری روش‌های دیگر اشاره نمود.

معادلات برگرز-هاکسلی و برگرز-فیشر دسته‌ای از معادلات سهموی غیرخطی وابسته به زمان می‌باشند که کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی دارند. فرض کنید α یک عدد حقیقی نامنفی، β، κ و $\delta \geq ۱$ اعداد مثبت و $\gamma \in (۰,۱)$ یک عدد حقیقی باشد. مسأله‌ی فرارفت-انتشار با جمله‌ی واکنشی غیرخطی به شکل

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^{۲} u}{\partial x^{۲}} = \beta F(u), \qquad x \in \Gamma \equiv [a,b], \quad t \geq t_{۰}, \tag{۱}$$

$$u(x,t_{۰}) = f(t_{۰}), \qquad x \in \Gamma, \tag{۲}$$

$$Bu(x,t) = g(t), \qquad x \in \partial\Gamma, \quad t \geq t_{۰}, \tag{۳}$$

را در نظر بگیرید که در آن B یک عملگر دیفرانسیلی به‌صورت $Bu = \tau_{۱} u(x,t) + \tau_{۲} u_x(x,t)$ و $\tau_{۱}$ و $\tau_{۲}$ اعداد ثابت یا توابعی از متغیرهای مستقل هستند. اگر فرض شود $F(u) = u(۱ - u^{\delta})$، آنگاه مسأله‌ی فوق مسأله‌ی برگرز-فیشر تعمیم‌یافته خواهد بود. همچنین در حالت $F(u) = u(۱ - u^{\delta})(u^{\delta} - \gamma)$ این مسأله را مسأله‌ی برگرز-هاکسلی تعمیم یافته می‌نامند. یک حالت خاص مهم از این معادله زمانی است که داشته باشیم: $F(u) = u^{۳} - (۱+\gamma)u^{۲} + \gamma u$. در این حالت که آن را به اصطلاح مسأله‌ی ویسکوز برگرز-هاکسلی می‌گویند، κ باید عدد مثبت کوچکی باشد. قابل ذکر است که در این مسائل، κ ضریب نفوذ، α ضریب فرا رفت، β ضریب واکنشی و $F(u)$ جمله‌ای است که نمایانگر واکنش غیرخطی دستگاه می‌باشد. به ازای $\alpha = ۰$ و $\delta = ۱$ معادله (۱) به معادله هاکسلی معروف است

و بیانگر نحوه انتشار یک پالس عصبی در رشته‌های عصبی می‌باشد. همچنین برای $\alpha = ۰$ و $\beta = ۰$ نگامی که κ به صفر نزدیک شود، معادله (۱) تبدیل به معادله برگرز می‌شود که در آن κ ویسکوزیته و $\mathrm{Re} = \kappa^{-۱}$ عدد رینولد می‌باشد.

یافتن جواب تحلیلی به شکل موج برای مسأله‌ی (۱)-(۳) توسط محققان بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است. نخستین جواب موج سولیتاری برای این مسأله توسط وانگ و همکارانش بدست آمد [۱۳]. در [۱۴]، روش تقارن غیرکلاسیک و روش تکینی تصحیح شده برای به‌دست آوردن جواب تحلیلی به‌کار رفته است. در [۵]، روشی مبتنی بر استفاده از تجزیه آدومیان برای بدست آوردن یک جواب تحلیلی به شکل سری برای مسأله‌ی (۱)-(۳) مورد استفاده قرار گرفته است.

در این مقاله هدف ارائه یک روش عددی مبتنی بر تابع بی-اسپلاین درجه سوم و تفاضلات متناهی برای تقریب جواب مسأله‌ی (۱)-(۳) در حالت کلی می‌باشد. هر گاه دقت روش اسپلاین برای حل یک مسأله‌ی معادله دیفرانسیل با جواب به اندازه کافی هموار, برابر با دقت روش برای درونیابی توابع هموار باشد می‌گوییم الگوریتم مورد نظر دارای دقت بهینه است. در غیر این صورت اگر دقت از مسأله‌ی درونیابی پایین‌تر باشد روش دارای دقت غیربهینه است. همان‌گونه که می‌دانیم استفاده از توابع اسپلاین به شکل کلاسیک برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل به این معنی که مستقیما به جای تابع جواب و مشتقاتش تابع اسپلاین و مشتقات آن را جایگذاری کنیم، به تقریب‌های غیربهینه منجر می‌شود. محققان بسیاری سعی در به‌دست آوردن دقت بهینه و افزایش دقت روش اسپلاین برای حل معادلات دیفرانسیل داشته‌اند[۱۵-۱۷]. در [۱۸-۱۹]، روش اسپلاین مکعبی به همراه یک روش تفاضلات متناهی برای تقریب جواب معادلات غیرخطی سهموی یک بعدی و معادله‌ی کلاین-گوردون به‌کار رفته است. با توجه به اینکه در این مقالات اسپلاین به شکل کلاسیک به‌کارگرفته شده است، لذا دقت به‌دست آمده غیربهینه می‌باشد. در[۲۰-۲۱] با استفاده از اسپلاین درجه ششم مبتنی بر برونیابی، روشهایی با دقت بهینه و فوق‌بهینه برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی مراتب مختلف ایجاد شده‌اند. در [۲۲] روشهایی با دقت بهینه و فوق‌بهینه با استفاده از اسپلاین مکعبی بر پایه‌ی برونیابی برای تقریب جواب مسائل مختلفی از حساب تغییرات ایجاد شده است. در این مقاله ابتدا مسأله را در بعد زمان با استفاده از نوع خاصی از تفاضلات متناهی گسسته‌سازی کرده و مسأله را به دنباله‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی تبدیل می‌نمائیم. سپس با تعریف نوع خاصی از شرایط انتهایی برای اسپلاین مکعبی، روابطی را برای تابع اسپلاین و مشتقاتش بر حسب تابع جواب و مشتقاتش به‌دست می‌آوریم که کلید اصلی در به دست آوردن دقت‌های بالا می‌باشد. در ادامه با به‌کارگیری این روابط و طی سه مرحله و به روش تصحیح-تصحیح سعی می‌کنیم روشی با دقت فوق‌بهینه برای تقریب جواب مسأله ایجاد نماییم. همگرایی و کران خطای روش با استفاده از مفهوم تابع گرین به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار خواهد گرفت. در نهایت با انجام آزمایش

های عددی صحت نتایج تئوری ارائه شده مورد تایید قرار خواهند گرفت. همچنین به جهت اثبات برتری و کارایی روش در مقایسه با دیگر روشهای موجود، نتایج عددی با نتایج ارائه شده در برخی از مراجع مقایسه خواهند شد.

ترتیب ارائه مطالب به شکل زیر خواهد بود: در بخش دوم ابتدا مسأله در بعد زمان با استفاده از روش تفاضلات متناهی گسسته‌سازی شده و مسأله به دنباله‌ای از مسائل مقدار مرزی معمولی تبدیل خواهد شد. در فصل سوم ابتدا به معرفی توابع بی-اسپلاین پرداخته سپس با تعریف نوع خاصی از شرایط انتهایی روابطی بین اسپلاین و تابع جواب ایجاد خواهیم نمود. در ادامه از این روابط برای پیاده‌سازی یک روش تصحیح-تصحیح سه مرحله‌ای با دقت فوق بهینه برای تقریب جواب استفاده خواهیم نمود. بخش چهارم به آنالیز همگرایی و کران‌های خطای روش اختصاص می‌یابد. در نهایت در بخش پنجم با استفاده از آزمایش‌های عددی درستی نتایج ارائه شده در بخش‌های قبلی مورد تایید قرار خواهد گرفت. همچنین در این بخش با مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج سایر مراجع برتری روش به شکل تجربی نیز به اثبات خواهد رسید.

