

برآورد $R = P(X > Y)$ در توزیع نمایی، بر اساس روش‌های E-بیز و بیز سلسله مراتبی

شهرام یعقوب زاده شهرستانی^۱

گروه آمار، دانشگاه پیام نور صومعه‌سرا

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۵/۲۲

چکیده: گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطای برآوردگر پسین بیزی برآورد بیز می‌شود که در این صورت، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی^۲ می‌تواند جانشین‌های مناسبی برای برآورد بیز باشند. بنابراین در این مقاله، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع‌های نمایی با پارامترهای مختلف می‌باشند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R = P(X > Y)$ ، تحت تابع زیان مربع خطا به دست آورده می‌شود. سپس به کمک روش شبیه‌سازی مونت کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردهای پیشنهادی باهم و با برآورد بیز R مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: برآورد E-بیز، برآورد بیز سلسله مراتبی، توزیع نمایی، تابع زیان مربع خطا، شبیه‌سازی مونت کارلو.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲C۱۰، ۶۲F۱۲.

۱- مقدمه

برآورد پارامتر قابلیت اعتماد یا پارامتر تنش-مقاومت، یعنی $R = P(X > Y)$ که کارایی یک سیستم را نشان می‌دهد یکی از مسائل مهم استنباط آماری است که در علوم مختلفی مانند نظریه طول عمر، قابلیت اطمینان مکانیکی یک سیستم، در مفاهیم مهندسی مانند سازه‌ها، فرسودگی موتور موشک و فرسودگی سازه‌های هواپیما کاربرد دارد. در قابلیت اعتماد، پارامتر تنش-مقاومت، توصیف‌کننده طول عمر یک سیستم است وقتی که سیستم، مقاومت تصادفی X را در برابر تنش تصادفی Y به کار می‌برد. همچنین سیستم دچار اختلال شده و از کار می‌افتد،

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: yagoubzade@gmail.com

اگر و فقط اگر در هر زمان، تنش بتواند بر مقاومت سیستم غلبه کند یا به عبارت دیگر $X > Y$. نویسندگان بسیاری به برآورد پارامتر قابلیت اعتماد R ، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای یک نوع توزیع می‌باشند، پرداخته‌اند. برآورد R در توزیع نمایی دومتغیره توسط آواد و همکاران [۱]، در توزیع نرمال چند متغیره توسط گوپتا و گوپتا [۲]، در توزیع بور نوع ۱۲ توسط ركب و کاندو [۳]، در توزیع نمایی تعمیم‌یافته توسط کاندو و گوپتا [۴]، در توزیع نمایی سه پارامتری توسط ركب و همکاران [۵]، در توزیع نمایی تعمیم‌یافته بر مبنای نمونه‌های رکوردی توسط باکلیزی [۶]، در توزیع وایبول بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط اصغر زاده و همکاران [۷]، در توزیع نمایی بر مبنای نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط لیو و تسای [۸]، در توزیع لیندلی توسط ال-موتائیری و همکاران [۹] و در توزیع لیندلی توانی توسط گیتانی و همکاران [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت.

از دیرباز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری ارائه شده است. یکی از این روش‌ها، روش برآورد بیز مبتنی بر توزیع‌های پیشین است که انتخاب معقول آن‌ها روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر پسین بیزی دارد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث افزایش خطا و بزرگ شدن معیارهای مقایسه می‌شود. بنابراین، تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر و اعمال شرایطی خاص روی ابر پارامترهای توزیع پیشین، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. برآوردهای بیز تجربی^۱ و بیز سلسله مراتبی^۲ از این نوع هستند. توزیع پیشین بیز سلسله مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت [۱۱] معرفی شد و سپس توسط هان [۱۲] مورد بررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های E-بیز و بیز سلسله مراتبی معرفی شدند. اخیراً از روش‌های E-بیز و بیز سلسله مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برای برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط هان [۱۳-۱۴]، برای برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲، بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم توسط جاهین و اکاشا [۱۵] و برای برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط وانگ و همکاران [۱۶] و یوسف زاده [۱۷] مورد استفاده قرار گرفته شد.

برآورد R به روش‌های مختلف در توزیع‌های متفاوت محاسبه شد، اما تاکنون برآوردهای E -بیز و بیز سلسله مراتبی آن در هیچ توزیعی به دست آورده نشد. در این مقاله، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های نمایی با پارامترهای θ_1 و θ_2 می‌باشند، برآوردهای E -بیز و بیز سلسله مراتبی $(R = P(X > Y))$ ، تحت تابع زیان درجه دوم خطا به دست آورده می‌شود. همچنین در این مقاله، توزیع نمایی با پارامتر θ به ترتیب با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع

$$f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0 \quad (۱)$$

$$F(x; \theta) = 1 - e^{-\theta x}, x > 0, \theta > 0 \quad (۲)$$

در نظر گرفته شده و با نماد $E(\theta)$ نشان داده می‌شود. در این مقاله، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های $E(\theta_1)$ و $E(\theta_2)$ هستند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R = P(X > Y)$ ، تحت تابع زیان درجه دوم خطا یعنی $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ به ترتیب در بخش‌های دوم و سوم به دست آورده می‌شود. همچنین در این بخش‌ها فرض می‌شود θ_1 و θ_2 پارامترهای مستقل از هم هستند و دارای توزیع‌های پیشین به ترتیب زیر

$$\pi_1(\theta_1 | a_1, b_1) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \theta_1^{a_1-1} e^{-b_1 \theta_1}, \theta_1 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0 \quad (۳)$$

$$\pi_2(\theta_2 | a_2, b_2) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \theta_2^{a_2-1} e^{-b_2 \theta_2}, \theta_2 > 0, a_2 > 0, b_2 > 0 \quad (۴)$$

می‌باشند. با توجه به هان [۱۲]، در رابطه (۳)، a_1 و b_1 طوری در نظر گرفته می‌شود که نسبت $\pi_1(\theta_1 | a_1, b_1)$ به θ_1 کاهشی باشد بنابراین با توجه به رابطه

$$\frac{d \pi_1(\theta_1 | a_1, b_1)}{d \theta_1} = \frac{b_1^{a_1} \theta_1^{a_1-2} e^{-b_1 \theta_1}}{\Gamma(a_1)} ((a_1 - 1) - b_1 \theta_1)$$

باید $0 < a_1 \leq 1$ و $b_1 > 0$ باشد. برگر [۱۸] نشان داد که بزرگ شدن b_1 باعث می‌شود، کارایی برآوردگر بیز θ_1 کاهش یابد، بنابراین ابر پارامتر b_1 باید از بالا کران‌دار شده و به صورت $0 < b_1 < c_1$ که c_1 عددی ثابت است در نظر گرفته شود در نتیجه با توجه به هان [۱۴]، b_1

به صورت یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_1)$ یعنی $\pi_2(b_1) = \frac{1}{c_1}$ و $0 < b_1 < c_1$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به شرط $0 < a_1 \leq 1$ ، بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $a_1 = 1$ باشد که در این صورت رابطه (۳) به صورت

$$\pi_1(\theta_1 | b_1) = b_1 e^{-b_1 \theta_1}, \theta_1 > 0, b_1 > 0 \quad (۵)$$

تبدیل می‌شود. با استدلالی مشابه استدلال فوق درباره a_2 و b_2 در رابطه (۴)، توزیع $\pi_2(b_2)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c_2)$ که c_2 عددی ثابت است در نظر گرفته می‌شود و با انتخاب $a_2 = 1$ ، رابطه (۴) به صورت

$$\pi_2(\theta_2 | b_2) = b_2 e^{-b_2 \theta_2}, \theta_2 > 0, b_2 > 0 \quad (۶)$$

