استنباط پیرامون پارامتر تنش-مقاومت برای دو جامعه وایبول تحت طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی

حسین نادب[۱]، سعیده بافکری فدافن و حمزه ترابی

گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۴/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۹

چکیده: در این مقاله، استنباط پیرامون پارامتر تنش-مقاومت تحت طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی برای دو جامعه وایبول با پارامترهای شکل یکسان انجام می‌شود. ابتدا روش یافتن برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و بازه‌های اطمینان تقریب نرمال و بوت‌استرپ ارائه می‌شود. سپس با استفاده از شبیه‌سازی، عملکرد برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و بازه‌های اطمینان تقریب نرمال و بوت‌استرپ مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. سرانجام روش‌های ارائه‌شده، روی یک مجموعه از داده‌های واقعی انجام می‌شود.

واژه‌های کلیدی: بازه اطمینان تقریب نرمال، بازه اطمینان بوت‌استرپ، احتمال پوشش، سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی، پارامتر تنش-مقاومت.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۶۲N۰۱، ۶۲N۰۲.

۱- مقدمه

مدل‌های تنش-مقاومت به بررسی مقاومت مؤلفه موردنظر در برابر فشار وارد بر آن می‌پردازد که میزان این فشار یک متغیر تصادفی است. این مدل‌ها به‌طور گسترده در بسیاری از شاخه‌های علوم و فن‌آوری ازجمله، روانشناسی، داروسازی، پزشکی، مهندسی و به‌طورکلی در مسائلی که با مقایسه دو متغیر تصادفی مواجه هستند به‌کار می‌رود. اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند به‌طوری‌که برای یک سیستم، X نماد مقاومت آن و Y نماد تنش وارد بر آن در نظر گرفته شود، در این‌صورت، پارامتر $R=P(Y<X)$ به‌عنوان پارامتر تنش-مقاومت تعریف می‌شود. چنین سیستمی تا زمانی به عملکرد خود ادامه می‌دهد که مقاومت سیستم از تنش واردشده بر آن بیشتر باشد؛ به بیانی دیگر شرط $Y<X$ برقرار باشد. بنابراین، سیستم زمانی از کار می‌افتد

۱-آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: honadeb@yahoo.com

که نتواند در برابر تنش واردشده مقاومت کند. برای جزئیات بیشتر در مورد پارامتر R به کوتز و همکاران [۱] مراجعه شود.

طرح‌های گوناگون سانسور توأم، کاربرد گسترده‌ای در مقایسه طول عمر متغیرهای تصادفی در آزمون‌های طول عمر دارد. پارسی و همکاران [۲] استنباط برای پارامترهای دو جامعه وایبول تحت طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم را ارائه دادند. وانگ [۳] استنباطی دقیق برای خانواده مقیاس را تحت طرح سانسور فزاینده نوع دوم کلی مربوط به یک جامعه ارائه داد. ترابی و همکاران [۴] با تعمیم طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم، طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی را به‌صورت زیر معرفی و استنباط پیرامون پارامترهای دو جامعه وایبول را تحت این طرح انجام دادند.

فرض کنید m واحد آزمایشی از جامعه اول (X) و n واحد آزمایشی از جامعه دوم (Y) و درنتیجه، یک نمونه توأم با اندازه $N = m + n$ در اختیار است. تمام واحدها به‌طور هم‌زمان در یک آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند. فرض کنید طول عمر تعدادی از واحدهای اولیه $(l = l' + l'')$ در دسترس نباشد که l' تعداد واحدهای مشاهده نشده از نمونه انتخابی مربوط به جامعه اول و l'' تعداد واحدهای مشاهده نشده از نمونه انتخابی مربوط به جامعه دوم است. هم‌چنین فرض کنید $\mathbf{r} = (r_{l+1},\ldots,r_k)$ بردار معلومی باشد که قبل از شروع آزمایش توسط آزمایشگر تعیین می‌شود و نشان‌دهنده الگوی حذف تعدادی از واحدها در حین انجام آزمایش، تا قبل از زمان اتمام آن است. به‌این‌ترتیب که با مشاهده اولین شکست، r_{l+1} تا از واحدهای توأم باقی‌مانده $(r_{l+1} = r'_{l+1} + r''_{l+1})$، به‌طور تصادفی انتخاب و از آزمایش حذف می‌شوند که r'_{l+1} تعداد واحدهای حذف‌شده از نمونه انتخاب‌شده از جامعه اول و r''_{l+1} تعداد واحدهای حذف‌شده از نمونه انتخاب‌شده از جامعه دوم هستند. به همین ترتیب با مشاهده دومین شکست، $r_{l+2} = r'_{l+2} + r''_{l+2}$ تا از واحدهای باقی‌مانده از آزمایش حذف می‌شوند. اگر آزمایشگر برای صرفه‌جویی در زمان یا هزینه آزمایش، زمان اتمام آزمون طول عمر را زمان مشاهده kامین شکست تعیین کند، در زمان اتمام آزمایش، r_k تا واحد باقی‌مانده از آزمایش حذف می‌شوند که $r_k = N - l - k - r_{l+1} - \cdots - r_{l+k-1}$. واضح است که پس از اتمام آزمایش، یک بردار مشاهدات به‌صورت $\mathbf{w} = (w_{l+1},\ldots,w_k)$ و متناظر با آن بردار $\mathbf{z} = (z_{l+1},\ldots,z_k)$ در دسترس است که اگر w_i مربوط به نمونه اول (x)ها باشد، متغیر z_i برابر با ۱ و در غیر این‌صورت برابر با صفر تعریف می‌شود. به این طرح، طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی گفته می‌شود.

بنابر ترابی و همکاران [۴]، طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی می‌تواند نقش مهمی در مقایسه طول عمر محصولات واحدهای مختلف تولید، تحت شرایط یکسان داشته باشد. به‌عنوان مثال کارخانه‌ای با دو خط تولید را در نظر بگیرید. با استفاده از این طرح سانسور می‌توان تحت

شرایط آزمایشی یکسان، محصولات این دو خط تولید را به‌طور هم‌زمان در یک آزمایش طول عمر قرار داد تا کیفیت خط‌های مختلف تولید بررسی شوند. برتری این طرح سانسور این است که علاوه بر صرفه‌جویی در وقت و هزینه، نیازی به ایجاد شرایط آزمایش برای واحدهای دو جامعه به‌صورت مجزا نیست و با قرار دادن تمام واحدهای مربوط به دو جامعه در یک محیط آزمایشی و اعمال طرح سانسور، پس از پایان آزمایش می‌توان به انجام استنباط در مورد پارامترهای توزیع دو جامعه به‌طور هم‌زمان پرداخت.