۲- گسسته‌سازی مسأله در بعد زمان

فرض کنید $\Delta_t=\{t_j\}_{j=\circ}^{m}$ یک افراز یکنواخت برای بازه $[t_\circ,T]$ با طول گام $k=\dfrac{T-t_\circ}{m}$ باشد. برای سادگی کار فرض می‌کنیم $u^{(j)}(x)\equiv u(x,t_j),\quad j=\circ,\text{۱},\cdots$. برای گسسته‌سازی زمانی مسأله، از روش تفاضلات متناهی به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x,t)\bigg|_{t_j}\cong\frac{\delta_t}{k\left(\text{۱}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)\delta_t}q^{(j)}(x),\qquad j=\text{۱},\text{۲},\ldots,\tag{۴}$$

که در آن q تابعی دلخواه و $\delta_t q^{(j)}(x)=q^{(j)}(x)-q^{(j-\text{۱})}(x)$. با به‌کارگیری رابطه‌ی (۴) در (۱) و گسسته‌سازی مسأله در بعد زمان، پس از ساده‌سازی رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathrm{T}u\equiv\hat{u}_{xx}-\frac{\alpha}{\kappa}\hat{u}^{\delta}\hat{u}_x-\frac{\text{۲}}{k\kappa}\hat{u}+\frac{\beta}{\kappa}F(\hat{u})=\hat{\varphi}(x),\qquad a\le x\le b,\tag{۵}$$

که در آن

$$\hat{u}=u^{(j)},\qquad \hat{u}_x=\frac{\partial}{\partial x}u^{(j)},\qquad \hat{u}_{xx}=\frac{\partial^{\text{۲}}}{\partial x^{\text{۲}}}u^{(j)},$$
$$\hat{\varphi}(x)=-\frac{\partial^{\text{۲}}}{\partial x^{\text{۲}}}u^{(j-\text{۱})}+\frac{\alpha}{\kappa}(u^{(j-\text{۱})})^{\delta}\frac{\partial}{\partial x}u^{(j-\text{۱})}+\frac{\text{۲}}{k\kappa}u^{(j-\text{۱})}-\frac{\beta}{\kappa}F\left(u^{(j-\text{۱})}\right).$$

همچنین شرایط مرزی مسأله به شکل زیر درمی‌آید:

$$B\hat{u}(x)=g(t_j),\qquad x=a,b. \tag{۶}$$

با این کار مسأله‌ی اولیه در هر گام زمانی تبدیل به یک مسأله‌ی مقدار مرزی مرتبه دوم می‌شود که در این مقاله یک روش فوق همگرا بر اساس اسپلاین درجه سوم برای حل آن ایجاد خواهیم نمود.

۳- گسسته سازی مکانی با استفاده از توابع بی-اسپلاین

در این قسمت هدف تقریب جواب مسأله (۵) همراه با شرایط مرزی (۶) با به‌کارگیری اسپلاین درجه سوم می‌باشد. برای این منظور افراز یکنواخت $\Delta_x \equiv \{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ با طول گام $h=\dfrac{b-a}{n}$ را بر روی بازه‌ی $[a,b]$ در نظر بگیرید که بازه‌ی مورد نظر را به n زیربازه‌ی مساوی $I_i=[x_{i-1},x_i]$ تقسیم می‌کند. فرض کنید π_r فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر درجه rام باشد، در این صورت فضای اسپلاین‌های درجه rام را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$SP_r(\Delta_x)=\left\{Q\in C^{r-1}[a,b]:Q\big|_{I_i}\in\pi_r, i=1,\cdots,n\right\}.$$

برای ساختن بی-اسپلاین درجه سوم نیاز به افزودن چهار نقطه‌ی گره‌ای کمکی به ابتدا و انتهای بازه داریم که ما آنها را با $x_{-2}<x_{-1}<x_0$ و $x_n<x_{n+1}<x_{n+2}$ نمایش خواهیم داد. فرض کنید $\bar{\Delta}_x \equiv \{x_i\}_{i=-2}^{n+2}$ یک افراز توسیع یافته برای $[a,b]$ باشد، در این صورت بی-اسپلاین درجه سوم یک اسپلاین ناصفر با کوچکترین محمل فشرده بر روی افراز $\bar{\Delta}_x$ خواهد بود. با استفاده از افراز توسیع یافته‌ی $\bar{\Delta}_x$ می‌توان پایه‌های بی-اسپلاین برای فضای SP_r را به صورت زیر تعریف نمود. برای این منظور ابتدا پایه‌های فضای بی-اسپلاین درجه صفر را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_{0,i}(x)=\begin{cases}1, & x\in I_{i+1}\\ 0, & ow.\end{cases}$$

حال بی-اسپلاین‌های درجه‌ی بالاتر به ازای $r\geq 1$، با به‌کارگیری رابطه‌ی تکراری زیر به سادگی ساخته می‌شوند [۲۳]:

$$B_{r,i}(x)=\frac{x-x_i}{x_{r+i}-x_i}B_{r-1,i}(x)+\frac{x_{r+i+1}-x}{x_{r+i+1}-x_{i+1}}B_{r-1,i+1}(x),\qquad r=1,2,\cdots. \tag{۷}$$

فرض کنید با استفاده از (۷) پایه‌های فضای بی-اسپلاین درجه سوم را ایجاد نمائیم، در این‌صورت هر عضو از فضای تولید شده به وسیله‌ی این پایه‌ها را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$s(x)=\sum_{k=-1}^{n+1} c_k B_{3,k}(x),$$

که در آن c_kها درجه آزادی نامیده شده و اعدادی نامعلوم می‌باشند که باید با بکارگیری روش هم‌محلی بر روی معادله هدف تعیین شوند. همان‌گونه که می‌دانیم استفاده از روش‌های اسپلاین به صورت کلاسیک برای حل معادلات دیفرانسیل، منجر به جواب‌هایی با دقت غیربهینه خواهند شد زیرا در بسط تابع و مشتقاتش بر اساس اسپلاین و مشتقات آن خطاهایی به وجود می‌آیند که مانع از به‌دست آمدن دقت بهینه می‌شوند. در این مقاله برای گریز از این مشکل و به‌دست آوردن دقت بالا سعی می‌کنیم با تعریف شرایط انتهایی مناسب، بسط‌هایی برای تابع اسپلاین و مشتقاتش ایجاد نمائیم که ما را در رسیدن به هدف کمک خواهند نمود. فرض کنید اسپلاین مکعبی $s(x)$ در شرایط درونیابی

$$s(x_i)=u(x_i), \qquad 0\le i\le n, \tag{8}$$

همراه با شرایط انتهایی

$$s'(x_i)=u'(x_i)-\frac{h^4}{180}u^{(5)}(x_i), \qquad i=0,n, \tag{9}$$

صدق کند. برای هر اسپلاین مکعبی که در (۸) و (۹) صدق کند، روابط لم زیر برقرار خواهد بود. این روابط نخستین گام در ایجاد روش با مرتبه همگرایی بالا می‌باشد.