تبدیل می‌شود. در بخش چهارم با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردگرهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R باهم مقایسه می‌شوند. بخش پنجم هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲- برآورد E-بیز پارامتر R

فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta)$ و Y_1, Y_2, \dots, Y_m یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta_r)$ باشند که دو نمونه تصادفی مستقل از هم هستند، آنگاه با توجه به روابط (۵) و (۶) و تابع درست‌نمایی

$$L(\theta_1, \theta_r | Z) = \theta_1^n \theta_r^m e^{\left(-\theta_1 \sum_{i=1}^n x_i - \theta_r \sum_{j=1}^m y_j\right)} \quad (7)$$

توزیع پسین θ_1 و θ_r به شرط داده‌ها برابر است با:

$$\pi^*(\theta_1, \theta_r | Z) = \frac{(b_1 + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+1} (b_r + \sum_{j=1}^m y_j)^{m+1}}{n! m!} \theta_1^n \theta_r^m e^{-\theta_1 (b_1 + \sum_{i=1}^n x_i) - \theta_r (b_r + \sum_{j=1}^m y_j)} \quad (8)$$

که در آن $Z = (X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ است. بنابراین با توجه به رابطه (۸)، برآورد بیز $R = P(X > Y) = \frac{\theta_r}{\theta_1 + \theta_r}$ تحت تابع زیان درجه دوم خطا از رابطه

$$\hat{R}_B(b_1, b_r) = E_{\pi^*}(R | Z) = C \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\theta_r}{\theta_1 + \theta_r} \theta_1^n \theta_r^m e^{-\theta_1 (b_1 + \sum_{i=1}^n x_i) - \theta_r (b_r + \sum_{j=1}^m y_j)} d\theta_r d\theta_1 \quad (9)$$

به دست می‌آید که در آن $C = (n! m!)^{-1} (b_1 + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+1} (b_r + \sum_{j=1}^m y_j)^{m+1}$ است. به کمک

تغییر متغیر $\theta_1 + \theta_r = u$ و با فرض $C_1 = b_1 + \sum_{i=1}^n x_i$ داریم:

$$I = \int_0^\infty \frac{\theta_1^n}{\theta_1 + \theta_r} e^{-C_1 \theta_1} d\theta_1 = n! e^{C_1 \theta_r} \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{n-j} \theta_r^{n-j}}{j!(n-j)!} \int_{\theta_r}^\infty u^{j-1} e^{-C u} du$$

با توجه به رابطه $\frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_x^\infty t^{p-1} e^{-at} dt = e^{-ax} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{(ax)^j}{j!}$ (صفحه ۱۳۵، بتمن [۱۹])، I به صورت زیر به دست می‌آید.

$$I = n! \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^{n-j} \theta_1^{n+k-j} C_1^{k-j}}{k! j(n-j)!}$$

بنابراین با جایگذاری I در رابطه (۹) و با فرض $C_1 = b_1 + \sum_{j=1}^m y_j$ داریم:

$$\hat{R}_B(b_1, b_1) = \frac{1}{m!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^{n-j} \Gamma(m+n+k+\nu-j)}{k! j(n-j)!} \left(\frac{C_1}{C_1} \right)^{n+k+\nu-j} \quad (10)$$

با توجه به همان [۱۲] برآورد بیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱: اگر b_1 و b_1 ابر پارامترهایی در توزیع پیشین θ و $\pi(b_1, b_1)$ توزیع پیشین توأم $\hat{\theta}_{EB}(b_1, b_1)$ و $\hat{\theta}_{EB}(b_1, b_1)$ برآورد بیز θ باشند. آنگاه برآورد E-بیز پارامتر θ که با نماد $\hat{\theta}_{EB}$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{EB} &= E_{\pi(b_1, b_1)}(\hat{\theta}_B(b_1, b_1)) \\ &= \int \int \hat{\theta}_B(b_1, b_1) \pi(b_1, b_1) db_1 db_1 \quad b_1 \in \Lambda_1, b_1 \in \Lambda_1 \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۰) و تعریف ۱، برآورد E-بیز R ، تحت تابع زیان درجه دوم خطا برابر است با:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{EB} &= \int_0^{c_1} \int_0^{c_1} \hat{R}_B(b_1, b_1) \pi(b_1, b_1) db_1 db_1 \\ &= \frac{1}{m! c_1 c_1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^{n-j} \Gamma(m+n+k+\nu-j)}{k! j(n-j)!} \int_0^{c_1} \int_0^{c_1} \left(\frac{C_1}{C_1} \right)^{n+k+\nu-j} db_1 db_1 \quad (11) \\ &= \frac{1}{m! c_1 c_1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(-1)^{n-j} \Gamma(m+n+k+\nu-j)}{k! j(n-j)!} g(j, k) h(j, k) \end{aligned}$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} g(j, k) &= \frac{(c_1 + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+k+\nu-j} - (\sum_{i=1}^n x_i)^{n+k+\nu-j}}{n+k+\nu-j} \\ h(j, k) &= \frac{(\sum_{i=1}^m y_i)^{-(n+k-j)} - (c_1 + \sum_{i=1}^m y_i)^{-(n+k-j)}}{n+k-j} \end{aligned}$$

۳- برآورد بیز سلسله مراتبی R

در این بخش برآورد بیز سلسله مراتبی R ، تحت تابع زیان درجه دوم خطا به دست آورده می‌شود. با توجه به هان [۱۲] توزیع پیشین سلسله مراتبی به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲: فرض کنید λ یک ابر پارامتر در تابع چگالی احتمال پیشین θ یعنی $\pi(\theta|\lambda)$ و $\pi'(\lambda)$ ، تابع چگالی پیشین ابر پارامتر λ باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال پیشین سلسله مراتبی θ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\pi''(\theta) = \int_{\Lambda} \pi(\theta|\lambda)\pi'(\lambda)d\lambda, \quad \lambda \in \Lambda$$

بنابراین با توجه به روابط (۵) و (۶) و تعریف ۲، توزیع‌های پیشین سلسله مراتبی پارامترهای θ_1 و θ_r عبارت‌اند از:

$$\pi_{\Delta}(\theta_1) = \int_0^{c_1} \pi_1(\theta_1|b_1)\pi_r(b_1)db_1 = \frac{1-c_1\theta_1 e^{-c_1\theta_1} - e^{-c_1\theta_1}}{c_1\theta_1^r} \quad (12)$$

$$\pi_r(\theta_r) = \int_0^{c_r} \pi_r(\theta_r|b_r)\pi_r(b_r)db_r = \frac{1-c_r\theta_r e^{-c_r\theta_r} - e^{-c_r\theta_r}}{c_r\theta_r^r}$$

بنابراین با توجه به روابط (۷) و (۱۲)، تابع چگالی احتمال پسین سلسله مراتبی θ_1 و θ_r به شرط داده‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\pi^{**}(\theta_1, \theta_r | Z) = \frac{\theta_1^n \theta_r^m e^{-(n\bar{x}\theta_1 + m\bar{y}\theta_r)} S(\theta_1, \theta_r)}{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta_1^n \theta_r^m e^{-(n\bar{x}\theta_1 + m\bar{y}\theta_r)} S(\theta_1, \theta_r) d\theta_1 d\theta_r}$$

$$= \frac{\theta_1^n \theta_r^m e^{-(n\bar{x}\theta_1 + m\bar{y}\theta_r)} S(\theta_1, \theta_r)}{K_n K_m}$$