پژوهش‌های مختلفی پیرامون پارامتر R تحت طرح‌های مختلف سانسور انجام‌شده است که می‌توان به برخی از آن‌ها مانند اصغر زاده و کاظمی [۵]، اصغر زاده و همکاران [۶]، اصغر زاده و همکاران [۷]، میرجلیلی و همکاران [۸]، ساراچوغلو و همکاران [۹] و ولی‌اللهی و همکاران [۱۰] اشاره کرد.

هدف این پژوهش استنباط در مورد پارامتر $R = P\left(Y < X\right)$ بر اساس طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی در دو جامعه وایبول است.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع وایبول با پارامترهای (α, β) باشد. در این‌صورت تابع توزیع آن به‌صورت زیر است:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right], \quad x > 0, \qquad (1)$$

که α پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل است.

۲- برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر R

فرض کنید $X_1,\ldots,X_m$ نمونه انتخابی از جامعه اول با تابع توزیع $F(.)$ و تابع چگالی $f(.)$ و $Y_1,\ldots,Y_n$ نمونه انتخابی از جامعه دوم با تابع توزیع $G(.)$ و تابع چگالی $g(.)$ باشند. تمام واحدهای دو نمونه در یک آزمون طول عمر تحت طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی قرار می‌گیرند. بنابراین بردار مشاهدات $\mathbf{w} = (w_{l+1},\ldots,w_k)$ و متناظر با آن، بردار $\mathbf{z} = (z_{l+1},\ldots,z_k)$ و بردار معلوم $\mathbf{r} = (r_{l+1},\ldots,r_k)$ در اختیار است. با توجه به مرجع [۴] تابع چگالی توأم $\mathbf{W}$ و $\mathbf{Z}$ به‌صورت زیر است:

$$f(\mathbf{w},\mathbf{z} \mid l',\mathbf{r}') = C\,[F(w_{l+1})]^{l'}\,[G(w_{l+1})]^{l''} \times \prod_{i=l+1}^{k} f(w_i)^{z_i}\, g(w_i)^{1-z_i}\, \overline{F}(w_i)^{r'_i}\, \overline{G}(w_i)^{r''_i}, \qquad (2)$$

که در آن C یک ضریب ثابت و l' و l'' به‌ترتیب تعداد xها و yهایی هستند که در l واحد اول حذف شده‌اند و در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$l' = m - \sum_{i=l+1}^{k} z_i - \sum_{i=l+1}^{k} r_i' ,$$

$$l'' = n - \sum_{i=l+1}^{k} (1 - z_i) - \sum_{i=l+1}^{k} r_i'' ,$$

بدیهی است که $l'' = l - l'$، $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

فرض کنید X و Y مستقل و دارای توزیع وایبول به‌ترتیب با پارامترهای (α_1, β) و (α_2, β) باشند. به‌سادگی دیده می‌شود که

$$R = P(Y < X) = \frac{\alpha_1^{\beta}}{\alpha_1^{\beta} + \alpha_2^{\beta}} \cdot \qquad (3)$$

برای یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر R، کافی است برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای دو جامعه محاسبه شوند. با استفاده از رابطه (۲)، تابع درستنمایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \beta) = C &\left(1 - \exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta}\right]\right)^{l'} \times \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta}\right]\right)^{l''} \\ &\times \left(\frac{\beta}{\alpha_1}\right)^{\sum_{i=l+1}^{k} z_i} \times \left(\frac{\beta}{\alpha_2}\right)^{\sum_{i=l+1}^{k} (1-z_i)} \prod_{i=l+1}^{k} \left(\frac{w_i}{\alpha_1}\right)^{(\beta-1) z_i} \\ &\times \left[\exp\left\{-\left(\frac{w_i}{\alpha_1}\right)^{\beta}\right\}\right]^{z_i + r_i'} \times \left(\frac{w_i}{\alpha_2}\right)^{(\beta-1)(1-z_i)} \times \left[\exp\left\{-\left(\frac{w_i}{\alpha_2}\right)^{\beta}\right\}\right]^{(1-z_i) + r_i''} . \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی $(\ln L(\alpha_1, \alpha_2, \beta))$ نسبت به هر یک از پارامترها داریم:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta}=\frac{l'\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta}\right]}{\left(1-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta}\right]\right)}$$

$$+\frac{l''\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta}\right]}{\left(1-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta}\right]\right)}$$

$$+\frac{k-l}{\beta}+\sum_{i=l+1}^{k} z_i \ln(\frac{w_i}{\alpha_1})-\sum_{i=l+1}^{k}(z_i+r_i')(\frac{w_i}{\alpha_1})^{\beta}\ln(\frac{w_i}{\alpha_1})$$

$$+\sum_{i=l+1}^{k}(1-z_i)\ln(\frac{w_i}{\alpha_2})-\sum_{i=l+1}^{k}(r_i''+1-z_i)(\frac{w_i}{\alpha_2})^{\beta}\ln(\frac{w_i}{\alpha_2}),$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_1}=-\frac{l'\left(\frac{\beta}{\alpha_1}\right)\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta}\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta}\right]}{\left(1-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta}\right]\right)}-\sum_{i=l+1}^{k} z_i\frac{\beta}{\alpha_1}$$

$$+\sum_{i=l+1}^{k}(z_i+r_i')(\frac{\beta}{\alpha_1})(\frac{w_i}{\alpha_1})^{\beta},$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_2}=-\frac{l''\left(\frac{\beta}{\alpha_2}\right)\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta}\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta}\right]}{\left(1-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta}\right]\right)}$$

$$-\sum_{i=l+1}^{k}(1-z_i)\frac{\beta}{\alpha_2}+\sum_{i=l+1}^{k}(1-z_i+r_i'')(\frac{\beta}{\alpha_2})(\frac{w_i}{\alpha_2})^{\beta}.$$

با صفر قرار دادن مشتقات بالا، معادله‌های درستنمایی به‌دست می‌آیند که با حل این معادله‌ها می‌توان برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای β، α_1 و α_2 را یافت. با توجه به رابطه (۳) و برآوردهای به‌دست آمده برای پارامترهای جامعه داریم:

$$\hat{R} = \frac{\hat{\alpha}_1^{\hat{\beta}}}{\hat{\alpha}_1^{\hat{\beta}} + \hat{\alpha}_2^{\hat{\beta}}}. \quad (۴)$$

اگر $\sum_{i=l+1}^{k} z_i = 0$ برآورد پارامترهای α_1 و β و اگر $\sum_{i=l+1}^{k} z_i = k$ برآورد پارامترهای α_2 و β وجود ندارد. بنابراین در این دو حالت برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر R وجود نخواهد داشت. همان‌طور که مشاهده می‌شود نمی‌توان فرم بسته‌ای برای برآورد پارامترها و درنتیجه پارامتر R ارائه داد. بنابراین باید از روش‌های عددی آن‌ها را به‌دست آورد. خوشبختانه حل چنین دستگاه‌هایی با استفاده از نرم‌افزارها به‌سادگی امکان‌پذیر است که در این مقاله از نرم‌افزار R و تابع optim موجود در آن استفاده می‌شود. در بخش مطالعات شبیه‌سازی، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند که در آن از مقادیر واقعی پارامترها به‌عنوان مقادیر اولیه در تابع optim استفاده‌شده است.