لم ۱: روابط پایداری زیر برای هر تابع اسپلاین مکعبی بر روی افراز متساوی‌الفاصله Δ_x برقرار می‌باشند:

$$s''(x_i)=\frac{12}{h^2}\big(s(x_{i-1})-s(x_i)\big)+\frac{6}{h^2}\big(s'(x_i)+s'(x_{i-1})\big), \qquad 1\le i\le n, \tag{10}$$

$$s''(x_i)=\frac{6}{h^2}\big(s(x_{i+1})-s(x_i)\big)-\frac{2}{h}\big(s'(x_i)+s'(x_{i+1})\big), \quad 0\le i\le n-1. \tag{11}$$

اثبات: فرض کنید چند جمله‌ای $p_i(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$p_i(x)=a_i(x-x_i)^3+b_i(x-x_i)^2+c_i(x-x_i)+d_i, \tag{12}$$

که در آن a_i، b_i، c_i و d_i اعداد ثابت هستند. در این صورت اسپلاین s را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$s(x)=p_i(x)\big|_{[x_i,x_{i+1}]}, \qquad i=0,\cdots,n-1.$$

برای تعیین ضرایب $p_i(x)$ از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$p_i(x_i)=s(x_i),\ \ p_i'(x_i)=s'(x_i),$$
$$p_i''(x_i)=s''(x_i),\ \ p_i'''(x_i)=s'''(x_i).$$

با حل دستگاه حاصل از روابط بالا، ضرایب $p_i(x)$ به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_i=\frac{1}{6}s'''(x_i), \qquad b_i=\frac{1}{2}s''(x_i), \qquad c_i=s'(x_i), \qquad d_i=s(x_i).$$

با جایگذاری ضرایب فوق در (۱۲) و استفاده از این خاصیت که اسپلاین مکعبی در نقاط گره‌ای افراز دو بار پیوسته مشتق‌پذیر است، خواهیم داشت:

$$p_i^{(k)}(x_i)=p_{i-1}^{(k)}(x_i), \qquad k=0,1,2.$$

حال اگر در رابطه‌ی فوق اندیس i را از $j-1$ تا $j+1$ تغییر دهیم یک دستگاه معادلات به دست می‌آید که از حل آن روابط (۱۰) و (۱۱) به‌دست خواهند آمد.

قضیه ۱: فرض کنید $s(x)$ درونیاب اسپلاین مکعبی یکتا برای تابع $u\in C^8[a,b]$ باشد که در شرایط درونیابی و انتهایی (۸)-(۹) صدق می‌کند. در این‌صورت خواهیم داشت:

$$s'(x_i)=u'(x_i)-\frac{h^4}{180}u^{(5)}(x_i)+O(h^6), \qquad 0\le i\le n, \tag{۱۳}$$

$$s''(x_i)=u''(x_i)-\frac{h^2}{12}u^{(4)}(x_i)+\frac{h^4}{360}u^{(6)}(x_i)+O\left(h^6\right), \qquad 0\le i\le n. \tag{۱۴}$$

اثبات: با استفاده از [۲۴] رابطه‌ی پایداری زیر را برای اسپلاین مکعبی بازنویسی می‌کنیم:

$$s'(x_{i-1})+4s'(x_i)+s'(x_{i+1})=\frac{3}{h}\left(s(x_{i+1})-s(x_{i-1})\right), \qquad 1\le i\le n-1.$$

اگر در طرف دوم این رابطه بنابر شرایط درونیابی (۸)، به جای s از u استفاده نموده و طرف دوم را حول x_i بسط دهیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\Gamma s'(x_i)=6u'(x_i)+h^2u^{(3)}(x_i)+\frac{h^4}{20}u^{(5)}(x_i)+O\left(h^6\right), \qquad 1\le i\le n-1, \tag{۱۵}$$

که در آن $\Gamma f(x_i)=f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})$. از طرفی برای هر تابع دلخواه $f\in C^8[a,b]$ داریم:

$$\Gamma\left(f'(x_i)-\frac{h^4}{180}f^{(5)}(x_i)\right)=6f'(x_i)+h^2f'''(x_i)+\frac{h^4}{20}f^{(5)}(x_i)+O(h^6),\quad 1\le i\le n-1. \tag{16}$$

با جایگذاری u به جای f در (۱۶) و تفاضل نتیجه‌ی حاصله از (۱۵)، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Gamma\left(u'(x_i)-\frac{h^4}{180}u^{(5)}(x_i)-s'(x_i)\right)=O(h^6),\qquad 1\le i\le n-1. \tag{17}$$

اگر فرض کنیم $r_i=\left(u'(x_i)-\frac{h^4}{180}u^{(5)}(x_i)-s'(x_i)\right)$، آنگاه رابطه‌ی (۱۷) به همراه شرایط انتهایی (۹) دستگاه خطی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{cases} r_0=r_n=0, \\ \Gamma r_i=O(h^6), \qquad 1\le i\le n-1. \end{cases} \tag{18}$$

ماتریس ضرایب این دستگاه A، نامنفرد بوده و داریم: $\|A^{-1}\|\le\frac{1}{2}$. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$r_i=O(h^6),\qquad 0\le i\le n,$$

و بدین ترتیب (۱۳) اثبات می‌شود. برای اثبات (۱۴) از روابط به‌دست آمده در لم ۱ استفاده می‌کنیم:

$$s''(x_i)=\frac{12}{h^3}\big(s(x_{i-1})-s(x_i)\big)+\frac{6}{h^2}\big(s'(x_i)+s'(x_{i-1})\big),\qquad 1\le i\le n,$$
$$s''(x_i)=\frac{6}{h^2}\big(s(x_{i+1})-s(x_i)\big)-\frac{2}{h}\big(s'(x_i)+s'(x_{i+1})\big),\qquad 0\le i\le n-1.$$

با جایگذاری $u'-\frac{h^4}{180}u^{(5)}+O(h^6)$ به جای s در روابط فوق و استفاده از بسط سری تیلور رابطه‌ی (۱۴) به ازای $0\le i\le n$ به‌دست می‌آید.

پیاده‌سازی روش: در این بخش با به‌کارگیری روابط ایجاد شده در قضیه‌ی ۱، یک روش سه‌مرحله‌ای فوق‌همگرا برای حل مسأله در بعد مکان ایجاد می‌نماییم. در ابتدا مسأله‌ی (۵) با استفاده از تکنیک هم‌محلی بر روی نقاط افراز یکنواخت Δ_x، به صورت زیر گسسته‌سازی می‌کنیم

$$\mathrm{T}u_i \equiv \left(\hat{u}_{xx}(x) - \frac{\alpha}{\kappa}\hat{u}^{\delta}(x)\hat{u}_x(x) - \frac{۲}{k\kappa}\hat{u}(x) + \frac{\beta}{\kappa}F\left(\hat{u}(x)\right) \right)\Bigg|_{x_i} = \hat{\varphi}\left(x_i\right), \quad (۱۹)$$