که در آن

$$S(\theta_1, \theta_r) = \frac{(1-c_1\theta_1 e^{-c_1\theta_1} - e^{-c_1\theta_1})(1-c_r\theta_r e^{-c_r\theta_r} - e^{-c_r\theta_r})}{c_1 c_r \theta_1^r \theta_r^r}$$

$$K_n = \frac{(n-2)!}{c_1} \left[\frac{1}{(n\bar{x})^{n-1}} - \frac{nc_1}{(C_1 + c_1)^n} - \frac{1}{(C_1 + c_1)^{n-1}} \right]$$

$$K_m = \frac{(m-2)!}{c_r} \left[\frac{1}{(m\bar{y})^{m-1}} - \frac{mc_r}{(C_r + c_r)^n} - \frac{1}{(C_r + c_r)^{m-1}} \right]$$

می‌باشند. بنابراین با توجه به $\pi^{**}(\theta_1, \theta_2 | Z)$ ، برآورد بیز سلسله مراتبی R ، تحت تابع زیان درجه دوم خطا که با نماد \hat{R}_{HB} نشان داده می‌شود به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\hat{R}_{HB} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2} \pi^{**}(\theta_1, \theta_2 | Z) d\theta_1 d\theta_2 \quad (13)$$

برای محاسبه \hat{R}_{HB} ابتدا انتگرال زیر به کمک تغییر متغیر $\theta_1 + \theta_2 = u$ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{c_1} \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \left[\theta_1^{n-\nu} e^{-n\theta_1 \bar{x}} - c_1 \theta_1^{n-1} e^{-c_1 \theta_1} - \theta_1^{n-\nu} e^{-c_1 \theta_1} \right] d\theta_1 \\ &= \frac{1}{c_1} e^{n\theta_1 \bar{x}} \sum_{j=0}^{n-\nu} (-1)^j \binom{n-\nu}{j} \theta_1^j \int_{\theta_1}^{\infty} u^{n-\nu-j} e^{-u \bar{x}} du - e^{\theta_1 c_1} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \theta_1^j \int_{\theta_1}^{\infty} u^{n-\nu-j} e^{-u c_1} du \\ &\quad - \frac{1}{c_1} e^{\theta_1 c_1} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \theta_1^j \int_{\theta_1}^{\infty} u^{n-\nu-j} e^{-u c_1} du \\ &= \frac{(n-\nu)!}{c_1} \sum_{j=0}^{n-\nu} \sum_{k=0}^{n-\nu-j} \frac{(-1)^j \theta_1^{j+k}}{j! k! (n-\nu-j)} \left[(n\bar{x})^{j+k+\nu-n} - C_{\nu}^{j+k+\nu-n} \right] \\ &\quad - (n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-\nu-j} \frac{(-1)^j \theta_1^{j+k} C_{\nu}^{j+k+\nu-n}}{j! k! (n-\nu-j)} \end{aligned}$$

به طوری که $C_{\nu} = c_1 + \sum_{i=1}^m X_i$ است. با توجه به I و بتمن [۱۹]، رابطه (۱۳) به صورت زیر نوشته و محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \hat{R}_{HB} &= \frac{1}{c_{\nu} K_n K_m} \int_0^{\infty} I \left[\theta_1^{m-\nu} e^{-\theta_1 \bar{y}} - c_1 \theta_1^{m-1} e^{-c_1 \theta_1} - \theta_1^{m-\nu} e^{-c_1 \theta_1} \right] d\theta_1 \\ &= \frac{1}{c_{\nu} K_n K_m} \left\{ \frac{(n-\nu)!}{c_1} \sum_{j=0}^{n-\nu} \sum_{k=0}^{n-\nu-j} \frac{(-1)^j \left[(n\bar{x})^{j+k+\nu-n} - C_{\nu}^{j+k+\nu-n} \right]}{j! k! (n-\nu-j)} K(j, k) \right. \\ &\quad \left. - (n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-\nu-j} \frac{(-1)^j C_{\nu}^{j+k+\nu-n}}{j! k! (n-\nu-j)} K(j, k) \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

به طوری که $C_{\tau} = c_{\tau} + \sum_{j=1}^m y_j$ و

$$K(j, k) = \frac{\Gamma(m+j+k-1)}{\bar{y}^{m+j+k-1}} - \frac{c_{\tau} \Gamma(m+j+k)}{C_{\tau}^{m+j+k}} - \frac{\Gamma(m+j+k-1)}{C_{\tau}^{m+j+k-1}}$$

می باشند.

۴- تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R با هم مقایسه می‌شوند.

۴-۱- مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش، در مرحله اول از توزیع $E(\theta_1)$ توسط رابطه $X = -\frac{1}{\theta_1} \log(1-U)$ به ازای $\theta_1 = 1/5$ و از توزیع $E(\theta_2)$ توسط رابطه $Y = -\frac{1}{\theta_2} \log(1-V)$ به ازای $\theta_2 = 2/5$ که U و V توزیع یکنواخت استاندارد دارند، نمونه‌های تصادفی با حجم‌های متفاوت تولید می‌شوند. در مرحله دوم به ازای $(c_1, c_2) = (2, 3), (4, 4)$ و به کمک توزیع‌های $\pi_{\tau}(b_1) = \frac{1}{c_1}, 0 < b_1 < c_1$ و $\pi_{\tau}(b_2) = \frac{1}{c_2}, 0 < b_2 < c_2$ به ترتیب b_1 و b_2 تولید می‌شوند. در مرحله سوم، به کمک روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۴)، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R به دست آورده می‌شوند. مراحل اول و سوم را ۱۰۰۰ بار تکرار نموده و میانگین اریبی برآوردهای اشاره شده R و میانگین مربع خطای آن‌ها به دست آورده می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است.

جدول (۱): میانگین اربیی برآوردگرهای R با میانگین مربع خطای آن‌ها (داخل پرانتز)، تحت تابع زیان درجه دوم خطا برای $(c_1, c_2) = (2, 3)$ و (n, m) ها و (b_1, b_2) های مختلف