۳-بازه اطمینان برای پارامتر R

در این بخش، روش یافتن بازه‌های اطمینان تقریب نرمال و بوت‌استرپ پارامتری، برای پارامتر R ارائه می‌شود که بازه اطمینان بوت‌استرپ با استفاده از دو روش بوت‌استرپ $-t$ و بوت‌استرپ $-p$ بیان می‌شود.

۳-۱-بازه اطمینان تقریب نرمال (AN)

بازه اطمینان تقریب نرمال، با استفاده از معکوس ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده و به‌کارگیری روش دلتا به‌دست می‌آید. با در نظر گرفتن بردار پارامتری $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) := (\beta, \alpha_1, \alpha_2)$، روشن است که ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده به‌صورت زیر است:

$$I(\boldsymbol{\theta})=-\begin{pmatrix}\frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\beta^{۲}} & \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\beta\partial\alpha_{۱}} & \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\beta\partial\alpha_{۲}}\\ \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\alpha_{۱}\partial\beta} & \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\alpha_{۱}^{۲}} & \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\alpha_{۱}\partial\alpha_{۲}}\\ \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\alpha_{۲}\partial\beta} & \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\alpha_{۲}\partial\alpha_{۱}} & \frac{\partial^{۲}\log L}{\partial\alpha_{۲}^{۲}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{۱۱} & I_{۱۲} & I_{۱۳}\\ I_{۲۱} & I_{۲۲} & I_{۲۳}\\ I_{۳۱} & I_{۳۲} & I_{۳۳}\end{pmatrix}.$$

به‌سادگی دیده می‌شود که $I_{۲۳}=I_{۳۲}=۰$. پس با معکوس کردن ماتریس اطلاع فیشر مشاهده شده، ماتریس واریانس-کوواریانس تقریبی، $A=\left[a_{ij}\right]$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A=\frac{۱}{u}\begin{pmatrix}I_{۲۲}I_{۳۳} & -I_{۱۲}I_{۳۳} & -I_{۲۲}I_{۱۳}\\ -I_{۲۱}I_{۳۳} & I_{۱۱}I_{۳۳}-I_{۱۳}I_{۳۱} & I_{۲۱}I_{۱۳}\\ -I_{۲۲}I_{۳۱} & I_{۱۲}I_{۳۱} & I_{۱۱}I_{۲۲}-I_{۱۲}I_{۲۱}\end{pmatrix},$$

که در آن $u=I_{۱۱}I_{۲۲}I_{۳۳}-I_{۱۲}I_{۲۱}I_{۳۳}-I_{۱۳}I_{۳۱}I_{۲۲}$. برای یافتن واریانس $\hat{R}$ (V)، از روش دلتا استفاده می‌شود. با توجه به رابطه (۴) داریم:

$$\hat{R}=g(\hat{\beta},\hat{\alpha}_{۱},\hat{\alpha}_{۲}),$$

به‌طوری‌که $g(\beta,\alpha_{۱},\alpha_{۲})=\frac{\alpha_{۱}^{\beta}}{\alpha_{۱}^{\beta}+\alpha_{۲}^{\beta}}$. با به‌کارگیری روش دلتا داریم:

$$V=b^{t}Ab,$$

که در آن

$$b=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial\beta}\\ \frac{\partial g}{\partial\alpha_{۱}}\\ \frac{\partial g}{\partial\alpha_{۲}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R\left(۱-R\right)\left(\log\frac{\alpha_{۱}}{\alpha_{۲}}\right)\\ \frac{\beta}{\alpha_{۱}}R\left(۱-R\right)\\ -\frac{\beta}{\alpha_{۲}}R\left(۱-R\right)\end{pmatrix}.$$

برای سادگی محاسبات قرار می‌دهیم:

$$R\left(۱-R\right)\left(\log\frac{\alpha_{۱}}{\alpha_{۲}}\right)=c_{۱},$$

$$\frac{\beta}{\alpha_{۱}}R\left(۱-R\right)=c_{۲},$$
$$-\frac{\beta}{\alpha_{۲}}R\left(۱-R\right)=c_{۳}\cdot$$

درنتیجه

$$V=b^{t}Ab=\frac{۱}{u}[c_{۱}^{۲}I_{۲۲}I_{۳۳}+c_{۲}^{۲}\left(I_{۱۱}I_{۳۳}-I_{۱۳}^{۲}\right)+c_{۳}^{۲}(I_{۱۱}I_{۲۲}-I_{۱۲}^{۲})$$
$$-۲c_{۱}c_{۲}I_{۱۲}I_{۳۳}-۲c_{۱}c_{۳}I_{۲۲}I_{۱۳}+۲c_{۲}c_{۳}I_{۱۲}I_{۱۳}]\cdot$$

برای برآورد V کافی است به‌جای پارامترها، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی آن‌ها را قرار دهیم. بنابراین بازه اطمینان تقریب نرمال برای پارامتر R به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\hat{R}-Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}},\hat{R}+Z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}}\right),$$

که در آن Z_{α} نشان‌دهنده چندک مرتبه αام توزیع نرمال استاندارد است.

۳-۲-روش بوت‌استرپ پارامتری

در این قسمت به چگونگی استفاده از روش بوت‌استرپ پارامتری برای برآورد پارامترها و تعیین بازه اطمینان برای آن‌ها پرداخته می‌شود. برای اطلاعات بیشتر و کلی‌تر در مورد روش بوت‌استرپ می‌توان به افرون و تیبشیرانی [۱۱] مراجعه کرد.