$$B\hat{u}\left(x\right) = g, \qquad x = a,b. \quad (۲۰)$$

توجه فرمایید که هنگام تقریب جواب به وسیله‌ی تابع اسپلاین، اگر مستقیماً به جای $u(x)$ و مشتقاتش $s(x)$ و مشتقات آن را جایگذاری نماییم طبق روابط قضیه‌ی ۱ دقت روش پایین و از مرتبه $h^۲$ خواهد بود. لذا برای رفع این مشکل سعی بر این است که در روابط (۱۳) و (۱۴) مقادیر $u^{(r)}\left(x_i\right), r = ۴,۵,۶$ را با استفاده از اسپلاین و مشتقاتش تقریب زده و با به‌کارگیری آنها دقت بالاتری برای تقریب جواب به دست آوریم. برای این منظور و برای سادگیفرض کنید $s_i \equiv s(x_i)$ و عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\lambda_{۰}v_i &= ۳v_i - ۱۴v_{i+۱} + ۲۶v_{i+۲} - ۲۴v_{i+۳} + ۱۱v_{i+۴} - ۲v_{i+۵},\\
\lambda_{۱}v_i &= ۲v_i - ۹v_{i+۱} + ۱۶v_{i+۲} - ۱۴v_{i+۳} + ۶v_{i+۴} - v_{i+۵},\\
\lambda_{۲}v_i &= v_{i-۲} - ۴v_{i-۱} + ۶v_i - ۴v_{i+۱} + v_{i+۲},\\
\lambda_{۳}v_i &= ۴v_i - ۱۴v_{i+۱} + ۲۰v_{i+۲} - ۱۵v_{i+۳} + ۶v_{i+۴} - v_{i+۵}.
\end{aligned}$$

این عملگرها را با به‌کارگیری تفاضلات متناهی و برای به‌دست آوردن تقریب‌هایی برای $u_i^{(r)}, r = ۴,۵,۶,$ با استفاده از تابع اسپلاین تعریف نموده‌ایم که در لم زیر از آنها استفاده خواهیم نمود.

لم ۲: فرض کنید s درونیاب اسپلاین مکعبی برای $u \in C^{۸}[a,b]$ باشد که در شرایط درونیابی و انتهایی (۸)-(۹) صدق می‌کند، آنگاه تقریب‌های زیر را برای $u_i^{(r)}, r = ۴,۵,۶$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_{۰}^{(۴)} &= \frac{۱}{h^۲}\lambda_{۳}s''_{۰} + O(h^۴),\\
\hat{u}_i^{(۴)} &= \frac{۱}{h^۲}\left(s''_{i-۱} - ۲s''_i + s''_{i+۱}\right) + O(h^۴), \qquad ۱ \le i \le n-۱,\\
\hat{u}_n^{(۴)} &= \frac{۱}{h^۲}\lambda_{۳}s''_{n-۵} + O(h^۴),\\
u_i^{(r)} &= \frac{۱}{h^۴}\lambda_i s_{۰}^{(r-۴)} + O(h^۲), \qquad i = ۰,۱,\\
u_i^{(r)} &= \frac{۱}{h^۴}\lambda_{۱}s_i^{(r-۴)} + O(h^۲), \qquad ۲ \le i \le n-۲, \ \ r = ۵,۶,\\
u_i^{(r)} &= \frac{۱}{h^۴}\lambda_{n-i}s_{n-۵}^{(r-۴)} + O(h^۲), \qquad i = n-۱,n.
\end{aligned}$$

اثبات: این روابط با به‌کارگیری روابط قضیه‌ی ۱، عملگرهای گسسته‌ی $\lambda_{\circ}$ تا $\lambda_{۴}$ و استفاده از بسط سری تیلور به سادگی قابل اثبات می‌باشند.

حال از روابط ایجاد شده در لم ۲ استفاده نموده و سعی می‌کنیم با جایگذاری این روابط در (۱۳) و (۱۴) و سپس استفاده از آنها در معادله دیفرانسیل، دقت مرتبه‌ی $O(h^{۶})$ را بدست آوریم. برای این که دستگاه‌های معادلات جبری ایجاد شده در این روش سه قطری باقی بمانند و حجم محاسبات پایین باشد، سعی نموده‌ایم یک الگوریتم سه مرحله‌ای ایجاد کنیم که در مرحله‌ی اول جواب مسأله را با دقت $O(h^{۲})$ تقریب می‌زند سپس از این جواب در مرحله‌ی دوم استفاده نموده و دقت $O(h^{۴})$ را ایجاد می نماییم. نهایتا در مرحله‌ی سوم با استفاده از جواب به دست آمده در مرحله‌یقبل سعی می‌شود تقریبی با دقت $O(h^{۶})$ و فوق همگرا ایجاد شود. مراحل کار روش سه مرحله‌ای به‌شکل زیر می‌باشد.

مرحله ۱: یافتن یک تابع اسپلاین $s \in SP_{۳}(\Delta_x)$ که در روابط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{T}s-\hat{\varphi})_{x_i}=\circ, && \circ \le i \le n, \\ &Bs-g(t_j)=\circ, && x=a,b. \end{aligned} \tag{۲۱}$$

تذکر ۱: تابع s جواب مسأله با دقت $O(h^{۲})$ تقریب می‌زند.

مرحله ۲. الف: ایجاد تقریب‌هایی برای $u_i^{(۴)}$ با استفاده از s''_i،

$$\begin{aligned} &\hat{u}_i^{(۴)}=\frac{۱}{h^{۲}}\left(s''_{i-۱}-۲s''_i+s''_{i+۱}\right), \qquad ۱\le i\le n-۱, \\ &\hat{u}_{\circ}^{(۴)}=\frac{۱}{h^{۲}}\lambda_{۴}s''_{\circ}, \qquad \hat{u}_n^{(۴)}=\frac{۱}{h^{۲}}\lambda_{۴}s''_{n-۵}, \end{aligned}$$

و جایگذاری آنها در (۵) برای به دست آوردن طرف دوم جدید $\overline{\varphi}$ به شکل زیر

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}_i=\hat{\varphi}_i-\frac{۱}{۱۲}\left(s''_{i-۱}-۲s''_i+s''_{i+۱}\right), \qquad ۱\le i\le n-۱, \\ &\overline{\varphi}_{\circ}=\hat{\varphi}_{\circ}-\frac{۱}{۱۲}\lambda_{۴}s''_{\circ}, \qquad \overline{\varphi}_n=\hat{\varphi}_n-\frac{۱}{۱۲}\lambda_{۴}s''_{n-۵}. \end{aligned}$$

ب: یافتن یک تابع اسپلاین $\overline{s} \in SP_{۳}(\Delta_x)$ که در روابط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{T}\overline{s}-\overline{\varphi})_{x_i}=\circ, && \circ \le i \le n, \\ &B\overline{s}-g(t_j)=\circ, && x=a,b. \end{aligned} \tag{۲۲}$$

تذکر ۲: تابع $\bar{s}$ جواب مساله با دقت $O(h^{4})$ تقریب می‌زند.