\hat{R}_{HB}	\hat{R}_{EB}	\hat{R}_B	(b_1, b_2)	(n, m)
-۰/۴۱۹۱۸ (-۰/۱۲۲۸۵)	-۰/۳۴۰۱۶ (-۰/۳۳۸۶۶)	-۰/۴۲۷۹۴ (-۰/۳۸۹۱)	(۰/۱, ۰/۴)	(۲۰, ۶۰)
-۰/۳۰۸۰۳ (-۰/۱۴۷۰۹)	-۰/۲۳۴۶۸ (-۰/۳۷۳۸)	-۰/۳۵۸۸۹ (-۰/۴۵۰۹)	(۰/۵, ۱/۵)	
-۰/۰۶۱۵۸ (-۰/۱۷۳۷۵)	-۰/۰۹۷۸۶ (-۰/۳۱۰۹)	-۰/۲۲۰۲۹ (-۰/۴۷۰۸)	(۱/۵, ۳)	
-۰/۲۰۹۳۸ (-۰/۰۸۶۵)	-۰/۱۱۰۵۸ (-۰/۰۴۷۰۵)	-۰/۱۸۵۹۲ (-۰/۰۶۱۸۲)	(۰/۴, ۰/۵)	
۰/۲۷۰۰۵ (-۰/۰۷۷۹۶)	-۰/۰۳۵۸۳ (-۰/۰۳۶۷۰)	-۰/۱۱۶۲۶ (-۰/۰۵۷۴۴)	(۱/۵, ۱/۵)	
۰/۰۳۳۸۵ (-۰/۰۳۰۸۲)	۰/۰۱۴۹۴ (-۰/۰۳۷۳۱)	-۰/۰۳۵۰۲ (-۰/۰۵۷۲۸)	(۱/۵, ۱)	
۰/۳۵۹۳۳ (-۰/۰۱۴۹۸)	۰/۰۵۲۳۹ (-۰/۰۴۱۰۸)	۰/۰۲۶۶۱ (-۰/۰۵۷۹۵)	(۱, ۰/۵)	
۰/۳۶۶۷۵ (-۰/۰۰۹۳۸)	۰/۰۷۶۰۸ (-۰/۰۴۱۰۲)	۰/۰۶۱۶۱ (-۰/۰۵۵۸۴)	(۰/۷, ۰/۳)	
۰/۳۷۲۳۲ (-۰/۰۰۳۶۳)	۰/۱۱۴۳۳ (-۰/۰۳۸۵۹)	۰/۱۱۲۲۲ (-۰/۰۴۹۶۵)	(۰/۶, ۰/۲)	
۰/۳۷۲۳۱ (-۰/۰۰۱۸۶)	۰/۱۵۱۸۲ (-۰/۰۳۳۵۱)	۰/۱۶۰۹۰ (-۰/۰۴۳۱۶)	(۱/۳, ۰/۳)	
۰/۳۷۳۹۸ (-۰/۰۰۱۰۷)	۰/۱۷۱۸۶ (-۰/۰۳۰۸۹)	۰/۱۸۸۳۷ (-۰/۰۳۸۶۱)	(۲, ۰/۴)	
-۰/۵۲۵۶۹ (-۰/۰۵۶۷۱)	-۰/۳۵۹۵۱ (-۰/۰۲۹۸۰)	-۰/۴۲۴۸۸ (-۰/۰۳۰۳۷)	(۰/۱, ۰/۴)	(۴۰, ۸۰)
-۰/۴۷۲۸۹ (-۰/۰۷۵۶۳)	-۰/۲۸۰۳۷ (-۰/۰۳۱۶۸)	-۰/۳۶۸۰۲ (-۰/۰۳۶۴۰)	(۰/۵, ۱/۵)	
-۰/۴۷۲۸۹ (-۰/۰۷۵۶۳)	-۰/۲۸۰۳۷ (-۰/۰۳۱۶۸)	-۰/۳۶۸۰۲ (-۰/۰۳۶۴۰)	(۰/۵, ۱/۵)	
-۰/۲۷۴۶۳ (-۰/۱۲۴۳۳)	-۰/۱۶۸۶۳ (-۰/۰۲۸۹۴)	-۰/۳۵۵۹۹ (-۰/۰۳۹۳۸)	(۱/۵, ۳)	
۰/۰۷۹۳۵ (-۰/۱۲۴۵۵)	-۰/۱۳۷۰۹ (-۰/۰۳۸۶۹)	-۰/۱۸۴۱۶ (-۰/۰۴۸۳۹)	(۰/۴, ۰/۵)	
۰/۱۷۱۸۹ (-۰/۰۹۲۵۵)	-۰/۰۷۵۵۲ (-۰/۰۳۳۰۸)	-۰/۱۲۰۶۹ (-۰/۰۴۶۲۷)	(۱/۵, ۱/۵)	
۰/۳۰۱۲۰ (-۰/۰۴۰۸۸)	۰/۰۳۶۳۴ (-۰/۰۳۳۴۶)	۰/۰۳۵۱۹ (-۰/۰۴۳۳۹)	(۱/۵, ۱)	
۰/۳۶۰۸۴ (-۰/۰۰۹۸۲)	۰/۰۶۳۸۸ (-۰/۰۳۱۸۶)	۰/۰۶۹۸۵ (-۰/۰۳۹۶۷)	(۰/۷, ۰/۳)	
۰/۳۷۱۱۶ (-۰/۰۰۳۷۱)	۰/۱۰۶۱۴ (-۰/۰۳۰۲۹)	۰/۱۲۰۷۶ (-۰/۰۳۶۲۵)	(۰/۶, ۰/۲)	
۰/۳۷۲۰۶ (-۰/۰۰۲۵۰)	۰/۱۴۴۸۳ (-۰/۰۲۷۳۰)	۰/۱۶۹۵۴ (-۰/۰۳۲۱۹)	(۱/۳, ۰/۳)	
۰/۳۷۳۱۷ (-۰/۰۰۱۳۱)	۰/۱۶۶۹۲ (-۰/۰۲۴۵۳)	۰/۱۹۸۶۰ (-۰/۰۲۸۲۹)	(۲, ۰/۴)	
-۰/۵۹۵۷۹ (-۰/۰۱۸۹۴)	-۰/۳۷۹۰۱ (-۰/۰۲۸۶۱)	-۰/۴۲۱۸۹ (-۰/۰۳۰۶۵)	(۰/۱, ۰/۴)	(۵۰, ۵۰)
-۰/۵۸۱۷۵ (-۰/۰۲۴۲۱)	-۰/۳۱۴۶۳ (-۰/۰۲۹۸۲)	-۰/۳۶۷۱۲ (-۰/۰۳۵۳۹)	(۰/۵, ۱/۵)	
-۰/۴۹۵۲۳ (-۰/۰۶۵۸۹)	-۰/۲۱۹۶۱ (-۰/۰۲۹۵۸)	-۰/۳۵۹۴۶ (-۰/۰۴۰۹۱)	(۱/۵, ۳)	
-۰/۲۲۳۴۹ (-۰/۱۳۵۳۳)	-۰/۱۶۸۱۸ (-۰/۰۳۷۸۹)	-۰/۱۷۹۵۴ (-۰/۰۴۷۷۶)	(۰/۴, ۰/۵)	
-۰/۱۲۶۹۱ (-۰/۱۴۰۵۹)	-۰/۱۲۵۷۷ (-۰/۰۳۳۹۸)	-۰/۱۲۶۰۷ (-۰/۰۴۸۱۳)	(۱/۵, ۱/۵)	
۰/۱۳۷۸۳ (-۰/۱۰۴۳۷)	-۰/۰۵۵۰۴ (-۰/۰۳۴۷۳)	-۰/۰۳۰۳۳ (-۰/۰۴۶۴۸)	(۱/۵, ۱)	
۰/۲۶۵۵۹ (-۰/۰۵۹۷۶)	۰/۰۰۱۰۳ (-۰/۰۳۵۱۳)	۰/۰۳۶۷۶ (-۰/۰۴۵۵۹)	(۱, ۰/۵)	
۰/۳۲۰۷۳ (-۰/۰۳۶۳۶)	۰/۰۳۳۸۱ (-۰/۰۳۵۰۴)	۰/۰۷۲۲۸ (-۰/۰۴۱۸۳)	(۰/۷, ۰/۳)	
۰/۳۵۹۶۳ (-۰/۰۱۴۰۳)	۰/۰۷۸۴۹ (-۰/۰۳۳۱۵)	۰/۱۲۱۴۴ (-۰/۰۳۷۷۴)	(۰/۶, ۰/۲)	
۰/۳۶۳۰۷ (-۰/۰۰۸۶۲)	۰/۱۱۵۰۵ (-۰/۰۲۹۳۶)	۰/۱۶۹۲۳ (-۰/۰۳۲۲۹)	(۱/۳, ۰/۳)	
۰/۳۶۷۴۲ (-۰/۰۰۵۲۶)	۰/۱۳۳۶۴ (-۰/۰۲۶۲۳)	۰/۱۹۵۸۵ (-۰/۰۲۸۱۰)	(۲, ۰/۴)	
-۰/۶۱۲۵۱ (-۰/۰۶۹۶)	-۰/۳۹۳۹۲ (-۰/۰۲۵۸۵)	-۰/۴۲۱۴۶ (-۰/۰۳۷۳۹)	(۰/۱, ۰/۴)	(۹۰, ۶۰)
-۰/۶۰۵۹۳ (-۰/۰۰۹۸۲)	-۰/۳۲۸۷۷ (-۰/۰۲۵۹۶)	-۰/۳۶۷۸۹ (-۰/۰۳۱۱۸)	(۰/۵, ۱/۵)	
-۰/۵۶۷۵۲ (-۰/۰۲۸۳۳)	-۰/۲۶۱۸۶ (-۰/۰۲۶۰۷)	-۰/۲۷۵۷۷ (-۰/۰۳۵۳۶)	(۱/۵, ۳)	
-۰/۳۸۸۰۱ (-۰/۰۸۹۷۲)	-۰/۱۸۶۴۵ (-۰/۰۳۲۴۲)	-۰/۱۷۷۱۸ (-۰/۰۴۰۴۷)	(۰/۴, ۰/۵)	
-۰/۳۰۷۳۹ (-۰/۰۰۵۶۵)	-۰/۱۵۰۵۱ (-۰/۰۳۰۳۸)	-۰/۱۲۵۰۰ (-۰/۰۴۰۹۹)	(۱/۵, ۱/۵)	
-۰/۰۲۹۵۹ (-۰/۱۱۴۷۴)	-۰/۰۷۶۸۹ (-۰/۰۳۰۰۴)	-۰/۰۳۰۳۷ (-۰/۰۳۸۸۳)	(۱/۵, ۱)	
۰/۱۷۲۰۳ (-۰/۰۸۲۵۷)	-۰/۰۱۴۵۹ (-۰/۰۳۰۸۲)	۰/۰۳۹۰۴ (-۰/۰۳۷۱۴)	(۱, ۰/۵)	
۰/۰۲۷۲۵ (-۰/۰۵۱۸۱)	۰/۰۲۱۶۸ (-۰/۰۳۰۰۳)	۰/۰۷۵۷۱ (-۰/۰۳۴۶۶)	(۰/۷, ۰/۳)	
۰/۳۴۶۵۵ (-۰/۰۲۰۵۶)	۰/۰۶۷۷۰ (-۰/۰۲۸۵۷)	۰/۱۲۴۶۳ (-۰/۰۳۱۴۰)	(۰/۶, ۰/۲)	
۰/۳۵۱۰۱ (-۰/۰۱۳۷۹)	۰/۱۰۵۱۵ (-۰/۰۲۵۳۳)	۰/۱۷۱۴۱ (-۰/۰۲۶۷۶)	(۱/۳, ۰/۳)	
۰/۳۵۹۲۹ (-۰/۰۰۸۳۹)	۰/۱۲۵۱۷ (-۰/۰۲۲۹۹)	۰/۱۹۸۸۳ (-۰/۰۲۴۵۷)	(۲, ۰/۴)	
۰/۳۷۱۱۹ (-۰/۰۰۲۷۹)	۰/۱۶۵۷۹ (-۰/۰۲۱۳۸)	۰/۲۲۹۰۳ (-۰/۰۲۰۵۷)	(۱/۳, ۰/۲)	