فرض کنید دو نمونه تصادفی به اندازه‌های m و n از دو جامعه مستقل دارای توزیع وایبول به‌ترتیب با پارامترهای $(\alpha_{۱},\beta)$ و $(\alpha_{۲},\beta)$ در یک آزمون طول عمر تحت طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی قرار گیرند. پس از پایان آزمایش، بردارهای $\left(w_{l+۱},...,w_{k}\right)$ و $\left(z_{l+۱},...,z_{k}\right)$ در اختیار است. برای یافتن بازه اطمینان پارامتر R با استفاده از روش بوت‌استرپ پارامتری، ابتدا با استفاده از مشاهدات و حل معادلات درستنمایی، $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}_{۱}$، $\hat{\alpha}_{۲}$ و $\hat{R}$ به‌دست می‌آیند. فرض کنید B به‌عنوان تعداد تکرارها در روش بوت‌استرپ انتخاب شود. بنابراین B نمونه به اندازه m از توزیع وایبول با پارامترهای $(\hat{\alpha}_{۱},\hat{\beta})$ و به اندازه n از توزیع وایبول با پارامترهای $(\hat{\alpha}_{۲},\hat{\beta})$ تولید می‌شود و تحت سانسور موردنظر قرار می‌گیرد که منجر به بردارهای $\left(z^{*}_{l+۱(i)},...,z^{*}_{k(i)}\right)$ و $\left(w^{*}_{l+۱(i)},...,w^{*}_{k(i)}\right)$ به‌ازای $i=۱,...,B$ می‌شود. اینک با در اختیار داشتن این بردارها، می‌توان از دو روش بوت‌استرپ استفاده کرد که در زیر شرح داده می‌شوند.

- روش بوت‌استرپ $p-$ (BP):

با استفاده از نمونه‌های تولید شده $\left(w^*_{l+1(i)},\ldots,w^*_{k(i)}\right)$ و $\left(z^*_{l+1(i)},\ldots,z^*_{k(i)}\right)$ که در بالا توضیح داده شد، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر R در هر نمونه توأم به ازاء $i=1,\ldots,B$ به‌دست آمده و $\hat{R}^*_i$ نامیده می‌شود. بنابراین با توجه به افرون و تیبشیرانی [۱۱] بازه اطمینان با استفاده از روش بوت‌استرپ $p-$ با ضریب اطمینان $1-\alpha$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\left(\hat{R}^*_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)},\hat{R}^*_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right),$$

که $\hat{R}^*_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $\hat{R}^*_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ به‌ترتیب چندک‌های مرتبه $\frac{\alpha}{2}$ و $1-\frac{\alpha}{2}$ هستند که پس از مرتب کردن $\hat{R}^*_1,\cdots,\hat{R}^*_B$ به‌دست می‌آیند.

- روش بوت‌استرپ $t-$ (BT):

ابتدا با استفاده از بردار مشاهدات موجود، برآورد پارامتر R به‌دست آمده و $\hat{R}$ نامیده می‌شود. سپس مشابه روش بوت‌استرپ $p-$ با استفاده از B نمونه تولید شده برآوردهای $\hat{R}^*_1,\cdots,\hat{R}^*_B$ محاسبه می‌شود. برآورد بوت‌استرپ R با $\hat{R}^*$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر است:

$$\hat{R}^*=\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{R}^*_i.$$

برآوردهای حاصل از نمونه‌های تولید شده به‌صورت زیر استاندارد می‌شوند:

$$T_{\hat{R}^*_i}=\frac{\hat{R}^*_i-\hat{R}}{\hat{\mathrm{sd}}(\hat{R}^*)},\quad i=1,\ldots,B,$$

که در آن، $\hat{\mathrm{sd}}(\hat{\mathrm{R}}^*)$ انحراف معیار $\hat{R}^*_i$ها است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\mathrm{sd}}(\hat{\mathrm{R}}^*)=\sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{R}^*_i-\hat{R}^*\right)^2}.$$

بنابراین با استفاده از افرون و تیبشیرانی [۱۱]، بازه اطمینان بوت‌استرپ $t-$ با ضریب اطمینان $1-\alpha$ به‌صورت زیر است:

$$\left(\hat{R}-\hat{\mathrm{sd}}(\hat{\mathrm{R}}^{*})\mathrm{T}_{\hat{\mathrm{R}}^{*}(1-\frac{\alpha}{2})},\hat{R}-\hat{\mathrm{sd}}(\hat{\mathrm{R}}^{*})\mathrm{T}_{\hat{\mathrm{R}}^{*}(\frac{\alpha}{2})}\right).$$

که در آن، $T_{\hat{\mathrm{R}}^{*}(1-\frac{\alpha}{2})}$ و $T_{\hat{\mathrm{R}}^{*}(\frac{\alpha}{2})}$ به‌ترتیب چندک‌های $1-\frac{\alpha}{2}$ و $\frac{\alpha}{2}$ در بین $T_{\hat{R}_1^*},...,\mathrm{T}_{\hat{R}_B^*}$ هستند.

۴- مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، با استفاده از شبیه‌سازی عملکرد روش‌های استنباط ارائه شده در مورد پارامتر R که در بخش‌های پیشین ارائه شد، ارزیابی می‌شود. برای این منظور، دو حالت را در نظر می‌گیریم. در حالت اول فرض می‌شود جامعه اول (X) دارای توزیع وایبول با پارامترهای $(\alpha_1,\beta)=(2,4)$ و جامعه دوم (Y) دارای توزیع وایبول با پارامترهای $(\alpha_2,\beta)=(3,4)$ است. در حالت دوم فرض می‌شود جامعه اول دارای توزیع وایبول با پارامترهای $(\alpha_1,\beta)=(2,0/7)$ و جامعه دوم دارای توزیع وایبول با پارامترهای $(\alpha_2,\beta)=(3,0/7)$ است. در این قسمت روش شبیه‌سازی مربوط به حالت اول را شرح می‌دهیم. روشن است که با تغییر پارامترها، برای حالت دوم نیز قابل استفاده است.

برای ارزیابی عملکرد برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر R، کافی است تحت یک طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی مشخص، تعداد زیادی $\hat{R}$ شبیه‌سازی کنیم. برای این منظور، ۱۰۰۰ بار نمونه‌هایی به اندازه m از توزیع وایبول با پارامترهای (۲,۴) و نمونه‌هایی به اندازه n از توزیع وایبول با پارامترهای (۳,۴) تولید می‌کنیم. در هر بار تکرار، داده‌ها را باهم ترکیب کرده و پس از مرتب کردن، تحت طرح سانسور موردنظر قرار می‌دهیم تا بردارهای $\mathbf{w}=(w_{l+1}\cdots,w_k)$ و $\mathbf{z}=(z_{l+1},...,z_k)$ به‌دست آیند. با حل معادله‌های درستنمایی بخش ۲ و با استفاده از رابطه (۴) برآورد پارامتر R در هر بار تکرار به‌دست می‌آید. فرض کنید $\hat{R}_i$ نشان‌دهنده برآورد پارامتر R در تکرار iام به‌ازای $i=1,\ldots,1000$ باشد. در این صورت برآورد اریبی (Bias) به‌صورت $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}\hat{R}_i-R$ و برآورد میانگین مربعات خطا (MSE) به‌صورت $\frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000}\left(\hat{R}_i-R\right)^2$ خواهد بود. مقادیر اریبی و میانگین مربعات خطا برای طرح‌های مختلف سانسور و مقادیر مختلف پارامترها در جدول ۱ آورده شده است.