مرحله ۳. الف: ایجاد تقریب‌هایی برای $u_i^{(r)}$ به ازای $r=5,6$ با استفاده از s_i' و s_i''،

$$u_i^{(r)}=\frac{1}{h^{4}}\lambda_i s_{0}^{(r-4)},\qquad i=0,1,$$
$$u_i^{(r)}=\frac{1}{h^{4}}\lambda_1 s_i^{(r-4)},\qquad 2\le i\le n-2,$$
$$u_i^{(r)}=\frac{1}{h^{4}}\lambda_{n-i} s_{n-5}^{(r-4)},\qquad i=n-1,n.$$

روابط فوق را می‌توان با استفاده از تفاضلات متناهی و با به کارگیری روابط موجود در قضیه‌ی ۱ به سادگی به دست آورد. حال با جایگذاری این روابط در (۵)، طرف دوم جدید $\bar{\bar{\varphi}}$ را به شکل زیر تعیین می‌کنیم

$$\bar{\bar{\varphi}}_i=\hat{\varphi}_i+\frac{1}{360}\lambda_1\bar{s}_i''+\frac{\alpha\left(\bar{s}_i\right)^{\delta}}{180\kappa}\lambda_1\bar{s}_i',\quad 2\le i\le n-2$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_0=\hat{\varphi}_0+\frac{1}{360}\lambda_0\bar{s}_0''+\frac{\alpha\left(\bar{s}_0\right)^{\delta}}{180\kappa}\lambda_0\bar{s}_0',$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_n=\hat{\varphi}_n+\frac{1}{360}\lambda_0\bar{s}_{n-5}''+\frac{\alpha\left(\bar{s}_n\right)^{\delta}}{180\kappa}\lambda_0\bar{s}_{n-5}'\bar{s}_{n-5}',$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_1=\hat{\varphi}_1+\frac{1}{360}\lambda_1\bar{s}_0''+\frac{\alpha\left(\bar{s}_1\right)^{\delta}}{180\kappa}\lambda_1\bar{s}_0',$$
$$\bar{\bar{\varphi}}_{n-1}=\hat{\varphi}_{n-1}+\frac{1}{360}\lambda_1\bar{s}_{n-5}''+\frac{\alpha\left(\bar{s}_{n-1}\right)^{\delta}}{180\kappa}\lambda_1\bar{s}_{n-5}'.$$

ب: یافتن یک تابع اسپلاین $\bar{\bar{s}}\in SP_3\left(\Delta_x\right)$ که در روابط زیر صدق کند

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{T}\bar{\bar{s}}-\bar{\bar{\varphi}}\right)_{x_i}=0,\qquad 0\le i\le n,\\&B\bar{\bar{s}}-g\left(t_j\right)=0,\qquad x=a,b.\end{aligned}\tag{۲۳}$$

تذکر ۳: تابع $\bar{\bar{s}}$ جواب مساله با دقت $O(h^{6})$ تقریب می‌زند.

لم۳: فرض کنید s، $\bar{s}$ و $\bar{\bar{s}}$ به ترتیب تقریب‌های اسپلاین مکعبی به‌دست آمده در مراحل ۱ تا ۳ برای $\hat{u}$، جواب مسأله‌ی (۵)-(۶) باشند. همچنین فرض کنید این تقریب‌ها در شرایط

درونیابی و انتهایی (۸)-(۹) صدق کنند، در این‌صورت در نقاط گره‌ای افراز برای $\circ \le i \le n$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathrm{T}s(x_i) - \hat{\varphi}(x_i) &= O(h^{۲}), \\ \mathrm{T}\overline{s}(x_i) - \overline{\varphi}(x_i) &= O(h^{۴}), \\ \mathrm{T}\overline{\overline{s}}(x_i) - \overline{\overline{\varphi}}(x_i) &= O(h^{۶}). \end{aligned}$$

۴- آنالیز همگرایی

آنالیز همگرایی روش‌برپایه‌ی استفاده از تابع گرین استوار است. فرض کنید مسأله‌ی همگن $\hat{u}'' = \circ$ همراه با شرایط مرزی همگن $B\hat{u} = \circ$ دارای جواب یکتا باشد، در این صورت یک تابع گرین $G(x,t)$ متناظر با مسأله وجود دارد. فرض کنید $\hat{u}'' = v$، آنگاه با استفاده از تابع گرین داریم:

$$\hat{u}(x) = \int_a^b G(x,t) v(t)\,dt, \qquad \hat{u}'(x) = \int_a^b \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} v(t)\,dt. \tag{۲۴}$$

اگر عملگر $\mathcal{R}: C[a,b] \to C[a,b]$ را به شکل زیر تعریف‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}g = &-\frac{\alpha}{\kappa}\left(\int_a^b G(x,t) g(t)\,dt\right)^{\delta} \int_a^b \frac{\partial G(x,t)}{\partial x} g(t)\,dt \\ &-\frac{۲}{k\kappa}\int_a^b G(x,t) g(t)\,dt + \frac{\beta}{\kappa} F\left(\int_a^b G(x,t) g(t)\,dt\right), \end{aligned}$$

آنگاه رابطه‌ی (۵) را می‌توان به‌شکل عملگری زیر بازنویسی نمود:

$$v + \mathcal{R}v = \hat{\varphi}. \tag{۲۵}$$

حال فرض کنید p_n یک عملگر تصویر خطی از $C[a,b]$ به توی $SP_{\circ}(\Delta_x)$ باشد. با فرض $s'' = v_n$ و با توجه به اینکه داریم: $p_n v_n = v_n$، بنابراین رابطه‌ی (۲۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$v_n + p_n \mathcal{R} v_n = p_n \hat{\varphi}. \tag{۲۶}$$

قضیه ۲: ([۲۵]) فرض کنید $\hat{u}\left(x\right)$ یک جواب برای مسأله (۵)-(۶) باشد. همچنین فرض کنید تابع $\hat{\varphi}\left(x\right)+\frac{\alpha}{\kappa}z^{\delta}z_x+\frac{2}{k\kappa}z-\frac{\beta}{\kappa}F\left(z\right)$ و مشتقات جزئی آن نسبت به z و z_x در ناحیه‌ی

$$a\le x\le b,\ \ \left|\hat{u}(x)-z\right|\le\delta^*,\ \ \left|\hat{u}'(x)-z_x\right|\le\delta^*,\ \ \delta^*>0$$

موجود و پیوسته بوده و مسأله‌ی مقدار مرزی همگن $\hat{u}''=0$ به همراه شرایط مرزی (۶) فقط دارای جواب بدیهی باشد. اگر مسأله‌ی خطی همگن

$$\hat{u}''-\left(\hat{\varphi}\left(x\right)+\frac{\alpha}{\kappa}z^{\delta}z_x+\frac{2}{k\kappa}z-\frac{\beta}{\kappa}F\left(z\right)\right)\hat{u}$$
$$-\frac{\partial}{\partial z_x}\left(\hat{\varphi}\left(x\right)+\frac{\alpha}{\kappa}z^{\delta}z_x+\frac{2}{k\kappa}z-\frac{\beta}{\kappa}F\left(z\right)\right)\hat{u}'=0,$$

فقط دارای جواب بدیهی باشد آنگاه $\sigma>0$ای وجود دارد که $\hat{u}\left(x\right)$ جواب یکتای مسأله (۵)-(۶) است و به‌علاوه اسپلاین یکتای $s\in SP_3\left(\Delta_x\right)$ وجود دارد که در رابطه‌ی (۲۶) صدق می‌کند و برای nهای به اندازه کافی بزرگ، s و مشتق مرتبه اولش به $\hat{u}$ و مشتق مرتبه اول آن همگرا می‌باشند.