جدول (۲): میانگین اریبی برآوردگرهای R با میانگین مربع خطای آن‌ها (داخل پرانتز) تحت تابع زیان درجه دوم برای $(c_1, c_2) = (4, 4)$ و (n, m) ها و (b_1, b_2) های مختلف

\hat{R}_{HB}	\hat{R}_{EB}	\hat{R}_B	(b_1, b_2)	(n, m)	
-۰.۴۷۳۸۹ (-۰.۸۱۱۴)	-۰.۲۱۷۶۵ (-۰.۲۶۴۱)	-۰.۳۵۳۳۷ (-۰.۳۲۰۲)	(۱.۴)	(۳۰، ۹۰)	
-۰.۰۸۱۲۹ (-۰.۱۴۵۱۵)	-۰.۰۹۴۸۰ (-۰.۲۵۴۹)	-۰.۲۰۸۰۸ (-۰.۳۷۷۴)	(۲.۴)		
-۰.۲۶۹۱۵ (-۰.۶۲۴۶)	-۰.۰۱۳۶۱ (-۰.۲۵۹۱)	-۰.۰۸۹۹۲ (-۰.۴۱۹۷)	(۳.۳)		
-۰.۳۳۹۴۱ (-۰.۲۴۶۷)	-۰.۲۴۴۹ (-۰.۲۸۶۷)	-۰.۰۲۶۲۲ (-۰.۴۵۵۳)	(۳.۲)		
-۰.۳۵۹۳۶ (-۰.۱۱۳۵)	-۰.۵۷۱۴ (-۰.۳۱۵۴)	-۰.۰۳۰۲۱ (-۰.۴۵۹۱)	(۲.۱)		
-۰.۳۶۵۸۷ (-۰.۰۶۴۵)	-۰.۸۹۰۵ (-۰.۳۰۰۹)	-۰.۰۸۰۴۹ (-۰.۴۳۲۵)	(۰.۵، ۰.۲)		
-۰.۳۷۰۳۲ (-۰.۰۱۷۹)	-۰.۰۹۸۶ (-۰.۲۷۲۵)	-۰.۱۰۴۵۳ (-۰.۳۹۰۱)	(۳.۱)		
-۰.۳۵۶۳۳ (-۰.۳۴۵۵)	-۰.۲۷۶۶۹ (-۰.۲۴۰۲)	-۰.۳۷۹۴۱ (-۰.۲۷۵۶)	(۱.۴)		(۵۰، ۱۰۰)
-۰.۰۷۴۳۶ (-۰.۱۱۳۱۲)	-۰.۰۹۳۲۴ (-۰.۲۵۱۴)	-۰.۲۰۵۹۶ (-۰.۲۵۱۹)	(۲.۴)		
-۰.۱۶۸۲۸ (-۰.۰۸۴۵۳)	-۰.۰۶۱۷۱ (-۰.۲۵۴۶)	-۰.۱۰۸۵۹ (-۰.۳۷۶۶)	(۳.۳)		
-۰.۳۰۰۵۷ (-۰.۲۴۴۴)	-۰.۰۰۹۹۸ (-۰.۲۷۰۴)	-۰.۰۳۱۳۰ (-۰.۳۹۰۶)	(۳.۲)		
-۰.۳۴۱۵۷ (-۰.۱۷۴۷)	-۰.۳۴۶۴ (-۰.۲۸۱۵)	-۰.۰۳۲۶۵ (-۰.۳۷۸۰)	(۲.۱)		
-۰.۳۵۶۱۷ (-۰.۱۰۳۵)	-۰.۰۷۶۰۳ (-۰.۲۹۹۴)	-۰.۰۸۴۵۳ (-۰.۳۶۰۹)	(۰.۵، ۰.۲)		
-۰.۳۶۴۷۱ (-۰.۰۵۶۳)	-۰.۰۹۰۴۷ (-۰.۲۴۹۲)	-۰.۱۰۷۳۴ (-۰.۳۲۵۲)	(۳.۱)		
-۰.۳۷۰۵۳ (-۰.۰۲۵۵)	-۰.۱۴۲۶۹ (-۰.۲۳۹۲)	-۰.۱۶۷۴۵ (-۰.۲۸۲۵)	(۱.۶، ۰.۴)		
-۰.۰۶۰۸۱۳ (-۰.۰۷۲۵)	-۰.۳۴۱۸۲ (-۰.۲۰۱۷)	-۰.۴۰۰۷۸ (-۰.۲۳۰۱)	(۱.۴)	(۱۰۰، ۱۰۰)	
-۰.۵۸۴۹۲ (-۰.۱۶۷۶)	-۰.۳۴۰۷۱ (-۰.۲۴۳۷)	-۰.۳۷۴۳۱ (-۰.۲۶۷۳)	(۰.۱، ۰.۳)		
-۰.۵۸۰۶۱ (-۰.۱۸۳۹)	-۰.۳۰۰۴۳ (-۰.۲۲۰۱)	-۰.۲۶۹۹۵ (-۰.۲۹۴۷)	(۱.۰۵، ۰.۳)		
-۰.۵۰۶۷۳ (-۰.۰۴۴۴۹)	-۰.۲۲۸۷۹ (-۰.۲۲۲۹)	-۰.۲۶۹۹۵ (-۰.۲۹۴۷)	(۲.۴)		
-۰.۱۲۶۴۸ (-۰.۱۰۰۹۴)	-۰.۱۲۵۳۳ (-۰.۲۳۰۹)	-۰.۱۲۵۴۷ (-۰.۳۱۹۷۷)	(۳.۳)		
-۰.۲۵۶۳۲ (-۰.۰۴۴۷۳)	-۰.۰۰۱۰۸ (-۰.۲۴۹۴)	-۰.۰۳۴۲۲ (-۰.۳۱۱۴)	(۲.۱)		
-۰.۳۰۸۵۹ (-۰.۲۶۵۴)	-۰.۵۴۷۹ (-۰.۲۵۲۴)	-۰.۰۸۸۰۸ (-۰.۲۸۷۳)	(۰.۵، ۰.۲)		
-۰.۳۶۰۰۶ (-۰.۱۶۱۸)	-۰.۵۸۰۰۴ (-۰.۲۱۹۰)	-۰.۱۰۹۱۳ (-۰.۲۶۱۳)	(۳.۱)		
-۰.۳۵۷۸۸ (-۰.۰۷۳۹)	-۰.۱۱۶۲۴ (-۰.۲۰۶۵)	-۰.۱۶۸۱۵ (-۰.۲۲۶۳)	(۲.۰، ۰.۵)		