برای ارزیابی عملکرد بازه اطمینان اغلب مفهوم احتمال پوشش (CP) و میانگین طول بازه (AL) مطرح می‌شود. بنابر بخش‌های ۳-۱ و ۳-۲ بازه‌های اطمینان روش‌های تقریب نرمال

(AN) و بوت‌استرپ بر اساس بردارهای $\mathbf{w}=(w_{l+1},\cdots,w_k)$ و $\mathbf{z}=(z_{l+1},\ldots,z_k)$ به‌دست می‌آیند. در این پژوهش تعداد شبیه‌سازی برای محاسبه بازه‌های اطمینان بوت‌استرپ برابر با ۱۰۰و تعداد تکرار برای برآورد احتمال پوشش و میانگین طول بازه در روش‌های تقریب نرمال و بوت‌استرپ ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده است. توجه شود که تعداد شبیه‌سازی ۱۰۰ بازه اطمینان بوت‌استرپ و تعداد تکرار ۱۰۰۰ برای برآورد احتمال پوشش و میانگین طول بازه در روش‌های تقریب نرمال و بوت‌استرپ، موجه است چون با این تعداد تکرار نتایج تغییر نمی‌کند. برای برآورد میانگین طول کافی است میانگین طول بازه‌های اطمینان شبیه‌سازی شده و برای برآورد احتمال پوشش کافی است نسبتی از بازه‌های اطمینان را که مقدار پارامتر را شامل می‌شوند، به‌دست آوریم.

جدول (۱): برآورد اریبی و میانگین مربعات خطا با فرض $\alpha_1=۲$ و $\alpha_2=۳$

$\beta=۰/۷$		$\beta=۴$						
MSE	Bias	MSE	Bias	(m,n)	**r**	l	k	N
۰/۰۳۶۶	۰/۰۲۰۳	۰/۰۲۰۱	۰/۰۱۶۲	(۲۰,۱۰)	(۰,۲۰,۰,...,۰)	۰	۱۰	۳۰
۰/۰۳۳۰	۰/۰۰۵۸	۰/۰۱۳۰	−۰/۰۰۶۴	(۱۵,۱۵)				
۰/۰۳۶۲	−۰/۰۲۲۲	۰/۰۱۲۸	−۰/۰۱۰۷	(۱۰,۲۰)				
۰/۰۲۱۰	۰/۰۰۳۷	۰/۰۱۱۱	۰/۰۱۰۳	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۵,۰,...,۰)	۵		
۰/۰۱۸۸	−۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۸۴	−۰/۰۰۰۵	(۱۵,۱۵)				
۰/۰۲۰۱	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۷۸	−۰/۰۰۰۴	(۱۰,۲۰)				
۰/۰۱۵۷	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۷۷	۰/۰۰۳۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۰,۰,...,۰)	۱۰		
۰/۰۱۳۵	−۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۶۱	−۰/۰۰۳۰	(۱۵,۱۵)				
۰/۰۱۴۸	−۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۵۴	−۰/۰۰۰۷	(۱۰,۲۰)				
۰/۰۱۹۸	−۰/۰۰۰۵	۰/۰۱۰۸	۰/۰۱۳۳	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳,	۰	۱۵	
۰/۰۱۶۶	−۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۰۴	(۱۵,۱۵)	۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)			
۰/۰۱۷۷	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۶۷	−/۰۰۱۵	(۱۰,۲۰)				
۰/۰۱۴۳	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۹۹	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰,	۵		
۰/۰۱۲۳	−۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۵۲	(۱۵,۱۵)	۰,۲,۲,۰,۲,۰,۰)			
۰/۰۱۳۱	−۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۵۳	−۰/۰۰۲۲	(۱۰,۲۰)				
۰/۰۱۳۳	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۵۷	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۰,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	۰	۲۰	۵۰
۰/۰۱۱۹	−۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۵۶	۰/۰۰۴۴	(۲۵,۲۵)				
۰/۰۱۲۰	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۴۸	(۲۰,۳۰)				
۰/۰۰۹۹	−۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۴۷	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۰,۱۰,۱۰,۵,۰)	۵		
۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۵۳	(۲۵,۲۵)				
۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۶۱	(۲۰,۳۰)				

مقادیر میانگین طول و احتمال پوشش بازه‌ی اطمینان ٪۹۰ برای طرح‌های مختلف سانسور با پارامترهای $\beta=۴,\alpha_۱=۲,\alpha_۲=۳$ در جدول ۲ و با پارامترهای $\beta=۰/۷,\alpha_۱=۲,\alpha_۲=۳$ در جدول ۳ آورده شده است.

جدول (۲): احتمال پوشش و میانگین طول بازه‌های اطمینان برای پارامتر R با فرض $\beta=۴,\alpha_۱=۲,\alpha_۲=۳$