قضیه ۳: دنباله‌ی افرازهای یکنواخت Δ_x با طول گام hرا در بازه‌ی $[a,b]$ در نظر بگیرید که با افزایش تعداد نقاط $h\to 0$. فرض کنید s تقریب اسپلاین مکعبی برای جواب مسأله‌ی (۵)-(۶) باشد که با استفاده از (۲۱) به‌دست آمده است. آنگاه تحت شرایط قضیه‌ی ۲ کران‌های زیر برای خطای روش در مرحله‌ی اول برقرار خواهند بود:

$$\left\|\hat{u}^{(k)}(x)-s^{(k)}(x)\right\|=O\left(h^2\right),\qquad k=0,1,2,\tag{۲۷}$$

$$\left|\hat{u}^{(k)}(x_i)-s^{(k)}(x_i)\right|=O\left(h^2\right),\qquad k=0,1,2.\tag{۲۸}$$

اثبات: فرض کنید $\hat{u}\in C^4[a,b]$ جواب واقعی (۵)-(۶) و s تقریب اسپلاین مکعبی برای جواب مسأله باشد. همچنین فرض کنید w درونیاب اسپلاین مکعبی برای $\hat{u}$ باشد که در شرایط درونیابی و انتهایی (۸) و (۹) صدق می‌کند. مسأله $w''=\vartheta_n$ همرا با شرایط مرزی $Bw=O(h^2)$ را در نظر بگیرید. چون مسأله‌ی $u''=0$ همراه با شرایط مرزی همگن فقط دارای جواب بدیهی می‌باشد، پس یک چندجمله‌ای خطی مانند $\xi(x)$ وجود دارد که $B\xi=Bw=O\left(h^2\right)$ و $\xi=\xi'=O\left(h^2\right)$. حال چون مسأله‌ی $\left(w-\xi\right)''=\vartheta_n$ همراه با شرایط مرزی همگن $B\left(w-\xi\right)=0$ دارای جواب یکتاست بنابراین طبق لم ۲ خواهیم داشت:

$$\left|\hat{u}^{(k)}(x_i)-s^{(k)}(x_i)\right|=O\left(h^{۲}\right), \qquad k=۰,۱,۲. \tag{۲۹}$$

از تفاضل روابط (۲۹) و (۲۶) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$(I+p_n\mathcal{R})(w-\xi)''-(I+p_n\mathcal{R})s''=O\left(h^{۲}\right),$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$(w-\xi-s)''=p_n\mathcal{R}(w-\xi)''-p_n\mathcal{R}s''+O\left(h^{۲}\right).$$

عملگر $\mathcal{R}$ در یک همسایگی از u مشتق‌پذیر فرشه می‌باشد، بنابراین رابطه‌ی فوق را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned}(w''-\xi''-s'')&=p_n\int_۰^۱\mathcal{R}'\left[ts''+(۱-t)(w''-\xi'')\right](w''-\xi''-s'')dt+O\left(h^{۲}\right)\\&=p_n\left\{\int_۰^۱\mathcal{R}'\left[ts''+(۱-t)(w''-\xi'')\right]dt\right\}(w''-\xi''-s'')+O\left(h^{۲}\right)\\&=p_n\mathrm{K}(w''-\xi''-s'')+O\left(h^{۲}\right),\end{aligned}$$

که در آن K مشتق عملگر $\mathcal{R}$ است و لذا یک عملگر خطی می‌باشد. چون $p_n\mathrm{K}$ به $\mathcal{R}'$ همگراست بنابراین طبق قضیه‌ی ۲ عملگر $(I-p_n\mathrm{K})^{-۱}$ موجود و به طور یکنواخت کراندار است، لذا نتیجه می‌شود:

$$\left\|\vartheta_n-v_n\right\|=O\left(h^{۲}\right). \tag{۳۰}$$

از طرفی با توجه به اینکه مسأله‌ی $(w-\xi-s)''=\vartheta_n-v_n$ به همراه شرایط مرزی $B(w-\xi-s)=۰$ دارای جواب یکتاست، با استفاده از تعریف تابع گرین داریم:

$$(w-\xi-s)^{(k)}(x)=\int_a^b\frac{\partial^k G(x,t)}{\partial x^k}(\vartheta_n-v_n)dt, \qquad k=۰,۱,۲, \tag{۳۱}$$

با نرم‌گیری از رابطه فوق و با استفاده از (۳۰)، نظر به‌اینکه تابع گرین و مشتقات آن بر روی بازه $[a,b]$ کراندارند خواهیم داشت:

$$\left\|(w-\xi-s)^{(k)}\right\|=O\left(h^{۲}\right), \qquad k=۰,۱,۲. \tag{۳۲}$$

بنابراین با به‌کارگیری نامساوی مثلثی داریم:

$$\hat{u}^{(k)}-s^{(k)}\le\hat{u}^{(k)}-w^{(k)}+w^{(k)}-s^{(k)}\le\hat{u}^{(k)}-w^{(k)}+(w-\xi-s)^{(k)}+\xi^{(k)}.$$

حال با توجه به کراندار بودن ξ و مشتقاتش و با استفاده از رابطه‌ی (۳۲) و قضیه‌ی ۱ خواهیم داشت:

$$\left\|\hat{u}^{(k)} - s^{(k)}\right\| = O\left(h^{۲}\right), \qquad k = ۰,۱,۲,$$

و حکم قضیه ثابت می‌شود.

قضیه ۴: تحت شرایط قضیه‌ی ۳ کران‌های زیر برای خطای روش در مرحله‌ی دوم برقرار خواهند بود:

$$\left\|\hat{u}^{(k)}(x) - \bar{s}^{(k)}(x)\right\| = O\left(h^{۴-k}\right), \qquad k = ۰,۱,۲, \tag{۳۳}$$

$$\left|\hat{u}^{(k)}(x_i) - \bar{s}^{(k)}(x_i)\right| = O\left(h^{۴}\right), \qquad k = ۰,۱, \tag{۳۴}$$

$$\left|\hat{u}''(x_i) - \bar{s}''(x_i)\right| = O\left(h^{۲}\right). \tag{۳۵}$$

اثبات: اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه‌ی ۳ می‌باشد.

قضیه ۵: تحت شرایط قضیه‌ی ۳ کران‌های زیر برای خطای روش در مرحله‌ی سوم برقرار خواهند بود:

$$\left\|\hat{u}^{(k)}(x) - \bar{\bar{s}}^{(k)}(x)\right\| = O\left(h^{۴-k}\right), \qquad k = ۰,۱,۲, \tag{۳۶}$$

$$\left|\hat{u}^{(k)}(x_i) - \bar{\bar{s}}^{(k)}(x_i)\right| = O\left(h^{۶}\right), \qquad k = ۰,۱, \tag{۳۷}$$

$$\left|\hat{u}'(x_i) - \bar{\bar{s}}'(x_i)\right| = O\left(h^{۴}\right). \tag{۳۸}$$

$$\left|\hat{u}''(x_i) - \bar{\bar{s}}''(x_i)\right| = O\left(h^{۲}\right). \tag{۳۹}$$

اثبات: اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیه‌ی ۳ می‌باشد.

۵- نتایج عددی

در این بخش مثال‌هایی ازمعادلات برگرز-هاکسلی و برگرز-فیشر را برای مقادیر مختلفی از پارامترهای مساله به‌صورت عددی بررسی می‌نماییم. در این مثالها از معیار حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گرهی برای سنجش میزان دقت روش استفاده شده است. مشاهده می‌شود روش ارائه شده، برای مقادیر مختلف پارامترهای مسأله نتایج قابل قبولی به‌دست می‌دهد. نتایج حاصله با نتایج به‌دست آمده در مراجع پیشین مقایسه شده و برتری روش به صورت عملی به اثبات رسیده است. در نتایج عددی سعی بر این بوده که نتایج روش را با روشهای اسپلاین مکعبی که

قبلا برای حل مسأله به کار فته‌اند مقایسه کنیم تا با این کار نشان دهیم که روش ما بر روش‌های مشابه قبلی برتری دارد.