-۰.۳۶۵۹۶ (-۰.۰۳۹۲)	-۰.۱۵۴۶۸ (-۰.۱۹۰۷)	-۰.۲۰۴۲۷ (-۰.۱۹۷۵)	(۱.۵، ۰.۳)		
-۰.۳۷۳۸۸ (-۰.۰۰۰۴۹)	-۰.۲۱۴۸۶ (-۰.۱۳۷۰)	-۰.۲۷۰۶۴ (-۰.۱۳۳۶)	(۴.۰، ۰.۴)		
-۰.۰۶۱۷۱۰ (-۰.۰۰۰۴۶۳)	-۰.۳۴۹۸۱ (-۰.۲۴۵۱)	-۰.۳۹۲۲۰ (-۰.۳۰۲۹)	(۱.۴)	(۷۵، ۵۰)	
-۰.۰۶۰۶۶۲ (-۰.۱۰۸۸)	-۰.۳۲۰۸۳ (-۰.۲۶۹۷)	-۰.۳۵۳۷۹ (-۰.۳۴۵۴)	(۱.۳)		
-۰.۰۶۰۳۹۳ (-۰.۱۲۴۸)	-۰.۳۱۳۷۵ (-۰.۲۷۳۲)	-۰.۳۴۴۸۹ (-۰.۳۵۳۶)	(۱.۰۵، ۰.۳)		
-۰.۰۵۶۸۹۹ (-۰.۰۳۱۲۷)	-۰.۲۵۰۵۷ (-۰.۲۶۰۵)	-۰.۳۶۳۳۳ (-۰.۳۷۲۱)	(۲.۴)		
-۰.۳۱۱۹۱ (-۰.۱۱۳۳۹)	-۰.۱۷۱۳۴ (-۰.۲۳۳۵)	-۰.۱۴۴۱۹ (-۰.۳۵۶۲)	(۴.۴)		
-۰.۱۳۶۴۱ (-۰.۰۹۷۳۹)	-۰.۰۷۵۰۹ (-۰.۲۶۳۷)	-۰.۰۰۹۷۹ (-۰.۳۶۵۹)	(۴.۲)		
-۰.۲۳۲۱۷ (-۰.۰۶۶۱۵)	-۰.۳۵۹۷ (-۰.۳۲۹۶)	-۰.۰۸۹۴۱ (-۰.۳۷۳۷)	(۰.۵، ۰.۲)		
-۰.۳۱۱۹۱ (-۰.۱۱۳۳۹)	-۰.۱۷۱۳۴ (-۰.۲۳۳۵)	-۰.۱۴۴۱۹ (-۰.۳۵۶۲)	(۳.۱)		
-۰.۳۳۴۸۹ (-۰.۰۲۱۴۲)	-۰.۰۴۰۵۷ (-۰.۲۴۴۹)	-۰.۱۲۸۸۵ (-۰.۲۸۶۵)	(۴.۱)		
-۰.۳۵۳۰۴ (-۰.۱۲۴۴)	-۰.۱۱۹۹۹ (-۰.۲۵۱۴)	-۰.۱۹۷۰۵ (-۰.۲۵۸۷)	(۲.۰، ۰.۴)		
-۰.۳۷۳۲۱ (-۰.۰۰۱۶۴)	-۰.۱۷۷۴۹ (-۰.۱۸۶۵)	-۰.۲۵۸۱۵ (-۰.۱۶۵۴)	(۴.۰، ۰.۴)		
-۰.۰۶۲۰۶۶ (-۰.۰۰۲۳۹)	-۰.۳۷۲۳۵ (-۰.۲۲۶۱)	-۰.۳۹۹۵۱ (-۰.۲۸۵۴)	(۱.۴)	(۱۰۰، ۵۰)	
-۰.۰۶۱۶۶۸ (-۰.۰۰۵۷۸)	-۰.۳۴۰۵۲ (-۰.۲۵۲۰)	-۰.۳۵۷۳۹ (-۰.۳۲۸۹)	(۱.۳)		
-۰.۰۶۱۳۳۲ (-۰.۰۰۶۴۵)	-۰.۳۳۴۲۷ (-۰.۲۵۱۲)	-۰.۳۴۹۳۰ (-۰.۳۳۰۷)	(۱.۰۵، ۰.۳)		
-۰.۰۵۹۱۹۸ (-۰.۱۷۹۸)	-۰.۲۷۷۳۶ (-۰.۲۵۰۴)	-۰.۲۷۱۷۰ (-۰.۳۶۱۱)	(۲.۴)		
-۰.۰۴۱۹۶۱ (-۰.۰۸۳۱۸)	-۰.۱۹۹۹۹ (-۰.۲۲۱۲)	-۰.۱۵۴۵۰ (-۰.۳۳۷۷)	(۴.۴)		
-۰.۱۷۳۲۶ (-۰.۱۲۳۷۹)	-۰.۱۲۳۱۹ (-۰.۲۷۲۲)	-۰.۰۵۳۰۹ (-۰.۳۸۱۵)	(۳.۲)		
-۰.۰۲۵۸۸ (-۰.۱۱۲۲۴)	-۰.۰۹۴۵۴ (-۰.۲۴۷۵)	-۰.۰۱۰۷۹ (-۰.۳۴۰۱)	(۴.۲)		
-۰.۱۵۳۳۶ (-۰.۰۸۵۳۲)	-۰.۰۲۶۳۸ (-۰.۳۱۱۵)	-۰.۰۹۰۵۷ (-۰.۳۴۷۹)	(۰.۵، ۰.۲)		
-۰.۲۳۰۱۲ (-۰.۰۶۵۴۱)	-۰.۰۶۶۲۶ (-۰.۳۱۰۹)	-۰.۱۲۵۹۴ (-۰.۳۳۱۶)	(۰.۳، ۰.۱)		
-۰.۲۷۵۳۵ (-۰.۰۴۷۶۱)	-۰.۰۸۱۶۲ (-۰.۲۸۷۲)	-۰.۱۵۲۳۴ (-۰.۳۰۳۲)	(۰.۷، ۰.۲)		
-۰.۳۰۶۶۹ (-۰.۰۳۴۵۷)	-۰.۰۲۶۸۱ (-۰.۲۳۴۴)	-۰.۱۲۹۵۲ (-۰.۲۶۸۷)	(۴.۱)		
-۰.۳۲۴۰۷ (-۰.۰۲۵۱۵)	-۰.۱۱۸۲۱ (-۰.۲۵۴۷)	-۰.۱۹۱۳۴ (-۰.۲۵۵۴)	(۰.۹، ۰.۲)		
-۰.۳۳۸۰۴ (-۰.۰۱۹۲۱)	-۰.۱۱۱۵۲ (-۰.۲۳۷۹)	-۰.۱۹۸۷۹ (-۰.۲۳۹۳)	(۲.۰، ۰.۴)		