BP		BT		AN						
AL	CP	AL	CP	AL	CP	(m,n)	**r**	l	k	N
۰/۳۸۸۶	۰/۸۱۱۰	۰/۳۰۶۷	۰/۶۹۱۰	۰/۳۱۲۵	۰/۷۱۷۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۲۰,۰,...,۰)	۰	۱۰	۳۰
۰/۳۰۷۹	۰/۷۸۰۰	۰/۲۷۲۲	۰/۶۷۸۰	۰/۲۷۹۳	۰/۷۳۵۰	(۱۵,۱۵)				
۰/۲۹۴۲	۰/۷۳۵۰	۰/۲۶۷۸	۰/۶۴۴۰	۰/۲۸۳۰	۰/۷۲۸۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۳۱۳۷	۰/۸۵۶۰	۰/۲۸۴۴	۰/۷۵۰۰	۰/۲۷۶۰	۰/۷۷۹۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۵,۰,...,۰)	۵		
۰/۲۶۷۰	۰/۸۱۸۰	۰/۲۵۳۷	۰/۷۴۴۰	۰/۲۴۰۴	۰/۷۹۱۰	(۱۵,۱۵)				
۰/۲۵۶۳	۰/۸۰۳۰	۰/۲۴۶۴	۰/۷۳۶۰	۰/۲۳۸۹	۰/۷۸۸۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۲۵۸۶	۰/۸۴۰۰	۰/۲۴۶۷	۰/۷۷۱۰	۰/۲۳۹۹	۰/۷۸۵۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۰,۰,...,۰)	۱۰		
۰/۲۳۱۷	۰/۸۴۶۰	۰/۲۲۷۷	۰/۷۹۶۰	۰/۲۰۷۵	۰/۷۹۲۰	(۱۵,۱۵)				
۰/۲۲۸۳	۰/۸۵۹۴	۰/۲۲۵۸	۰/۷۹۶۴	۰/۲۰۹۲	۰/۷۷۹۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۳۰۵۶	۰/۸۸۱۰	۰/۲۷۲۹	۰/۷۶۸۰	۰/۳۰۳۶	۰/۸۳۱۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳	۰	۱۵	
۰/۲۵۲۱	۰/۸۳۸۰	۰/۲۴۱۵	۰/۷۵۷۰	۰/۲۴۷۲	۰/۸۰۲۰	(۱۵,۱۵)	۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)			
۰/۲۴۱۱	۰/۸۲۱۰	۰/۲۳۶۵	۰/۷۶۶۰	۰/۲۳۷۵	۰/۷۹۰۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۲۵۹۲	۰/۸۸۵۰	۰/۲۴۶۸	۰/۷۹۵۰	۰/۲۵۹۴	۰/۸۵۴۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰	۵		
۰/۲۲۷۷	۰/۸۷۲۰	۰/۲۲۴۹	۰/۸۲۰۰	۰/۲۱۶۵	۰/۸۳۲۰	(۱۵,۱۵)	۰,۲,۲,۰,۲,۰,۰)			
۰/۲۲۰۰	۰/۸۴۴۰	۰/۲۱۸۵	۰/۸۱۰۰	۰/۲۰۷۵	۰/۸۰۹۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۲۴۶۳	۰/۸۲۵۰	۰/۲۳۳۴	۰/۷۵۱۰	۰/۲۷۲۳	۰/۸۵۵۰	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۰,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	۰	۲۰	۵۰
۰/۲۳۱۷	۰/۸۸۰۰	۰/۲۲۷۲	۰/۸۲۳۰	۰/۲۴۶۶	۰/۸۶۱۰	(۲۵,۲۵)				
۰/۲۱۵۷	۰/۸۷۲۰	۰/۲۱۴۲	۰/۸۲۴۰	۰/۲۳۲۰	۰/۸۸۷۰	(۲۰,۳۰)				
۰/۲۲۴۹	۰/۸۸۰۰	۰/۲۲۰۱	۰/۷۹۱۰	۰/۲۴۳۷	۰/۸۹۱۰	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۰,۱۰,۱۰,۵,۰)	۵		
۰/۲۰۳۵	۰/۸۸۳۰	۰/۲۰۲۴	۰/۸۴۵۰	۰/۲۲۱۸	۰/۸۹۱۰	(۲۵,۲۵)				
۰/۱۹۰۹	۰/۸۸۱۰	۰/۱۹۰۷	۰/۸۳۶۰	۰/۲۰۱۸	۰/۸۸۹۰	(۲۰,۳۰)				

همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، در تمام حالات میزان اریبی به صفر نزدیک است پس برآوردگر از نظر نااریبی وضعیت مطلوبی دارد. همچنین به‌ازای مقادیر ثابت m، nو l، با

افزایش مقدار k (تعداد شکست‌های مشاهده شده)، مطابق انتظار مقدار MSE کاهش می‌یابد. هم‌چنین ملاحظه می‌شود که در حالت $\beta=۴$ عملکرد برآوردگر بهتر از حالت $\beta=۰/۷$ است.

با توجه به جدول‌های ۲ و ۳، مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار k، احتمال پوشش تمام بازه‌های اطمینان افزایش می‌یابد که یک نتیجه منطقی و مورد انتظار است.

جدول (۳): احتمال پوشش و میانگین طول بازه‌های اطمینان برای پارامتر R با فرض $\beta=۰/۷,\alpha_۱=۲,\alpha_۲=۳$

BP		BT		AN						
AL	CP	AL	CP	AL	CP	(m,n)	**r**	l	k	N
۰/۵۴۳۳	۰/۸۲۸۰	۰/۵۱۳۸	۰/۷۲۶۰	۰/۵۴۷۱	۰/۸۶۳۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۲۰,۰,...,۰)	۰	۱۰	۳۰
۰/۵۱۸۹	۰/۸۳۶۰	۰/۵۰۷۹	۰/۷۶۲۰	۰/۵۲۰۹	۰/۸۷۴۰	(۱۵,۱۵)				
۰/۵۱۶۲	۰/۸۱۴۰	۰/۵۰۲۳	۰/۷۳۳۰	۰/۵۶۱۴	۰/۹۱۲۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۴۳۳۳	۰/۸۵۲۰	۰/۴۳۰۳	۰/۷۷۷۰	۰/۴۵۸۵	۰/۸۸۸۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۵,۰,...,۰)	۵		
۰/۴۱۶۹	۰/۸۶۹۰	۰/۴۱۶۱	۰/۸۳۷۰	۰/۴۳۴۶	۰/۹۲۱۰	(۱۵,۱۵)				
۰/۴۲۷۲	۰/۸۵۲۰	۰/۴۲۶۵	۰/۸۰۶۰	۰/۴۵۹۳	۰/۹۲۳۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۳۸۰۸	۰/۸۵۱۰	۰/۳۸۰۲	۰/۸۲۰۰	۰/۴۰۱۲	۰/۸۹۶۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۰,۰,...,۰)	۱۰		
۰/۳۵۹۲	۰/۸۴۷۰	۰/۳۵۹۲	۰/۸۲۲۰	۰/۳۷۷۳	۰/۹۲۳۰	(۱۵,۱۵)				
۰/۳۷۱۲	۰/۸۶۶۰	۰/۳۷۱۲	۰/۸۳۴۰	۰/۴۰۰۶	۰/۹۴۴۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۴۲۴۰	۰/۸۷۳۰	۰/۴۲۱۵	۰/۸۱۰۰	۰/۴۵۱۶	۰/۹۰۰۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳	۰	۱۵	
۰/۳۹۴۰	۰/۸۶۹۰	۰/۳۹۳۷	۰/۸۰۸۰	۰/۴۲۴۲	۰/۹۲۸۰	(۱۵,۱۵)	۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)			
۰/۴۱۰۹	۰/۸۶۳۰	۰/۴۱۰۵	۰/۸۰۳۰	۰/۴۴۴۸	۰/۹۰۹۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۳۶۸۷	۰/۸۷۵۰	۰/۳۶۸۵	۰/۸۲۳۰	۰/۳۹۰۴	۰/۹۱۲۰	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰	۵		
۰/۳۴۵۰	۰/۸۷۱۰	۰/۳۴۵۰	۰/۸۱۷۰	۰/۳۶۸۵	۰/۹۳۱۰	(۱۵,۱۵)	۰,۲,۲,۰,۲,۰,۰)			
۰/۳۵۸۹	۰/۸۷۶۰	۰/۳۵۸۹	۰/۸۴۳۰	۰/۳۸۸۹	۰/۹۴۴۰	(۱۰,۲۰)				
۰/۳۵۱۴	۰/۸۷۹۰	۰/۳۵۱۲	۰/۸۲۵۰	۰/۳۷۷۷	۰/۹۴۲۰	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۰,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	۰	۲۰	۵۰
۰/۳۳۸۹	۰/۸۶۱۰	۰/۳۳۸۸	۰/۸۲۸۰	۰/۳۶۶۱	۰/۹۳۵۰	(۲۵,۲۵)				
۰/۳۴۲۵	۰/۸۸۳۰	۰/۳۴۲۵	۰/۸۴۰۰	۰/۳۶۸۴	۰/۹۲۸۰	(۲۰,۳۰)				
۰/۳۱۳۲	۰/۸۷۴۰	۰/۳۱۳۲	۰/۸۳۵۰	۰/۳۳۷۶	۰/۹۳۵۰	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۰,۱۰,۱۰,۵,۰)	۵		
۰/۳۰۲۹	۰/۸۷۹۰	۰/۳۰۲۹	۰/۸۴۸۰	۰/۳۲۷۶	۰/۹۴۲۰	(۲۵,۲۵)				
۰/۳۰۵۲	۰/۸۶۶۰	۰/۳۰۵۲	۰/۸۲۲۰	۰/۳۳۱۵	۰/۹۳۰۰	(۲۰,۳۰)				