مثال ۱: مسأله‌ی (۱)-(۳) را با فرض $\kappa = ۱$، $F(u) = u(۱-u^{\delta})(u^{\delta}-\gamma)$ و به همراه شرایط مرزی دیریکله در نظر بگیرید. جواب واقعی مسأله موجود و برابر است با

$$u(x,t) = \left(\frac{\gamma}{۲} + \frac{\gamma}{۲}\tanh\left(\frac{\delta(\rho-\alpha)}{۴(\delta+۱)}\left(x - \left(\frac{\gamma\alpha}{\delta+۱} + \frac{(\rho-\alpha)(\delta+۱-\gamma)}{۲(\delta+۱)}\right)t\right)\right)\right)^{\frac{۱}{\delta}},$$
$$(x,t) \in [۰,۱] \times [۰,T)$$

که در آن $\rho = \sqrt{\alpha^{۲} + ۴\beta(\delta+۱)}$. همان‌گونه که قبلا ذکر گردید این یک مسأله‌ی برگرز-هاکسلی می‌باشد. ما این مسأله را با $n = ۱۶$، $k = ۰/۰۱$ و به ازای مقادیر مختلفی از پارامترها حل نموده و حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گرهی را در جدول‌های ۱ و ۲ درج نموده‌ایم. در این جدول‌ها، خطا برای مقادیر مختلفی از T محاسبه و نمایش داده شده است. همچنین نتایج به‌دست آمده توسط روش ما با نتایج حاصل از روشهای پیشین مقایسه شده است که برتری و کارایی روش را به‌وضوح نشان می‌دهد. زمان اجرای برنامه‌های روش ما بر حسب ثانیه در جدول ها درج شده‌اند که نشان دهنده محاسبات پایین و دقت بالای روش می‌باشد.

جدول شماره (۱): حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گره‌ای به ازای $\alpha = \beta = \delta = ۱$ و $\gamma = ۰/۰۰۱$

T	روش ما	زمان (ثانیه)	[۱۱]	FD۶ - [۶]	FD۸ - [۶]	FD۱۰ - [۶]
۰/۰۵	$۳/۷۴E-۱۰$	۱/۶۱	$۱/۷۲E-۸$	$۱/۷۳E-۸$	$۴/۶۸E-۸$	$۱/۷۳E-۸$
۰/۱۰	$۵/۷۲E-۱۰$	۱/۸۶	$۲/۸۷E-۸$	$۲/۸۸E-۸$	$۲/۸۸E-۸$	$۲/۸۸E-۸$
۱/۰۰	$۷/۳۱E-۱۰$	۶/۴۱	$۴/۶۸E-۸$	$۴/۶۸E-۸$	$۴/۶۸E-۸$	$۴/۶۸E-۸$

جدول شماره (۲): حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گره‌ای به ازای $\alpha = ۰$، $\beta = ۱$، $\gamma = ۰/۰۰۱$ و $\delta = ۳$.

T	زمان (ثانیه)	روش ما	[۱۱]	FD۱۰ - [۶]
۰/۰۵	۱/۵۷	$۷/۹۳۱E-۸$	$۳/۶۷۲E-۶$	$۳/۶۷۲E-۶$
۰/۱۰	۱/۷۶	$۹/۲۱۳E-۸$	$۶/۱۰۱E-۶$	$۶/۱۰۱E-۶$
۱/۰۰	۶/۲۳	$۲/۶۱۲E-۷$	$۹/۹۰۷E-۶$	$۹/۹۰۷E-۶$

مثال۲. مسأله‌ی (۱)-(۳) را با فرض $F(u)=u\left(۱-u^{\delta}\right)$، $\kappa=۱$ و به همراه شرایط مرزی دیریکله در نظر بگیرید. جواب واقعی مسأله موجود و برابر است با

$$u(x,t)=\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\tanh\left(\frac{-\alpha\delta}{۲(\delta+۱)}\left(x-\left(\frac{\alpha}{\delta+۱}+\frac{\beta(\delta+۱)}{\alpha}\right)t\right)\right)\right)^{\frac{۱}{\delta}},$$
$$(x,t)\in[۰,۱]\times[۰,T)$$

جدول شماره (۳): حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گره‌ای به‌ازای $\alpha=\beta=۰/۰۰۱$

T	$\delta=۲$			$\delta=۴$		
	روش ما	S۲ - [۱۲]	[۲۶]	روش ما	S۲ - [۱۲]	[۲۶]
۰/۰۰۱	$۳/۳E-۱۶$	$۹/۱E-۱۵$	$۹/۷E-۱۵$	$۷/۷E-۱۶$	$۳/۱E-۱۴$	$۳/۳E-۱۴$
۰/۰۰۵	$۶/۶E-۱۶$	$۴/۴E-۱۴$	$۴/۱E-۱۴$	$۱/۷E-۱۵$	$۱/۵E-۱۳$	$۱/۶E-۱۳$
۰/۰۱۰	$۶/۶E-۱۶$	$۸/۸E-۱۴$	$۹/۱E-۱۴$	$۲/۹E-۱۵$	$۳/۱E-۱۳$	$۳/۲E-۱۳$
۰/۵۰۰	$۷/۳E-۱۶$	$۱/۰E-۱۲$	$۱/۰E-۱۲$	$۶/۱E-۱۵$	$۳/۸E-۱۲$	$۳/۸E-۱۲$
۱/۰۰۰	$۸/۱E-۱۶$	$۱/۰E-۱۲$	$۱/۰E-۱۲$	$۸/۴E-۱۵$	$۳/۹E-۱۲$	$۳/۹E-۱۲$

جدول شماره (۴): حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گره‌ای به ازای $\alpha=\beta=۱$

T	$\delta=۲$			$\delta=۴$		
	روش ما	S۲ - [۱۲]	[۲۶]	روش ما	S۲ - [۱۲]	[۲۶]
۰/۲	$۵/۳E-۱۱$	$۷/۸E-۷$	$۲/۵E-۶$	$۲/۲E-۱۱$	$۲/۹E-۶$	$۱/۷E-۶$
۰/۴	$۳/۵E-۱۱$	$۱/۱E-۶$	$۴/۲E-۶$	$۵/۴E-۱۱$	$۳/۱E-۶$	$۴/۱E-۷$
۰/۶	$۲/۶E-۱۱$	$۱/۴E-۶$	$۳/۵E-۶$	$۴/۶E-۱۱$	$۲/۳E-۶$	$۲/۴E-۶$
۰/۸	$۲/۲E-۱۱$	$۱/۴E-۶$	$۱/۴E-۶$	$۳/۱E-۱۱$	$۱/۳E-۶$	$۲/۳E-۶$
۱/۰	$۱/۸E-۱۱$	$۱/۳E-۶$	$۵/۵E-۶$	$۲/۷E-۱۱$	$۶/۵E-۷$	$۱/۴E-۶$

همان‌گونه که قبلا ذکر گردید این مسأله یک مسأله‌ی برگرز-فیشر می‌باشد. ما این مسأله را با $n=۱۶$ و $k=۰/۰۱$ و به ازای مقادیر مختلفی از پارامترهای α، β و δ حل نموده و حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گرهی را در جدول‌های شماره ۳، ۴ و ۵ ثبت نموده‌ایم. این خطاها برای

مقادیر مختلفی از T محاسبه و نمایش داده شده‌اند. همچنین در این جداول نتایج به‌دست آمده توسط روش ما با نتایج حاصل از روشهای پیشین مقایسه شده است که برتری و کارایی روش را به‌وضوح نشان می‌دهد. زمان اجرای برنامه برای این مثال با $n=$ ۱۶ به ازای $T=$ ۰/۰۰۱,...,۱/۰۰ در جدول‌های شماره ۳ تا ۵ عددی بین ۱/۵۲ ثانیه و ۶/۴۷ ثانیه است.