نتایج شبیه‌سازی ارائه شده در جدول‌های ۱ و ۲، درباره برآوردهای بیز سلسله مراتبی، E-بیز و بیز R به صورت زیر است:

الف) در حالت $n/m < 1$ ، وقتی که $b_1/b_2 < 1/5$ باشد، کارایی برآورد E-بیز از کارایی برآوردهای بیز و بیز سلسله مراتبی بهتر است، اما در حالت $b_1/b_2 \geq 1/5$ ، کارایی برآورد بیز سلسله مراتبی از کارایی برآوردهای E-بیز و بیز بهتر می‌باشد.

ب) اگر $n/m < 1/5$ باشد، آنگاه در حالت‌های $b_1/b_2 < 0/5$ و $b_1/b_2 \geq 3$ ، برآورد بیز سلسله مراتبی از سایر برآوردها بهتر می‌باشد، اما در حالت $0/5 \leq b_1/b_2 < 3$ ، برآورد E-بیز از سایر برآوردها بهتر می‌باشد.

ج) اگر $1/5 \leq n/m < 2$ باشد، آنگاه در حالت $b_1/b_2 < 3$ ، برآورد E-بیز از سایر برآوردها بهتر می‌باشد، اما در حالت $b_1/b_2 \geq 3$ ، برآورد بیز سلسله مراتبی از برآوردهای E-بیز و بیز، بهتر می‌باشد.

د) وقتی که $n/m \geq 2$ می‌باشد، آنگاه در حالت‌های $b_1/b_2 < 1$ و $b_1/b_2 \geq 4/5$ ، برآورد بیز سلسله مراتبی از سایر برآوردها، بهتر می‌باشد، اما در حالت $1 \leq b_1/b_2 < 4/5$ ، برآورد E-بیز از سایر برآوردها بهتر می‌باشد.

و) به طور کلی هرچقدر نسبت b_1/b_2 در بازه $(2/5, \infty)$ بزرگ‌تر شود، آنگاه میانگین مربع خطای همه برآوردها کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار b_1/b_2 در بازه $(4/5, \infty)$ ، برآورد بیز سلسله مراتبی از برآوردهای E-بیز و بیز در هر حالت، کاراتر می‌شود. همچنین همواره برآوردهای پیشنهادی از برآورد بیز کاراترند.

۴-۲- داده‌های واقعی

در این زیر بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی، برای تحلیل برآوردهای R که در بخش سوم به دست آورده شده است، استفاده می‌شود. این داده‌ها که از لاولس [۲۱] گرفته شده است، بیان‌کننده زمان‌های شکست ۲۰ نمونه فولادی می‌باشد که تحت فشار بار الکتریکی، ۱۴ نوع میدان الکتریکی قرار گرفته است. در این مقاله از داده‌های مربوط به فشار بارهای الکتریکی ۳۵ کولنی (مجموعه داده‌های اول) و ۳۵/۵ کولنی (مجموعه داده‌های دوم) استفاده شده که در جدول ۳ آورده شده است. اصغرزاده و همکاران [۲۲] از این مجموعه داده‌ها استفاده کردند. برآورد

ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر توزیع نمایی و مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف به همراه p -مقدار مربوطه‌اش برای دو مجموعه داده‌های در نظر گرفته‌شده در جدول ۴ آورده شده است. نتایج بیان‌کننده آن است که توزیع نمایی به‌خوبی به این دو مجموعه داده‌ها برازش می‌شود. در این بخش، برای مقایسه برآوردهای بی‌بیز، E-بی‌بیز و بی‌بیز سلسله مراتبی R از تابع چگالی پسین آن استفاده می‌شود. بنابراین با توجه به رابطه (۸)، توزیع‌های پسین θ_1 و θ_2 به ترتیب $Gamma(n+1, \sum_{i=1}^n X_i)$ و $Gamma(m+1, \sum_{j=1}^m y_j)$ می‌شوند، در نتیجه، توزیع پسین R به‌صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$f_R(r) = C\Gamma(n+m+2) \frac{r^m(1-r)^n}{[C_1(1-r) + C_2r]^{n+m+2}}, \quad 0 < r < 1$$

که C_1 ، C_2 و C قبلاً در بخش ۲ داده‌شده‌اند.

جدول (۳): مجموعه داده‌های اول و دوم

۲۶۳	۳۰۵	۲۸۰	۱۱۵	۵۶۸	۱۲۹	۲۷۱	۱۷۸	۱۶۹	۲۳۰	مجموعه داده‌های اول
۲۸۱	۱۴۳	۴۳۱	۳۴۲	۲۱۸	۴۹۳	۱۷۷	۷۲۴	۲۸۵	۱۱۰۱	
۲۲۷	۲۶۱	۲۸۶	۱۶۸	۴۴۲	۵۵۹	۸۵۲	۱۲۵	۱۷۳	۱۵۶	مجموعه داده‌های دوم
۷۰۲	۳۶۵	۲۰۲	۱۱۲	۲۴۷	۳۰۹	۱۳۳	۱۶۶	۲۵۳	۲۸۵	

با در نظر گرفتن n و m به ترتیب به‌عنوان تعداد داده‌های مجموعه داده‌های اول و دوم، فرض می‌کنیم $c_1 = 2$ ، $c_2 = 1$ باشد. به‌طور کلی برای تعیین c_1 و c_2 از روش مشخصی استفاده نمی‌شود، بلکه مانند برخی از نویسندگان مانند هان [۱۳-۱۴]، جاهین و اکاشا [۱۵] و یوسف‌زاده [۱۷] مقدار یا مقادیری برای ثابت c_i ها در نظر گرفته می‌شود. برای اطلاعات بیشتر درباره ثابت c_i ها به‌ویژه به هان [۱۳] و جاهین و اکاشا [۱۵] مراجعه شود. چون باید $0 < b_1 < c_1$ و $0 < b_2 < c_2$ باشند، سه مقدار $(0/1, 0/4)$ ، $(1/5, 1)$ و $(2, 0/4)$ برای (b_1, b_2) در نظر گرفته می‌شود. سپس به کمک مجموعه داده‌های اول و دوم، مقادیر برآوردهای بی‌بیز، E-بی‌بیز و بی‌بیز سلسله مراتبی R ، مقدار آریبی برآوردها و میانگین مربع خطای آن‌ها دست آورده می‌شود که نتایج در جدول ۵ آورده شده است.