هم‌چنین در جدول ۲، از نظر میانگین طول تفاوت محسوسی بین بازه‌های اطمینان تقریب نرمال و بوت‌استرپ دیده نمی‌شود اما برای مقادیر کوچک k، احتمال‌های پوشش بازه‌های اطمینان بوت‌استرپ $-p$ بهتر از روش تقریب نرمال و احتمال‌های پوشش بازه‌های اطمینان تقریب نرمال بهتر از روش بوت‌استرپ $-t$ عمل می‌کنند.

با بررسی جدول ۳ مشاهده می‌شود که از نظر میانگین طول، تفاوت محسوسی بین بازه‌های اطمینان تقریب نرمال و بوت‌استرپ وجود ندارد اما براساس احتمال‌های پوشش، روش تقریب نرمال نسبت به دو روش‌های بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارد.

بنابراین در حالت $\beta>۱$، برای مقدار کوچک k روش بوت‌استرپ $-p$ و برای مقدار بزرگ k روش تقریب نرمال و در حالت $\beta<۱$ روش تقریب نرمال پیشنهاد می‌شود.

مثال- برای نشان دادن کاربرد روش‌های ارائه شده در این پژوهش، داده‌های موجود در اسمیت و نیلور [۱۲] را به‌کار می‌گیریم. این داده‌ها میزان استحکام الیاف شیشه‌ای با دو طول متفاوت ۱/۵ سانتی‌متر و ۱۵ سانتی‌متر را نشان می‌دهد که در آزمایشگاه ملی فیزیک انگلستان جمع‌آوری شده‌اند. ترابی و همکاران [۴] با حذف داده‌های تکراری به داده‌های موجود در جدول‌های ۴ و ۵ رسیدند. نمونه اول (x) شامل ۳۹ مشاهده و نمونه دوم (y) شامل ۲۷ مشاهده است. با انجام آزمون برابری پارامترهای شکل در دو توزیع با استفاده از آماره آزمون نسبت درستنمایی (λ)، مقدار آماره $-۲\log(\lambda)$ برابر با ۰/۱۹۱۱ به‌دست می‌آید و چون آماره $-۲\log(\lambda)$ دارای توزیع خی‌دو با یک درجه آزادی است پس $p-$مقدار با ۰/۶۷۶۰ برابر است که فرض برابری پارامترهای شکل را می‌پذیرد. هم‌چنین آماره آزمون کولموگروف-اسمیرنف وایبول بودن توزیع نمونه اول را با $\hat{\alpha}_۱=۱/۶۴۵۲$ و $\hat{\beta}=۴/۸۹۱۹$ و وایبول بودن توزیع نمونه دوم را با $\hat{\alpha}_۲=۱/۱۳۵۴$ و $\hat{\beta}=۴/۸۹۱۹$ می‌پذیرد که $\hat{\alpha}_۱،\hat{\alpha}_۲$ و $\hat{\beta}$ برآورد پارامترها تحت نمونه کامل موجود در جدول‌های ۴ و ۵ هستند. بنابراین با استفاده از داده‌های کامل داریم $\hat{R}=۰/۸۵۹۹$. شکل ۱ برازش توزیع وایبول با پارامترهای $\left(\hat{\alpha}_۱,\hat{\beta}\right)=\left(۱/۶۴۵۲,۴/۸۹۱۹\right)$ روی داده‌های x و برازش توزیع وایبول با پارامترهای $\left(\hat{\alpha}_۲,\hat{\beta}\right)=\left(۱/۱۳۵۴,۴/۸۹۱۹\right)$ را روی داده‌های y نشان می‌دهد.

جدول (۴): نمونه اول (x)

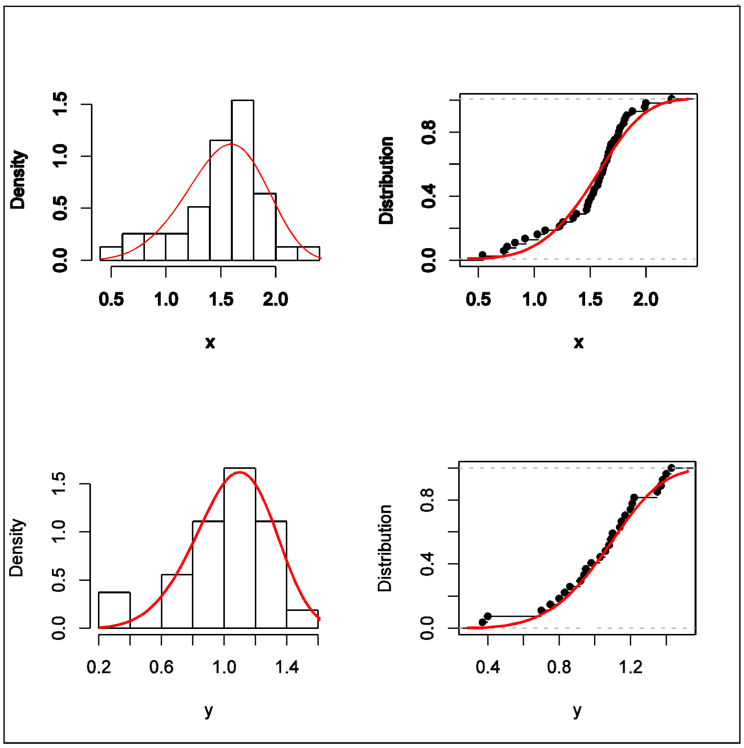
۰/۵۵	۰/۷۴	۰/۷۷	۰/۸۴	۰/۹۳	۱/۰۴	۱/۱۱	۱/۲۴	۱/۲۷	۱/۳۶
۱/۳۹	۱/۴۸	۱/۴۹	۱/۵۰	۱/۵۲	۱/۵۴	۱/۵۵	۱/۵۸	۱/۵۹	۱/۶۰
۱/۶۲	۱/۶۳	۱/۶۴	۱/۶۶	۱/۶۷	۱/۶۸	۱/۶۹	۱/۷۰	۱/۷۳	۱/۷۶
۱/۷۷	۱/۷۸	۱/۸۱	۱/۸۲	۱/۸۴	۱/۸۹	۲/۰۰	۲/۰۱	۲/۲۴	