جدول شماره (۵): حداکثر قدرمطلق خطا در نقاط گره‌ای به ازای $\alpha=$ ۱ و $\beta=$ −۰/۰۰۲۵

T	$\delta=$ ۲			$\delta=$ ۴		
	روش ما	S۲ - [۱۲]	[۲۶]	روش ما	S۲ - [۱۲]	[۲۶]
۰/۱	۱/۲E −۱۵	۱/۹E −۱۱	۲/۸E −۱۰	۱/۵E −۱۵	۱/۷E −۱۲	۳/۹E −۱۰
۰/۲	۱/۲E −۱۵	۲/۷E −۱۱	۳/۸E −۱۰	۲/۲E −۱۵	۲/۳E −۱۲	۵/۴E −۱۰
۰/۳	۲/۱E −۱۵	۲/۹E −۱۱	۴/۲E −۱۰	۳/۱E −۱۵	۲/۶E −۱۲	۵/۹E −۱۰
۰/۴	۲/۲E −۱۵	۳/۱E −۱۱	۴/۳E −۱۰	۴/۰E −۱۵	۲/۷E −۱۲	۶/۱E −۱۰
۰/۵	۲/۵E −۱۵	۳/۱E −۱۱	۴/۰E −۱۰	۴/۹E −۱۵	۲/۸E −۱۲	۶/۱E −۱۰

منابع

[1] Wang, M.L. (1996). Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation, *Physics Letters A*, **213**, 279-287.

[2] Yang, L., Liu, J.B. and Yang, K.Q. (2001). Exact solutions of nonlinear PDE, nonlinear transformations and reduction of nonlinear PDE to a quadrature, *Physics Letters A,* **278**, 267-270.

[3] Fan, E.G. (2000). Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A,* **277**, 212-218.

[4] Ismail, H.N.A., Raslan, K. and Rabboh, A.A.A. (2004). Adomian decomposition method for Burger's-Huxley and Burger's-Fisher equations, *Applied Mathematics and Computation,* **159**, 291-301.

[5] Hashim, I., Noorani, M.S.M. and Batiha, B. (2006). A note on the Adomian decomposition method for the generalized Huxley equation, *Applied Mathematics and Computation,* **181**, 1439-1445.

[6] Yan, Z.Y. and Zhang, H.Q. (1999). New explicit and exact travelling wave solutions for a system of variant boussinesq equations in mathematical physics, *Physics Letters A,* **252**, 291-296.

[7] Mohantyand, R.K. and Gopal, V. (2013). A fourth order finite difference method based on spline in tension approximation for the solution of one-

space dimensional second order quasi-linear hyperbolic equations, *Advances in Difference Equations,* **70**, 1-20.

[8] Lin, Y. and Zhang, T. (1992). Finite element methods for nonlinear Sobolev equations with nonlinear boundary conditions, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **165**, 180-191.

[9] Neilan, M. (2014). Finite element methods for fully nonlinear second order PDEs based on a discrete Hessian with applications to the Monge-Ampère equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **263**, 351-369.

[10] Mittal, R.C. and Tripathi, A. (2015). Numerical solutions of generalized Burgers–Fisher and eneralized Burgers–Huxley equations using collocation of cubic B-splines, *International Journal of Computer Mathematic,* **92**, 1053-1077.

[11] Mohammadi, R. (2013). B-Spline collocation algorithm for numerical solution of the generalized Burger's-Huxley equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations***,** **29**, 1173-1191.

[12] Mohammadi, R. (2012). Spline solution of the generalized Burgers'-Fisher equation, *Applicable Analysis,* **91**, 2189-2215.

[13] Wang, X.Y., Zhu, Z.S., and Lu, Y.K. (1990). Solitary wave solutions of the generalized Burgers-Huxley equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General.,* **23**, 279-274.

[14] Estevez, P.G. (1994). Non-classical symmetries and the singular modified the Burgers' and Burgers-Huxley equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General ,* **27**, 2113-2127.

[15] Fyfe, D.J. (1970). The use of cubic splines in the solution of certain fourth order boundary value problems, *The Computer Journal***, 13,** 204-205.

[16] Daniel, J.W. and Swartz, B.K. (1975). Extrapolated collocation for two-point boundary value problems using cubic splines, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications,* **16**, 161-174.

[17] Irodotou-Ellina, M., Houstis, E.N. (1988). An $O(h^6)$ quintic spline collocation method for fourth order two-point boundary value problems, *BIT Numerical Mathematics*, **28**, 288-301.

[18] Rashidinia, J., Ghasemi, M. and Jalilian, R. (2010). A collocation method for the solution of nonlinear one-dimensional parabolic equations, *Mathematical Sciences*, **4**, 87-104.

[19] Rashidinia, J., Ghasemi, M. and Jalilian, R. (2010). Numerical solution of the nonlinear Klein-Gordon equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **233**, 1866-1878.

[20] Rashidinia, J. and Ghasemi, M. (2011). B-spline collocation for solution of two-point boundary value problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 2325-2342.

[21] Ghasemi, M. (2013). A new superconvergent method for systems of nonlinear singular boundary value problems, *International Journal of Computer Mathematic,* **90**, 955-977.

[22] Ghasemi, M. (2016). On using cubic spline for the solution of problemsin calculus of variations, *Numerical Algorithms,* **73**, 685-710.

[23] de Boor, C. (2001). A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, New York.

[24] Fyfe, D. (1971). Linear dependence relations connecting equal interval nth degree splines and theirderivatives, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications,* **7**, 398-406.

[25] Vainikko, G. (1966). The convergence of the collocation method for non-linear differential equations, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **6**, 47-58.

[26] Zhu, C.G., and Kang, W.S. (2010). Numerical solution of Burgers'-Fisher equation by cubic B-spline quasi-interpolation, *Applied Mathematics and Computation,* **216**, 2679-2686.

A Three Step Superconvergent Algorithm for the Solution of Generalized Burgers'-Huxley and Burgers'-Fisher Equations

Mohammad Ghasemi

Department of Mathematics, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

Abstract

In this paper, a new three-step method based on cubic spline will be construct to the numerical solution of a class of partial differential equations well-known as Burgers'-Huxley and Burgers'-Fisher. As we know, the maximum order achieved using cubic spline for interpolating is $O(h^4)$, but this order is reduced when it is used for the solution of differential equations. Here we will find an $O(h^6)$ superconvergent approximation for the solution of Burgers'-Huxley and Burgers'-Fisher equations by defining some proper end conditions and constructing a three step deferred-correction algorithm. We will discuss the convergence and error bounds of the method using Green's function definition in details. In addition, to verify the obtained error bounds, some numerical examples will be presented. Finally, we will try to show the applicability and efficiency of the method by comparing the results with other existing methods.

Keywords: Spline, Superconvergence approximations, Burgers'-Huxley equation, Burgers'-Fisher equation, Green's function, Convergence.

Mathematics Subject Classification (2010): 65M15, 65M06