جدول (۴): برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر توزیع نمایی و آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با p -مقدار مربوطه برای مجموعه‌های اول و دوم

مجموعه داده‌ها	آورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر کولموگوروف-اسمیرنوف	آماره آزمون p -مقدار
اول	۰/۴۰۷۹۴۱	۰/۱۳۶۶
دوم	۰/۳۲۶۸۷۲	۰/۰۷۴۵

در این زیر بخش، می‌دانیم $\frac{n}{m} = 1$. با توجه به جدول ۵، نتیجه می‌گیریم وقتی که $(b_1, b_2) = (0/1, 0/4)$ می‌باشد، برآورد بیز سلسله مراتبی و در حالت‌های $(b_1, b_2) = (1/5, 1)$ و $(b_1, b_2) = (2, 0/4)$ به ترتیب برآوردهای E-بیز و برآورد بیز سلسله مراتبی از سایر برآوردها بهتر است که منطبق با نتایج شبیه‌سازی در قسمت (ب) است.

جدول (۵): مقادیر برآورد R ، مقدار اریبی و میانگین مربع خطای آن‌ها برای مجموعه داده‌های اول و دوم

(b_1, b_2)	روش برآورد	برآورد R	اریبی	میانگین مربع خط
$(0/1, 0/4)$	برآورد E-بیز	۰/۴۶۶۹۴۸۳	-۰/۰۰۱۸۴۹۴	۰/۰۰۱۷۴۶۱
	برآورد بیز سلسله مراتبی	۰/۵۹۷۵۵۳۳	-۰/۰۰۱۴۲۰۷	۰/۰۰۰۰۰۴۱
	برآورد بیز	۰/۴۷۰۷۰۸۱	-۰/۰۰۱۸۶۴۳	۰/۰۰۱۷۷۴۳
$(1/5, 1)$	برآورد E-بیز	۰/۴۷۰۶۸۵۱	-۰/۰۰۱۸۶۴۲	۰/۰۰۰۰۰۴۹
	برآورد بیز سلسله مراتبی	۰/۳۸۵۴۵۶۸	-۰/۰۰۱۵۱۱۶	۰/۰۰۱۱۷۸۹
	برآورد بیز	۰/۴۶۶۹۲۲۵	-۰/۰۰۱۸۴۹۳	۰/۰۰۰۰۰۵۱
$(2, 0/4)$	برآورد E-بیز	۰/۴۶۶۸۷۹۵	-۰/۰۰۱۸۴۹۱	۰/۰۰۰۰۰۵۰۱۹
	برآورد بیزی سلسله مراتبی	۰/۳۹۱۱۸۰۶	-۰/۰۰۱۲۹۳	۰/۰۰۰۰۰۰۷۸
	برآورد بیز	۰/۴۷۰۶۴۷۱	-۰/۰۰۱۸۶۴۱	۰/۰۰۰۰۰۵۰۷۵

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع‌های نمایی با پارامترهای به ترتیب θ_1 و θ_2 می‌باشند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی $R = P(X > Y)$ ، تحت تابع زیان مربع خطا به دست آورده شد. سپس به کمک روش شبیه‌سازی مونت کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، این برآوردها باهم و با برآورد بیز R مقایسه شدند و نتیجه گرفته شد که

برآوردهای بیز سلسله مراتبی و E-بیز، همواره کاراتر از برآورد بیز هستند، اما کارایی برآوردهای پیشنهادی به نسبت ابرپارامترهای توزیع پیشین بستگی دارد.

تشکر و قدردانی

نویسنده مقاله نهایت تشکر را از سردبیر و داوران محترم مجله در ارزیابی و پیشنهادهای ارزشمندشان برای بهتر شدن مقاله دارد.

منابع

- [1] Awad, A. M., Azzam, M. M. and Hamdan, A. M. (1981). Some inference results on $P(X>Y)$ in the bivariate exponential model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **10**, 2515-2525.
- [2] Gupta, R. D. and Gupta, R. C. (1990). Estimation of $P(aX > bY)$ in the Multivariate normal case, *Statistics*, **1**, 91-97.
- [3] Raqab, M. Z. and Kundu, D. (2005). Coparsion of different estimators $P(X>Y)$ for a scaled Burr type XII distribution, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, **34**(2), 465-483.
- [4] Kundu, D. and Gupta, R. D. (2005). Estimation of $P(X>Y)$ for the generalized exponential distribution, *Metrika*, **61**, 291-308.
- [5] Raqab, M. Z., Madi, T. and Kundu, D. (2008). Estimation of $P(X>Y)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**(2), 2854-2865.
- [6] Baklizi, A. (2008). Likelihood and Bayesian estimation of $P(X>Y)$ using lower record values from the generalized exponential distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3468-3473.
- [7] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples, *SORT*, **35**(2), 103-124.
- [8] Lio, Y. L. and Tsai, T. R. (2012). Estimation of $\delta = p(X > Y)$ for Burr XII distribution based on the progressivey first failure-censored samples, *Journal of Applied Statistics*, **39**(2), 465-483.
- [9] Al-Mutairi, D. K., Gitany, M. E. and Kundu, D. (2013). Inferences on Stress-strength reliability from Lindley distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**(8), 1443-1463.
- [10] Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Aboukhamseen, S. M. (2015). Estimation of the reliability of a Stress-strength system from power indley distributions, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **44**, 118-136.

- [11] Lindley, D.V. and Smith, A.F. (1972), Bayes estimation for the linear model, *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1–41..
- [12] Han, M. (1997), The structure of hierarchical prior distribution and its applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6** (3), 31–40.
- [13] Han, M. (2009), E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33**(4), 1915-1922.
- [14] Han, M. (2011), E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.
- [15] Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730–4737.
- [16] Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012). E Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282 – 289.
- [17] Yousefzadeh, F. (2017). E-Bayesian and Hierarchical Bayesian estimations for the System reliability parameter based on asymmetric loss function, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46** (1), 1-8.
- [18] Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.
- [19] Bateman, H. (1953). *Higer Transcendental Functions*, Vol. II. Hograw-Hill, New York.
- [20] Han, M. (2017). E-Bayesian and Hierarchical Bayesian estimations for the System reliability parameter, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46** (4), 1606-1620.
- [21] Lawless, J. F. (2003). *Statistical models and methods for lifetime data*, 2nd edition, Hoboken, John Wiley and Sons.
- [22] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and M. Z. Raqab. (2017). Estimation of $\Pr(Y < X)$ for the two-parameter generalized exponential records, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **46** (1), 379-394.

Estimate $R=P(X>Y)$ in Exponential Ddistribution, Based on E-Bayesian and Hierarchical Bayesian Methods

Shahram yagoubzade Shahrestani

Department of Statistics, Payame Noor University, Soomehsara, Iran

Abstract

Sometimes the extent of the parameter domain changes over the space of the parameter, increases the risk of posterior Bayesian. In this case, the empirical and hierarchical estimates can be a good substitute for Bayesian estimation. In this study, when X and Y are two independent exponential distributions with different parameters, were estimated the E-Bayesian and hierarchical Bayesian for the under squared error loss function. This suggested methods, was compared with each other and with the Bayesian estimator using the Monte Carlo simulation and two set data.

Keywords: E-Bayesian Estimation, Hierarchical Bayesian Estimation, Exponential Distribution, Squared Error Loss Function, Reliability.

Mathematics Subject Classification (2010): 62C10, 62F12.