جدول (۵): نمونه دوم (y)

۰/۳۷	۰/۴۰	۰/۷۰	۰/۷۵	۰/۸۰	۰/۸۳	۰/۸۶	۰/۹۲	۰/۹۴	۰/۹۵
۰/۹۸	۱/۰۳	۱/۰۶	۱/۰۸	۱/۰۹	۱/۱۰	۱/۱۴	۱/۱۵	۱/۱۷	۱/۲۰
۱/۲۱	۱/۲۲	۱/۳۵	۱/۳۷	۱/۳۸	۱/۴۰	۱/۴۳			

جدول (۶): نمونه سانسور شده توأم فزاینده نوع دوم کلی

w_i	z_i	w_i	z_i	w_i	z_i	w_i	z_i	w_i	z_i
۱/۶۰	۱	۱/۴۹	۱	۱/۳۹	۱	۱/۲۷	۱	۱/۲۰	۰
۱/۶۶	۱	۱/۵۰	۱	۱/۴۰	۰	۱/۳۵	۰	۱/۲۱	۰
۱/۶۸	۱	۱/۵۵	۱	۱/۴۳	۰	۱/۳۷	۰	۱/۲۲	۰
۱/۸۴	۱	۱/۵۹	۱	۱/۴۸	۱	۱/۳۸	۰	۱/۲۴	۱



شکل (۱): برازش توزیع وایبول با پارامترهای $(\hat{\alpha}_1,\hat{\beta})=(۱/۶۴۵۲,۴/۸۹۱۹)$ روی داده‌های x و برازش توزیع وایبول با پارامترهای $(\hat{\alpha}_2,\hat{\beta})=(۱/۱۳۵۴,۴/۸۹۱۹)$ را روی داده‌های y

با به‌کارگیری روشی مشابه با روش ترابی و همکاران [۴]، با ترکیب کردن دو نمونه و به‌کارگیری طرح سانسور با $l=$ ۲۶ و $\mathbf{r}=(۱,\ldots,۱)$ به طول ۲۰، داده‌های جدول۶ به‌دست آمده است. با استفاده از داده‌های جدول۶، $\hat{R}=$ ۰/۸۸۳۹، بازه اطمینان تقریب نرمال $(۰/۸۲۱۲,۰/۹۴۶۵)$، بازه اطمینان بوت‌استرپ $-t$، $(۰/۸۲۲۳,۰/۹۶۲۲)$ و بازه اطمینان بوت‌استرپ $-p$ با ضریب اطمینان ۰/۹ به‌صورت $(۰/۸۰۵۷,۰/۹۴۵۶)$ به‌دست می‌آید. همان‌گونه که مشاهده می‌شود برآورد پارامتر R تحت سانسور معرفی شده بسیار نزدیک به برآورد آن در حالت داده‌های کامل است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برآورد پارامتر تنش-مقاومت (R) و روش‌های یافتن بازه‌های اطمینان تقریب نرمال و بوت‌استرپ برای دو جامعه وایبول با پارامترهای شکل یکسان تحت سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی ارائه شد. سپس دقت برآوردگرها و عملکرد بازه‌های اطمینان برای طرح‌های مختلف سانسور و پارامترهای مختلف با استفاده از شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفت. سرانجام روش‌های ارائه شده، بر روی یک مجموعه داده به کار گرفته شد.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای ارزنده‌شان که باعث بهبودی مقاله گردید تشکر می‌کنند.

منابع

[1] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003). *The Stress-Strength Model and its Generalizations*. New York: World Scientific.

[2] Parsi, S., Ganjali, M. and Sanjari, N. (2011). Conditional maximum likelihood and interval estimation for two Weibull populations under joint Type-II progressive censoring, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **40**(12), 2117-2135.

[3] Wang, B.X. (2012). Exact inference estimation for the scale family under general progressive Type-II censoring, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **41**(24), 4444-4452.

[۴] ترابی، حمزه؛ بافکری فدافن، سعیده؛ و نادب، حسین (۱۳۹۴). طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی و استنباط پیرامون پارامترهای دو جامعه وایبول تحت این طرح. *مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی*، دوره ۵، شماره ۱، صص ۳۷-۱۹.

[5] Asgharzadeh, A. and Kazemi, M. (2014). Stress-strength reliability of exponential distribution based on hybrid censored samples. *Proceedingof 12th the Iranian Statistical Conference*, 25-27 August, Razi University, Iran.

[6] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R., Raqab, M.Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples. *SORT*, **35**(2), 103-124.

[7] Asgharzadeh, A., Kazemi, M. and Kundu, D. (2017). Estimation of $P(X > Y)$ for Weibull distribution based on hybrid censored samples. *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, **8**(1), 489-498.

[8] Mirjalili, S.M., Torabi, H., Nadeb, H. and Bafekri, S.F. (2016). Stress-Strngth reliability of exponential distribution based on Type-I progressively hybrid censored samples, *Journal of Statistical Research of Iran,* **13**(1), 89-105.

[9] Saracoglu, B. Kinaci, I. and Kundu, D. (2012). On estimation of $P(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82**(5)**,** 729-744.

[10] Valiollahi, R., Asgharzadeh, A. and Raqab, M.Z. (2013). Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull distribution under progressive Type-II censoring, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **42**(24), 4476-4498.

[11] Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1994). *An Introduction to the Bootstrap,* New York: Chapman and Hall/CRC Press.

[12] Smith, R.L. and Naylor, J.C. (1987). A comparison of maximum likelihood and Bayesian estimators for the three-parameter Weibull distribution, *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics),* **36**, 358-369.

Inference for Stress-Strength Parameter of Two Weibull Populations Under General Joint Progressive Type-II Censoring Scheme

Hossain Nadeb, Saeedeh Bafekri Fadafen. and Hamzeh Torabi

Department of Statistics, Yazd University, Yazd , Iran.

Abstract

In this paper, inference for stress-strength parameter of two Weibull populations with same shape parameters under general join progressive Type-II censoring scheme is given. First, for the parameter, the maximum likelihood estimator and bootstrap and normal approximation confidence interval are presented. Using a simulation study, the maximum likelihood estimator and bootstrap and normal approximation confidence interval are evaluated. Finally, the proposed procedures, are performed for a real data set.

***Keywords*:** Asymptotic normality confidence interval, Bootstrap confidence interval, Coverage probability, General joint progressive Type-II censoring, Stress-strength parameter.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N01, 62N02.